

16212

ХТМУ

П. С. КАРТАЛОВ

**СБОРНИК
С РЕШЕНИ ЗАДАЧИ
ПО МОЛЕКУЛНА ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА**

часть 1

ПЛОВДИВ, 1994



151/995

98

П. С. КАРТАЛОВ

**СБОРНИК С РЕШЕНИ ЗАДАЧИ
ПО МОЛЕКУЛНА ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

ПЪРВА ЧАСТ

ПРОВЕРЕНО
2016

ПЛОВДИВ, 1994

539 1(026)

ВОД. ПИТ. С. П.

16212

ПОМОЩЬ В РАБОТЕ
С ПУКЛИКАЦИЯМИ

1994

БИБЛИОТЕКА
НА С. П.

151/995

© П. С. Карталов, 1994
ISBN 954-423-062-9 (ч. I)

ПРЕДГОВОР

Предлаганият сборник с решени задачи по Молекулна физика и термодинамика има за основна задача да подпомогне студентите при задълбоченото усвояване на програмния материал. В него са дадени типови задачи по различните раздели от молекулната физика и термодинамика, като е показана съответната неразривна връзка между тях. Към всеки раздел, първоначално е дадена кратка теория с основните зависимости, а след това са дадени подобрени задачи, за определяне на числените стойности на физичните характеристики. Към някои задачи, допълнително са пресметнати стойностите на някои физически характеристики, което не се изисква от условието на задачата. Но това дава свобода на студента, да прояви творчество към всеки един конкретен случай. Развитието на творческите способности на студентите ще допренесе за още по-задълбоченото осмисляне на физическия механизъм на процесите и явленията във физическия свят.

Всички препоръки и критични бележки към сборника, автора ще приеме с благодарност.

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

"ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"

КАТЕДРА "ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ФИЗИКА"

ДОЦЕНТ КФН ПАСКАЛ СПИРОВ КАРТАЛОВ

РАЗДЕЛ I - МОЛЕКУЛНА ФИЗИКА
ГЛАВА I. ЗАКОНИ И ОСНОВНИ ЗАВИСИМОСТИ ЗА ИДЕАЛНИТЕ
ГАЗОВЕ

1. При изотермични процеси - $T = \text{const}$.

Закон на Бойл-Мариот $PV = \text{const}$ при $M = \text{const}$ (изома-
сов процес) и $T = \text{const}$. Произведението (PV) има измерение
на джаули (J) и характеризира вътрешната енергия $U = PV$
на газа. Следователно, законът на Бойл-Мариот гласи, че "при изо-
термичните процеси на идеални газове, тяхната вътрешна енергия
не се изменя"

2. При изобарни процеси ($P = \text{const}$)

Закон на Гей-Люсак $V = V_0 (1 + \beta_V t)$ при ($P = \text{const}$
и $M = \text{const}$), където V и V_0 са обемите на газа при темпе-
ратури t и $t_0 = 0^\circ\text{C}$, а (β_V) е коефициента на топлинно обем-
но разширяване ($\beta_V = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$).

3. При изохорните процеси ($V = \text{const}$)

Закон на Шарл $P = P_0 (1 + \beta_P t)$ при ($V = \text{const}$
и $M = \text{const}$), където P и P_0 са наляганията на газа при
температури t и $t_0 = 0^\circ\text{C}$, като (β_P) е температурния ко-
ефициент на налягането ($\beta_P = \beta_V = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$).

4. Уравнение на състоянието на идеален газ. Уравнение
на Клапейрон-Менделеев.

$PV = \frac{M}{\mu} R_T T$, където (M) е молната маса на газа, а
 $R_T = 8315 \text{ J/kmol}\cdot\text{K}$ е универсалната газова константа.
Отношението $\frac{M}{\mu} = n\mu$ и дава броя на молекулите идеален газ,
участващи в съответния процес.

5. Закон на Авогадро - при нормални условия (температу-
ра $T_0 = 0^\circ\text{C} = 273,15^\circ\text{K}$ и налягане $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) всички

газове, взети с маса $M = 1 \text{ кмол}$, притежават един и същ моларен обем равен на $(V_M)_0 = 22,41 \text{ м}^3$.

6. Закон на Далтон - налягането на една газова смес ($P_{см.}$) е равно на сумата от парциалните налягания (P_i)_n на всички компоненти в сместта $P_{см.} = \sum_{i=1}^n (P_i)_n$. Под парциално налягане на дадена газова компонента в сместта се разбира това налягане, което тя би осъществила, ако сама заема целия обем на сместа ($V_{см.}$). Законът е валиден при изотермично смесване на газови компоненти ($T = const$) и получаване на съответната газова смес.

7. Ефективна молна маса на газова смес от n -компоненти

$$\mu_{эф.} = \left[\sum_{i=1}^n m_i \right] / \left[\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\mu_i} \right] = \frac{m_{см.}}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\mu_i}}$$

Тук (m_i) е масата на i -компонента, а (μ_i) е молната маса на i -компонента. Тогава $\frac{m_i}{\mu_i} = (n\mu)_i$ е броя на молекулите на i -компонента. Можем да представим ($\mu_{эф.}$) и във вида:

$$\mu_{эф.} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i/m_{см.}}{\mu_i} \right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{\mu_i} \right)}$$

където $a_i = m_i/m_{см.}$ е концентрацията (масова) на i -компонента в n -компонентната газова смес. Можем, като пример, да пресметнем ($\mu_{эф.}$) на въздуха, който е газова смес от следните газови компоненти: азот ($\mu_1 = 28,016 \text{ кг/кмол}$ и $a_1 = 0,781$); кислород ($\mu_2 = 32,00 \text{ кг/кмол}$ и $a_2 = 0,21$); аргон ($\mu_3 = 80,06 \text{ кг/кмол}$ и $a_3 = 0,009$) и други газови компоненти. Тогава

$$(\mu_{эф.})_3 = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{\mu_i} \right]^{-1} = \frac{1}{0,3455} = 28,942 \approx 29 \text{ кг/кмол.}$$

8. При движение на Браунови частици във вискозен флуид с коефициент на съпротивление (K_c), за време (Δt).

$$\overline{\Delta X^2} \approx \frac{2k_B T}{K_c} (\Delta t)$$

Частичката се е преместила на разстояние (ΔX). Тук

(формула на Ланжвен) (k_B) е болцмановата константа $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, а (T) е абсолютната температура на вискозния флуид.

Ако движението на Брауновата частица с радиус (r_B) и скорост (V_B) се осъществява в неограничен по обем вискозен флуид със съпротивителна сила на Стокс от вида $F_c = 6\pi\eta r_B V_B$, където $\pi = 3,14$, а (η) е динамичния вискозитет на флуида, тогава $F_c = K_c V_B$ и $K_c = 6\pi\eta r_B$. Заместваме (K_c) във формулата за $\overline{\Delta X^2}$ и получаваме, че

$$\overline{\Delta X^2} = \frac{2k_B T}{6\pi\eta r_B} (\Delta t) = \frac{k_B T}{3\pi\eta r_B} (\Delta t) = 2D_B (\Delta t)$$

при $D_B = k_B T (6\pi\eta r_B)^{-1}$, като (D_B) е коефициента на дифузия на Брауновата частица във вискозния флуид.

9. Разпределение на молекулите по кинетичната им енергия (E_k).

$$\frac{(\Delta N)_i}{N} = \left\{ \exp\left[-\frac{(E_k)_i}{k_B T}\right] \right\} \cdot \left\{ \sum_i \exp\left[-\frac{(E_k)_i}{k_B T}\right] \right\}^{-1}$$

където: (N) е общия брой молекули във газовата система, а (ΔN) _{i} е броя на молекулите, които притежават кинетична енергия в интервала (i) от $[(E_k)_i ; (E_k)_i + \Delta(E_k)_i]$. Следователно $\frac{(\Delta N)_i}{N} = W$ и представлява вероятността да съществуват молекули, които да притежават кинетична енергия (E_k) със стойност в i - енергиен интервал с ширина $\Delta(E_k)_i$.

10. Разпределение на молекулите по компонентите на

скоростта

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \quad \text{или} \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m V_x^2 + \frac{1}{2} m V_y^2 + \frac{1}{2} m V_z^2 =$$

$$= (E_k)_x + (E_k)_y + (E_k)_z.$$

Плътноста на вероятността $f(V_x)$ е

$$f(V_x) = \frac{dN}{N \cdot dV_x} = \frac{\exp\left(-\frac{mV_x^2}{2k_B T}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mV_x^2}{2k_B T}\right) dV_x} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mV_x^2}{2k_B T}\right)$$

$$\overline{V_x^2} = \frac{k_B T}{m} \quad \text{и} \quad (V_x)_{\text{кр. кв.}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{R T}{\mu}}$$

$$(V_x)_{\text{ср. ар.}} = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} = \sqrt{\frac{R T}{25\pi \mu}}$$

Тук $(V_x)_{\text{кр. кв.}}$ и $(V_x)_{\text{ср. ар.}}$ са средноквадратичната и средноаритметичната стойност на V_x - компонентата на скоростта (\vec{V}) .

11. Разпределение на молекулите по големината на

скоростта (V).

Плътноста на вероятността $f(V)$ е

$$f(V) = \frac{dN}{N dV} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{2k_B T}\right)$$

$$V_{\text{н.в.}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{2R T}{\mu}}; \quad V_{\text{ср. ар.}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi \cdot m}} = \sqrt{\frac{2,6 R T}{\mu}}$$

$$V_{\text{ср. ар.}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3R T}{\mu}}$$

Тук ($V_{н.в}$) е най-вероятната скорост на молекулите, а (m) е масата на една молекула.

Ако приложим принципа на неопределеност на Хайзенберг за молекулна газова система с определен обем (паралелопипеден) със страни (x, y, z), тогава $V = xyz$ и ако в него се намира само една молекула, тогава условието от принципа е

$$x \cdot p_x \gg h_n ; y \cdot p_y \gg h_n ; z \cdot p_z \gg h_n$$

$$(xyz)(p_x p_y p_z) \gg h_n^3$$

Тук (p_x, p_y, p_z) са компонентите на импулса ($|P|$) на молекулата $P = m\vec{v}$. Понеже ($xyz = V$) и $P^3 = p_x \cdot p_y \cdot p_z$ тогава $V(P)^3 \gg h_n^3$.

Но $V = \frac{1}{n}$, където (n) е броя на молекулите в единица обем и тогава $(\frac{1}{n})(P)^3 \gg h_n^3$ или $n(\frac{h_n}{P})^3 \ll 1$.

Тук (h_n) е константата на Планк ($h_n = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$)

Отношението ($\frac{h_n}{P}$) има измерение на (λ) и се нарича дължина на вълна на Луи де Бройл $\lambda = \frac{h_n}{p} = \frac{h_n}{mv}$

$$n \left(\frac{h_n}{p} \right)^3 = n \left(\frac{h_n}{mv} \right)^3 = \frac{n h_n^3}{m^3 \left(\frac{3k_B T}{m} \right)^{3/2}} \ll 1$$

$$\text{или } T \gg \frac{h_n^2 (n)^{2/3}}{3k_B \cdot m} = T_1^*$$

Тук (T_1^*) се нарича температура на "израждане" на газа. Следователно, статистиката на Максвел може да се прилага при температури $T \gg T_1^*$. При по-строги разглеждания температурата на "израждане" на даден газ се дава със зависимостта

$$T_2^* = \left(\frac{h_n^2}{2k_B m} \right) \cdot \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad \text{като } T_1^* \approx 2,69 T_2^*$$

Температурата на "израждане" за хелия (${}^4_2\text{He}$) е $T_2^*(\text{He}) = 0,0526\text{K}$.

С изключение на водорода (H_2) всички други газове имат по-голяма маса и по-ниски (T_2^*) спрямо тази $T_2^*(He^*)$ и затова те могат да се разглеждат като класически веществени газови системи, към които може успешно да се прилага газовата статистика.

12. Разпределение на молекулите по относителната им скорост ($u = v/v_{H_2}$).

$$f(u) = \frac{dN}{N du} = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)$$

От практическа гледна точка е интересно да се определи относителния брой на тези молекули в газовата система, които имат скорости $v^* > v$ или относителна скорост $u^* > u$. Тогава:

$$f(u^* > u) = \frac{dN(u^* > u)}{N} = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (u^*)^2 \exp[-(u^*)^2] du^*$$

Например, при $V = v_{H_2}$, тогава $v^* > v_{H_2}$ и $u^* > 1$. Тогава

$$f(u^* > u=1) = \frac{dN(u^* > u=1)}{N} = 0,5724$$

Следователно 57,24% от всички молекули на идеален газ при $T = \text{const}$ притежават скорости $v > v_{H_2}$ или $u > 1$

13. Газ в силово поле - закон на Максвел-Болцман.

$$dn(\epsilon_n) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left[\exp\left(-\frac{\epsilon_k + \epsilon_n}{k_B T}\right) \right] v^2 dv$$

Тук $dn(\epsilon_n)$ е броя на молекулите в единица обем, които притежават скорости в интервала $[v; v+dv]$ и енергия ($\epsilon_n = mgh$).

$$dn(h) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left[\exp\left[-\frac{m}{2k_B T} (v^2 + 2gh)\right] \right] v^2 dv$$

Тук $dn(h)$ е броя на молекулите в единица обем, които се намират на височина (h) в изотермична атмосфера и притежават скорости в интервала $[v; v+dv]$.

$$dn(h=0) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left[\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \right] v^2 dv$$

$$dn(h) = dn(h=0) \cdot \left[\exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right) \right].$$

По от основното уравнение на кинетичната теория на газовете

$$P(h) = k_B T [dn(h)] \quad \text{и} \quad P(h=0) = k_B T [dn(h=0)].$$

Тук $P(h)$ е налягането на газа на височина (h) при изотермична земна атмосфера.

$$P(h) = P(h=0) \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right)$$

- барометрична формула.

Понеже $m = \frac{\mu}{N_A}$, където $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ молекули/к mol. е числото на Авогадро, следва, че

$$P(h) = P(h=0) \cdot \exp\left(-\frac{\mu g h}{R_r T}\right)$$

$$\text{но } g(h) = k_r \frac{M_3}{R_3^2} = k_r \frac{M_3}{(R_3+h)^2}$$

$$P(h) = P(h=0) \exp\left[-\frac{\mu h}{R_r T} \cdot k_r \frac{M_3}{(R_3+h)^2}\right]$$

$$P(h) = P(h=0) \exp\left[-\frac{\mu h}{R_r T} \cdot \frac{g(h=0)}{\left(1 + \frac{h}{R_3}\right)^2}\right]$$

14. Основно уравнение в кинетичната теория на идеалния

газ. $P = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k = \frac{2}{3} n \left(\frac{3}{2} k_B T\right) = n k_B T.$

Тук: (n) е броя на молекулите в единица обем; (P) е налягането, а ($\bar{\epsilon}_k$) е средната кинетична енергия на една молекула при температура (T) на газа; (k_B) е константата на Болцман. При нормални условия $P_0 = 1$ физ.атм. = $1,013 \cdot 10^5$ Pa и $T_0 = 273,15$ K

$$n = \frac{P_0}{k_B T_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} (273,15)} \approx 2,689 \cdot 10^{25} = 2,70 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Това е числото на Лошмидт.

15. Вътрешна енергия (U), степени на свобода (i) и топлоемност (C) на идеален газ.

$$U_{\mu} = N_A (\bar{E}_k) = N_A \frac{i}{2} k_B T = \frac{i}{2} R T$$

$$U = \frac{M}{\mu} U_{\mu} = n_{\mu} U_{\mu} = \frac{i}{2} n_{\mu} R T$$

Тук (U_{μ}) е киломолната вътрешна енергия на газа, а (U) - е на маса (M) kg газ, или на (n_{μ}) kmol

$$(C_{\mu})_V = \frac{dU_{\mu}}{dT} = \frac{i}{2} R \quad C_V = \frac{(C_{\mu})_V}{\mu} = \frac{i}{2} \left(\frac{R}{\mu} \right)$$

$$C_V = \frac{dU}{dM} = \frac{i}{2} \left(\frac{M}{\mu} \right) R = \frac{i}{2} n_{\mu} R$$

Тук $(C_{\mu})_V$ е киломолната топлоемност при постоянен обем ($V = \text{const}$), (C_V) е специфичната топлоемност, отнесена за $M = 1$ kg газ, а C_V е топлоемността, отнесена за M kg газ.

Уравнение на Роберт Майер

$$(C_{\mu})_p = (C_{\mu})_V + R = \frac{i}{2} R + R = \left(\frac{i+2}{2} \right) R$$

Коефициент на Поасон (α)

$$\alpha = \frac{(C_{\mu})_p}{(C_{\mu})_V} = \frac{\left(\frac{i+2}{2} \right) R}{\frac{i}{2} R} = \frac{i+2}{i}$$

За едноатомни газове $i = 3$ и $\alpha = \frac{5}{3} = 1,667$

За двуатомни газове $i = 5$ и $\alpha = \frac{7}{5} = 1,40$

За три-и многоатомни газове $i = 6$ и $\alpha = \frac{8}{6} = 1,33$.

При наличие на постъпателно ($i = 3$), въртеливо (i_B) и трептеливо движение (i_T) на "пъргави" молекули в идеален газ, тогава

$$U_{\mu} = \frac{(3 + i_B + i_T)}{2} R T \quad \text{и} \quad (C_{\mu})_V = \left(\frac{3 + i_B + i_T}{2} \right) R$$

Тук ($3, i_B, i_T$) са броя на степените на съответните моди на топлинно движение - постъпателно, въртеливо и трептеливо.

$$(C_M)_p = (C_M)_V + R = \left(\frac{5 + i_B + i_T}{2} \right) R.$$

Всяко трептене на един атом в сложна молекула може да се разгледа, като осцилатор с честота (ν) от вида $\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_{el.}}{m_{oc.}} \right)^{1/2}$

където ($m_{oc.}$) е масата на осцилатора, а ($k_{el.}$) е еластичната или квазиеластичната константата. Ако амплитудата на осцилатора е ($A_{oc.}$), тогава неговата потенциална енергия е $[(E_p)_{oc.}]_{max} = \frac{1}{2} A_{oc.}^2 \cdot k_{el.} = (E_M)_{max} = (E_{oc.})_{max}$.

Съгласно квантовата механика енергията на въртеливото движение (E_B) на една молекула може да приема само определени (дискретни) стойности, съответстващи на стационарни енергийни състояния

$$E_B = \left(\frac{h^2}{8\pi^2 I_M} \right) j(j+1) \quad \text{където: } (I_M)$$

е инерциония момент на молекулата спрямо дадената ос на въртене, а (j) е квантовото число на стационарното състояние ($j = 0; 1; 2; 3; \dots$). Енергетичният "прозоред" между две съседни нива е

$$\Delta E_B = \left(\frac{h^2}{4\pi^2 I_M} \right) (j+1) \quad \text{Следователно,}$$

$$\Delta E_B = f(j) \neq const. \quad \text{Средната енергия } (\bar{E}_B) \text{ от-}$$

несена за една степен на свобода на въртеливото движение на молекула с честота на въртене (ν_B) е

$$\bar{E}_B = \frac{1}{2} \left\{ \frac{h\nu_B}{[\exp \left(\frac{h\nu_B}{k_B T} \right)] - 1} \right\} \quad \text{при } h\nu_B \ll k_B T,$$

$$\text{тогава } \bar{E}_B = \frac{1}{2} k_B T$$

Отношението ($h^2/8\pi^2 I_M$) се нарича "квант на въртене". Когато топлинният квант ($k_B T$) стане равен на кванта на въртене или на трептене се въвеждат характеристични температури (Θ_B)_B и (Θ_T)_T.

$$k_B \Theta_B = \frac{h\nu^2}{8\pi^2 I_M} \quad \text{или} \quad \Theta_B = \frac{h\nu^2}{8\pi^2 k_B I_M}$$

$$k_B \Theta_T = h\nu (V_{oc}) \quad \text{или} \quad \Theta_T = \frac{h\nu (V_{oc})}{k_B}$$

16. Среден свободен пробег на молекулите на газа ($\bar{\lambda}$).

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{2} \pi n_0 \tau_M^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n_0 d_M^2} = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 (\sigma_{ef})_M}$$

където (τ_M) е радиуса, а $d_M = 2\tau_M$ е диаметъра на молекулите. Ефективното сечение на молекулите ($\sigma_M = \pi d_M^2$). От

основното уравнение на кинетичната теория на газовете броят (n_0) на молекулите в единича обем е $n_0 = p/k_B T$, където (p) е налягането, а (T) е абсолютната температура на газа.

Константата на Болцман $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$. Тогава

$$\bar{\lambda} = \frac{k_B T}{4\sqrt{2} \pi p \tau_M^2} = \frac{k_B T}{\pi \sqrt{2} p d_M^2} = \frac{k_B T}{p \sqrt{2} (\sigma_{ef})_M}$$

$$p \bar{\lambda} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} (\sigma_{ef})_M} \quad \text{и при } T = \text{const}, \text{ тогава и } p \cdot \bar{\lambda} = \text{const}^{\neq}$$

Можем да въведем понятието най-вероятен среден свободен пробег на молекулите $\lambda_{н.в} = (V_{н.в}) \Delta t$

където ($V_{н.в}$) е най-вероятната скорост на молекулите при $T = \text{const}$. Тогава можем да въведем функцията $f(\lambda)$ - плътността на вероятността да съществуват молекули, които да имат (λ) в интервала $[\lambda; \lambda + d\lambda]$.

$$f(\lambda) = \frac{dN(\lambda)}{N d\lambda} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda_{н.в}^3} \right) \exp \left[- \left(\frac{\lambda}{\lambda_{н.в}} \right)^2 \right]$$

От $f(\lambda)$ може да се определи средноаритметичната стойност ($\lambda_{ср.ар.}$)

$$\lambda_{ср.ар.} = \int \frac{dN(\lambda)}{N} = \int_0^{\infty} \lambda f(\lambda) d\lambda = \frac{2 \lambda_{н.в}}{\sqrt{\pi}} = \bar{\lambda}$$

формула на Сезерланд за $(z_M)_{ef} = f(T)$ е от вида:

$$(z_M)_{ef}(T) = (z_M)_{ef}(T \rightarrow \infty) \sqrt{1 + \frac{k_c}{T}} = z_M \sqrt{1 + \frac{k_c}{T}}$$

където (k_c) е константата на Сезерланд за даден газ.

17. Преносни явления в идеални газове

а) Изотермична самодифузия. Първи закон на Фик. Коефициентът на самодифузията D_k при $T = const$ е от вида

$$D_k = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{\Delta M}{\Delta S \cdot \Delta t (d\rho/dx)}$$

където \bar{v} и $\bar{\lambda}$ са средната скорост и средния свободен пробег на молекулите на газа.

б) Изотермична взаимна дифузия.

Плътноста на газа $\rho_r = \rho_1 + \rho_2$ е сума от плътностите на двете компоненти

$$D_k = \frac{\rho_2(D_k)_{1 \rightarrow 2} + \rho_1(D_k)_{2 \rightarrow 1}}{\rho_r} ; D_k = \frac{\rho_1(D_k)_{2 \rightarrow 1} + \rho_2(D_k)_{1 \rightarrow 2}}{\rho_r}$$

Следователно, $(D_k)_{1 \rightarrow 2} = (D_k)_{2 \rightarrow 1}$

в) Неизотермична самодифузия ($T \neq const$)

Втори закон на Фик.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_k \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) = D_k \nabla^2(\rho)$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \text{диференциален оператор на Лаплас.}$$

Тук (ρ) е плътността на газа, а (D_k) е неговия коефициент на самодифузия.

г) Термодифузия. Концентрацията на първата газова компонента $C_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$ където (n) е броя на молекулите в единица обем. Термодифузионно отношение $k_{T20} = \frac{D_{T2}}{(D_k)_{1 \rightarrow 2}}$

където (D_{T2}) е коефициент на термодифузията. Разделянето на

първата компонента в два локални обема е (T_1) и (T_2) е от вида

$$c_1(T_1) - c_2(T_2) = K_{TDO} (\ln T_1 - \ln T_2)$$

Тук $K_{TDO} \sim c_1 c_2 = c(1-c)$ при $c_1 = c$, а $c_2 = 1 - c_1 = 1 - c$. Тогава $K_{TDO} = \alpha(1-c)c$ при

$$\alpha = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right) \cdot \left(\frac{\hat{n} - 5}{\hat{n} - 1} \right) = \frac{\Delta m}{2m} \left(\frac{\hat{n} - 5}{\hat{n} - 1} \right)$$

при $m = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ и $\Delta m = m_2 - m_1$. Тук: (m_1) и (m_2) са масите на молекулите на двете компоненти; а (m) е степенния

показател в закона за силата на отблъскване между молекулите

$$F_{отд} \sim \frac{1}{r^{\hat{n}}}; \quad \left[\frac{c_1(T_1)}{1 - c_1(T_1)} \right] : \left[\frac{c_1(T_2)}{1 - c_1(T_2)} \right] = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^\alpha$$

новото представяне на разделянето на първата компонента в два локални обема с температури (T_1) и (T_2).

д) Вътрешно триене в идеален газ. Коефициентът на вътрешно триене (η)

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{\Delta F}{\Delta S (dv/dx)} = \frac{\sigma_\eta}{(dv/dx)}$$

е) Топлопроводност на идеален газ. Коефициентът на топлопроводност (K_T) - стационарна

$$K_T = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t (dT/dx)}$$

където (c_V) е специфичната топлоемност на газа при постоянен

обем ($V = \text{const}$). Връзката между коефициентите на преносните

явления е $K_T = D_K \rho c_V = \eta c_V$.

При нестационарна топлопроводност ($dT/dx \neq \text{const}$),

разликата в температурите между два локални обема (V_1) и (V_2)

с приведен обем $V_n = V_1 V_2 (V_1 + V_2)^{-1}$ е от вида

$$\Delta T(t) = \Delta T(t=0) \exp\left(-\frac{K_T S}{\rho c_V \ell V_n} t\right)$$

където (S) е сечението, а (ℓ) е дължината на тръбичката, която съединява съдовете с обеми (V_1) и (V_2). Време на релаксация

(τ_p) на (ΔT).

$$\tau_p = \left(\frac{\rho c_v}{k_T} \right) \cdot \left(\frac{\ell \cdot V_n}{S} \right)$$

ж) Физични явления в разредени газове

÷ изотермична ефузия ($T_A = T_B$). При $n_A = n_B$

от $P = n k_B T$ следва, че $P_A = P_B$

$P_A (m_A n_A)^{-1/2} = P_B (m_B n_B)^{-1/2}$ ÷ термична ефузия ($T_A \neq T_B$). Условието е от вида където (m_A) и (m_B) са масите на молекулите на двете компоненти, а (P_A) и (P_B) - тяхните налягания.

÷ молекулно изтичане - през цилиндрична тръба с радиус (r), дължина (ℓ) и налягания (P_1) и (P_2) на газа в двата края на тръбата. Масовият поток (M^*) през тръбата е от вида (формула на Кнудсен)

$$M^* = \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \cdot \left(\frac{r^3}{\ell} \right) \cdot (P_1 - P_2) \sqrt{\frac{\mu}{R T}}$$

където (μ) е молната маса на газа.

÷ вътрешно триене - коефициентът (η^*) е от вида

$$\eta^* = \frac{1}{6} \rho \bar{v} = \frac{1}{6} n m \bar{v} = \frac{1}{6} n \bar{v} \left(\frac{P}{k_B T} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{m P}{k_B T} \right) \left(\frac{8 R T}{\pi \mu} \right)^{1/2}$$

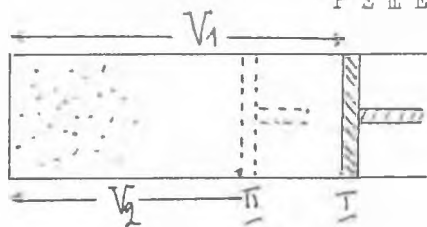
$$\eta^* = \frac{1}{6} P \left(\frac{8 m}{\pi R T} \right)^{1/2}$$

÷ топлопроводност - коефициентът (k_T^*) е от вида

$$k_T^* = \frac{1}{6} \rho \bar{v} c_v = c_v \frac{P}{6} \sqrt{\frac{8 \mu}{\pi R T}}$$

ЗАДАЧА №1 За измерване на обема на насипен материал са го поставили в цилиндър, който херметично е затворен с бутало. След това с манометър са определили налягането на въздуха в две състояния на буталото (I) и (II), като са получили стойности (P_1) и (P_2) при една и съща стайна температура. Сумарният обем на въздуха и насипния материал при двете състояния на буталото е съответно (V_1) и (V_2).

РЕШЕНИЕ :



Понеже измерването е осъществено при една и съща температура ($T = \text{const}$) и една и съща маса на въздуха ($M_B = M_B = \text{const}$), тогава при-

лагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за двете състояния (I) и (II) на буталото

$$(1) \quad P_1 V_{B1} = \frac{M_B}{\mu_B} R T$$

$$\text{и } (2) \quad P_2 V_{B2} = \frac{M_B}{\mu_B} R T$$

$$(3) \quad P_1 V_{B1} = P_2 V_{B2}$$

$$\text{Но } V_{B1} = V_1 - V_{HM} \quad (4) \text{ и}$$

$$V_{B2} = V_2 - V_{HM}$$

(5). Заместваме (4) и (5) в (3) и получа-

$$\text{ваме, че } (6) \quad P_1 (V_1 - V_{HM}) = P_2 (V_2 - V_{HM})$$

От (6) определяме обема на насипния материал

$$(7) \quad V_{HM} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{P_2 - P_1}$$

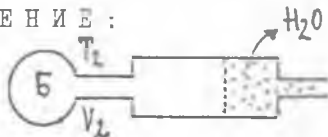
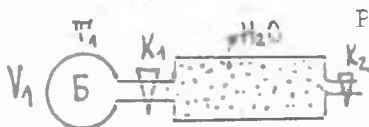
Получената зависимост

(7) е общото решение на задачата за определяне на V_{HM} .

ЗАДАЧА № 2 Балон с обем $V_1 = 50$ литра е напълнен с въздух при температура $t_1 = 27^\circ\text{C}$ до налягане $P_1 = 10 \text{ MPa}$.

Какъв обем вода може да се изтласка от цистерната на подводница от въздуха в този балон, ако това се извършва на дълбочина в морето $h = 50 \text{ м}$? Температурата на въздуха след разширението е $t_2 = 3^\circ\text{C}$.

РЕШЕНИЕ :



Процесът на разширение на въздуха при преход от обем (V_1) до обем (V_2) е изомасов ($M_B = \text{const}$). Прилагаме уравнението за състоянието на идеалния газ за двете състояния

$$(1) \quad P_1 V_1 = \frac{M_B}{\mu_B} R_r T_1 \quad \text{и} \quad (2) \quad P_2 V_2 = \frac{M_B}{\mu_B} R_r T_2$$

Делим почленно (1) на (2) и получаваме (3)

$$(P_1 V_1) T_2 = (P_2 V_2) T_1$$

Изтласканият обем вода от цистерната е (ΔV)

$$(4) \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{P_1 V_1 T_2}{P_2 T_1} - V_1 = V_1 \left(\frac{P_1 V_1}{P_2 T_2} - 1 \right)$$

В (4) сме заместили (5) $V_2 = \frac{P_1 V_1 T_2}{P_2 T_1}$ от (3)

Първо представяме температурите (T_1) и (T_2) чрез абсолютната температурна скала.

$$T_1 = 27^\circ\text{C} = 27 + 273 = 300^\circ\text{K}$$

$$T_2 = 3^\circ\text{C} = 3 + 273 = 276^\circ\text{K}$$

Съгласно условието на задачата за да определим (ΔV)

от (4) е необходимо да знаем налягането (P_2) в случая

$$(6) \quad P_2 = P_0 + P_{x.c} = P_0 + \rho g h$$

Но (P_0) е атмосферното налягане над морската водна повърхност и $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$$(7) \quad P_{x.c} = \rho g h = 1,06 \cdot 10^3 (9,81) 40 = 4,159 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Тогава} \quad P_2 = P_0 + P_{x.c} = (1,013 + 4,159) 10^5 = 5,172 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Тук приемаме, че плътността на средно солена морска вода е $\rho = 1,06 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, без да отчитаме изменението на плътността на морската вода, с увеличаване на дълбочината (h),

поради това, че течностите са трудно свиваеми. Приблизително,

можем да посочим, че вътрешното ван-дер-ваалсово налягане във

$$\text{водата } (P_{\text{вдв}})_{\text{H}_2\text{O}} = 17000 \text{ физ.атм.} = 1,722 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 1,722$$

6 Pa , като се обуславя от привличането между молекулите, дъл-

ящо се на кохезионните сили. Заместваме (P_2) в (4) и получаваме, че

$$\Delta V = 50 \cdot 10^{-3} \left[\frac{10^7 \cdot (276)}{5,172 \cdot 10^5 (300)} - 1 \right] = 839,40 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\Delta V = 0,8394 \text{ м}^3 = 839,4 \text{ литра} = 839,40 \text{ дм}^3.$$

Допълнително към задачата можем да определим масата (Δm) на изтласкваната вода от пистерната на подводницата.

$$\Delta m = \rho (\Delta V) = 1,06 \cdot 10^3 (0,8394) = 889,764 \text{ кг}.$$

Тогава допълнителната "подемна" сила (F_n), която ще се прибави към Архимедовата (F_A) ще бъде

$$F_n = (\Delta m) \cdot g = 889,764 (9,81) = 8728,58 \text{ N} = 8,73 \text{ кN}.$$

ЗАДАЧА № 3 Газ се намира в съд при налягане $P_1 = 2 \text{ MPa}$ и температура $t_1 = 27^\circ\text{C}$. След затваряне на газа с още $\Delta t = 50^\circ\text{C}$ в съда е останала (поради изтичане) половината от първоначалната маса на газа. Определете установеното налягане на газа в този момент.

РЕШЕНИЕ :

Можем да приемем, че изтичането на газа става през пореста мембрана. Прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ.

$$(1) P_1 V_1 = \frac{M_1}{\mu} P_1 T_1$$

$$\text{и } (2) P_2 V_1 = \frac{M_2}{\mu} P_2 T_2$$

$$\text{Тук } M_2 = \frac{1}{2} M_1$$

$$(3) \text{ и } T_1 = t_1 + 273 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$

$$\text{и } T_2 = T_1 + \Delta t = 300 + 50 = 350 \text{ K}.$$

Делим почленно (1) с (2) при отчитане на (3) и получаваме

ме, че

БИБЛИОТЕКА
НА ВХТИ
СОФИЯ

$$(4) \quad P_2 = \frac{P_1 T_2}{2 T_1}$$

Това е общото решение на задачата за определяне на

установеното налягане P_2 . Заместваме числените стойности на характеристиките в (4) и получаваме, че $P_2 = 1,166 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1,166 \text{ MPa}$.

ЗАДАЧА № 4. Налягането на въздуха вътре в бутилка е $P_1 = 0,1 \text{ MPa}$ при температура $t_1 = 7^\circ\text{C}$. С колко градуса още (Δt) трябва да загреем въздуха в бутилката за да може да се изхвърли запушалката? Без да се загрява въздуха при $t_1 = 7^\circ\text{C}$ запушалката може да се махне ако се приложи външна сила $F = 10 \text{ N}$. Сечението на запушалката е $S_3 = 2 \text{ cm}^2$.

РЕШЕНИЕ:

Първо можем да определим допълнителното външно налягане (ΔP), което трябва да се приложи при $t_1 = 7^\circ\text{C}$ върху запушалката за да се махне от бутилката.

$$(1) \quad \Delta P = \frac{F}{S_3} = \frac{10}{2 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

Прилагаме уравнението, за състоянието на идеалния газ за двете състояния на въздуха в бутилката:

$$(1) \quad P_1 V_B = \frac{M}{\mu} R T_1$$

$$\text{и } (2) \quad P_2 V_B = \frac{M}{\mu} R T_2$$

$$\text{Тук } T_2 = t_2 + 273 = 7 + 273 = 280 \text{ K}$$

$$\text{и } (3) \quad P_2 = P_1 + \Delta P = P_1 + \frac{F}{S_3}$$

Делим (1) на (2) и

$$(4) \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Това е запис на закона на Шарл в абсолютни температури (T_1) и

(T_2) при изохорен процес ($V_B = \text{const}$). От (4) определяме (T_2), при заместване предварително на (P_2) от (3). Тогава получаваме, че:

$$\frac{P_1}{P_1 + \frac{F}{S_3}} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$(5) \quad T_2 = \frac{P_2 T_1}{P_1} = \frac{T_1 (P_1 + \frac{F}{S_3})}{P_1} = T_1 \left(1 + \frac{F}{S_3 P_1} \right)$$

Получената зависимост (5) дава възможност да определим (T_2), но ние търсим

$$(6) \quad \Delta t = T_2 - T_1 = T_1 \left(1 + \frac{F}{S_3 P_1} \right) - T_1 = T_1 \left(\frac{F}{S_3 P_1} \right)$$

Следователно, (Δt) зададено чрез (6) е общото решение на задачата. Численото пресмятане дава следните резултати: $T_2 = 420^\circ\text{K}$ и $\Delta t = (420 - 280)^\circ\text{K} = 140^\circ\text{C}$.

Допълнително към задачата можем да определим броя (K) на кмол (n_μ) въздух, отнесен за единица обем в бутилката, при изохорното изменение на състоянието от (1) и (2) следва, че

$$(7) \quad K = \frac{\left(\frac{M}{\mu}\right)}{V_B} = \frac{n_\mu}{V_B} = \frac{P_1}{R T_1} = \frac{P_2}{R T_2} = \frac{10^5}{8315(280)} = 0.0429 \frac{\text{кмол}}{\text{м}^3}$$

Значи, ако бутилката има обем $V_B = 1 \text{ дм}^3 = 10^{-3} \text{ м}^3$, тогава $n_\mu = 4,29 \cdot 10^{-5} \text{ кмол}$ и при средна молекулна ефективна маса на въздуха $\bar{\mu} = 29 \text{ кг/кмол}$, масата на въздуха в бутилката трябва да бъде: $M_B = (n_\mu) \bar{\mu} = 4,29 \cdot 10^{-5} (29) = 1,244 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 1,244 \text{ г}$.

ЗАДАЧА № 5 Защо електрическите крушки се запълват с инертен газ и при налягане $P_1 \ll P_{\text{атм}}$. ? Определете каква трябва да е стойността на (P_1), ако при работен режим на крушката се достига до налягане $P_2 = P_{\text{атм}}$. на инертния газ, ако температурата му е $T_2 = 873^\circ\text{K}$.

РЕШЕНИЕ :

A) Нагриването на инертния газ в обема на стъклена електрична крушка е изохорно ($V_K = \text{const}$) и тогава следва, че

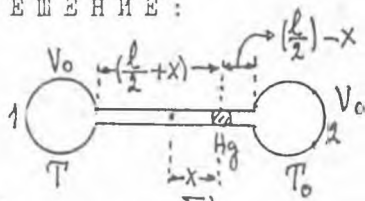
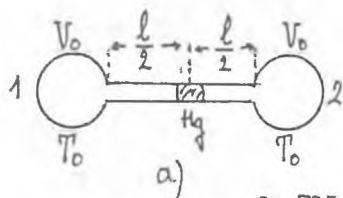
$$(1) \quad P_1 T_2 = P_2 T_1 \quad \text{и} \quad (2) \quad P_2 = P_1 T_2 (T_1)^{-1}$$

Ако (3) $P_1 = P_{\text{атм}}$. и (4) $T_2 = n T_1$, тогава от (2) следва, че (5) $P_2 = n P_1 = n P_{\text{атм}}$. и при голямо (n) стъкления балон може да се разруши.

Б) Във втората част на задачата от (1) следва, че (6) $P_1 = P_2 T_1 (T_2)^{-1}$ и при $t_1 = 27^\circ\text{C}$ или $T_1 = 27 + 273 = 300^\circ\text{K}$, тогава от (6) следва, че $P_1 = \frac{300}{873} (1,013 \cdot 10^5) = 0,348 \cdot 10^5 = 3,48 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,3436 \text{ фуг. атм.}$

ЗАДАЧА № 6 Газов термометър се състои от два еднакви съда с обем (V_0) всеки, които са съединени с тръба с дължина (l) и сечение (S). В тръбичката има капка живак, която ограничава притока на газа от единия в другия съд. Ако температурите на газа в двата съда са еднакви, тогава живачната капка е в средата на тръбичката. Ако единия съд се постави в термостат при температура ($T_0 = \text{const}$), а другия съд в среди с различни температури (T), как може да се определи (T) чрез проградуиране на термометъра.

РЕШЕНИЕ :



В случая (а) (1) $P_{01} [V_0 + (\frac{l}{2})S] = \frac{M}{\mu} R T_0$

и (2) $P_{02} [V_0 + (\frac{l}{2})S] = \frac{M}{\mu} R T_0$ и тогава $P_{01} = P_{02}$ (3)

В случая (б) след спиране на преместването на живачната капка следва равенство на наляганията в двата съда $P_1 = P_2$ и тогава

(4) $P_1 [V_0 + (\frac{l}{2} + x)S] = \frac{M}{\mu} R T$ и (5) $P_2 [V_0 + (\frac{l}{2} - x)S] = \frac{M}{\mu} R T_0$.

Делим почленно (4) на (5) и получаваме (при отчитане, че $P_1 = P_2$)

$$(6) \quad \frac{[V_0 + (\frac{\ell}{2} + x)S]}{[V_0 + (\frac{\ell}{2} - x)S]} = \frac{T}{T_0}$$

$$(7) \quad T = T_0 \frac{[2V_0 + (\ell + 2x)S]}{[2V_0 + (\ell - 2x)S]}$$

Получената зависимост (7) е общото решение на задачата за градуиране на дадения газов термометър. Веднага се вижда, че

$T = f(T_0, V_0, \ell, S, x)$ но само параметъра (X) се изменя при изменението на температурата (T) на газа. Можем да опростим израза (7) като обединим константните характеристики

$$(8) \quad 2V_0 + \ell S = K_1 \quad \text{и} \quad (9) \quad 2S = K_2$$

Тогава завествайки (8) и (9) в (7) получаваме, че

$$(10) \quad T = T_0 \left(\frac{K_1 + K_2 X}{K_1 - K_2 X} \right) = T_0 \left(\frac{1 + \frac{K_2}{K_1} X}{1 - \frac{K_2}{K_1} X} \right)$$

При (11) $\frac{K_2}{K_1} = k$, тогава

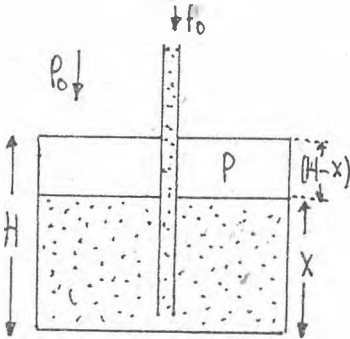
$$(12) \quad T = T_0 \left(\frac{1 + kX}{1 - kX} \right) \quad \text{като} \quad (13) \quad k = \frac{2S}{2V_0 + \ell S}$$

$$\text{или} \quad (14) \quad k = \left(\frac{V_0}{S} + \frac{\ell}{2} \right)^{-1}$$

По този начин, предварително трябва да се определи константата (K) на газовия термометър от (14), а след това да се определя $T = f(x)$ от (12).

ЗАДАЧА № 7 В цилиндричен съд с височина (H) чрез горната му основа е поставена вертикална тръбичка достигаща почти до долното дъно на съда и имаща дължина (ℓ). Съединението на тръбичката със съда е херметично. През тръбичката бавно се налива вода в съда. Определете нивото на течността от дъното на

съда в момента когато нивото на течността в тръбичката достигне горния ѝ край. Атмосферното налягане е (P_0), а плътността на течността е (ρ).



РЕШЕНИЕ :

За да настъпи равновесие на течността в съда и тръбата трябва да е изпълнено условието

$$(1) P_0 + \rho g(l-x) = P$$

Където

$$(2) P_{xc} = \rho g(l-x)$$

е хидростатичното налягане на течността в тръбичката между двете нива на течността в тръбичката и в съда, а (P) е налягането на газа вътре в съда над нивото на течността в него. Преди да се започне наливането на вода в съда налягането на газа (въздуха) е (P_0) и от основното уравнение за състоянието на идеалния газ следва, че

$$(3) P_0(S \cdot H) = \frac{M}{\mu} R_T T \quad \text{като} \quad SH = V \quad (4)$$

е обема на целия цилиндричен съд, а (T) е стаината температура, R_T газовата константата и $\frac{M}{\mu} = n_{\mu}$ броя на kmol въздух в съда.

При изотермичен режим на свиване на въздуха в съда при наливане на вода следва, че

$$(5) P[S(H-x)] = \frac{M}{\mu} R_T T$$

$$(6) P_0 SH = PS(H-x)$$

От (5) и (3) следва, че

$$\text{или (7) } P = \frac{P_0 H}{H-x}$$

Заместваме (7) в (1) и получаваме, че

$$(8) \quad P_0 + \rho g(l-x) = \frac{P_0 H}{H-x} \quad \text{Преработваме зави-}$$

симостта (8) и получаваме квадратно уравнение за (X) от вида

$$(9) \quad X^2 - \left(l + H + \frac{P_0}{\rho g}\right)X + Hl = 0$$

$$(10) \quad X_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\left(l + H + \frac{P_0}{\rho g}\right) \pm \sqrt{\left(l + H + \frac{P_0}{\rho g}\right)^2 - 4Hl} \right]$$

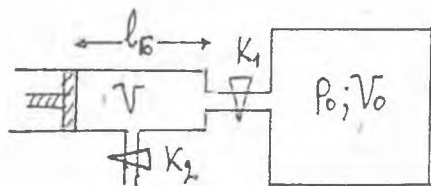
Ясно е, че при $X < H$ следва от (10), че трябва да приемем, че

$$(11) \quad X = \frac{1}{2} \left[\left(l + H + \frac{P_0}{\rho g}\right) - \sqrt{\left(l + H + \frac{P_0}{\rho g}\right)^2 - 4Hl} \right]$$

Получената зависимост (11) е общо решение на задачата за определяне на височината (X) на нивото на течността в съда.

ЗАДАЧА № 8 Колко хода трябва да извърши бутало в изпомпваща помпа, ако тя е съединена със съд с обем $V_0 = 5 \text{ dm}^3$, в който има въздух при налягане $P_0 = 5,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, за да се достигне до налягане $P_m = 7,3 \cdot 10^2 \text{ Pa}$ на въздуха в съда. Буталото има кръгово сечение с радиус $r_B = 2 \text{ cm}$ и при един ход се премества на разстояние $l_B = 15 \text{ cm}$.

РЕШЕНИЕ :



Първо определяме макси-

$$\text{малния обем на помпата} \quad V = (\pi r_B^2) l_B \quad (1)$$

Началните условия на въздуха в съда са зададени с (P_0, V_0) . Да допус-

нем, че изпомпването на въздуха става бавно и приблизително изотермично ($T = \text{const}$). При отваряне на крана (K_1) буталото се движи от (K_1) към (K_2) и увеличава обема от (V_0) на ($V_0 + V$), при затворен кран (K_2). След това крана (K_1) се затваря, а се отваря крана (K_2). Буталото се движи към (K_2) и изхвърля обем въздух (V) в атмосферата. С това завършва напълно първия ход. Затваря се крана (K_2), а се отваря (K_1) и започва втория ход на буталото. При осъществяване на първия ход на буталото прилагаме закона на Бойл-Мариот за началното (P_0, V_0) и крайното състояние на газа [$P_1; (V_0 + V)$]. Тогава (2) $P_0 V_0 = P_1 (V_0 + V)$ или (3)* $P_1 = P_0 V_0 (V_0 + V)^{-1}$.

При втория ход началното състояние е ($P_1; V_0$), а крайното [$P_2; (V_0 + V)$]. Тогава получаваме, че

$$(4) P_1 V_0 = P_2 (V_0 + V) \quad \text{или (5)} \quad P_2 = \frac{P_1 V_0}{V_0 + V}$$

Заместваме (P_1) от (3) в (5) и получаваме

$$(6) P_2 = \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right) \left(\frac{P_0 V_0}{V_0 + V} \right) = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right)^2$$

При осъществяване на третия ход на буталото началното състояние на газа е ($P_2; V_0$), а крайното [$P_3; (V_0 + V)$]. Тогава получаваме, че

$$(7) P_2 V_0 = P_3 (V_0 + V) \quad \text{или (8)} \quad P_3 = P_2 \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right)$$

Заместваме (P_2) от (6) в (8) и получаваме

$$(9) P_3 = \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right) P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right)^2 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right)^3$$

Следователно в края на n -ход, полученото налягане на въздуха в съда е (10) $P_n = P_0 V_0^n (V_0 + V)^{-n}$ или

$$(11) \quad \lg\left(\frac{P_n}{P_0}\right) = n \lg\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)$$

$$(12) \quad n = \left[\lg\left(\frac{P_n}{P_0}\right) \right] \cdot \left[\lg\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right) \right]^{-1}$$

Получената зависимост (12) се явява общо решение на задачата за определяне на (n). За да преминем към числово решение на (n) от (12) привеждаме всички дадени величини в условието на задачата в СИ-система: $V_0 = 5 \text{ dm}^3 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $l_B = 2 \text{ cm} =$

$= 0,02 \text{ m}$; $l_B = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$. Можем да определим (V)
 $V = (\pi r_B^2) l_B = 3,14 (0,02)^2 \cdot 0,15 = 1,884 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.

При заместване на получените числени стойности на (V_0 , V , P_0 , P_n) в (12) получаваме окончателно, че $n = 118,29 \approx 118$ хода.

Допълнително към задачата можем да определим броя на молекулите на въздуха в единица обем при началното състояние (\tilde{n}_0) и при крайното състояние (след n -хода на буталото) (\tilde{n}_n). За целта използваме основното уравнение на кинетичната теория на газовете, че

$$(13) \quad P_0 = \tilde{n}_0 (k_B T)$$

$$\text{или (14) } \tilde{n}_0 = \frac{P_0}{k_B T}$$

$$(15) \quad P_n = \tilde{n}_n (k_B T)$$

$$\text{или (16) } \tilde{n}_n = \frac{P_n}{k_B T}$$

Приемаме, че температурата на въздуха е $t = 18^\circ\text{C}$ или $T = 18 + 273 = 291^\circ\text{K}$, а $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$. Тогава от (14) и (16) следва, че $\tilde{n}_0 = \frac{5,8 \cdot 10^4}{1,38 \cdot 10^{-23} (291)} = 1,444 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$

$$\tilde{n}_n = \frac{7,3 \cdot 10^4}{1,38 \cdot 10^{-23} (291)} = 1,818 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$$

Следователно, при преход от начално (P_0, V_0) към крайно състояние $[P_n; (V_0 + V)]$ броят на молекулите въздух в единица обем намалява $K = \frac{\tilde{n}_0}{\tilde{n}_n} = \frac{1,444 \cdot 10^{25}}{1,818 \cdot 10^{23}} = 79,43$ пъти.

За сравнение можем да определим числото на Лошмидт, представящо броя на молекулите в единица обем (M_0)_л при нормални условия ($P_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa и $T_0 = 273^\circ\text{K}$). Тогава

$$(M_0)_\text{л} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} (273)} = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

Тогава (M_0)_л е (1,861) пъти по-голяма от (\tilde{M}_0) и (147,8) пъти по-голямо от (\tilde{M}_n).

Допълнително можем да определим и масата (M_0) и (M_n) в двете състояния на въздуха. За целта определяме масата на една молекула въздух (m), като знаем, че ефективната молна маса на въздуха е $M_{\text{эф}} = 29 \text{ кг/кмол}$. В 1 кмол въздух се съдържат $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ молекули и тогава $m = \frac{M_{\text{эф}}}{N_A} = \frac{29}{6,023 \cdot 10^{26}} = 4,815 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$.

Тогава

$$M_0 = m (\tilde{n}_0 V_0) = 4,815 \cdot 10^{-26} (1,444 \cdot 10^{25}) \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 3,476 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$M_0 = 3,476 \text{ г}$$

$$M_n = m (\tilde{n}_n V_0) = 4,815 \cdot 10^{-26} (1,818 \cdot 10^{23}) \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 43,77 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

$$M_n = 0,04377 \text{ г} \approx 0,044 \text{ г}$$

Следователно масата на газа в съда е намаляла

$$K = \tilde{K} = \frac{M_0}{M_n} = \frac{3,476}{0,044} = 79 \text{ пъти}$$

и след $n = 118$ хода е засмукана от помпата маса

$$\Delta M = M_0 - M_n = 3,4$$

ЗАДАЧА № 9 Да се определи плътността на газова смес от кислород с маса $M_1 = 67 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ и азот с маса $M_2 = 13 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ при налягане $P = 2,15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ и температура $T = 295^\circ\text{K}$.

РЕШЕНИЕ:

Прилагаме уравнението на Клапейрон-Менделеев за всяка от компонентите в газовата смес при $T = \text{const}$ и $V = \text{const}$

$$(1) (P_1)_n V = \frac{M_1}{\mu_1} R_T T \quad \text{и} \quad (2) (P_2)_n V = \frac{M_2}{\mu_2} R_T T$$

(3) $P = P_{\text{см}} = (P_1)_n + (P_2)_n$ Тук $(P_1)_n$ и $(P_2)_n$ са парциални налягания на първата и втората компонента в газовата смес. Определяме $(P_1)_n$ и $(P_2)_n$ от (1) и (2) и ги заместяваме в (3)

$$(4) P = P_{\text{см}} = (P_1)_n + (P_2)_n = \frac{M_1}{\mu_1} \left(\frac{R_T T}{V} \right) + \frac{M_2}{\mu_2} \left(\frac{R_T T}{V} \right)$$

$$(5) P = \frac{R_T T}{V} \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} \right) \quad \text{или} \quad (6) V = \frac{R_T T}{P} \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} \right)$$

Чрез (6) сме определили обема ($V = V_{\text{см}}$) на газовата смес. Веднага можем да определим плътността (ρ_1) и (ρ_2) на всяка компонента.

$$(7) \rho_1 = \frac{M_1}{V} = P M_1 \left[R_T T \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} \right) \right]^{-1}$$

$$(8) \rho_2 = \frac{M_2}{V} = P M_2 \left[R_T T \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} \right) \right]^{-1}$$

Тогавя плътността на газовата смес е (9) $\rho_{\text{см}} = \rho_1 + \rho_2$
Заместваме (7) и (8) в (9) и получаваме, че

$$(10) \rho_{\text{см}} = \frac{P M_1}{R_T T \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} \right)} + \frac{P M_2}{R_T T \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} \right)} = \frac{P}{R_T T} \left[\frac{M_1 + M_2}{\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2}} \right]$$

Получената зависимост (10) е общо решение на задачата за определяне на ($\rho_{\text{см}}$). В условието на задачата всички величини имат числени стойности дадени с измерения в СИ-система. Численото решение

шение от (10) дава следния резултат: $\rho_{см} = 2,741 \text{ кг/м}^3$.

Допълнително можем от (7) и (8) да определим плътността на всяка компонента $\rho_1 = 2,296 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2 = 0,445 \text{ кг/м}^3$ при $\mu_1(\text{O}_2) = 32 \text{ кг/кмол}$ и $\mu_2(\text{N}_2) = 28 \text{ кг/кмол}$. От (6) можем да определим обема на сместа $V = V_{см} = 29,181 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 29,181 \text{ дм}^3$.

Парциалните налягания на всяка компонента са:

$$(11) (P_1)_n = \frac{M_1}{M_1} \left(\frac{P_T T}{V} \right) \quad \text{и} \quad (12) (P_2)_n = \frac{M_2}{\mu_2} \left(\frac{P_T T}{V} \right)$$

и числените им стойности добиват вида: $(P_1)_n = 1,760 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $(P_2)_n = 0,390 \cdot 10^5 \text{ Па}$

$$\text{Проверка: } P = P_{см} = (P_1)_n + (P_2)_n = (1,760 + 0,390) \cdot 10^5 = 2,150 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

ЗАДАЧА № 10 В съд с обем $V = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ се намират йодни пари с маса $M = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$. При температура $T = 1213^\circ \text{К}$ налягането на парите е $P_{см} = 9,30 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Да се определи степента на дисоциация на йодните молекули при тези условия. Молната маса на йода е $\mu = 254 \text{ кг/кмол}$.

РЕШЕНИЕ:

1) Ако няма дисоциация, степента на дисоциация ще бъде ($\alpha = 0$) и тогава прилагаме уравнението на Клапейрон-Менделеев

$$(1) P_1 V = \frac{M}{\mu} R_T T \quad \text{и} \quad (2) P_1 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_T T}{V} \right)$$

2) При наличие на дисоциация ($\alpha \neq 0$) и тогава броят на дисоцииралите молекули - или атоми получени при дисоциацията ще бъде

$$(3) (N_{\mu})_{дис.} = (N_{\mu})_{атами} = 2\alpha \left(\frac{M}{\mu} \right)$$

А броят на кмол недисоцииралите молекули ще бъде:

$$(4) (n_{\mu})_{\text{недис.}} = (1-\alpha) \frac{M}{\mu}$$

Тогава от закона на Далтон за газова смес, налягането на сместа

$$(5) P = P_{\text{см}} = (P_{\mu})_{\text{дис.}} + (P_{\mu})_{\text{недис.}}$$

За да определим парциалните налягания $(P_{\mu})_{\text{дис.}}$ и $(P_{\mu})_{\text{недис.}}$ използваме основното уравнение на идеалния газ (Клапейрон-Менделеев)

$$(6) (P_{\mu})_{\text{дис.}} = \frac{(n_{\mu})_{\text{дис.}}}{V} R_r T = \frac{2\alpha \left(\frac{M}{\mu}\right)}{V} R_r T$$

$$(7) (P_{\mu})_{\text{недис.}} = \frac{(n_{\mu})_{\text{недис.}}}{V} R_r T = \frac{(1-\alpha) \frac{M}{\mu}}{V} R_r T$$

като заместваме $(n_{\mu})_{\text{дис.}}$ и $(n_{\mu})_{\text{недис.}}$ от (3) и (4). Заместваме (6) и (7) в (5) и получаваме, че

$$(8) P = P_{\text{см}} = \frac{2\alpha M}{\mu V} R_r T + \frac{(1-\alpha) M}{\mu V} R_r T$$

$$(9) P = P_{\text{см}} = \frac{M R_r T}{\mu V} (2\alpha + 1 - \alpha) = \frac{M R_r T}{\mu V} (\alpha + 1)$$

Сравняваме (9) с (2) и веднага се вижда, че

$$(10) P = P_{\text{см}} = P_1 (\alpha + 1)$$

и тогава окончателно

достигаме до извода, че

$$(11) \alpha = \frac{P_{\text{см}}}{P_1} - 1 = \frac{P_{\text{см}} - P_1}{P_1}$$

Получената зависимост (11) преобразуваме чрез заместване в нея на (P_1) от (2)

$$(12) \alpha = \frac{\mu V P_{\text{см}}}{M R_r T} - 1$$

Това е вече общото решение на задачата за

определяне на степента на дисоциация (α). Численото пресмятане дава следния резултат $\alpha = 0,116 \approx 0,12$. Следователно, 12% от молекулите са се дисоциирали на атоми. Допълнително към задачата можем да определим налягането (P_1) ако няма дисоциация ($\alpha = 0$) на молекулите. Тогава от (2) следва, че $P_1 = 8,33 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Следователно, налягачието на дисоциация с $\alpha = 0,12$ довежда до нарастване на налягането на получената смес от $P_1 = 8,33 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ до $P_{см.} = 9,30 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, тоест с $K = \frac{P_{см.}}{P_1} = \frac{9,30 \cdot 10^4}{8,33 \cdot 10^4} = 1,116$ пъти. От (6) и (7) можем да определим парциалните налягания на всяка компонента: $(P_n)_{дис.} = 1,932 \cdot 10^4 \text{ Pa}$; $(P_n)_{недис.} = 7,364 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Проверка: $(P_n)_{дис.} + (P_n)_{недис.} = (1,932 + 7,364) \cdot 10^4 = 9,296 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. (Верно!) При изчисленията използваме съкратените зависимости: (13) $(P_n)_{дис.} = 2\alpha P_1$ и (14) $(P_n)_{недис.} = (1-\alpha)P_1$ което добре се вижда от (6) и (7) при отчитане на (2).

Можем да използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ и да намерим броя на дисоциираните частици (N_0)_{дис.} и недисоцииралите молекули (N_0)_{недис.} в единица обем:

$$(15) \quad (N_0)_{дис.} = \frac{(P_n)_{дис.}}{k_B T} \quad \text{и} \quad (16) \quad (N_0)_{недис.} = \frac{(P_n)_{недис.}}{k_B T}$$

Тук ще използваме константата на Болцман $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$. Числените пресмятания от (15) и (16) дават следните резултати: $(N_0)_{дис.} = 1,154 \cdot 10^{24} \text{ атоми/м}^3$; $(N_0)_{недис.} = 4,399 \cdot 10^{24} \text{ молекули/м}^3$. Можем да определим вече и броя на дисоциираните атоми (N_0)_{дис.} йод в обема $V = 5 \cdot 10^{-4}$ и броя на недисоциираните молекули (N_0)_{недис.} йод. Тогава се получава, че:

$$(17) (\tilde{N}_0)_{\text{гис.}} = V (N_0)_{\text{гис.}} = 5 \cdot 10^{-4} (1,154 \cdot 10^{24}) = 5,77 \cdot 10^{20} \text{ атоми}$$

$$(18) (\tilde{N}_0)_{\text{негис.}} = V (N_0)_{\text{негис.}} = 5 \cdot 10^{-4} (4,399 \cdot 10^{24}) = 2,20 \cdot 10^{21} \text{ молекули}$$

Следователно, броят на дисоциираните молекули е $(\tilde{N}_0)_{\text{гис.}}^{\text{м}} = \frac{(\tilde{N}_0)_{\text{гис.}}}{2} = \frac{5,77 \cdot 10^{20}}{2} = 2,885 \cdot 10^{20}$ молек.

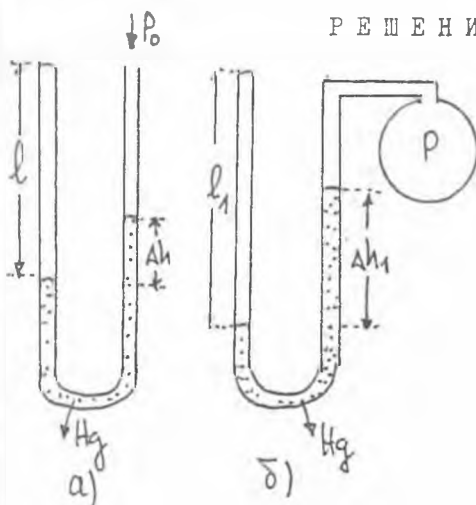
Тогава, общият брой молекули йод в обема (V) е

$$n_M = (\tilde{N}_0)_{\text{гис.}}^{\text{м}} + (\tilde{N}_0)_{\text{негис.}} = 2,885 \cdot 10^{20} + 2,199 \cdot 10^{21}$$

$$n_M = 2,488 \cdot 10^{21} \text{ молекули.}$$

ЗАДАЧА № 11 В U -овиден манометър е налят живак. При нормално атмосферно налягане $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ в откритото коляно нивото на живака е с $\Delta h = 0,10 \text{ m}$ по-високо, а свободната от живака част на тръбата на закритото коляно има дължина $l = 0,20 \text{ m}$. При съединяване на отвореното коляно с балон пълен с въздух разликата между нивата на живака в двете колена се увеличава и става $\Delta h_1 = 0,26 \text{ m}$. Да се определи налягането (P) на въздуха в балона.

РЕШЕНИЕ :



Първо - в случая (а) налягането на газа в затвореното коляно на манометъра е (1) $P_0^* = P_0 + \rho_{\text{Hg}} g (\Delta h)$
 Второ - в случая (б) налягането на газа в затвореното коляно ще бъде вече (2) $P_0^* = P + \rho_{\text{Hg}} g (\Delta h_1)$
 Премаме, че процесите

на изменение на състоянието на газа в затвореното коляно са в изотермичен режим ($T = \text{const}$) на реализация и тогава прилагаме закона на Бойл-Мариот.

(3) $p_e^* V = p_{e_1}^* V_1$ като (4) $V = l \cdot S$ и
 (5) $V_1 = l_1 S$ Тогава (6) $\frac{p_e^*}{p_{e_1}^*} = \frac{V_1}{V} = \frac{l_1 S}{l S} = \frac{l_1}{l}$

Но (7) $l_1 = l + \frac{1}{2}(\Delta h_1 - \Delta h)$ и след заместване на (7) в (6) получаваме, че

(8) $\frac{p_e^*}{p_{e_1}^*} = \frac{l + \frac{1}{2}(\Delta h_1 - \Delta h)}{l} = 1 + \frac{(\Delta h_1 - \Delta h)}{2l}$

Заместваме (p_e^*) и ($p_{e_1}^*$) от (1) и (2) в (8) и получаваме, че

(9) $\frac{p_0 + \rho_{\text{чг}} g (\Delta h)}{p + \rho_{\text{чг}} g (\Delta h_1)} = 1 + \frac{(\Delta h_1 - \Delta h)}{2l}$

От (9) определяме окончателно (p) и получаваме следния резултат

(10) $p = \left\{ \frac{p_0 + \rho_{\text{чг}} g (\Delta h)}{\left[1 + \frac{(\Delta h_1 - \Delta h)}{2l} \right]} - \rho_{\text{чг}} g (\Delta h_1) \right\}$

Получената зависимост (10) е общо решение на задачата за определяне на (p). Численото решение дава следния резултат: $p = 4,72 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,466 \text{ физ.атм.}$ Допълнително към условието на задачата приемаме, че $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ и $\rho_{\text{чг}} = 13,6 \text{ g/cm}^3 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Допълнително към задачата можем да определим (p_e^*) и ($p_{e_1}^*$) от (1) и (2), като се получат следните резултати:
 $p_e^* = 1,146 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,131 \text{ физ.атм.}$ и $p_{e_1}^* = 8,19 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,808 \text{ физ.атм.}$

От (6) определяме, че (11) $l_1 = \frac{l \cdot p_e^*}{p_{e_1}^*} = \frac{0,20(1,131)}{0,808} =$

$$= 0,2799 = 0,280 \text{ м} = 28 \text{ см.}$$

$$\text{Следователно, } \Delta l = h_1 - l = 0,28 - 0,20 = 0,08 \text{ м} = 8 \text{ см}$$

Прилагаме основното уравнение на кинетичната теория на газовете и определяме броя на молекулите на газа (n_0) и (n_{01}), при двете състояния в затвореното коляно на манометъра

$$(12) \quad n_0 = \frac{p e^*}{k_B T} \quad \text{и} \quad (13) \quad (n_0)_1 = \frac{p e_1^*}{k_B T}$$

Нека да приемем, че $t = 18^\circ\text{C}$ или $T = 18 + 273 = 291^\circ\text{K}$. Тогава от (12) и (13) следват резултатите: $n_0 = 2,854 \cdot 10^{25} \text{ молек/м}^3$ и $(n_0)_1 = 2,039 \cdot 10^{25} \text{ молек/м}^3$. Следователно

$$K = \frac{n_0}{(n_0)_1} = \frac{p e^*}{p e_1^*} = \frac{2,854 \cdot 10^{25}}{2,039 \cdot 10^{25}} = 1,399 \approx 1,40 \text{ пъти.}$$

е намален броят на молекулите в единица обем при преход от начално с ($p e^*$) към крайно с ($p e_1^*$) състояние на газа в затвореното коляно на манометъра. Същите пресмятания можем да ги направим и за въздуха в балона при крайно състояние с налягане $P = 4,72 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Тогава

$$(n_0)_P = \frac{P}{k_B T} = \frac{4,72 \cdot 10^4}{1,38 \cdot 10^{-23} (291)} = 1,175 \cdot 10^{25} \text{ молек/м}^3.$$

Понеже в условието на задачата не е дадено сечението (S) на тръбата на манометъра и обема на балона не можем да определим други характеристики. Например, плътностите на газа в двете състояния в затвореното коляно и на въздуха в балона, а също и тяхните маси.

Да приемем, че сечението на тръбата е $S = 5,024 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ (при $r = 4 \text{ мм}$), а обема на балона е $V_B = 4,187 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ (сферичен балон с радиус $r_B = 0,10 \text{ м} = 10 \text{ см.}$). Тогава плътността на въздуха в балона

$$(p_B)_B = (n_O)_p \frac{\mu}{N_A} = 1,175 \cdot 10^{25} \frac{29}{6,023 \cdot 10^{26}} = 0,566 \text{ kg/m}^3.$$

Масата на затворения въздух в балона

$$(M_B)_B = (p_B)_B \cdot V_B = 0,566 (4,187 \cdot 10^{-3}) = 2,369 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Същите пресмятания можем да направим и за газа в затвореното пространство на дясното коляно на манометъра. В началното състояние

$$(p_0)_B = n_0 \left(\frac{\mu}{N_A} \right) = 2,854 \cdot 10^{25} \frac{29}{6,023 \cdot 10^{26}} = 1,374 \text{ kg/m}^3.$$

а в крайното състояние на газа (приемаме, че той също е въздух)

$$(p_1)_B = (n_1)_p \frac{\mu}{N_A} = 2,039 \cdot 10^{25} \frac{29}{6,023 \cdot 10^{26}} = 0,982 \text{ kg/m}^3$$

Обемът в началното състояние е $V_0 = lS = 0,20 \cdot (5,024 \cdot 10^{-3}) = 1,0048 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, а в крайното състояние е $V_1 = l_1 S = 0,28 (5,024 \cdot 10^{-3}) = 1,407 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Масата на въздуха в началното състояние е равна на масата в крайното, понеже системата е затворена и изотермичното разширение е изомасово.

$$\begin{aligned} (M_0)_B &= (M_1)_B = (p_0)_B \cdot V_0 = (p_1)_B \cdot V_1 = 1,378 (1,0048 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 1,3806 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 1,3806 \text{ g}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА № 12 Каква маса въздух (ΔM) излиза от стая с обем $V = 42 \text{ m}^3$ при повишаване на температурата на въздуха от $t_1 = 15^\circ\text{C}$ до $t_2 = 21^\circ\text{C}$.

РЕШЕНИЕ :

За двете състояния на въздуха в стаята прилагаме основното уравнение на Клапейрон-Менделеев за състоянието на идеалния

газ

$$(1) \quad p_1 V = \frac{M_1}{\mu} R T_1$$

$$\text{и} \quad p_2 V = \frac{M_2}{\mu} R T_2$$

Но в случая $P_1 = P_2 = P_{\text{атм.}}$ и при сравняване на

(1) с (2) следва, че

$$(3) \quad M_1 T_1 = M_2 T_2 \quad \text{или} \quad M_2 = M_1 \frac{T_1}{T_2} \quad (4)$$

$$(5) \quad \Delta M = M_1 - M_2 = M_1 - M_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = M_1 \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2} \right)$$

Определяме от (1), че $M_1 = P_1 V \mu (R T_1)^{-1}$ (6) и

заместваме (6) в (5) като получаваме, че

$$(7) \quad \Delta M = \frac{P_1 \mu V}{R T_1} \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2} \right)$$

Получената зависимост

(7) в общо решение на

задачата. Тук $P_1 = 1 \text{ физ.атм.} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $\mu = 29 \text{ кг/кмол}$,

$R = 8315 \text{ Дж/кмол} \cdot \text{К}$, $T_1 = t_1 + 273 = 15 + 273 = 288^\circ \text{К}$ и

$T_2 = t_2 + 273 = 21 + 273 = 294^\circ \text{К}$.

Численото пресмятане от (7) дава следния резултат $\Delta M = 1,0515 \text{ кг}$.

Допълнително към задачата можем да определим броя на молекулите въздух (Δn), който отговаря на масата (ΔM) - тоест броя на молекулите на въздуха, които са напуснали стаята.

$$\Delta n = \left(\frac{\Delta M}{\mu} \right) \cdot N_A = \left(\frac{1,0515}{29} \right) \cdot 6,023 \cdot 10^{26} = 2,184 \cdot 10^{25} \text{ молекули.}$$

В първото състояние на въздуха в стаята ($t_1 = 15^\circ \text{C}$) броят на молекулите в единица обем е

$$(n_0)_1 = \frac{P_1}{R T_1} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{8315 \cdot 288} = 2,549 \cdot 10^{25} \frac{\text{молекули}}{\text{м}^3}$$

а във второто състояние (при $t_2 = 21^\circ \text{C}$)

$$(n_0)_2 = \frac{P_1}{R T_2} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{8315 \cdot 294} = 2,497 \cdot 10^{25} \frac{\text{молекули}}{\text{м}^3}$$

Общият брой молекули въздух в първото състояние е

$n_2 = (n_0)_2 V = 2,497 \cdot 10^{25} / 42 = 1,0487 \cdot 10^{27}$ молекули.
а във второто състояние е

$n_1 = (n_0)_1 V = 2,549 \cdot 10^{25} / 42 = 1,0706 \cdot 10^{27}$ молекули.

Тогава $\Delta n^* = n_1 - n_2 = (1,0706 - 1,04874) \cdot 10^{27} =$
 $= 0,02186 \cdot 10^{27} = 2,186 \cdot 10^{25}$ молекули.

Следователно $\Delta n \approx \Delta n^*$, както и трябва да се получи от задачата.

ЗАДАЧА № 13 Плътноста на газ, смес от аргон и хелий, при налягане $p_{см} = 152 \text{ kPa}$ и температура $T = 300^\circ\text{K}$ е $\rho_{см} = 2 \text{ kg/m}^3$. Каква е концентрацията на атомите на двете компоненти?

РЕШЕНИЕ :

Прилагаме основното уравнение за състоянието на идеален газ за двете компоненти:

$$(1) \frac{(p_n)_A}{M_A} \cdot V_{см} = \frac{M_A}{R_g T} \quad \text{и} \quad (2) \frac{(p_n)_X}{M_X} \cdot V_{см} = \frac{M_X}{R_g T}$$

От (1) и (2) определяме плътностите на двете компоненти:

$$(3) \rho_A = \frac{M_A}{V_{см}} = \frac{M_A (p_n)_A}{R_g T} \quad \text{в} \quad (4) \rho_X = \frac{M_X}{V_{см}} = \frac{M_X (p_n)_X}{R_g T}$$

$$\text{Но (5) } \rho_{см} = \rho_A + \rho_X = \frac{M_A (p_n)_A}{R_g T} + \frac{M_X (p_n)_X}{R_g T}$$

$$(6) \rho_{см} = \frac{1}{R_g T} [M_A (p_n)_A + M_X (p_n)_X]$$

От (6) определяме парциалното налягане на аргона $(p_n)_A$ в газовата

$$(7) (p_n)_A = \frac{\rho_{см} R_g T - (p_n)_X M_X}{M_A}$$

От закона на Далтон следва, че (8) $P_{см} = (P_n)_A + (P_n)_X$.

Заместваме $(P_n)_A$ от (7) в (8) и получаваме, че

$$(9) (P_n)_X = \frac{P_{см} \cdot \mu_A - P_{см} R_g T}{\mu_A - \mu_X}$$

Но от основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ

$$(10) (n_0)_A = \frac{(P_n)_A}{k_B T} \quad \text{и} \quad (11) (n_0)_X = \frac{(P_n)_X}{k_B T}$$

Заместваме (7) и (9) съответно в (10) и (11) и окончателно получаваме

$$(12) (n_0)_A = \frac{P_{см} R_g T - \mu_X P_{см}}{(\mu_A - \mu_X) k_B T} \quad \text{и} \quad (13) (n_0)_X = \frac{P_{см} \cdot \mu_A - P_{см} R_g T}{(\mu_A - \mu_X) k_B T}$$

Предварително, заместваме (9) в (7) и получаваме окончателно, че

$$(7) (P_n)_A = \frac{P_{см} R_g T - \mu_X P_{см}}{(\mu_A - \mu_X)}$$

Но аргона и хелия са благородни

газове и се намират в атомно състояние, като $\mu_A = 40 \text{ kg/katom}$.

и $\mu_X = 4 \text{ kg/katom}$. Заместваме числените стойности на всички

известни характеристики в (12) и (13) и определяме $(n_0)_A$ и $(n_0)_X$ при $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ и $R_g = 8315 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$.

Получават се следните резултати: $(n_0)_A = 2,940 \cdot 10^{25} \text{ атоми/м}^3$;

$(n_0)_X = 7,322 \cdot 10^{24} \text{ атоми/м}^3$.

Допълнително към задачата от (7) и (9) можем да определим

парциалните налягания на двете компоненти $(P_n)_A$ и $(P_n)_X$.

Получават се следните резултати: $(P_n)_A = 1,217 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ и $(P_n)_X = 3,031 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,303 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Проверка: $(P_n)_A + (P_n)_X = (1,217 + 0,303) \cdot 10^5 =$

$$= 1,520 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 152 \text{ kPa} \text{ (Верно!)}$$

$$\text{Действително } (P_{\text{п}})_A + (P_{\text{п}})_X = P_{\text{см}}$$

Можем да определим плътностите на двете компоненти от (3) и (4), като получаваме следните резултати:

$$\rho_A = 1,9515 \text{ kg/m}^3 \quad \text{и} \quad \rho_X = 0,0486 \text{ kg/m}^3$$

Проверка: $\rho_A + \rho_X = (1,9515 + 0,0486) = 2,0001 \text{ kg/m}^3$.
(Верно!). Следователно, действително $\rho_A + \rho_X = \rho_{\text{см}}$. Липсата на информация в условието на задачата за обема ($V_{\text{см}}$) не дава възможност да намерим масите (M_A) и (M_X), с които участвуват двете компоненти в газовата смес.

Да допуснем, че $V_{\text{см}} = 1 \text{ литър} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$. Тогава, от (3) и (4) следва, че (14) $M_A = \rho_A V_{\text{см}}$ и (15) $M_X = \rho_X V_{\text{см}}$.
От (14) и (15) след осъществяване на съответните числени пресмятания се получават следните резултати: $M_A = 1,9515 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 1,9515 \text{ g}$ и $M_X = 0,0486 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 0,0486 \text{ g} = 48,6 \text{ mg}$.
Общата маса на сместа е $M_{\text{см}} = M_A + M_X = 2,000 \text{ g}$. Следователно, процентното масово съдържание на аргона е $X_A (\%) = \left(\frac{M_A}{M_{\text{см}}} \right) \cdot 100 = 97,575\%$, а на хелия е $X_X (\%) = \left(\frac{M_X}{M_{\text{см}}} \right) \cdot 100 = 2,43\%$

ЗАДАЧА № 14 Два балона са свързани с малка и къса тръбичка с кран. В първия балон с обем $V_1 = 1 \text{ литър}$ се намира газ при налягане $P_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, а във втория - с обем $V_2 = 3 \text{ литра}$, налягането на газа е $P_2 = 0,6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Какво налягане (P) ще се установи в балоните, когато крана се отвори? Температурата на газа е постоянна при всички състояния на газовата система.

РЕШЕНИЕ:

За началните състояния на газа в двата балона прилагаме уравнението за състоянието на идеалния газ (Клапейрон-Менделеев)

$$(1) P_1 V_1 = \frac{M_1}{\mu} R T_1$$

$$\text{и } (2) P_2 V_2 = \frac{M_2}{\mu} R T_2$$

Но съгласно условието на задачата $T_1 = T_2 = T = \text{const.}$

Вземаме отношението на (1) и (2) и получаваме, че:

$$(3) \quad \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{M_1}{M_2} \quad \text{и тогава (4) } M_1 = \left(\frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} \right) M_2.$$

Прилагаме уравнението за състоянието на идеалния газ и в случая на отваряне на крана и получаване на смесването на двете компоненти

$$(4) \quad P(V_1 + V_2) = \left(\frac{M_1 + M_2}{\mu} \right) R \cdot T \quad . \text{ Делим почленно (2) на}$$

(4) и получаваме, че

$$(5) \quad \frac{P_2 V_2}{P(V_1 + V_2)} = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

Заместваме (4) в (5) и получаваме, че

$$(6) \quad P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{(V_1 + V_2)}$$

Получената зависимост (6) е общо решение на задачата

за определяне на налягането (P). Численото пресмятане от (6) дава следния резултат $P = 7,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Полученият резултат е

очакван, защото трябва да бъде изпълнено условието $P_2 < P < P_1$ при смесването на двете компоненти на газа в изотермичен режим.

ЗАДАЧА № 15 Въглероден двуокис (CO_2) с маса $M = 8 \text{ g}$ е затворен в съд с обем $V = 3$ литра при температура $t = 12^\circ\text{C}$. Покажете какви характеристики на газа можете да определите, ако приемете, че той се проявява като идеален газ.

РЕШЕНИЕ :

Първо да приведем всички дадени физични величини чрез стойностите им в СИ система: $M = 8 \text{ g} = 0,008 \text{ kg}$; $V = 3$ литра $= 3 \text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $T = 12 + 273 = 285 \text{ K}$.

1. Прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ и определяме налягането (P)

$$(1) PV = \frac{M}{\mu} R_r T$$

или (2) $P = \left(\frac{M}{\mu}\right) \frac{R_r T}{V}$

Тук $m(\text{CO}_2) = A(\text{C}) + 2A(\text{O}) \approx 12 + 2(16) = 44 \text{ аем.}$

или $\mu(\text{CO}_2) = 44 \text{ кг/кмол.}$ Но $1 \text{ аем.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

и тогава $m(\text{CO}_2) = 44(1,66 \cdot 10^{-27}) = 7,304 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$ е масата на една молекула (CO_2). От (2) определяме (P) при отчитане, че $R_r = 8315 \text{ J/кмол.К.}$, като се получава резултата $P = 4,309 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 4,2534 \text{ физ.атм.}$

2. Определяме плътността (3) $\rho = \frac{M}{V} = 2,667 \text{ кг/м}^3$.

3. Определяме броя на молекулите в единица обем (n_0), чрез прилагане на основното уравнение на кинетичната теория на газовете (4) $n_0 = P (k_B T)^{-1}$. За целта заместваем (P) от (2) в (4) и получаваме, че

$$(5) n_0 = \left(\frac{1}{k_B T}\right) \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r T}{V}\right) = \frac{M \cdot N_A}{\mu V}$$

Тук (N_A) е числото на Авогадро

(6) $N_A = \frac{R_r}{k_B} = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмол}^{-1}$ Тогава от (5) получаваме, че $n_0 = 3,651 \cdot 10^{25} \text{ молекули/м}^3$.

4. Определяме характеристичните скорости на хаотичното топлинно движение на молекулите: най-вероятна ($V_{\text{нв}}$), средноаритметична ($V_{\text{ср.ар.}}$) и средноквадратична ($V_{\text{ср.кв.}}$.)

$$(7) V_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2 R_r T}{\mu}} \quad ; \quad (8) V_{\text{ср.ар.}} = \sqrt{\frac{2,6 R_r T}{\mu}} \quad ; \quad (9) V_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3 R_r T}{\mu}}$$

Получават се след пресмятаня следните резултати: $V_{\text{нв}} = 328,203 \text{ м/с}$; $V_{\text{ср.ар.}} = 384,209 \text{ м/с}$; $V_{\text{ср.кв.}} = 401,965 \text{ м/с}$.

5. Определяме кинетичните енергии на молекулите на (CO_2) при характеристичните скорости на хаотичното топлинно движение

$$(10) (\varepsilon_k)_{\text{нв}} = \frac{1}{2} m v_{\text{нв}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{N_A} \right) \frac{2 R T}{\mu} = \frac{R T}{N_A}$$

$$(11) (\varepsilon_k)_{\text{ср.ср.}} = \frac{1}{2} m v_{\text{ср.ср.}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{N_A} \right) \frac{2,6 R T}{\mu} = \frac{1,3 R T}{N_A}$$

$$(12) (\varepsilon_k)_{\text{ср.кв.}} = \frac{1}{2} m v_{\text{ср.кв.}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{N_A} \right) \frac{3 R T}{\mu} = \frac{1,5 R T}{N_A}$$

Товага от (10 + 12) чрез числено пресмятане определяме, че
 $(\varepsilon_k)_{\text{нв}} = 3,9345 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0246 \text{ eV}$; $(\varepsilon_k)_{\text{ср.ср.}} = 5,1149 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,03197 \text{ eV}$ и $(\varepsilon_k)_{\text{ср.кв.}} = 5,9018 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,036886 \text{ eV}$.
 Тук приемаме, че $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

6. Да определим температурата на "израждане" на газа (CO_2). За целта използваме зависимостта

$$(13) T_1^* = \frac{h \eta^2 (n)^{2/3}}{3 m k_B} \quad \text{и} \quad (14) T_2^* = \left(\frac{h \eta}{2 m k_B} \right)^2 \left(\frac{3 n}{8 \pi} \right)^{3/2}$$

като $T_1^* \approx 2,69 T_2^*$. Тук (T_1^*) се получава от елементарни, а (T_2^*) от по-строги разглеждания. Статистиката на Максвел-Болцман може да се прилага за дадения газ (CO_2) при $T \gg T_1^*$

или $T \gg T_2^*$. За определяне на (T_1^*) от (13) трябва да знаем числената стойност на първата константа на Планк $h_P = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Числените пресмятания (при $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$) дават следния резултат: $T_1^* = 0,01598^\circ\text{K}$ и тогава

$$T_2^* \approx \frac{T_1^*}{2,69} = \frac{0,01598}{2,69} = 0,00594^\circ\text{K}.$$

Както се знае от теорията $T_2^*(\text{He}) = 5,26 \cdot 10^{-2} = 0,0526^\circ\text{K}$ и всички други газове (особено водорода) имат маси по-големи от хелия и по-ниски температури на "израждане". Следователно, за всички газове температурите на "израждане" са по-ниски от 1°K и спокойно към

тях можем да прилагаме класическата статистика на Максвел-Болцман.

ЗАДАЧА № 16 Аргон с маса $M = 4\text{g}$ заема обем $V = 1,0 \cdot 10^{-4}\text{m}^3$ под налягане $P = 2,50\text{MPa}$. Да се определи температурата на газа, като се приеме за: а) идеален; б) реален.

РЕШЕНИЕ :

а) За идеалния газ прилагаме основното уравнение за състоянието на газа

$$(1) \quad PV = \frac{M}{\mu} R T \quad \text{и тогава } (2) \quad T = \frac{\mu PV}{MR}$$

Аргона е благороден газ и атомната му маса, е $M_A = 40\text{kg/katom}$.
Тогаво от (2) определяме, че $T = 300,698^\circ\text{K} \approx 301^\circ\text{K}$.

б) За реален газ, основното уравнение за състоянието му е на Ван-дер-Ваалс (за 1 кмол или 1 katom)

$$(3) \quad \left(P + \frac{a}{V_{\mu}^2}\right) \cdot (V_{\mu} - b) = R T$$

Ако напишем (3) за $M\text{kg}$ газ с обем $V = \frac{M}{\mu} V_{\mu}$ (4) и

$$V_{\mu} = \frac{\mu V}{M} \quad (5), \text{ тогава замествайки } (V_{\mu}) \text{ от (5) в (3)}$$

получаваме, че:

$$(6) \quad \left(P + \frac{M^2 a}{\mu^2 V^2}\right) \cdot \left(\frac{\mu V}{M} - b\right) = R T \quad \text{ИЛИ}$$

$$(7) \quad \left(P + \frac{M^2 a}{\mu^2 V^2}\right) \cdot \left(V - \frac{M b}{\mu}\right) = \frac{M}{\mu} R T$$

Тук ван-дер-ваалсовите константи за аргона са $a = 136 \cdot 10^3 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^6}{\text{кмол}^2}$ и $b = 0,032 \text{m}^3/\text{кмол}$.

От (7) определяме окончателния вид на зависимостта за определяне на (T)

$$(8) T = \frac{\mu}{Mk_r} \left(\rho + \frac{M^2 a}{\mu^2 V^2} \right) \cdot \left(V - \frac{Mv}{\mu} \right).$$

Зависимостта (8) за определяне на (T) се явява общо решение на задачата. От (8) след числени представяния на характеристиките (при $M = 4 \text{ g} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$) се получава, че $T = 306,96^\circ\text{K} \approx 307^\circ\text{K}$.

Допълнително към задачата дадена със съответното условие можем да определим: плътността на газа (ρ); броят на молекулите (атомите) в единица обем (N_0); характеристичните скорости на хаотичното топлинно движение на атомите ($V_{\text{нв}}$, $V_{\text{ср.ар.}}$, $V_{\text{ср.кв.}}$); съответните кинетични енергии [$(E_k)_{\text{нв}}$; $(E_k)_{\text{ср.ар.}}$; $(E_k)_{\text{ср.кв.}}$]; отговарящи на характеристичните скорости, температурите (T_1^*) и (T_2^*) на "израждане". Числените пресмятания дават следните резултати:

$$(9) \rho = \frac{M}{\mu} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-4}} = 40 \text{ kg/m}^3$$

$$(10) N_0 = \frac{\rho}{k_B T} = \frac{2,50 \cdot 10^6}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (301)} = 6,0186 \cdot 10^{26} \text{ атоми/m}^3.$$

$$\begin{aligned} V_{\text{нв}} &= 353,75 \text{ м/с} ; V_{\text{ср.ар.}} = 403,34 \text{ м/с} ; V_{\text{ср.кв.}} = \\ &= 433,26 \text{ м/с} ; (E_k)_{\text{нв}} = 4,155 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,02597 \text{ eV} ; \\ (E_k)_{\text{ср.ар.}} &= 5,4015 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,03376 \text{ eV} ; (E_k)_{\text{ср.кв.}} = \\ &= 6,2325 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,03895 \text{ eV} ; T_1^* = 0,11345^\circ\text{K} \text{ и } T_2^* = \\ &= 0,04217^\circ\text{K}. \text{ Тук масата на атомите на аргона е } m(A_2) = 40(1,66 \cdot 10^{-27}) = \\ &= 10^{-26} \cdot 6,664 \text{ kg}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА № 17 Смесь от азот и аргон при температура $t = 18^\circ\text{C}$ се намира под налягане $P = 1,30$ физ.атм. Масата на азота е 52% от общата маса на газовата смесь. Определете обемната концентрация на молекулите на всяка от компонентите в газовата смесь.

РЕШЕНИЕ:

Използваме основното уравнение на кинетичната теория за определене налягането ($P_{см}$) на газовата смес

$$(1) P = P_{см} = n_{см} k_B T_{см} = n_{см} k_B T \quad \text{тук } T_{см} = T \text{ по}$$

условието на задачата. Привеждаме физичните характеристики в СИ-система: $T = t + 273 = 18 + 273 = 291^\circ\text{K}$; $P = P_{см} = 1,3 \text{ физ.атм.} = 1,3169 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

От условието на задачата следва, че

$$(2) M(N_2) = C(N_2) M_{см} = 0,52 M_{см}.$$

$$(3) M(A_2) = C(A_2) M_{см} = (1 - 0,52) M_{см} = 0,48 M_{см}.$$

$$(4) M(N_2) + M(A_2) = M_{см}.$$

$$\text{От (1) определяме, че } n_{см} = \frac{P_{см}}{k_B T} = \frac{P}{k_B T} \quad (5)$$

(при $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ - константата на Болцман). Масата на всеки от газовете, участващи в сместта може да бъде определена от зависимостите:

$$(6) M(N_2) = n(N_2) \left[\frac{\mu(N_2)}{N_A} \right] V_{см} \quad \text{и} \quad (7) M(A_2) = n(A_2) \left[\frac{\mu(A_2)}{N_A} \right] V_{см}.$$

Тук $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ молек./кмол}$ е числото на Авогадро; а $n(N_2)$ и $n(A_2)$ са обемните концентрации на молекулите на всяка газова компонента, като

$$(8) n_{см} = n(N_2) + n(A_2)$$

Приравняваме дясните части на (2) с (6) и на (3) с (7) и получаваме, че

$$(9) 0,52 M_{см} = n(N_2) \left[\frac{\mu(N_2)}{N_A} \right] V_{см} = C(N_2) M_{см}.$$

$$(10) 0,48 M_{cm} = n(A_2) \left[\frac{\mu(A_2)}{N_A} \right] V_{cm} = C(A_2) M_{cm}.$$

Делим почленно (9) и (10) и получаваме

$$(11) \frac{0,52}{0,48} = \frac{C(N_2)}{C(A_2)} = \frac{n(N_2)\mu(N_2)}{n(A_2)\mu(A_2)}$$

$$(12) \frac{n(N_2)}{n(A_2)} = \frac{C(N_2)\mu(A_2)}{C(A_2)\mu(N_2)} = \left(\frac{0,52}{0,48} \right) \cdot \frac{40}{28} = 1,5476$$

Тук $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/kmol}$ и $\mu(A_2) = 40 \text{ kg/katom}$. Следователно, от (12) следва, че (13) $n(N_2) = 1,5476 n(A_2)$.

Заместваме (13) в (8) и получаваме, че

$$(14) n_{cm} = 1,5476 n(A_2) + n(A_2) = 2,5476 n(A_2).$$

От (14) следва, че

$$(15) n(A_2) = \frac{n_{cm}}{2,5476} = 0,3925(n_{cm}).$$

Заместваме (15) в

(13) и получаваме,

$$\text{че (16) } n(N_2) = 1,5476 [0,3925(n_{cm})] = 0,6075(n_{cm}).$$

Заместваме (5) в (15) и (16) и получаваме окончателно, че

$$(17) n(A_2) = 0,3925 \left(\frac{P}{k_B T} \right) \quad \text{и} \quad (18) n(N_2) = 0,6075 \left(\frac{P}{k_B T} \right)$$

Така получените зависимости (17) и (18) се явяват общите решения на задачата, за определяне на $n(A_2)$ и $n(N_2)$. Числените решения дават следните резултати: $n(A_2) = 1,287 \cdot 10^{25}$ атоми/ m^3 и $n(N_2) = 1,992 \cdot 10^{25}$ молекули/ m^3 .

+ Допълнително към задачата можем да определим (n_{cm})

от (5) като се получава, че $n_{cm} = 3,279 \cdot 10^{25}$ частици/ m^3 .

Проверка: $n(A_2) + n(N_2) = (1,287 + 1,992) 10^{25} = 3,279 \cdot 10^{25}$ частици/ m^3 . При сравняване с (n_{cm}) се вижда наличието

на пълно съвпадение, понеже от (8) следва, че

$$\mu_{см} = n(A_2) + n(N_2).$$

÷ Да определим плътностите на двете газови компоненти в сместа $\rho(A_2)$ и $\rho(N_2)$, както и плътността на газовата смес ($\rho_{см}$).

$$(19) \rho(A_2) = n(A_2) \cdot m(A_2) \quad \text{и} \quad (20) \rho(N_2) = n(N_2) \cdot m(N_2).$$

$$\text{Тук } m(A_2) = 40 \text{ аем} = 40(1,66 \cdot 10^{-27}) = 6,664 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$$

$$m(N_2) = 28 \text{ аем} = 28(1,66 \cdot 10^{-27}) = 4,665 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$$

Тогава от (19) и (20), знаейки стойностите на $n(A_2)$ и $n(N_2)$ определяме, че $\rho(A_2) = 0,8576 \text{ кг/м}^3$ и $\rho(N_2) = 0,9293 \text{ кг/м}^3$.

$$\begin{aligned} \text{Тогава общата плътност на газовата смес е } \rho_{см} &= \\ &= \rho(A_2) + \rho(N_2) = 0,8576 + 0,9293 = 1,787 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

÷ Да определим парциалните налягания на всяка от газовите компоненти в сместа. За целта използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ.

$$(21) P_n(A_2) = n(A_2) k_B T \quad \text{и} \quad (22) P_n(N_2) = n(N_2) k_B T$$

Заместваме получените стойности за $n(A_2)$ и $n(N_2)$ в (21) и

$$\begin{aligned} (22) \text{ и получаваме следните резултати: } P_n(A_2) &= 5,168 \cdot 10^4 \text{ Pa} = \\ &= 0,5168 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,510 \text{ физ.атм.}; P_n(N_2) = 7,999 \cdot 10^4 \text{ Pa} = \\ &= 0,7999 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,7897 \text{ физ.атм.} \end{aligned}$$

Проверка: $P_n(A_2) + P_n(N_2) = (0,510 + 0,790) = 1,300$ физ.атм. Сравняваме полученият резултат с $P = \rho_{см} = 1,30$ физ.атм. от условието на задачата и виждаме наличието на пълно съвпадение. Това показва, че $\rho_{см} = \rho_n(A_2) + \rho_n(N_2)$ и с това показваме валидността на закона на Далтон за смесване на две газове компоненти в изотермичен режим ($T = const.$).

ЗАДАЧА № 18 Образувана е газова смес от: азот с маса

$$M_1 = 2,5 \text{ g}; \text{ кислород с маса } M_2 = 1,8 \text{ g}; \text{ аргон с маса } M_3 =$$

= 1,1 g и хелий с маса $M_{He} = 0,75 g$. Сместа се намира в съд с обем $V = 5$ литра и при температура $t = 12^{\circ}C$. Определете: ефективната маса на газовата смес $(\mu_{ef})_{см}$ и нейното налягане $(P)_{см}$; парциалните налягания на всяка от компонентите (P_i) ; и някои други характеристики по желание.

РЕШЕНИЕ:

Първо - представяме молните маси на всяка от компонентите в газовата смес: $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/кмол}$; $\mu(O_2) = 32 \text{ kg/кмол}$
 $\mu(Ar) = 40 \text{ kg/кмол}$ и $\mu(He) = 4 \text{ kg/кмол}$. След това определяме масата на газовата смес $M_{см} = \sum_{i=1}^4 M_i = 2,5 + 1,8 + 1,1 + 0,75 = 6,15 g = 6,15 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ и броя на взетите молекули от всяка компонента

$$(n_i)_{см} = \frac{M_i}{\mu_i}; \quad n_{(N_2)} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{28} = 8,9286 \cdot 10^{-5} \text{ кмол}$$

$$n_{(O_2)} = \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{32} = 5,625 \cdot 10^{-5} \text{ кмол}; \quad n_{(Ar)} = \frac{1,1 \cdot 10^{-3}}{40} = 2,750 \cdot 10^{-5} \text{ кмол};$$

$$n_{(He)} = \frac{0,75 \cdot 10^{-3}}{4} = 18,75 \cdot 10^{-5} \text{ кмол}.$$

В заключение минаваме към определяне на $(\mu_{ef})_{см}$, като използваме зависимостта:

$$(1) (\mu_{ef})_{см} = \left[\sum_{i=1}^4 M_i \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^4 \left(\frac{M_i}{\mu_i} \right) \right]^{-1} = M_{см} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\frac{M_i}{\mu_i} \right) \right]^{-1}$$

$$(2) (\mu_{ef})_{см} = \frac{6,15 \cdot 10^{-3}}{(8,9286 + 5,625 + 2,750 + 18,75) \cdot 10^{-5}} = \frac{615}{36,0536} = 17,058 \frac{\text{kg}}{\text{кмол}}$$

Второ - прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ

$$(3) P_{см} V_{см} = \frac{M_{см}}{(\mu_{ef})_{см}} \cdot R T$$

и (4) $P_{см} = \frac{M_{см}}{(\mu_{ef})_{см}} \cdot \left(\frac{R T}{V_{см}} \right)$

Тук $T = t + 273 = 12 + 273 = 285^{\circ}\text{K}$ и $V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, като при заместване на числените стойности на участващите физични величини в (4) определяме, че $P_{\text{см}} = 1,7088 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,6868 \text{ физ.атм.}$

Трето - за да определим парциалните налягания на всяка от компонентите в газовата смес ще използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ

$$(5) (P_n)_i = (n_0)_i k_B T \quad \text{при } k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Следователно, за да можем да определим $(P_n)_i$ от (5) е необходимо предварително да знаем $(n_0)_i$ - обемната концентрация на молекулите на всяка от компонентите.

Но (6) $(n_0)_i = (n_{\mu})_i N_A (V_{\text{см}})^{-1}$ където $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ молекули/кмол. Заместваме (6) в (5) и получаваме, че

(7) $(P_n)_i = k_B T (n_{\mu})_i N_A (V_{\text{см}})^{-1}$. Заместваме получените стойности на съответните физични величини в (7) и получаваме следните резултати: $P_n(N_2) = 0,4230 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,4176 \text{ физ.атм.}$; $P_n(O_2) = 0,2666 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,2632 \text{ физ.атм.}$; $P_n(Ar) = 0,1303 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,1286 \text{ физ.атм.}$; $P_n(He) = 0,8884 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,8770 \text{ физ.атм.}$

Проверка: Събираме $\sum_{i=1}^4 (P_n)_i$ и получаваме, че

$$\sum_{i=1}^4 (P_n)_i = (0,4230 + 0,2666 + 0,1303 + 0,8884) \cdot 10^5 = 1,7083 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Сравняваме получения резултат с $P_{\text{см}} = 1,7088 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ и виждаме наличието на почти пълно съвпадение. С това показваме наличието на закона на Далтон, че $P_{\text{см}} = \sum_{i=1}^4 (P_n)_i$.

Допълнително към задачата можем да определим $(n_0)_i$ от (8) като получаваме следните резултати: $n_0(N_2) = 1,0755 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$; $n_0(O_2) = 0,6778 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$; $n_0(Ar) = 0,3313 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ и $n_0(He) = 2,2588 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

Можем да определим плътността $(\rho)_i$ на всяка компонента от зависимостта (8) $\rho_i = M_i / (V_{\text{см}})^3$. Численото

пресмятане от (8) дава следните резултати: $\rho(N_2) = 0,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;
 $\rho(O_2) = 0,360 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\rho(Ar) = 0,220 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ и $\rho(He) = 0,150 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

. Следователно

$$\rho_{\text{см}} = \rho(N_2) + \rho(O_2) + \rho(Ar) + \rho(He) = 0,50 + 0,36 + 0,22 + 0,15 = 1,23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

$$\text{Но } \rho_{\text{см}} = \left(\sum_{i=1}^4 M_i \right) V_{\text{см}}^{-1} = M_{\text{см}} V_{\text{см}}^{-1} = 6,15 \cdot 10^{-3} (5 \cdot 10^{-3})^{-1} = 1,23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

получава се пълно съвпадение, което показва, че изчисленията са верни. Можем да направим и втори вид проверка. Да определим

$$(N_0)_{\text{см}} = \sum_{i=1}^4 (N_0)_i = 4,3434 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \text{ и да определим масата } (M) \text{ на една частица от сместа: } m = 17,056 \text{ ае.м.} = 17,056$$

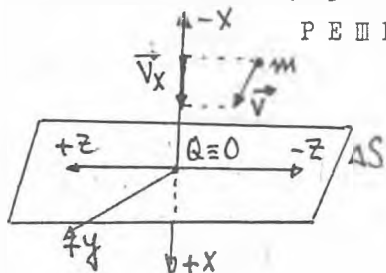
$$(1,66 \cdot 10^{-27}) = 2,8313 \cdot 10^{-26} \text{ kg. Тогава } \rho_{\text{см}} = (N_0)_{\text{см}} \cdot m = 4,3434 \cdot 10^{25} (2,8313 \cdot 10^{-26}) = 1,22975 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 1,23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

която съвпада с $\rho_{\text{см}}$ определена по-горе в задачата. Допълнително

в задачата можем да определим характеристичните скорости на хаотичното топлинно движение и съответстващи ги кинетични енергии на молекулите от всяка компонента, но за да не натоварваме повече решението на задачата, това предоставяме на обучаващия се студент.

ЗАДАЧА № 19) Концентрацията на молекулите на азота (N_2) в даден съд е $N_0 = 1,25 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ при температура $t = 15^\circ\text{C}$.

Газът се намира в топлинно равновесие. Определете плътността на потока от молекули, нанасящ удари върху стените на съда.



РЕШЕНИЕ :

Вземаме повърхнинен елемент

ΔS от стените на съда и в т. Q на този елемент поставяме началото (т. $Q \equiv \text{т. } O$)

на координатни системи (OXY).

Нека една молекула с маса (m) има скорост (\vec{v}). За да нанесе удар върху (ΔS) тази молекула трябва да има $|\vec{v}_x| > 0$ и $|\vec{v}_x| \neq 0$. Използваме зависимостта за плътността на вероятността $f(v_x)$ при разпределение (максвелово) на молекулите по компонентите на скоростта [$(\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z)$ и $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$]

$$(1) f(v_x) = \frac{dN_x}{N dv_x} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right)$$

Нека обема на газа да е (V_r) и

тогава от (1) следва:

$$(2) f(v_x) = \frac{d(Nx/V_r)}{\left(\frac{N}{V_r}\right) dv_x} = \frac{dn_x}{n_0 dv_x} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right)$$

От (2) определяме (dn_x) и получаваме, че

$$(3) dn_x = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \left[\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right)\right] dv_x$$

От броя (dn_x) на молекули в единица обем, за единица време достигат единица повърхност от стената на съда тези, които са на разстояние от нея равно на числената стойност на скоростта (v_x).
Тогава броят на тези молекули е равен на (dn_x^*)

$$(4) dn_x^* = v_x n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \left[\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right)\right] dv_x$$

Пълното число молекули, които за единица време достигат единица повърхност от стената на съда е

$$(5) \Pi_n = \int_0^{\infty} dn_x^* = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x \left[\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right)\right] dv_x.$$

Нека да приемем, че $m(2k_B T)^{-1} = a$ (6) и като заместим (6) в (5) получаваме, че

$$(7) \quad \Pi_n = \frac{n_0 \sqrt{a}}{2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [\exp(-av_x^2)] dv_x^2 = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}a} \int_0^{\infty} [\exp(-av_x^2)] d(-av_x^2)$$

$$(8) \quad \Pi_n = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}a} \exp[-av_x^2] \Big|_0^{\infty} = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}a} (1-0) = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}a}$$

Заместваме (6) в (8) и получаваме, че (9)

$$\Pi_n = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2R_T}{\mu}}$$

Това е общото решение на задачата.

От разпределението на Максвел за молекулите по-големината на тяхната скорост (V) се определят характеристичните скорости: $V_{нв}$ - най-вероятна; $V_{ср.ар.}$ - средноаритметична и $V_{р.кв.}$ - средноквадратична скорост.

$$(10) \quad V_{нв} = \sqrt{\frac{2R_T}{\mu}} \quad (11) \quad V_{ср.ар.} = \sqrt{\frac{8R_T}{\pi\mu}} \quad (12) \quad V_{р.кв.} = \sqrt{\frac{3R_T}{\mu}}$$

Заместваме (10) в (9) и получаваме

$$(13) \quad \Pi_n = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}} V_{нв}$$

Ако преобразуваме израза в подкорената характеристика в (9)

можем да я приведем до вида на $V_{ср.ар.} = \bar{V}$ от (12) и тогава да модифицираме (9) до вида (14) $\Pi_n = \frac{n_0 \bar{V}}{4}$.

Численото пресмятане [при $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/kmol}$] от (9), (10) и (11) дава следните резултати: $\Pi_n = 1,4587 \cdot 10^{27}$ молекули/ $m^2 \cdot s$; $V_{нв} = 413,58 \text{ m/s}$ и $\bar{V} = V_{ср.ар.} = 466,80 \text{ m/s}$. Ако всички молекули в единица обем (n_0) имат посока само към стената, тогава $\Pi_n^* = n_0 V_{нв} = 5,1697 \cdot 10^{27}$ молекули/ $m^2 \cdot s$. Това

показва, че $K = \frac{n_n}{n_n^*} = \frac{1,4587 \cdot 10^{27}}{5,1697 \cdot 10^{27}} = 0,2822$

или 28,22% от молекулите наваят удари върху стената - тоест имат съответните необходими посоки $|\vec{v}_x| \neq 0$ и $(\vec{v}_x) > 0$. Допълнително към задачата можем да определим налягането (p) на молекулите на газа от основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ

$$(15) p = n_0 k_B T = 1,25 \cdot 10^{25} (1,38 \cdot 10^{-23}) \cdot 285 = 0,492 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,485 \text{ фуг. атм.}$$

ЗАДАЧА № 20 Определете каква част от молекулите на азота (N_2) при температура $t = 27^\circ\text{C}$ притежават скорости в интервала на модулните им стойности от $V_1 = 210 \text{ м/с}$ до $V_2 = 215 \text{ м/с}$

РЕШЕНИЕ :

Използваме зависимостта за плътността на вероятността $f(v)$ за разпределение на молекулите по големината на скоростта (v).

$$(1) f(v) = \frac{dN}{N dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

а след това към плътността на вероятността $f(u)$ за разпределение по относителната скорост $u = v/v_{\text{нв}}$. (2). Тогава от

(1) се получава

$$(3) f(u) = \frac{dN}{N du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)$$

$$(4) \frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 [\exp(-u^2)] du.$$

Получената зависимост (4) се явява общо решение на задачата. За да преминаем към числено решение, първо ще определим ($v_{\text{нв}}$) от зависимостта:

$$(5) \quad v_{\text{HВ}} = \sqrt{\frac{2 R_r T}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 (8315) 300}{28}} = 422,11 \text{ м/с.}$$

при $\mu(N_2) = 28 \text{ кг/кмол}$, $R_r = 8315 \text{ Ж/кмол.К}$ и $T = 27 + 273 = 27 + 273 = 300^\circ\text{К}$. Тогава от (2) следва, че

$$u = \frac{v}{v_{\text{HВ}}} = \frac{v_1}{v_{\text{HВ}}} = \frac{210}{422,11} = 0,4975$$

$$\text{и } \Delta u = \frac{\Delta v}{v_{\text{HВ}}} = \frac{v_2 - v_1}{v_{\text{HВ}}} = \frac{215 - 210}{422,11} = 0,01184$$

От (4) представяме $(\Delta N/N)$ във вида

$$(6) \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 [\exp(-u^2)] \Delta u. \quad \text{Зависимостта}$$

(6) се явява общото решение на задачата в окончателен вид. Численото пресмятане от (6) след заместване на (u) и (Δu) дава следния резултат: $\Delta N/N = 0,005167$ или $\Delta N/N$ отговаря на 0,5167%.

Допълнително към задачата можем да определим кинетичните енергии на молекулите при трите разглеждани скорости в задачата. (7) $E_k(v_1) = \frac{1}{2} m v_1^2$ (8) $E_k(v_2) = \frac{1}{2} m v_2^2$
 (9) $E_k(v_{\text{HВ}}) = \frac{1}{2} m v_{\text{HВ}}^2$. Остава да намерим масата на една молекула азот (N_2).

$$(10) \quad m(N_2) = \frac{\mu(N_2)}{N_A} = \frac{28}{6,023 \cdot 10^{26}} = 4,6488 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Тогава замествайки $m(N_2)$ от (10) в (7 + 9) се получават следните резултати: $E_k(v_1) = 1,025 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,00641 \text{ eV}$; $E_k(v_2) = 1,0744 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,00671 \text{ eV}$; $E_k(v_{\text{HВ}}) = 4,1415 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0259 \text{ eV}$.

Нека да определим $\frac{\Delta N^*}{N^*}$ при скоростния интервал $v_1^* = v_{\text{HВ}} = 422,11 \text{ м/с}$ и $v_2^* = 427,11 \text{ м/с}$, като $\Delta v = \Delta v^* =$

$$= 5 \text{ м/с} \quad \text{Тогава } u = \frac{V_1^*}{V_{\text{НВ}}} = \frac{V_{\text{НВ}}}{V_{\text{НВ}}} = 1 \text{ и } \Delta u = \frac{\Delta V^*}{V_{\text{НВ}}} =$$

$$= \frac{5}{422,11} = 0,0118452. \text{ Тогава от (6) получаваме, че}$$

$$\frac{\Delta N^*}{N} = \frac{Y}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Delta u}{\exp(1)} = \frac{Y(\Delta u)}{\sqrt{\pi} (2,72)} = 0,00983.$$

или $\frac{\Delta N^*}{N}$ отговаря на $0,983\% \approx 1\%$. Следователно $\left(\frac{\Delta N^*}{N}\right) \approx 2 \left(\frac{\Delta N}{N}\right)$, т.е. вероятността е нарастнала около два пъти (точно 1,90 пъти).

ЗАДАЧА № 21 Температурата на кислорода (O_2) е $t = 208^\circ\text{C}$. Определете отношението на броя на молекулите от този газ, големините на скоростите, които лежат в интервала $V_1 = 798 \text{ м/с}$ и $V_2 = 802 \text{ м/с}$, към броя на молекулите - в интервала $V_3 = 398 \text{ м/с}$ и $V_4 = 402 \text{ м/с}$. Обяснете защо се получава такова отношение?

РЕШЕНИЕ:

Първо определяме температурата $T = t + 273 = 208 + 273 = 481^\circ\text{K}$, а след това най-вероятната скорост ($V_{\text{НВ}}$) при $\mu(O_2) = 32 \text{ кг/кмол}$.

$$(1) V_{\text{НВ}} = \sqrt{\frac{2R_0 T}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(8315)481}{32}} = 499,97 \text{ м/с} \approx 500 \text{ м/с}.$$

Двата скоростни интервала имат стойности: $\Delta V = V_2 - V_1 = 802 - 798 = 4 \text{ м/с}$ и $\Delta V^* = V_4 - V_3 = 402 - 398 = 4 \text{ м/с}$.

Определяме относителната скорост за двата случая

$$u = \frac{V_1}{V_{\text{НВ}}} = \frac{798}{500} = 1,5961; \quad u^* = \frac{V_3}{V_{\text{НВ}}} = \frac{398}{500} = 0,796.$$

Определяме и интервала (Δu) на относителната скорост (u)

$$\Delta u = \Delta\left(\frac{V}{V_{\text{НВ}}}\right) = \frac{\Delta V}{V_{\text{НВ}}} = \frac{4}{500} = 8,00 \cdot 10^{-3} = \Delta u^*$$

Преминваме към определяне на вероятността ($\frac{\Delta N}{N}$) и ($\frac{\Delta N^*}{N}$)

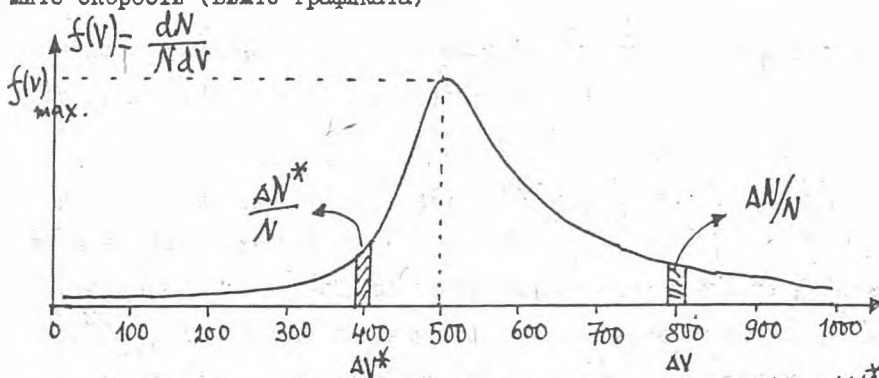
от зависимостите:

$$(2) \frac{\Delta N}{N} = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} u^2 [\exp(-u^2)] du \quad (3) \frac{\Delta N^*}{N} = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \left\{ \exp[-(u^*)^2] \right\} du^*$$

Това са общите решения на задачата за определяне на съответните вероятности да съществуват молекули, които да имат големи-ни на скорости в съответните скоростни интервали. Числените пресмятания от (2) и (3) дават следните резултати: $\Delta N/N = 0,0036$ и $\Delta N^*/N = 0,006072$. В задачата се иска да се определи $\Delta N/\Delta N^*$ тогава

$$(4) \frac{\Delta N}{\Delta N^*} = \frac{\Delta N/N}{\Delta N^*/N} = \frac{0,0036}{0,006072} = 0,593 \approx 0,60.$$

Полученият резултат показва, че $\Delta N < \Delta N^*$ и това се дължи на факта, че втория скоростен интервал е по-близо до най-вероятната скорост ($V_{нв}$) за която $(\Delta N/N)_{нв}$ приема максимална стойност, даже при симетрично разположение на $(\Delta N/N)_i$ спрямо $V_{нв}$. Като $f(v)$, така и dN/N имат по-голям наклон (като функция от v) при по-малките скорости и по-малък наклон към по-голямите скорости (вижте графиката)



Лицето на заштрихования правоъгълен трапец при $\Delta v = \Delta v^*$ дава $\Delta N/N$ и $\Delta N^*/N$.

ЗАДАЧА № 22 Температурата на водорода (H_2) е $T = 300^\circ$ К. Определете каква част от общото число на молекулите от този газ, са молекулите големините на скоростите на които се отличават от най-вероятната скорост (V_{HB}) на повече от 5 м/с.

РЕШЕНИЕ:

Първо определяме големината на най-вероятната скорост (V_{HB}) от зависимостта (1) при

$$(1) \quad V_{HB} = \sqrt{\frac{2R_r T}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(8315)300}{2}} = 1579,4 \text{ м/с.}$$

Тогава $V_1 = V_{HB} - 5 = 1579,4 - 5 = 1574,4 \text{ м/с.}$

$$V_2 = V_{HB} + 5 = 1579,4 + 5 = 1584,4 \text{ м/с.}$$

Интервалът (3) $\Delta V = V_2 - V_1 = 1584,4 - 1574,4 = 10 \text{ м/с.}$

Определяме чрез най-вероятната скорост (V_{HB}) и скоростта (V_1), относителната скорост на молекулите (4) $u = \frac{V_1}{V_{HB}} = 0,9968$.

и интервала (Δu) на (u), чрез

$$(5) \quad \Delta u = \Delta\left(\frac{V}{V_{HB}}\right) = \frac{\Delta V}{V_{HB}} = \frac{10}{1579,4} = 0,0063315.$$

Премиваваме към окончателно записване на общото решение на задачата за определяне на $\frac{\Delta N}{N}$ от разпределението на молекулите по относителната им скорост (u).

$$(6) \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 [\exp(-u^2)] \Delta u.$$

Веднага се вижда, че всички характеристики

в дясната страна на (6) са известно и следователно (6) се явява общото решение на задачата за определяне на вероятността ($\frac{\Delta N}{N}$) да съществуват молекули, които да имат скорости в скоростния интервал от (V_1) до (V_2). Численото пресмятане от (6) дава следния резултат $\frac{\Delta N}{N} = 0,005258$ или $\frac{\Delta N}{N} = 0,5258\%$. Следователно,

малко повече от половината молекули на газа притежават скорости в интервала от (V_1) до (V_2) .

ЗАДАЧА № 23 Най-вероятната скорост (V_{HB}), на някакъв газ е $V_{HB} = 1820 \text{ м/с}$. Какъв е този газ, ако температурата му е $t = 127^\circ\text{C}$. Определете средноаритметичната ($V_{cp.ap}$) и средно-квадратичната ($V_{cp.kb}$) скорости на молекулите.

РЕШЕНИЕ:

Записваме зависимостта (1) за (V_{HB})

$$(1) \quad V_{HB} = \sqrt{\frac{2R_r T}{\mu}} \quad \text{и} \quad (2) \quad \mu = \frac{2R_r T}{(V_{HB})^2}$$

Тук $T = t + 273 = 127 + 273 = 400^\circ\text{K}$. Заместваме дадените стойности на физическите величини в (2) и получаваме, че $\mu = 2,0082 \text{ кг/кмол}$. Това недвусмислено показва, че газа е водород (H_2), понеже от таблицата на Менделеев атомната маса на (H) е $A(H) = 1,0079 \text{ аем} \approx 1,008 \text{ аем}$ и тогава $\mu(H_2) = 2A(H) = 2(1,008) = 2,016 \text{ аем} = 2,016 \text{ кг/кмол}$. Записваме зависимостите за другите две характеристични скорости:

$$(3) \quad V_{cp.ap} = \sqrt{\frac{8R_r T}{\pi \mu}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2R_r T}{\mu}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} V_{HB} = 2054,18 \text{ м/с}$$

$$(4) \quad V_{cp.kb} = \sqrt{\frac{3R_r T}{\mu}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2R_r T}{\mu}} = \sqrt{1,5} V_{HB} = 2229,04 \text{ м/с}$$

Допълнително към задачата можем да определим кинетичните енергии, съответстващи на всяка една от характеристичните скорости

$$(5) \quad E_k(V_{HB}) = \frac{1}{2} m (V_{HB})^2 \quad (6) \quad E_k(V_{cp.ap}) = \frac{1}{2} m (V_{cp.ap})^2$$

$$\text{и} \quad (7) \quad E_k(V_{cp.kb}) = \frac{1}{2} m (V_{cp.kb})^2 \quad \text{при}$$

$$m = \frac{1,016}{6,023 \cdot 10^{26}} = 3,347 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (\text{масата на една молекула водород})$$

Числените пресмятания от (5-7) довеждат до следните резултати:

$$E_k(V_{\text{нв}}) = 5,5436 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0346 \text{ eV}.$$

$$E_k(V_{\text{ф.ар}}) = 7,0620 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0441 \text{ eV}.$$

$$E_k(V_{\text{ср.кв}}) = 8,3150 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0520 \text{ eV}.$$

ЗАДАЧА № 24 В подножието на планински връх алпинисти са определили, че атмосферното налягане е (P_1), а на върха - е (P_2) като (P_2/P_1) = 0,43. Определете разликата във височините на върха и подножието (Δh), ако температурата на върха не зависи от височината (h) и е $t = 10^\circ\text{C}$.

РЕШЕНИЕ :

Написваме формулата за барометричното налягане на изотермична атмосфера

$$(1) P_1 = P_0 \exp\left(-\frac{mg h_1}{k_B T}\right) \quad \text{и} \quad (2) P_2 = P_0 \exp\left(-\frac{mg h_2}{k_B T}\right)$$

Образуваме отношението (P_2/P_1) от (2) и (1) и получаваме, че

$$(3) \frac{P_2}{P_1} = \exp\left[-\frac{mg(h_2 - h_1)}{k_B T}\right] \quad \text{или}$$

$$(4) \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -\frac{mg}{k_B T} (h_2 - h_1) \quad \text{или} \quad (5) \Delta h = h_2 - h_1 = -\frac{k_B T}{mg} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$

Но масата на молекулите на въздуха е $m = \frac{M}{N_A}$ (6) Тук $M = 29 \text{ kg/kmol}$ и $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$. Заместваме (6) в

(5) и получаваме, че

$$(7) \Delta h = h_2 - h_1 = - \frac{(k_B N_A) T}{mg} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = - \frac{R T}{Mg} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$(8) \Delta h = \frac{R T}{Mg} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

Получената зависимост (8) е общото решение на задачата за определяне на (Δh).

Численото пресмятане от (8) дава следния резултат $\Delta h = 6980,86 \text{ m} \approx 6981 \text{ m}$.

ЗАДАЧА № 25 Ползвайки опитна постановка, подобна на тази на Перен за определяне на числото на Авогадро, може да се определи масата на частиците, разтворени във вода, при наблюдение на разпределението им в гравитационното поле на Земята. Да се определи обема на частиците, ако при наблюдение на ниво (h_1) в зрителното поле на микроскопа средното число на наблюдавани частици е $\bar{N}_1 = 3$, а при издигане на микроскопа на височина (Δh) = 40 μm и достигане на ниво (h_2) се наблюдават вече $\bar{N}_2 = 2$ частици. Плътноста на разтвореното вещество е $\rho = 1650 \text{ kg/m}^3$, а температурата на системата е $t = 20^\circ\text{C}$.

РЕШЕНИЕ :

Записваме разпределението на Максвел-Болцман от вида $N = f(h)$.

$$(1) n_1 = n_0 \exp\left(-\frac{mg h_1}{k_B T}\right) \quad \text{и} \quad (2) n_2 = n_0 \exp\left(-\frac{mg h_2}{k_B T}\right)$$

$$(3) \frac{n_1}{n_2} = \exp\left[\frac{mg}{k_B T}(h_2 - h_1)\right] \quad \text{и} \quad (4) \ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{mg(h_2 - h_1)}{k_B T}$$

$$(5) m = k_B T \ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) [g(h_2 - h_1)]^{-1} = k_B T h_1 \left(\frac{n_1}{n_2}\right) [g(\Delta h)]^{-1}$$

$$\text{Тук } T = t + 273 = 20 + 273 = 293^{\circ}\text{K}$$

$$\Delta h = 40 \mu\text{m} = 40 \cdot 10^{-6} = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Обемът на частиците е (V_z) и се представя чрез

$$(6) \quad V_z = \frac{m}{\rho} = \frac{k_B T}{\rho g (\Delta h)} \ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right).$$

Така получената зависимост (6) е общо

решение на задачата за определяне на (V_z). Числените пресмятания от (5) и (6) дават следните резултати: $m = 4,0986 \cdot 10^{-17} \text{ kg}$

и $V_z = 2,484 \cdot 10^{-20} \text{ м}^3$. Ако приемем, че частиците имат кълбовидна форма, тогава можем да намерим радиусът им (r_z) от зависимостта (8).

$$(7) \quad V_z = \frac{4}{3} \pi (r_z)^3$$

$$\text{или (8) } r_z = \sqrt[3]{\frac{3V_z}{4\pi}}$$

Численото пресмятане от (8) дава следния резултат $r_z = 3,900 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 3,900 \mu\text{m}$.

ЗАДАЧА № 26 Прахообразни частици, всяка с маса $m = 1,0 \cdot 10^{-18} \text{ kg}$ са суспензирани във въздуха. Да се определи дебелината (Δh) на слоя въздух, в границата на който концентрацията на частиците се изменя с не повече от 1%. Температурата (T) на въздуха в целия разглеждан обем се смята за постоянна и равна на $T = 300^{\circ}\text{K}$.

РЕШЕНИЕ :

За определяне концентрацията на частиците (n) прилагаме разпределение на Болцман.

$$(1) \quad n = n_0 \exp\left[-\frac{mg(\Delta h)}{k_B T}\right]$$

$$(2) \quad \frac{n}{n_0} = \exp\left[-\frac{mg(\Delta h)}{k_B T}\right]$$

$$(3) \quad \frac{n_0 - n}{n_0} = 1 - \exp\left[-\frac{mg(\Delta h)}{k_B T}\right] = \frac{\Delta n}{n} = 0,01.$$

$$(4) \exp\left[-\frac{mg(\Delta h)}{k_B T}\right] = 0,99$$

$$(5) \exp\left[\frac{mg(\Delta h)}{k_B T}\right] = \frac{1}{0,99} = 1,01.$$

$$(6) \frac{mg(\Delta h)}{k_B T} = \ln(1,01) = 0,0099 \approx 0,01$$

$$(7) \Delta h = \frac{0,01 (k_B T)}{m \cdot g}$$

Получената зависимост (7) и общото решение на зада-

чата за определяне на (Δh) . Численото пресмятане от (7) дава следния резултат $\Delta h = 4,22 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4,22 \text{ } \mu\text{m}$.

ЗАДАЧА № 27 На каква височина (h) над морското равнище (нулево ниво - $h = 0$) плътността на въздуха намалява:

а) два пъти; б) $e = 2,72$ пъти? Температурата на въздуха е $T =$

$= 273^\circ \text{K}$. Да се допусне, че температурата (T) , молната маса

$\mu = 29 \text{ kg/kmol}$ на въздуха и земното ускорение $g = 9,81$

m/s^2 не се изменят с изменение на височината (h) .

РЕШЕНИЕ :

Използваме Болцмановото разпределение

$$(1) n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{R \cdot T}\right)$$

$$\text{При } \frac{m}{k_B} = \frac{\mu}{R/NA} = \frac{m NA}{R} = \frac{\mu}{R} \quad (2)$$

Умножаваме (1) с масата (m) на една молекула въздух при условие, че (3) $n m = \rho$ и (4) $n_0 m = \rho_0$. Тогава

(1) добива вида (5)

$$(5) \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{R \cdot T}\right)$$

$$\text{и (6) } \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \frac{\mu gh}{R \cdot T}$$

$$(7) \quad h = \frac{R_r T}{\mu g} \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)$$

Получената зависимост (7) е общо решение на

задачата за определяне на (h).

а) В този случай условието е (8) $p = p_0/2$. Заместваме (8) в (7) и получаваме

$$(9) \quad h_a = \frac{R_r T}{\mu g} \ln\left(\frac{p_0}{p_0/2}\right) = \frac{R_r T}{\mu g} \ln 2 = 5529 \text{ м.}$$

б) В този случай (10) $p = \frac{p_0}{e} = \frac{p_0}{2.718}$. Заместваме (10) в (7) и получаваме, че

$$(11) \quad h_b = \frac{R_r T}{\mu g} \ln\left(\frac{p_0}{p_0/e}\right) = \frac{R_r T}{\mu g} \ln e = 7979 \text{ м.}$$

ЗАДАЧА № 28 Определете теглото на цилиндричен стълб въздух, основата на който е равна на $S = 1 \text{ м}^2$, а височината е равна на височината $h = 530 \text{ м}$ на телевизионна кула. Считаме, че температурата на въздуха е $T = 300^\circ\text{К}$, а налягането на повърхността на Земята е $p_0 = 760 \text{ мм Hg}$.

РЕШЕНИЕ :

Теглото (P_T) на цилиндричния стълб въздух се определя от зависимостта (1) $P_T = (p_0 - p_h) S$. Определяме (p_h) от барометричната формула за изотермична атмосфера (при $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$).

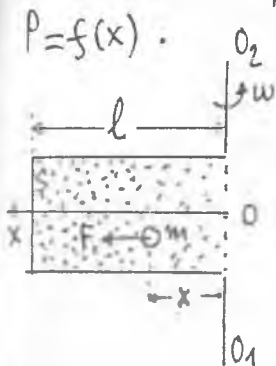
$$(2) \quad p_h = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{R_r T}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{R_r T}\right)$$

Заместваме (2) в (1) и получаваме, че

$$(3) \quad P_T = \left[p_0 - p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{R_r T}\right) \right] S = p_0 S \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu g h}{R_r T}\right) \right]$$

Така получената зависимост (3) се явява общо решение на задачата за определяне на (P_T). Численото пресмятане от (3) при $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ и $h_T = 8315 \text{ J/kmol.K}$ дава следния резултат $P_T = 5940 \text{ N}$.

ЗАДАЧА № 29 Хоризонтално разположен цилиндричен съд, закрит от единия край, се върти около вертикална ос с ъглова скорост (ω) около вертикална ос, минаваща през открития край на цилиндъра. Дължината на цилиндъра е (l), а лицето на основите му е (S). Определете зависимостта на броя (N) на молекулите въздух в единица обем вътре в цилиндъра от разстояние (x) до оста на въртене $n = f(x)$. Начертайте графика за изменението на налягането (P) на газа по дължината (l) на цилиндъра-



РЕШЕНИЕ :

Оста на въртене на цилиндъра е O_1O_2 . Въвеждаме хоризонталната ос Ox , съвпадаща с геометричната ос на цилиндъра. При въртене на цилиндъра с ъглова скорост (ω) чрез ударите на молекулите на въз-

духа върху стените на съда при хаотичното им топлинно движение и целия обем въздух, ограничен вътре в цилиндъра започва да се върти със същата ъглова скорост (ω). Тогава в дадена молекула ще действа центробежна инерчна сила (1) $F = F_{цб} = m\omega^2 x$.

От основната зависимост между сила (F) и потенциална енергия (E_n) в механиката следва, че (2) $F = -\frac{dE_n}{dx}$ и тогава $dE_n = -F dx$ (3). Тогава от (3) можем да определим (E_n)

$$(4) E_n = \int_0^n dE_n = \int_0^x F dx = \int_0^x m\omega^2 x dx = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Прилагаме разпределението на Болцман за газ в силово поле с потенциална енергия (E_n), дадена чрез (4) и получаваме

$$(5) n_x^* = n_0 \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{\mu\omega^2 x^2}{2R_r T}\right)$$

В конкретния случай с нарастването на (x) расте (F) и (E_n) и затова знака под експонентата трябва да се вземе положителен. Тогава съгласно (5) получаваме, че

$$(6) n_x^* = n_0 \exp\left(-\frac{\mu\omega^2 x^2}{2R_r T}\right) = n.$$

Така получената зависимост (6) е общо решение на за-

дачата. Да приемем, че опита се прави при нормални изотермични условия: $P_0 = 1$ физ.атм. = $1,013 \cdot 10^5$ Pa ; $T = T_0 = 273^\circ\text{K}$ и $M_0 = 2,689 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ (число на Лотмидт). Разпределението на налягането $P = f(x)$ по дължината на цилиндъра ще получим като умножим (6) с $k_B T = k_B T_0$ и тогава съгласно основ-

ното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ

$$(7) P_0 = n_0 k_B T \quad \text{и} \quad (8) P = n k_B T$$

Окончателно от (6) при отчитане на (7) и (8) получаваме.

$$(9) P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu\omega^2 x^2}{2R_r T}\right)$$

Това е вече общото решение

на задачата, даващо $P =$

$f(x)$. Нека приемем, че цилиндъра има дължина $l = 30$ cm.

Ще направим таблица за да представим $P = f(x)$ при $\omega = 628$ rad/s . .

В 1 кмол въздух има $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ кмол⁻¹ молекули и тогава следва, че

$$(6) \quad N = N_A \cdot n_{\mu} = \frac{\rho_0 N_A}{\mu g} (4\pi R_3^2)$$

Така получената зависи-

мост (6) се явява общо решение на задачата за определяне на (N). Приемаме, че Земята е (по-точно ротационен елипсоид) с $R_3 = 6370$ км = $6,73 \cdot 10^6$ м. Численото пресмятане от (6) дава следния резултат $N = 1,093 \cdot 10^{44}$ молекули въздух.

Допълнително към задачата можем да определим $n_{\mu} = \frac{N}{N_A} = 1,8147 \cdot 10^{17}$ кмол и тогава масата на цялата въздушна атмосфера е $M = \mu n_{\mu} = 29 (1,8147 \cdot 10^{17}) = 5,266266 \cdot 10^{18}$ кг. Можем да сравним тази маса (M) с масата на Земята (M_3) = $5,974 \cdot 10^{24}$ кг. Тогава $K = \frac{M_3}{M} = 1,135 \cdot 10^6$.

Следователно, масата на Земята е $1,135 \cdot 10^6$ пъти по-голяма от масата на атмосферата.

ЗАДАЧА № 31 В даден съд се намира азот (N_2) при температура $t_1 = 0^\circ\text{C}$. След загряване температурата на азота, е вече $t_2 = 200^\circ\text{C}$. Определете при каква стойност на скоростта (V) се пресичат кривите, даващи разпределението на Максвел по големината на скоростта за двете температури (t_1) и (t_2).

РЕШЕНИЕ :

Привеждаме (t_1) и (t_2) в абсолютните $T_1 = t_1 + 273 = 273^\circ\text{K}$ и $T_2 = t_2 + 273 = 200 + 273 = 473^\circ\text{K}$. Тогава отношението $\frac{T_2}{T_1} = \frac{473}{273} = 1,7326$. Написваме разпределенията на Максвел за двете температури (T_1) и (T_2)

$$(1) \quad f_1(V) = 4\pi V^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2k_B T_1}\right)$$

$$(2) f_2(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T_2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T_2}\right)$$

По условието на задачата е необходимо $f_1(v) = f_2(v)$ като от (1) и (2) следва, че

$$(3) \left(\frac{m}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T_1}\right) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T_2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T_2}\right)$$

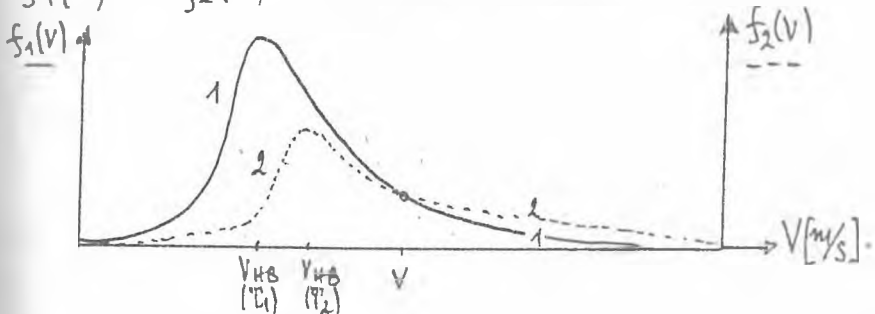
$$(4) \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} = \exp\left[\frac{mv^2}{2k_B} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right]$$

$$(5) \frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{mv^2}{2k_B} \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right) = \frac{mv^2}{2k_B T_2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$(6) V = \sqrt{\frac{2k_B T_2}{m}} \sqrt{\frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \left[\frac{T_2}{T_1} - 1 \right]^{-1}} = V_{\text{HB}}(T_2) \sqrt{\frac{3 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{2 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)}}$$

$$(7) V = \sqrt{\frac{2k_B T_2}{m}} \sqrt{\frac{3 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \left[\frac{T_2}{T_1} - 1 \right]^{-1}}{2 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)}}$$

Така получената зависимост (7) е общото решение на задачата за определяне на (V). Численото пресмятане дава $V_{\text{HB}}(T_2) = 530,0266$ m/s при $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/kmol}$ и $V = 1,061 [V_{\text{HB}}(T_2)] = 562,267$ m/s . Можем допълнително в задачата да определим $V_{\text{HB}}(T_1) = 402,67$ m/s . Понеже $V > V_{\text{HB}}(T_2)$, тогава пресичането на $f_1(v)$ с $f_2(v)$ става само в една точка.



ЗАДАЧА № 32 Една система се състои от N -частици, всяка от които може да има енергии: $E_0 = 0$; $E_1 = \frac{1}{2} k_B T$; $E_2 = k_B T$ и $E_3 = \frac{3}{2} k_B T$. Определете броя на частиците (N) и разпределението им по енергетичните нива (N_i), ако в термодинамично равновесно състояние при температура (T) общата енергия на системата е $E = 686 k_B T$.

РЕШЕНИЕ:

Приемаме, че разпределението на частиците в системата при термодинамично равновесно състояние при температура (T) е Болцманово и от вида:

$$(1) N_i = N_0 \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right) \quad \text{Тогава следва, че}$$

$$(2) N_1 = N_0 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2} k_B T}{k_B T}\right) = N_0 \exp(-0,5)$$

$$(3) N_2 = N_0 \exp\left(-\frac{k_B T}{k_B T}\right) = N_0 \exp(-1)$$

$$(4) N_3 = N_0 \exp\left(-\frac{\frac{3}{2} k_B T}{k_B T}\right) = N_0 \exp\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Тогава от (5) } N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 \quad \text{следва, че}$$

$$(6) N = N_0 \left[1 + \exp(-0,5) + \exp(-1) + \exp\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$(7) N = N_0 [1 + 0,607 + 0,368 + 0,223] = 2,198 N_0.$$

Следователно: $N_1 = 0,607 N_0$ (8); $N_2 = 0,368 N_0$ (9) и

$$(10) N_3 = 0,223 N_0.$$

От условието на задачата следва, че:

$$(11) E = N_0 E_0 + N_1 E_1 + E_2 N_2 + N_3 E_3$$

$$(12) 686 \text{ к}_B T = N_0 (0) + N_0 (0,607) \frac{1}{2} \text{к}_B T + N_0 (0,386) \text{к}_B T + N_0 (0,223) \frac{3}{2} \text{к}_B T.$$

$$(13) 686 = N_0 (0,3035 + 0,368 + 0,3345) = 1,006 N_0$$

Следователно, (14) $N_0 = \frac{686}{1,006} = 681,9 \approx 682.$

Заместваме (14) в (7) и получаваме, че

$$(15) N = 2,198 N_0 = 2,198 (681,9) = 1498,8 \approx 1499.$$

Допълнително, можем да определим броя на частиците и на другите

енергийни нива: $N_1 = 0,607 N_0 = 414$; $N_2 = 0,368 N_0 = 251$;

$N_3 = 0,223 N_0 = 152.$

Проверка $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = 682 + 414 + 251 + 152 = 1499.$

Сравняваме с получената стойност за $N \approx 1499$ и се вижда наличието на пълно съвпадение.

Ако системата е при температура $T = 300^\circ\text{K}$ тогава общата енергия на системата е $E = 686 \text{ к}_B T = 686 (1,38 \cdot 10^{-23}) \cdot 300 = 28,4004 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 17,75 \text{ eV}.$ Разпределението на енергията по нивата е: $E_0^* = 0$; $E_1^* = N_1 E_1 = 414 \left(\frac{1}{2}\right) \text{к}_B T = 207 (\text{к}_B T) = 8,570 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5,356 \text{ eV};$

$$E_2^* = N_2 E_2 = 251 (\text{к}_B T) = 10,391 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 6,495 \text{ eV}$$

$$E_3^* = N_3 E_3 = 152 \left(\frac{3}{2} \text{к}_B T\right) = 228 (\text{к}_B T) = 9,439 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5,900 \text{ eV}.$$

Проверка: $E = E_0^* + E_1^* + E_2^* + E_3^* = 0 + 207 (\text{к}_B T) + 251 (\text{к}_B T) + 228 (\text{к}_B T) = 686 \text{ к}_B T.$

Получената зависимост (13) е общото решение на задачата за определяне на (h_G) ако се знае температурата (T) на въздуха при изотермична атмосфера. Ако погледнем (5) идваме до извода, че

$$(14) \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{h_G}\right) \quad \text{и при } h = h_G \quad (15)$$

тогава от (14) следва, че
$$\rho = \frac{\rho_0}{e} = \frac{\rho_0}{2,72} \quad (16)$$

Следователно, височината (h_G) на която се намира масовия център, отговаря на условие намаляване на плътността на въздуха с $e = 2,72$ пъти. Ако приемем, че $T = 273^\circ\text{K} = \text{const}$ и заместим (T) в (13) при условие, че $\mu = 29 \text{ kg/mol}$ и $R_T = 8315 \text{ J/kmol}\cdot\text{K}$, тогава се получава, че $h_G = 7979,17 \text{ m} \approx 8 \text{ km}$.

Допълнително към тази задача можем да определим (h_G^*) при условие, че височината на вертикалния стълб въздух е $h^* = 10000 \text{ m} = 10^4 \text{ m} = 10 \text{ km}$. Тогава (17) $h_G^* = \frac{I_1^*}{I_2^*}$ От (10) следва, че

$$(18) I_1 = \rho_0 S \left(\frac{R_T T}{\mu g}\right)^2 I_3^* \quad \text{и (19) } z^* = \frac{\mu g h^*}{R_T T}$$

$$(20) I_3^* = \int_0^{h^*} z^* e^{-z^*} dz^* = z^* \exp(-z^*) \Big|_0^{h^*} - \exp(-z^*) \Big|_0^{h^*} = \\ = [0(1) - \frac{z^*}{\exp(z^*)}] - [1 - \exp(-z^*)] = 1 - \left[\frac{z^* + 1}{\exp(z^*)}\right] = \\ = 1 - \left[\frac{1,25 + 1}{3,5017}\right] = 1 - 0,6425 = 0,357.$$

Заместваме $I_3^* = 0,357$ в (18) и получаваме

$$(21) I_1^* = \rho_0 S \left(\frac{R_T T}{\mu g}\right)^2 0,357 = \rho_0 S (7979,17)^2 0,357 = \rho_0 S (21,758 \cdot 10^6).$$

Преминваме към определяне на (I_2^*)

$$(22) I_2^* = \rho_0 S \left(\frac{R T}{\mu g} \right) \exp\left(-\frac{\mu g h}{R T}\right) \Big|_0^{h^*} = \rho_0 S \left(\frac{R T}{\mu g} \right) [1 - \exp\left(-\frac{\mu g h^*}{R T}\right)]$$

$$(23) I_2^* = \rho_0 S (7979,17) \left[1 - \frac{1}{\exp(1,25)} \right] = \rho_0 S (5700,514)$$

Заместваме (21) и (23) в (17) и получаваме

$$(24) \frac{h_G^*}{G} = \frac{I_1^*}{I_2^*} = \frac{\rho_0 S (22,758 \cdot 10^6)}{\rho_0 S (5700,514)} = 3992,3 \text{ м} \approx 4 \text{ км.}$$

От сравняването на (h_G) = 8 км с $h_G^* = 4$ км следва, че $h_G \approx 2 h_G^*$. Значи центъра на масите на вертикален въздушен стълб с $h^* = 10$ км е два пъти по-ниско от центъра на масите на вертикален стълб с височина, отговаряща на височината на цялата земна атмосфера. Възниква въпроса - каква е височината на земната атмосфера. Нека да вземем височина $\bar{h} = 100 \text{ км} = 10^5 \text{ м}$. и да определим плътността на въздуха на тази височина.

$$(25) \rho_{\bar{h}} = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g \bar{h}}{R T}\right) = \rho_0 \exp\left[-\frac{29(9,81) \cdot 10^5}{8315(273)}\right]$$

$$(26) \rho_{\bar{h}} = \frac{\rho_0}{\exp(12,5326)} = \frac{\rho_0}{2,7724 \cdot 10^5} = 3,607 \cdot 10^{-6} \rho_0$$

$$(27) \frac{\rho_{\bar{h}}}{\rho_0} = \frac{n_{\bar{h}}}{n_0} = 3,607 \cdot 10^{-6}; \quad n_{\bar{h}} = 3,607 \cdot 10^6 (2,689 \cdot 10^{25})$$

$$n_{\bar{h}} = 9,699 \cdot 10^{19} \text{ молекули/м}^3$$

Тук $n_0 = 2,689 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ е число на Лошмид. При височина $\bar{h}^* = 1000 \text{ км} = 10^6 \text{ м}$, тогава

$$(28) \rho_{h^{**}} = \frac{\rho_0}{2,68157 \cdot 10^{54}} \quad \text{супер малка плътност.}$$

При височина $h^{**} = 200 \text{ км} = 2 \cdot 10^5 \text{ м}$.

$$(29) \rho_{h^{**}} = \frac{\rho_0}{7,6856 \cdot 10^{10}} \quad \text{и} \quad n_{h^{**}} = \frac{n_0}{7,6856 \cdot 10^{10}} \quad (29)$$

При височина $h^{**} = 450 \text{ км} = 4,5 \cdot 10^5 \text{ м}$.

$$(30) \rho_{h^{**}} = \frac{\rho_0}{3,10 \cdot 10^{24}} \quad \text{или} \quad (31) \frac{\rho_{h^{**}}}{\rho_0} = \frac{n_{h^{**}}}{n_0} = 3,215 \cdot 10^{-25}$$

Тогава (32) $n_{h^{**}} = 3,215 \cdot 10^{-25} n_0 = 3,215 \cdot 10^{-25} (2,689 \cdot 10^{25}) = 8,646 \frac{\text{молек.}}{\text{м}^3}$

Значи на височина $h^{**} = 450 \text{ км}$ в 1 м^3 въздух ще има вече само около (8 + 9) молекули.

Следователно височината на изотермична атмосфера при

$$T = 273^\circ \text{К} \text{ е } h_a = 450 \text{ км}.$$

ЗАДАЧА № 34 Да се определи вътрешната енергия на $\nu = 0,6 \text{ мол}$ кислород при температура $T = 283^\circ \text{К}$. Каква част от тази енергия се пада съответно на постъпателното и въртеливото движение на молекулите.

РЕШЕНИЕ :

$$\text{Средната енергия на една молекула е } \bar{E}_1 = \frac{i}{2} k_B T \quad (1)$$

където (i) е броя на степените на свобода. Тогава молната вътрешна енергия ще бъде (2) $U_\mu = \bar{E}_1 \cdot N_A$, където

(N_A) е числото на Авогадро. Вътрешната енергия на $\nu = 0,6 \text{ мол} = 6,0 \cdot 10^{-1} \text{ мол} = 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ кмол}$ е

$$(3) U(\nu) = U_\mu(\nu) = \bar{E}_1 N_A \nu = \frac{i}{2} k_B T N_A \cdot \nu = \left(\frac{i}{2} R T\right) \nu.$$

Общият брой (i) степени на свобода е

$$(4) i = i_{\text{пост.}} + i_{\text{врт.}} = 3 + 2 = 5$$

където (5) $i_{\text{пост.}} = 3$

и $\zeta_{\text{врт.}} = 2$ (6). Тогава

$$(7) U_{\text{пост.}}(\nu) = \frac{3}{2} \nu R T = \frac{3}{2} \left(\frac{i}{2} \nu R T \right) = \frac{3}{2} U(\nu) = \frac{3}{5} U(\nu).$$

По същия начин

$$(8) U_{\text{врт.}}(\nu) = \frac{2}{2} \nu R T = \frac{2}{2} \left(\frac{i}{2} \nu R T \right) = \frac{2}{2} U(\nu) = \frac{2}{5} U(\nu).$$

Получените зависимости: (3); (4); (7) и (8) са общи решения за определяне на $U(\nu)$; $U_{\text{пост.}}(\nu)$ и $U_{\text{врт.}}(\nu)$. Числените пресмятания дават следните резултати: $U(\nu) = 3,526 \cdot 10^3 \text{ J} = 3,53 \text{ kJ}$; $U_{\text{пост.}}(\nu) = 2,12 \cdot 10^3 \text{ J} = 2,12 \text{ kJ}$; $U_{\text{врт.}}(\nu) = 1,41 \cdot 10^3 \text{ J} = 1,41 \text{ kJ}$. Сега да определим молната вътрешна енергия (U_{μ}).

$$(9) U_{\mu} = \bar{E}_1 N_A = \frac{i}{2} k_B T \cdot N_A = \frac{i}{2} R T = \frac{5}{2} R T =$$

$= 5,88 \cdot 10^6 \text{ J} = 5,88 \text{ MJ}$. Енергията, която се пада на една молекула ще бъде

$$(10) \bar{E}_1 = \frac{i}{2} k_B T = \frac{U_{\mu}}{N_A} = 9,766 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 6,104 \cdot 10^{-2} \text{ eV} = 0,061 \text{ eV}.$$

Молната енергия за постъпателното движение е

$$(11) U_{\mu/\text{пост.}} = \frac{3}{5} U_{\mu} = 3,528 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,528 \text{ MJ}$$

Енергията, отнесена за една молекула при постъпателно движение, е

$$(12) \bar{E}_{1/\text{пост.}} = \frac{U_{\mu/\text{пост.}}}{N_A} = 5,858 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0366 \text{ eV}.$$

Молната енергия при въртливото движение

$$(13) U_{\mu/\text{врт.}} = \frac{2}{5} U_{\mu} = 2,352 \cdot 10^6 \text{ J} = 2,352 \text{ MJ}$$

Енергията, отнесена за една молекула при въртливото движение е

$$(14) \bar{E}_{1/\text{врт.}} = \frac{U_{\mu/\text{врт.}}}{N_A} = 3,905 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0244 \text{ eV}.$$

Проверка:

$$N_A \bar{E}_1 = \bar{E}_{1/\text{пост.}} + \bar{E}_{1/\text{врт.}} = 0,0366 + 0,0244 = 0,0610 \text{ eV}.$$

Но $\bar{E}_{1/\text{пост.}} + \bar{E}_{1/\text{врт.}} = \bar{E}_1 = 0,061 \text{ eV}$ (Верно!)

ЗАДАЧА № 35 Да се определят специфичните топлинни капацитети (C_p) и (C_v) на даден газ ако е известно, че масата на 1 mol от този газ е $M = 30 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ и отношението (C_p/C_v) = 1,40.

РЕШЕНИЕ :

Написваме формулите за молните топлинни капацитети

$$(1) (C_{\mu})_v = \frac{i}{2} R_r \quad \text{и} \quad (2) (C_{\mu})_p = (C_{\mu})_v + R_r =$$

$$= \frac{i}{2} R_r + R_r = \left(\frac{i+2}{2}\right) R_r \quad \text{Образуваме отношението на}$$

(2) и (1) и получаваме, че

$$(3) \frac{(C_{\mu})_p}{(C_{\mu})_v} = \frac{\mu C_p}{\mu C_v} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = 1,40.$$

От (3) определяме, че броя (i) на степените на свобода на газа е $i = 5$, което показва, че при условията, в които се намира газа напълно са развити двете мода на топлинно движение на молекулите - постъпателно с ($i_{\text{п}} = 3$) и въртеливо с ($i_{\text{в}} = 2$). В разгледания случай $M = 30 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} = (30 \cdot 10^{-3}) 10^3 \text{ kg/kmol} = 30 \text{ kg/kmol}$. Явно е вече, че този газ е въздуха, който има ефективна молна маса $\mu_{\text{ef}} = 29 \text{ kg/kmol}$ и коефициент на Поасон

$$(4) \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{(C_{\mu})_p}{(C_{\mu})_v} = 1,40$$

Специфичните топлинни емности са от вида:

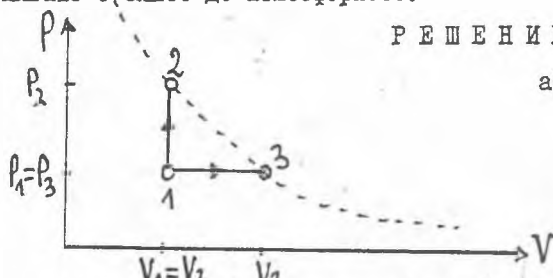
$$(5) C_p = \frac{(C_{\mu})_p}{\mu} = \frac{i+2}{2} \left(\frac{R_r}{\mu}\right) \quad \text{и} \quad (6) C_v = \frac{(C_{\mu})_v}{\mu} = \frac{i}{2\mu} R_r$$

Получените зависимости (5) и (6) са общите решения на задачата за определяне на (C_p) и (C_v). Числените пресмятания доведат

до следния резултат: $C_p = 967 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ и $C_v = 693 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$.

И действително $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{967}{693} = 1,3954 \approx 1,40$.

ЗАДАЧА № 36 Азот се нагрява от температура $T_1 = 300^\circ\text{K}$ до $T_2 = 340^\circ\text{K}$. Масата на азота (N_2) е $M = 0,2 \text{ kg}$. Да се определят количеството погълната топлина от газа и изменението на вътрешната енергия при изохорен и изобарен процес. Началното налягане е близо до атмосферното.



РЕШЕНИЕ :

а) Изохорен процес ($1 \rightarrow 2$)

при $V_1 = V_2 = \text{const}$

като $T_1 \rightarrow T_2$ и

$T_1 < T_2$ Тук

$$(1) Q(1 \rightarrow 2) = \Delta U + \Delta A =$$

$$= \Delta U = \mu \mu (C_{\mu})_V \Delta T = \mu \mu (C_{\mu})_V (T_2 - T_1)$$

Тук: $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/kmol}$; $C_v(N_2) = 740 \text{ [J/kg}\cdot\text{K]}$

$$(2) (C_{\mu})_V = \mu C_v = 28(740) = 2,072 \cdot 10^4 \text{ J/kmol}\cdot\text{K}$$

$$(3) \mu = \frac{M}{\mu} = \frac{0,2}{28} = 0,00714 \text{ kmol}$$

Получената зависимост (1) е общо решение на задачата за определяне на $Q(1 \rightarrow 2)$. Численото пресмятане от (1) при отчитане на

(2) и (3) дава следния резултат

$$Q(1 \rightarrow 2) = \Delta U = 5,92 \cdot 10^3 \text{ J} = 5,92 \text{ kJ}$$

б) При извършване на изобарен процес ($1 \rightarrow 3$), Тогава се приема топлина

$$(4) Q(1 \rightarrow 3) = \Delta U + P_1 (V_3 - V_1)$$

От основното уравнение на Клапейрон-Менделеев за дъстоянието на

идеалния газ

$$(5) p_1 V_1 = n_{\mu} R T_1 \quad \text{и} \quad (6) p_1 V_3 = n_{\mu} R T_2$$

$$\text{Следва, че} \quad p_1 (V_3 - V_1) = n_{\mu} R (T_2 - T_1) \quad (7)$$

при почленно изваждане на (5) от (6). Заместваме (7) в (4) и получаваме, че

$$(8) Q(1 \rightarrow 3) = \Delta U + n_{\mu} R (T_2 - T_1)$$

$$\text{Но от (1) следва, че} \quad \Delta U = Q(1 \rightarrow 2) \quad (9) \text{ и тогава}$$

заместваме (9) в (8) и получаваме, че

$$(9) Q(1 \rightarrow 3) = Q(1 \rightarrow 2) + n_{\mu} R (T_2 - T_1)$$

Това е общото решение на задачата за определяне на $Q(1 \rightarrow 3)$.

Численото пресмятане дава следния резултат

$$Q(1 \rightarrow 3) = 8,29 \cdot 10^3 \text{ J} = 8,29 \text{ kJ} \quad \text{Следователно}$$

$$(10) K = \frac{Q(1 \rightarrow 3)}{Q(1 \rightarrow 2)} = \frac{Q(1 \rightarrow 3)}{\Delta U} = \frac{8,29}{5,92} = 1,40.$$

При изобарния процес, газа приема $K = 1,40$ пъти по-голямо количество топлина за да направи прехода от $(1 \rightarrow 3)$, или от

$T_1 \rightarrow T_2$, тук $T_2 = T_3$, понеже се извършва работа

$$(11) \Delta A = n_{\mu} R (T_2 - T_1) = Q(1 \rightarrow 3) - Q(1 \rightarrow 2) =$$

$$= 8,29 - 5,92 = 2,37 \text{ kJ}$$

$$\text{Проверка: (12) } n_{\mu} = \frac{2370}{8315 / (340 - 300)} = 7,1257 \cdot 10^{-3} \text{ кмол}$$

(приблизително съвпадение)

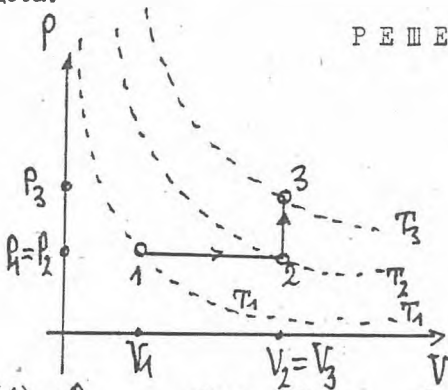
Трябва да се има предвид от чертежа, че точките (2) и (3)

трябва да отговарят на топлинни състояния с еднаква температура

$T_2 = T_3$ и да лежат на една и съща изотерма (равнораменна хипербола) с температура ($T_2 = T_3$).

ЗАДАЧА № 37. Кислород с маса $M = 2 \text{ kg}$ заема обем $V_1 = 1 \text{ m}^3$ и се намира при постоянно налягане $p_1 = 2,02 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Га-

зът е нагрят, отначало при постоянно налягане ($P_1 = \text{const}$) до обем $V_2 = 3 \text{ m}^3$, а след това при постоянен обем ($V_2 = \text{const}$) до налягане $P_3 = 5,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Да се намери изменението на вътрешната енергия (ΔU), извършената работа (ΔA) и полученото количество топлина (ΔQ) от газа. Да се построи графика на процеса.



РЕШЕНИЕ:

При загреване на газа и осъществяване на прехода ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$).

Тогава

$$(1) \Delta Q = \Delta Q_{1 \rightarrow 2} + \Delta Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$(2) \Delta U = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}$$

$$(3) \Delta A = \Delta A_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{2 \rightarrow 3}$$

$$(4) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = C_p M \Delta T_{1 \rightarrow 2} = C_p M (T_2 - T_1)$$

$$(5) \Delta Q_{2 \rightarrow 3} = C_v M \Delta T_{2 \rightarrow 3} = C_v M (T_3 - T_2)$$

Следователно, при заместване на (4) и (5) в (1) получаваме, че

$$(6) \Delta Q = M [C_p (T_2 - T_1) + C_v (T_3 - T_2)]$$

Това показва, че е необходимо да определим (C_p), (C_v) и (T_1 , T_2 , T_3). Използваме уравнението на Роберт Майер

$$(7) (C_\mu)_p = (C_\mu)_v + R_r$$

$$(8) C_p = C_v + \frac{R_r}{\mu}$$

$$(10) (C_\mu)_v = \frac{i}{2} R_r$$

$$(12) C_v = \frac{i}{2} R_r / \mu$$

и делим двете страни на (7) с

$$\text{Но (9) } (C_\mu)_p = \left(\frac{i+2}{2}\right) R_r$$

$$\text{Тогава (11) } C_p = \left(\frac{i+2}{2}\right) R_r / \mu$$

За кислорода $\mu (O_2) = (16 + 16) = 32$

kg/kmol. За двуатомен газ с напълно развити двете моди на топлинно движение - постъпателно и въртливо, следва, че $i =$

= 3 + 2 = 5, като $\dot{L}_{\text{пост.}} = 3$ и $\dot{L}_{\text{врт.}} = 2$. Заместваме $\dot{L} = 5$ в (11) и (12) и получаваме, че: $C_p = 909,34 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ и $C_v = 649,53 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$. За да определим температурите (T_1, T_2, T_3) използваме уравнението на Клапейрон-Менделеев.

$$(13) \quad PV = \frac{M}{\mu} R T \quad \text{или} \quad (14) \quad T = PV \left(\frac{\mu}{MR} \right) = PV \tilde{K}$$

където $\tilde{K} = \frac{\mu}{MR}$

(15). Тогава

$$(16) \quad T_i = \tilde{K} (P_i V_i) \quad \text{и} \quad \tilde{K} = \frac{32}{2(8315)} = 0,001924 \text{ K/J}$$

като: (17) $T_1 = \tilde{K} (P_1 V_1)$ (18) $T_2 = \tilde{K} (P_2 V_2) = \tilde{K} (P_1 V_2)$

и (19) $T_3 = \tilde{K} (P_3 V_3) = \tilde{K} (P_3 V_2)$ - Числените пресмятания дават следния резултат: $T_1 = 388,65^\circ\text{K}$; $T_2 = 1165,95^\circ\text{K}$ и $T_3 = 2886^\circ\text{K}$.

Заместваме получените стойности за (C_p, C_v, T_1, T_2, T_3) в (4 + 6) и получаваме следния резултат: $\Delta Q(1 \rightarrow 2) = 1,41366 \cdot 10^6 \text{ J} = 1,414 \text{ MJ}$; $\Delta Q(2 \rightarrow 3) = 2,23445 \cdot 10^6 \text{ J} = 2,234 \text{ MJ}$; $\Delta Q = 3,648 \text{ MJ}$.

При осъществяване на изобарния процес (1 - 2) изменението на вътрешната енергия (20) $\Delta U(1 \rightarrow 2) = \Delta Q(1 \rightarrow 2) - \Delta A(1 \rightarrow 2)$

Но $\Delta A_{1 \rightarrow 2} =$

$$(21) \quad \Delta A(1 \rightarrow 2) = P_1 (V_2 - V_1) = 2,02 \cdot 10^5 (3-1) = 4,04 \cdot 10^5 \text{ J} = 0,404 \text{ MJ}$$

Заместваме стойностите на $\Delta Q(1 \rightarrow 2)$ и $\Delta A(1 \rightarrow 2)$ в (20) и получаваме, че (22) $\Delta U(1 \rightarrow 2) = 1,414 - 0,404 = 1,010 \text{ MJ}$.

При изохорния процес $\Delta A(2 \rightarrow 3) = 0$ понеже $V_2 = V_3$ и $V_3 - V_2 = 0$ (няма изменение на обема). Тогава

$$(23) \quad \Delta U(2 \rightarrow 3) = \Delta Q(2 \rightarrow 3) = 2,234 \text{ MJ}$$

Тогава общото изменение на вътрешната енергия на газа

$$(24) \quad \Delta U = \Delta U(1 \rightarrow 2) + \Delta U(2 \rightarrow 3) = 1,010 + 2,234 = 3,244 \text{ MJ}$$

Допълнително към задачата да определим:

а) броят на молекулите (n_{01}, n_{02}, n_{03}) в единица обем в трите термодинамични състояния на газовата система. За целта определяме броя (n_{μ}) на молекулите газ от

$$(25) \quad n_{\mu} = \frac{M}{\mu} = \frac{2}{32} = 0,0625 \text{ кмол}$$

Тогава брой (N_{μ}) на молекулите в (n_{μ}) кмол газ е

$$(26) \quad N(n_{\mu}) = n_{\mu} N_A = 6,25 \cdot 10^{-2} (6,023 \cdot 10^{23}) = 3,764 \cdot 10^{25}$$

Но този брой $N(n_{\mu})$ се намира в състояние (1) при обем 1 м^3 .

Тогава $n_{01} = N(n_{\mu}) = 3,764 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. В състояние (2) обема е $V_2 = 3 \text{ м}^3$ и тогава $n_{02} = 1,255 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} = n_{03}$ понеже $V_2 = V_3$, изохорен е процеса ($2 \rightarrow 3$).

б) да намерим вътрешната енергия на газа в трите състояния

$$(27) \quad U_1 = \left(\frac{i}{2} R T_1\right) n_{\mu} \quad (28) \quad U_2 = \left(\frac{i}{2} R T_2\right) n_{\mu} \quad (29) \quad U_3 = \left(\frac{i}{2} R T_3\right) n_{\mu}$$

Числените пресмятания от (27 + 29) при $i = 5$ - наличие на развиги двете моди на топлинно движение (постъпателно и въртеливо) и $n_{\mu} = 0,0625 \text{ кмол}$ дават следния резултат: $U_1 = 5,0494 \cdot 10^5 \text{ J} = 0,505 \text{ MJ}$; $U_2 = 1,5148 \cdot 10^6 \text{ J} = 1,515 \text{ MJ}$; $U_3 = 3,7495 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,750 \text{ MJ}$.

Проверка: $\Delta U_{(1 \rightarrow 2)}^* = U_2 - U_1 = 1,515 - 0,505 = 1,010 \text{ MJ}$;

$$\Delta U_{(2 \rightarrow 3)}^* = U_3 - U_2 = 3,750 - 1,515 = 2,235 \text{ MJ}.$$

Както се вижда при сравняване $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2}^*$ и $\Delta U_{(2 \rightarrow 3)} \approx \Delta U_{(2 \rightarrow 3)}^*$ Следователно проверката дава добро съвпадение на получените резултати (при приблизителното им представяне).

ЗАДАЧА № 38 Да се определят: характеристичните скорости на хаотичното топлинно движение; средната кинетична енергия на постъпателно движение и средната пълна кинетична енергия на молекулите на хелия и аргона при температура $t = 10^{\circ}\text{C}$.

РЕШЕНИЕ:

Първо ще определим характеристичните скорости при $T = t + 273 = 10 + 273 = 293^{\circ}\text{K}$

$$(1) V_{\text{HВ}} = \sqrt{\frac{2R_p T}{\mu}} \quad (2) V_{\text{ср.ар}} = \sqrt{\frac{8R_p T}{\pi \mu}} \quad (3) V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3R_p T}{\mu}}$$

За целта приемаме $\mu(\text{He}_2) = 4 \text{ kg/kgatom}$ и $\mu(\text{Ar}_2) = 40 \text{ kg/kgatom}$. числените пресмятания от (1) & (3) дават следния резултат: за хелия

$$V_{\text{HВ}} = 1084,54 \text{ m/s} ; V_{\text{ср.ар}} = 1224,27 \text{ m/s} \text{ и } V_{\text{ср.кв}} = 1328,48 \text{ m/s} ; \text{ за аргона - } V_{\text{HВ}} = 342,99 \text{ m/s} ; V_{\text{ср.ар}} = 387,18 \text{ m/s} \text{ и } V_{\text{ср.кв}} = 420,14 \text{ m/s}.$$

Средната кинетична енергия на постъпателното движение на един атом при $i = 3$ степени на свобода е

$$(4) \bar{E}_{\text{к}} \underset{\substack{\text{п. а} \\ \text{1 атом}}}{=} = \frac{i}{2} k_B T = \frac{3}{2} k_B T = 5,858 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0366 \text{ eV}.$$

Пълната кинетична енергия ($\bar{E}_{\text{к}}$) пълна на един атом от атомарен газ има $i = 3$ степени на свобода ^{АТОМ} понеже не се въвеждат допълнителни степени на свобода за въртеливото движение – такова движение не се осъществява при газове в атомно състояние. При газове с двуатомни молекули се въвеждат $i_{\text{В}} = 2$ степени на свобода за въртеливото движение на молекулите. Следователно

$$(5) \bar{E}_{\text{к}} \underset{\text{пълна}}{\text{(1 атом)}} = \bar{E}_{\text{к}} \underset{\text{п. а}}{\text{(1 атом)}} = 5,858 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0366 \text{ eV}.$$

Нека да определим (\bar{E}_k) от зависимостта

$$(6) \bar{E}_k = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{N_A} \right) V^2 . \quad \text{Тогава за да има съвпаде-$$

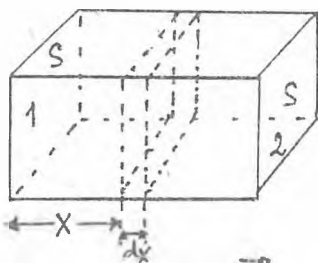
ние в (\bar{E}_k) с $E_{k,1}$ атом , трябва при $i = 3$ от (4), да се приеме, че $V = v_{ср.кв.}^{1А}$. Тогава заместваме (3) в (6) и получаваме, че

$$(7) \bar{E}_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{N_A} \right) \frac{3R_T}{\mu} = \frac{3}{2} k_B T = \bar{E}_{k,1А} \text{ (1 атом)} .$$

Това показва, че при въвеждане на \bar{V} в хаотичното топлинно движение, трябва да отчитаме, че $\bar{V} = v_{ср.кв.}$.

ЗАДАЧА № 39 Площта на прозорец е $S = 1,44 \text{ m}^2$, а разстоянието между тях е $d^* = 0,05 \text{ m}$. Външното стъкло е при температура $t_1 = -28^\circ\text{C}$, а вътрешното - при $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Налигането на въздуха между двете стъкла е равно на атмосферното $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, а температурата на въздуха между двете стъкла се изменя линейно. Да се определи пълната кинетична енергия на молекулите и броят им в ограничения обем между двете стъкла.

РЕШЕНИЕ :



Избираме успореден на стъклата паралелепипеден слой въздух на разстояние (X) от лявото стъкло и с дебелина (dx). В него е валице максвелово разпределение на молекулите по големи-

ната на скоростта (\bar{V}) и кинетичната енергия (\bar{E}_k). Записваме $E_{k, \text{пълна}} \text{ (1 молек)} = \frac{1}{2} k_B T$ (1) при $i = 5$. Тук въздуха се приема за двуатомен газ с $\mu_{\text{в}} = 29 \text{ kg/kmol}$, като $P_0 = \text{const}$ в целия обем $V = d^*(S)$ (2) Броят на молекулите в единица

обем се дава със зависимостта (3) $n_0 = P_0 (k_B T)^{-1}$. В обема

(4) $dV = S dx$ на слоя въздух има dN молекули, като
 (5) $dN = n_0 dV = \frac{P_0}{k_B T} S dx$. Тогава

(6) $d(\bar{E}_{\text{к.п.в.}}) = dN (\bar{E}_{\text{к.п.в.}}) = \frac{P_0 S dx}{k_B T} \cdot \frac{1}{2} k_B T = \left(\frac{P_0 S}{2} \right) dx$.

Съгласно условието на задачата, температурата между двете стъкла се изменя линейно. (7) $T(x) = T_1 + \alpha \cdot x$

В разглеждания случай $T_1 = t_1 + 273 = -28 + 273 = 245^\circ\text{K}$ и $T_2 = t_2 + 273 = 10 + 273 = 283^\circ\text{K}$.

Заместваме (7) в (5) и получаваме, че

(8) $dN = \frac{P_0 S}{k_B} \left(\frac{dx}{T_1 + \alpha \cdot x} \right)$.

Преминваме към решаване на (8) чрез почленно

интегриране на двете страни.

(9) $N = \int dN = \frac{P_0 S}{k_B} \int_0^{d^*} \frac{dx}{T_1 + \alpha \cdot x} = \frac{P_0 S}{\alpha k_B} \int_0^{d^*} \frac{d(T_1 + \alpha x)}{(T_1 + \alpha \cdot x)}$

(10) $N = \frac{P_0 S}{\alpha k_B} \ln(T_1 + \alpha \cdot x) \Big|_0^{d^*} = \frac{P_0 S}{\alpha k_B} [\ln(T_1 + \alpha d^*) - \ln T_1]$

В разглеждания случай $T_1 + \alpha d^* = T_2$ (11) и тогава

(12) $\alpha = \frac{T_2 - T_1}{d^*} = \frac{283 - 245}{0,05} = \frac{38}{0,05} = 760 \text{ K/m}$.

Заместваме (11) в (10) и получаваме, че

(13) $N = \frac{P_0 S}{\alpha k_B} (\ln T_2 - \ln T_1) = \frac{P_0 S d^*}{k_B (T_2 - T_1)} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$.

Получената зависимост (13) е общото решение на задачата за определяне на (N). За да определим средната стойност на пълната ки-

кинетична енергия ще интегриране почленно двете страни на (6)

$$(14) \bar{E}_{k_{\text{пълно}}} = \int d\bar{E}_{k_{\text{пълно}}} = \int_0^{d^*} \frac{i P_0 S}{2} dx = \frac{i P_0 S}{2} d^*$$

Приемаме, че $i = 5$ при условие, че напълно са развити двете мо-
ди на топлинно движение на молекулите на въздуха - постъпателно и
въртеливо. Следователно от (14) при $i = 5$ следва, че

$$(15) \bar{E}_{k_{\text{пълно}}} = \frac{5}{2} P_0 S d^*$$

Получената зависимост (15)
се явява общо решение на задачата за определяне на $\bar{E}_{k_{\text{пълно}}}$.

Числените пресмятания от (13) и (15) дават следния резултат: $N =$
 $= 2,005 \cdot 10^{24}$ молекули; $\bar{E}_{k_{\text{пълно}}} = 7200 \text{ J} = 7,2 \text{ KJ}$.

Допълнително определяме $n_0 = \frac{N}{V} = \frac{2,005 \cdot 10^{24}}{0,0720} = 2,785 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$.

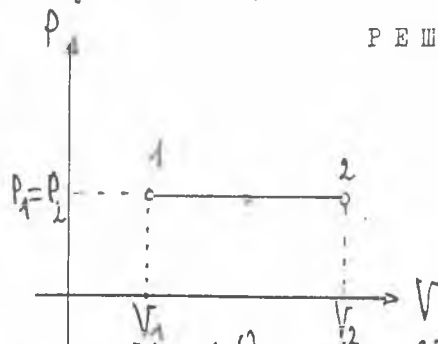
ЗАДАЧА № 40 При изобарно разширение на 1 mol от няка-
къв газ, заемащ начален обем $V_1 = 12$ литра при налягане $P_1 =$
 $= 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, е подадено количество топлина $\Delta Q = 2750 \text{ J}$, като
газът е извършил работа $\Delta A = 1100 \text{ J}$. Определете: а) броя (i)
на степените на свобода на молекулите (или атомите) на газа; б)
параметрите на газа в крайното състояние; в) броят на атомите в
молекулите на газа.

РЕШЕНИЕ :

а) От първия закон на термоди-
намиката следва,

$$(1) \Delta Q = \Delta U + \Delta A$$

при прехода от състояние (1)
в състояние (2) на газа. Тога-
ва



$$(2) \Delta U = \Delta Q - \Delta A = 2750 - 1100 = 1650 \text{ J}$$

Броят на моловете на газа е $n_{\mu} = 1 \text{ mol} = 10^{-3} \text{ kmol}$, а
обема $V_1 = 12 \text{ литра} = 12 \text{ dm}^3 = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$.

Написваме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за
двете състояния

$$(3) P_1 V_1 = n_{\mu} R T_1 \quad \text{и} \quad (4) P_1 V_2 = n_{\mu} R T_2$$

Написваме и формулата за вътрешната енергия

$$(5) U_1 = n_{\mu} (U_{\mu})_1 = n_{\mu} \frac{i}{2} R T_1 \quad (7) \Delta U = U_2 - U_1$$

$$(5) U_2 = n_{\mu} (U_{\mu})_2 = n_{\mu} \frac{i}{2} R T_2 \quad (8) \Delta U = \frac{i}{2} R n_{\mu} (T_2 - T_1)$$

Извършената работа (ΔA) при изобарното разширение на газа е

$$(9) \Delta A = P_1 (V_2 - V_1) \quad \text{Но дясната страна на (9)}$$

можем да получим ако от (4) извадим (3) и тогава получаваме, че

$$(10) P_1 (V_2 - V_1) = n_{\mu} R (T_2 - T_1) \quad \text{Заместваме (10) в}$$

(9) и определяме, че

$$(11) T_2 - T_1 = \frac{\Delta A}{n_{\mu} R} \quad \text{Заместваме (11) в (8)}$$

$$(12) \Delta U = \frac{i}{2} R n_{\mu} \left(\frac{\Delta A}{n_{\mu} R} \right) = \frac{i}{2} (\Delta A) \quad (13) i = \frac{2(\Delta U)}{\Delta A}$$

Получената зависимост (13) е общото решение на задачата
за определяне на (i). Численото решение от (13) дава

$$(14) i = \frac{2(\Delta U)}{\Delta A} = \frac{2(1650)}{1100} = 3 \quad \text{степени на свобода.}$$

Следователно, ако вземем под внимание, че $i = 3$ следва, че газа
е в атомарен вид и молекули не се образуват - газа е благороден.

б) Преминуваме към определяне на параметрите на газа в крайното състояние. Първо от (3) определяме

$$(15) \quad T_1 = \frac{p_1 V_1}{\mu R} = \frac{(2 \cdot 10^5) 1,2 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} (8315)} = 288,6^\circ \text{K}.$$

От (11) определяме, че

$$(16) \quad T_2 - T_1 = \frac{\Delta A}{\mu R} = \frac{1100}{10^{-3} (8315)} = 132,29 \approx 132,3^\circ \text{K}.$$

Тогава (17) $T_2 = T_1 + 132,3 = 288,6 + 132,3 = 420,9^\circ \text{K}.$

От (4) следва, че

$$(18) \quad V_2 = \frac{\mu R T_2}{p_2} = \frac{10^{-3} (8315) 420,9}{2 \cdot 10^5} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 17,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

или $V_2 = 17,5$ литра. Съгласно условието на задачата при изобарен процес (19) $p_2 = p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$

Допълнително към задачата да определим броя на молекулите в единица обем в двете състояния. От основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ следва, че

$$(20) \quad n_{01} = \frac{p_1}{k_B T_1} \quad \text{и} \quad (21) \quad n_{02} = \frac{p_2}{k_B T_2} = \frac{p_1}{k_B T_2}$$

Числените пресмятания от (20) и (21) дават следния резултат: $n_{01} = 5,022 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ и $n_{02} = 3,443 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$

Да определим вътрешната енергия на газа в двете състояния

$$(22) \quad U_1 = \left(\frac{3}{2} k_B T_1\right) n_{01} V_1 \quad \text{и} \quad (23) \quad U_2 = \left(\frac{3}{2} k_B T_2\right) n_{02} V_2.$$

Числените пресмятания от (22) и (23) дават следния резултат: $U_1 = 3600,2 \text{ J}$ и $U_2 = 5249,6 \text{ J}.$ Проверка: Тогава $\Delta U = U_2 - U_1 =$

= 5249,6 - 3600,2 = 1649,4 J. . Получената стойност почти съвпада с $\Delta U = 1650 J$. Отклонението от 0,6 J се дължи на приблизителното изчисление.

ЗАДАЧА № 41 Определете константата на Поасон $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ за смес от 3 mol аргон и 5 mol кислород.

РЕШЕНИЕ :

Представяме $n_{\mu}(Ar) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kmol}$ и $n_{\mu}(O_2) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kmol}$. От зависимостта

$$(1) n_{\mu}(Ar) = \frac{M(Ar)}{\mu(Ar)}$$

$$\text{или (2) } M(Ar) = n_{\mu}(Ar) \mu(Ar)$$

$$(3) n_{\mu}(O_2) = \frac{M(O_2)}{\mu(O_2)}$$

$$\text{или (4) } M(O_2) = n_{\mu}(O_2) \mu(O_2)$$

Но $\mu(Ar) = 40 \text{ kg/kmol}$ и $\mu(O_2) = 32 \text{ kg/kmol}$.

От (2) и (4) следва, че $M(Ar) = 0,12 \text{ kg}$ и $M(O_2) = 0,16 \text{ kg}$. Тогава общата маса на газовата смес е

$$(5) M_{см.} = M(Ar) + M(O_2) = 0,12 + 0,16 = 0,28 \text{ kg}.$$

Можем да определим ефективната маса на сместа (μ_{ef})

$$(6) \mu_{ef} = \frac{M_{см.}}{n_{\mu}(Ar) + n_{\mu}(O_2)} = \frac{0,28}{(3+5) \cdot 10^{-3}} = 35 \text{ kg/kmol}.$$

Коефициентът ($\gamma_{см.}$) на Поасон за сместа е

$$(7) \gamma_{см.} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{(C_{\mu})_p}{(C_{\mu})_v} = \frac{i_{см} + 2}{i_{см.}}$$

Следователно за да определим ($\gamma_{см.}$) трябва да знаем ($i_{см.}$) за сместа.

За целта отчитаме процентното масово съдържание на всяка газова компонента в сместа, като вземем под внимание, че аргона е в атомарно състояние и $i(Ar) = 3$, а

кислорода е в молекулно състояние и $i(O_2) = 5$. Тогава

$$(8) \quad i_{cm} = i(N_2) \frac{0,12}{0,28} + i(O_2) \frac{0,16}{0,28} = 4,143.$$

Заместваме (8) в (7) и получаваме, че

$$(9) \quad \alpha_{cm} = \frac{4,143 + 2}{4,143} = \frac{6,143}{4,143} = 1,483 \approx 1,48.$$

ЗАДАЧА № 42. Съвременни вакуумни помпи позволяват да се понижат налягането на газове в съответни съдове почти до $p_{min} = 10^{-10} \text{ Pa}$. Колко молекули се съдържат в обем 1 mm^3 азот при налягане (p_{min}) и при температура $t = 27^\circ\text{C}$? При тези условия какви са стойностите на средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) и средното време (ΔT) между две стълкновения на дадена молекула с нейните съседи?

РЕШЕНИЕ:

За да определим броя (n_0) на молекулите в единица обем използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ (при $T = t + 273 = 27 + 273 = 300^\circ\text{K}$)

$$(1) \quad p = n_0 k_B T$$

$$\text{или (2) } n_0 = \frac{p}{k_B T}$$

След това използваме формулата на Максвел за средния свободен пробег

$$(3) \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \sigma d_m^2}$$

Заместваме (2) в (3) и получаваме (4)

$$(4) \quad \bar{\lambda} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p d_m^2}$$

Тук (d_m) е ефективният диаметър на молекулите

$$\text{на азота - } d_m(N_2)_{\text{ef.}} = 3,60 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

За да определим средното време (ΔT) между две стълкновения използваме зависимостта:

$$(5) \overline{\Delta t} = \frac{\overline{\lambda}}{V_{\text{нв.}}} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d_M^2 P} \sqrt{\frac{\mu}{2 R T}} = \frac{1}{\pi d_M^2 P} \sqrt{\frac{k_B T \mu}{4 N_A}}$$

където $\mu(N_2) = 28 \text{ кг/кмол}$, а $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмол}^{-1}$.

Получените зависимости (2), (4) и (5) се явяват общи решения на задачата за определяне на (n_0) , $(\overline{\lambda})$ и $(\overline{\Delta t})$.

Числените решения довеждат до следните резултати: $n_0 = 2,415 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-3}$; $\overline{\lambda} = 7,156 \cdot 10^7 \text{ м} \approx 7,20 \cdot 10^7 \text{ м}$ и $\overline{\Delta t} = 1,695 \cdot 10^5 \text{ с} = 1,70 \cdot 10^5 \text{ с}$. Допълнително можем да определим $V_{\text{нв.}} = 422,11 \text{ м/с}$. Понеже в условието на задачата се иска определяне на молекулите в 1 мм^3 (n_0^*) тогава следва, че

$$(6) n_0^* = \frac{n_0}{10^9} = 24,15 \text{ мм}^{-3}.$$

Тук се използва връзката, че

$$1 \text{ м}^3 = 10^9 \text{ мм}^3.$$

ЗАДАЧА № 43 Каква част от всички молекули на газа азот (N_2), намиращ се при температура $t = 0^\circ\text{C}$ и налягане $P = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ мм Hg}$ -стълб имат дължина на свободния пробег (λ), лежаща в интервала от 2,5 до 3,5 мм?

РЕШЕНИЕ:

Абсолютната температура на газа е $T = t + 273 = 273^\circ\text{K}$.
Налягането е $P = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ мм Hg}$ -стълб. Но 760 мм Hg -стълб = $1,013 \text{ Pa}$ и тогава

$$(1) P = \frac{1,8 \cdot 10^{-2} (1,013 \cdot 10^5)}{760} = 2,40 \text{ Pa}$$

Използваме функцията $f(x) = A \exp(-\frac{x}{\lambda})$, която се явява плътността на вероятността ($\frac{\Delta N}{N}$) да съществуват молекули, които имат свободен пробег (λ) в интервала от $(x, x+dx)$. Тогава

$$(2) f(x) = \frac{dN}{N dx} = A \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

и следователно

$$(3) \frac{\Delta N}{N} = \int_{x_1}^{x_2} A \left[\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right] dx$$

Първо определяме константата (A) от условието за нормировка

$$(4) \int_0^{\infty} A \left[\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right] dx = 1$$

$$(5) \int_0^{\infty} A \left[\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right] dx = -A\lambda \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right] d\left(-\frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= -A\lambda \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \Big|_0^{\infty} = A\lambda \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \Big|_{\infty}^0 =$$

$$= A\lambda \left[\exp(0) - \exp\left(-\frac{\infty}{\lambda}\right) \right] = A\lambda (1 - 0) = A\lambda$$

Сравняваме (4) и (5) и получаваме, че (6) $A = 1/\lambda$.

Заместваме (6) в (3) и получаваме, че

$$(7) \frac{\Delta N}{N} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right] dx = \int_{x_2}^{x_1} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) d\left(-\frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \Big|_{x_2}^{x_1} = \exp\left(-\frac{x_1}{\lambda}\right) - \exp\left(-\frac{x_2}{\lambda}\right)$$

Следователно, за да получим $(\Delta N/N)$ от (7) е необходимо да знаем стойността на (λ). За това приемаме, че $\lambda = \bar{\lambda}$ и използваме формулата за ($\bar{\lambda}$).

$$(8) \lambda = \bar{\lambda} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} p \pi d_m^2}$$

Тук $d_{N_1}(N_2) = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Заместваме (8) в (7) и получаваме, че

$$(9) \quad \frac{\Delta N}{N} = \exp\left(-\frac{x_1 \sqrt{2} P \sqrt{d_m^2}}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{x_2 \sqrt{2} P \sqrt{d_m^2}}{k_B T}\right)$$

Така получената зависимост (9) е общото решение на задачата за определяне на $(\Delta N/N)$ при $X_1 = 2,5 \text{ mm} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ и $X_2 = 3,5 \text{ mm} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Численото пресмятане от (8) и (9) дава следните резултати: $\bar{\lambda} = 2,728 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,728 \text{ mm}$ и $(\Delta N/N) = 0,1228 \approx 0,123$. Следователно, само 12,3% от всички молекули на азота (N_2) при дадените условия имат свободен пробег (λ) в интервала от $X_1 = 2,5 \text{ mm}$ до $X_2 = 3,5 \text{ mm}$.

ЗАДАЧА № 44 При температура $T_0 = 273^\circ\text{K}$ и налягане $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ дължината на свободния пробег на молекулите на азота (N_2) е $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$. При какво налягане (P_1) средната дължина на свободния пробег ($\bar{\lambda}_1$) на молекулите на азота при същата температура е $\bar{\lambda}_1 = 1 \text{ mm}$? Колко пъти при това налягане (P_1), средната продължителност на свободния пробег ($\bar{\lambda}_1$) е по-голям от този (Δt_0) при налягане $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$? Какво е пълното число на стълкновенията между молекулите, които се осъществяват в течение на време 1 s в 1 cm^3 обем от газа при нормални условия?

РЕШЕНИЕ:

Първо да превърнем стойностите на някои от дадените физични величини в СИ-система: $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$;
 $\bar{\lambda}_1 = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$

Първо да определим броя (n_0) на молекулите в единица обем при нормални условия

$$(1) \quad n_0 = \frac{P_0}{k_B T_0} = \frac{10^5}{(1,38 \cdot 10^{-23}) 273} = 2,654 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Използваме формулата за средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$).

$$(2) \quad \bar{\lambda}_0 = \frac{\kappa_B T_0}{\sqrt{2} P_0 \pi d_m^2} \quad \text{и} \quad (3) \quad \bar{\lambda}_1 = \frac{\kappa_B T_0}{\sqrt{2} P_1 \pi d_m^2}$$

Делим (2) на (3) и получаваме, че

$$(4) \quad \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1} = \frac{P_1}{P_0} \quad \text{и} \quad (5) \quad P_1 = \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1} \cdot P_0$$

Получената зависимост (5) е общо решение на задачата за определяне на (P_1). Численото пресмятане дава следния резултат $P_1 = 6 P_0$. Средната продължителност на пробегата на молекулите е

$$(6) \quad \bar{\Delta t}_0 = \frac{\bar{\lambda}_0}{V_{\text{HVB}}} \quad \text{и} \quad (7) \quad \bar{\Delta t}_1 = \frac{\bar{\lambda}_1}{V_{\text{HVB}}}$$

където (8) $V_{\text{HVB}} = \sqrt{\frac{2 \kappa_B T_0}{\mu}} = 402,67 \text{ m/s}$

при $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$ за азот (N_2). Делим почленно (7) на (6) и получаваме, че

$$(9) \quad \frac{\bar{\Delta t}_1}{\bar{\Delta t}_0} = \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_0} = \frac{10^{-3}}{6 \cdot 10^{-8}} = 1,67 \cdot 10^4$$

При налягане (P_1) следва, че (10) $n_{01} = \frac{P_1}{\kappa_B T_0} = 1,593 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$.

Пълното число (N_1) стълкновения при налягане $P_1 = 6 P_0$ е

$$(11) \quad N_1 = \left(\frac{n_{01}}{2} \right) \cdot \left(\frac{V_{\text{HVB}} \cdot \Delta t}{\bar{\lambda}_1} \right) = \frac{P_1 \Delta t}{2 \kappa_B T_0 \bar{\lambda}_1} \sqrt{\frac{2 \kappa_B T_0}{\mu}}$$

Численото пресмятане от (10) дава следния резултат: $N_1 = 2,942 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} = 2,942 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$.

Пълното число (N_0) стълкновения при налягане $P_0 = 10^5$ Pa ще бъде

$$(12) \quad N_2 = \left(\frac{N_0}{2}\right) \cdot \left(\frac{V_{\text{об}} \Delta t}{\bar{\lambda}_0}\right) = \frac{P_0 \Delta t}{2 k_B T_0 \bar{\lambda}_0} \sqrt{\frac{2 R_0 T_0}{\mu}}$$

Численото пресмятане дава стойност от (12)

$$N_2 = 8,907 \cdot 10^{34} \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1} = 8,907 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

ЗАДАЧА № 45 Определете броя (N_0) на молекулите на кислорода (O_2) в единица обем и средния свободен пробег ($\bar{\lambda}_0$) при нормални условия ($T_0 = 273^\circ\text{C}$ и $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$). Ако в изотермичен режим се намали налягането на газа 100 пъти, определете общия брой (N) удари между молекулите в единица обем и броя (Z) на ударите, извършени от една молекула за интервал от време $\Delta t = 3 \text{ с}$.

РЕШЕНИЕ :

Използваме формулата за средния свободен пробег (при $P_0 = 100 \text{ Pa}$)

$$(1) \quad \bar{\lambda}_0 = \frac{k_B T_0}{\sqrt{2} P_0 \pi d_m^2} \quad \text{и} \quad (2) \quad \bar{\lambda} = \frac{k_B T_0}{\sqrt{2} P \pi d_m^2} = 100 \bar{\lambda}_0$$

където $d_m(O_2) = 2,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, а $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

Представените зависимости (1) и (2) се явяват веднага общи решения на задачата за определяне на ($\bar{\lambda}_0$) и ($\bar{\lambda}$). От основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ следва, че

$$(3) \quad n_0 = \frac{P_0}{k_B T_0} \quad \text{и} \quad (4) \quad n = \frac{P}{k_B T_0} = \frac{P_0}{100 k_B T_0}$$

като (3) и (4) са също общи решения за определяне на (N_0) и (N). Числените пресмятания от (1-4) дават следния резултат: $\bar{\lambda}_0 = 1,15$.

$\cdot 10^{-7} \text{ м}$ и $n = 2,689 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Броят на ударите със съседни молекули на една молекула за време $\Delta t = 3 \text{ с}$ при двете състояния на газа е $(n_0 = 2,689 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}; \bar{\lambda} = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ м}.)$

$$(5) \bar{z}_0 = \frac{V_{\text{нв}} \Delta t}{\lambda_0} \quad \text{и} \quad (6) \bar{z} = \frac{V_{\text{нв}} \Delta t}{\lambda} = \frac{V_{\text{нв}} \Delta t}{100 \lambda_0} = \frac{z_0}{100}$$

За да определим (\bar{z}_0) и (\bar{z}) е необходимо предварително да определим най-вероятната скорост ($V_{\text{нв}}$) на молекулите

$$(7) V_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2R_0 T}{\mu}} = 376,66 \text{ м/с} \quad \text{при} \quad \mu(\text{H}_2) = 32 \text{ кг/кмол}.$$

Числените пресмятания от (5) и (6) дават следния резултат: $\bar{z}_0 = 9,829 \cdot 10^9$ и $\bar{z} = 9,829 \cdot 10^7$. Пълният брой (N) удари на молекулите в единица обем ще бъде:

$$(8) N_0 = \left(\frac{n_0}{2}\right) \bar{z}_0 = \frac{n_0}{2} \left(\frac{V_{\text{нв}} \Delta t}{\lambda_0}\right) \quad \text{и} \quad (9) N = \left(\frac{n}{2}\right) \bar{z} = \frac{n}{2} \left(\frac{V_{\text{нв}} \Delta t}{\lambda}\right).$$

Числените пресмятания от (8) и (9) дават следния резултат: $N_0 = 1,321 \cdot 10^{35} \text{ м}^{-3}$ и $N = 1,321 \cdot 10^{31} \text{ м}^{-3}$.

ЗАДАЧА № 46 Балон с обем $V = 10$ литра съдържа $M = 1 \text{ г}$ водород (H_2). Определете: а) плътността на газа; б) броят (n_0) на молекулите в единица обем; в) средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на молекулите; г) отношението на ($\bar{\lambda}$) към ефективния диаметър ($d_{\text{м, еф}}$) на молекулите.

РЕШЕНИЕ :

Първо превръщаме числените стойности на дадените в задачата физични величини в СИ-система: $V = 10 \text{ литра} = 10 \text{ дм}^3 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 10^{-2} \text{ м}^3$; $M = 1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$. Плътността

(ρ) на газа е

$$(1) \rho = \frac{M}{V} = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 10^{-1} = 0,10 \text{ kg/m}^3$$

Освен това (2) $\rho = n_0 m$ и (3) $m = \frac{\mu}{N_A}$. Тогава следва, че

(4) $\rho = n_0 \frac{\mu}{N_A}$ и (5) $n_0 = \frac{\rho N_A}{\mu} = \frac{M N_A}{V \mu}$ Тук $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ е числото на Авогадро, а $\mu(\text{H}_2) = 2 \text{ kg/kmol}$. Численото пресмятане от (5) дава следния резултат $n_0 = 3,0115 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$. Написваме формулата за средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$).

$$(6) \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \pi d_m^2} = \frac{\mu V}{\sqrt{2} M N_A \pi d_m^2}$$

като тук (d_m) е ефективния диаметър на молекулите на водорода и има стойност $d_m(\text{H}_2) = 2,10 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Зависимостта (6) е общо решение на задачата за определяне на ($\bar{\lambda}$), като численото пресмятане дава $\bar{\lambda} = 1,545 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Тогава отношението ($\bar{\lambda}/d_m$) ще има вида

$$(7) \frac{\bar{\lambda}}{d_m} = \frac{1,545 \cdot 10^{-7}}{2,1 \cdot 10^{-10}} = 7,0227 \cdot 10^2 = 702,27.$$

Да направим допълнителни пресмятания на други физични характеристики на газа в балона, ако приемем температурата да бъде $T = 300^\circ\text{K}$

а) Определяне на налягането (P) на газа. Използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ

$$(8) P = n_0 k_B T = 3,0115 \cdot 10^{25} (1,38 \cdot 10^{-23}) 300 = 1,247 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

б) Определяне на характеристичните скорости на хаотичното

топлинно движение

$$(9) V_{\text{HВ}} = \sqrt{\frac{2R_r T}{\mu}} \quad (10) V_{\text{ср.ср}} = \sqrt{\frac{8R_r T}{\pi \mu}} \quad (11) V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3R_r T}{\mu}}$$

Числените пресмятания от (9-11) дават следния резултат: $V_{\text{HВ}} = 1579,16 \text{ m/s}$; $V_{\text{ср.ср}} = 1782,61 \text{ m/s}$; $V_{\text{ср.кв}} = 1934,35 \text{ m/s}$.

в) Определяне на пълната вътрешна енергия (U) на газа в балона.

$$(12) U = N \left(\frac{5}{2} k_B T \right) = n_0 V \left(\frac{5}{2} k_B T \right) \quad \text{като тук}$$

$$(13) N = n_0 V = 3,0115 \cdot 10^{25} \cdot 10^{-2} = 3,0115 \cdot 10^{23}$$

е общия брой молекули водород в балона. Численото пресмятане на (U) от (12), при $i = 5$ степени на свобода - развити са напълно двете моди на топлинно движение (постъпателно и въртливо) дава следния резултат $U = 3116,90 \text{ J} \approx 3,12 \text{ kJ}$.

Средната енергия на една молекула е:

$$(14) \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} k_B T = \frac{5}{2} k_B T = 1,035 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,0647 \text{ eV}$$

ЗАДАЧА № 47 Да се намери масата (ΔM) на азота, преминал в резултат на дифузия през площ $\Delta S = 100 \text{ cm}^2$ за време $\Delta t = 10 \text{ s}$, ако градиентът на плътността ($\Delta \rho / \Delta x$) = 1,26 kg/m^3 по посока, перпендикулярна на площта (ΔS). Температурата на азота е $t = 27^\circ\text{C}$, а средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на молекулите е $\bar{\lambda} = 10^{-5} \text{ cm}$.

РЕШЕНИЕ :

Първо да превърнем всички стойности на дадените физични величини в задачата в СИ-система: $S = 100 \text{ cm}^2 = 100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$; $T = t + 273 = 27 + 273 = 300^\circ\text{K}$ и $\bar{\lambda} = 10^{-5} \text{ cm} = 10^{-7} \text{ m}$. Написваме зависимостта за преминалата маса (ΔM)

при дифузията

$$(1) \Delta M = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \Delta S \Delta t \left(\frac{\Delta p}{\Delta x} \right) \quad \text{и} \quad (2) \bar{v} = v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2R_r T}{\mu}}$$

при $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/kmol}$. Заместваме (2) в (1)

$$(3) \Delta M = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \Delta S \Delta t \left(\frac{\Delta p}{\Delta x} \right) \sqrt{\frac{2R_r T}{\mu}}$$

Получената зависи-
симость (3) е общо

решение на задачата за определяне на (ΔM) . Числените решения от (2) и (3) дават следния резултат: $v_{\text{нв}} = \bar{v} = 422,11 \text{ m/s}$ и $\Delta M = 1,773 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \approx 1,80 \cdot 10^{-6} \text{ kg} = 1,80 \text{ mg}$. Допълнително към задачата можем да определим коефициента на дифузия на азота

$$(4) D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{1}{3} (422,11) 10^{-7} = 1,407 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

След като ни е даден свободния пробег ($\bar{\lambda}$) можем да определим броя на молекулите в единица обем (\bar{n}_0)

$$(5) \bar{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \bar{\lambda} \pi d_M^2}, \quad \text{където } d_M(N_2) = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Численото пресмятане от (5) дава следния резултат $\bar{n}_0 = 1,738 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$. Вътрешната енергия на газа в единица обем ще бъде обемната плътност (ρ_U) на вътрешната енергия (U)

$$(6) \rho_U = \left(\frac{dU}{dV} \right) = \bar{n}_0 \bar{\epsilon} = n_0 \left(\frac{i}{2} k_B T \right) = n_0 \left(\frac{5}{2} k_B T \right).$$

при $i = 5$ степени на свобода, когато са развити и двете моди на хаотично топлинно движение на молекулите на газа (постъпателно и въртешливо). Численото пресмятане от (6) дава следния резултат $\rho_U = 1,799 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3 \approx 180 \text{ kJ/m}^3$.

ЗАДАЧА № 48 В затворен съд с обем $V = 5$ литра се намира кислород (O_2) с маса $M = 2$ г при температура $t = 12^\circ C$. Определете основните физични характеристики на газа при тези условия

РЕШЕНИЕ :

а) Прилагаме основното уравнение на Клапейрон-Менделеев за състоянието на идеалния газ за да определим налягането (P) на газа.

$$(1) PV = \frac{M}{\mu} R_r T \quad \text{или} \quad (2) P = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r T}{V} \right) \quad \text{като}$$

тук: $\mu(O_2) = 32 \text{ кг/кмол}$; $M = 2 \text{ г} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$; $T = t + 273 = 12 + 273 = 285^\circ K$; $V = 5 \text{ литра} = 5 \text{ дм}^3 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Численото пресмятане от (1) дава следния резултат $P = 2,962 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,292 \text{ физ.атм.}$

б) Определяме най-вероятната скорост ($V_{нв}$)

$$(3) V_{нв} = \sqrt{\frac{2 R_r T}{\mu}} = 384,85 \text{ м/с.}$$

в) Определяме средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) при ефективен диаметър на молекулите $(d_m)_{ef} = 2,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}$

$$(4) \bar{\lambda} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} P \pi d_m^2} = \frac{k_B T \mu V}{\sqrt{2} M R_r T \pi d_m^2} = \frac{\mu V}{\sqrt{2} M N_A \pi d_m^2}$$

където $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмол}^{-1}$. Численото пресмятане от (4) дава следния резултат $\bar{\lambda} = 4,10 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

г) Определяне на коефициента на дифузия (D)

$$(5) D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = 5,260 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с.}$$

д) определяне коефициента на вътрешно триене (η)

$$(6) \eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho = \rho D = \frac{M}{V} \cdot D = 2,104 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м.с.}$$

при $\rho = 0,400 \text{ kg/m}^3 = 400 \text{ g/m}^3$

е) определяне на коефициента на топлопроводност (K_T)

при специфична топлоемност $C_V(O_2) = 649 \text{ J/kg} \cdot K$

(7) $K_T = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} C_V = \eta C_V = 1,365 \cdot 10^{-2} \frac{W}{m \cdot K}$

ЗАДАЧА № 49 Каква маса $\Delta M(O_2)$ кислород е преминала вследствие на дифузията през площ $\Delta S = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ за време $\Delta t = 8 \text{ s}$, ако градиентът на плътността в направление, перпендикулярно на площта ΔS , е $\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = 1,2 \text{ kg/m}^4$. Температурата на кислорода е $t = 24^\circ C$, а средната дължина на свободния пробег на молекулите на кислорода е $\bar{\lambda} = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

РЕШЕНИЕ:

Написваме зависимостта на преминалата маса (ΔM) през сечение (ΔS) за време (Δt) при градиент на плътността ($\frac{\Delta \rho}{\Delta x}$)

(1) $\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \Delta S \Delta t \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right)$

От (1) се вижда, че

за да определим (ΔM) е необходимо да знаем $\bar{v} = v_{\text{ср.ар.}}$ като тогава

(2) $\bar{v} = v_{\text{ср.ар.}} = \sqrt{\frac{8 R T}{\pi \mu}}$

Тук $T = t + 273 = 24 + 273 = 297^\circ K$ и $\mu(O_2) =$

$= 32 \text{ kg/mol}$. Заместваем (2) в (1) и получаваме, че

(3) $\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \Delta S \Delta t \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) \sqrt{\frac{8 R T}{\pi \mu}}$

Така

получената зависимост (3) е общо решение на задачата за определяне на (ΔM). Численото пресмятане от (2) и (3) дава следните ре-

зультат: $\bar{v}_{\text{ср.ар}} = 443,42 \text{ м/с}$ и $\Delta M = 1,31 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$.

Допълнително към задачата да определим коефициента на дифузията (D) от

$$(4) D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \sqrt{\frac{8RT}{\mu}} = 1,626 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Понеже ефективният диаметър на молекулите на кислорода е $d_m(\text{O}_2) = 2,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, тогава от зависимостта за средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) можем да определим броя (N_0) на молекулите в единица обем

$$(5) \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} N_0 \pi d_m^2} \quad \text{или} \quad (6) N_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_m^2 \bar{\lambda}}$$

Получената зависимост (6) се явява общо решение за определяне на (N_0). Численото пресмятане от (6) дава следния резултат $N_0 = 2,809 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Получената стойност на (N_0) е по-голяма от числото на Лошмид (N_0), даващо броя на молекулите в единица обем при нормални условия ($P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $T_0 = 273^\circ\text{К}$) $(N_0)_\lambda = 2,689 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

ЗАДАЧА № 50 Газоразрядна тръба е пълна с неон (Ne) под налягане $P = 1 \text{ Па}$ при температура $T = 300^\circ\text{К}$. Да се определи броя на неоновите атоми (Ne), които удрят за време $\Delta t = 1 \text{ с}$ върху катода - метален диск с лице $\Delta S = 1 \text{ см}^2$.

РЕШЕНИЕ:

Първо привеждаме в СИ-система числените стойности на някои от дадените физически характеристики и условието на задачата: $\Delta S = 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$ и $\mu_A(\text{Ne}) = 20,17 \text{ кг/катола}$. Да определим предварително средноаритметичната скорост на атомите и техния брой (n) в единица обем.

$$(1) v_{\text{срар}} = \bar{v} = \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}} \quad \text{и} \quad (2) n = \frac{P}{k_B T}$$

където $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ е константата на Болцман. Броят на атомите, които ще удрят за време (Δt) върху катода с площ (ΔS) ще бъде

$$(3) N(\Delta S)_{\Delta t} = \frac{1}{6} n \bar{v} \Delta t \Delta S = \frac{1}{6} \left(\frac{P}{k_B T} \right) \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}} (\Delta t \Delta S).$$

Но (4) $k_B = R_r / N_A$ и като заместим (4) в (3) получаваме,

$$(5) N(\Delta S)_{\Delta t} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \frac{P N_A \Delta t \Delta S}{\sqrt{\pi \mu} R_r T}$$

Получената зависимост (5) се явява

общо решение на задачата за определяне на $N(\Delta S)_{\Delta t}$. Численото пресмятане от (5) дава следния резултат

$$N(\Delta S)_{\Delta t} = 1,596 \cdot 10^{18} \approx 1,60 \cdot 10^{18} \text{ атома (Ne)}.$$

Допълнително в задачата можем да определим (n) от (2) и средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) от (6) при ефективен диаметър на атомите на неона $d_{\text{эф}} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

$$(6) \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n d_{\text{эф}}^2}$$

Числените пресмятания от (2) и (6) дават следния резултат:

$$n = 2,415 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} = 1,190 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,19 \text{ cm}.$$

ЗАДАЧА № 51 Да се определят коефициентите на преносните явления и средния свободен пробег ($\bar{\lambda}_1$) на молекулите на хлора (Cl_2) при налягане $P_1 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ и температура $t_1 = 8^\circ\text{C}$. Как ще се изменят стойностите на търсените величини в резултат на изотермично двукратно намаляване на обема на газа ($V_2 = V_1/2$).

РЕШЕНИЕ :

а) Първо ще използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ (1) за да определим броя на молекулите на газа в единица обем (n_{01}) при $T_1 = t_1 + 273 = 8 + 273 = 281^\circ\text{K}$

$$(1) \quad n_{01} = \frac{P_1}{k_B T_1} = \frac{2,8 \cdot 10^4}{(1,38 \cdot 10^{-23}) 281} = 7,221 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}.$$

Ефективният диаметър на молекулите на хлора (Cl_2) приемаме $d_m(\text{Cl}_2) = 3,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ и тогава можем да определим средния свободен пробег ($\bar{\lambda}_1$) на молекулите от (2)

$$(2) \quad \bar{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{2} n_{01} \pi d_m^2} = 2,160 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Определяме средноаритметичната скорост (\bar{v}_1)

$$(3) \quad \bar{v}_{\text{ср.ар.}} = \bar{v}_1 = \sqrt{\frac{8 P_1 T_1}{\pi \mu}} = 256,72 \text{ m/s}.$$

Тук молната маса на хлора (Cl_2) е $\mu(\text{Cl}_2) = 2(35,453) = 70,906 \text{ kg/kmol} \approx 71 \text{ kg/kmol}$.

За да определим коефициента на самодифузия използваме зависимостта

$$(4) \quad D_1 = \frac{1}{3} \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1 = \frac{1}{3} (256,72) 2,16 \cdot 10^{-7} = 1,848 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

За да определим коефициентът на вътрешно триене (η) използваме зависимостта

$$(5) \quad \eta = \frac{1}{3} \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1 \rho_1 = D_1 \rho_1 = D_1 (n_{01}) m(\text{Cl}_2)$$

$$(6) \quad \eta = D_1 (n_{01}) \frac{\mu}{N_A} = 1,571 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m.s}.$$

За да определим коефициента на топлопроводност (κ_T), трябва да използваме зависимостта

$$(7) (\kappa_T)_1 = \frac{1}{3} \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1 \rho_1 c_v = \eta_1 c_v$$

Понеже в съответните таблици няма информация за $c_v(Cl_2)$, тогава ще използваме една преходна зависимост (8) за двуатомен газ ($i = 5$ степени на свобода).

$$(8) (\kappa_T)_1 = \frac{1}{3} \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1 \rho_1 c_v = \frac{5}{6} k_B n_{01} \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1$$
 Осъществяването пресмятане по (8) дава следния резултат $(\kappa_T)_1 = 4,605 \cdot 10^{-3} \text{ W/m} \cdot \text{K}$. Можем да направим сравнение на получения резултат от (8), като се вижда,

че

$$(8) \frac{1}{3} \rho_1 c_v = \frac{5}{6} k_B n_{01} \quad \text{или (8)} \quad c_v = \frac{5}{2} \left(\frac{k_B n_{01}}{\rho_1} \right)$$

Освен това, от (7) следва, че

$$(8) \frac{1}{3} \rho_1 c_v = \frac{5}{6} k_B n_{01} \quad \text{или (8)} \quad c_v = \frac{5}{2} \left(\frac{k_B n_{01}}{\rho_1} \right)$$
$$(8) \frac{1}{3} \rho_1 c_v = \frac{5}{6} k_B n_{01} \quad \text{или (8)} \quad c_v = \frac{5}{2} \left(\frac{k_B n_{01}}{\rho_1} \right)$$
$$(8) \frac{1}{3} \rho_1 c_v = \frac{5}{6} k_B n_{01} \quad \text{или (8)} \quad c_v = \frac{5}{2} \left(\frac{k_B n_{01}}{\rho_1} \right)$$

Можем да сравним стойността на $c_v(Cl_2)$ с тази за въздух $c_v = 730 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ и за кислород $c_v = 650 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ - като двуатомни газове.

б) При изотермично ($T_1 = T_2$) двукратно намаление на обема $V_2 = V_1/2$ на газа от основното уравнение за състоянието

$$(9) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1 \quad \text{и (10)} \quad P_2 V_2 = \frac{M}{\mu} R T_2 = \frac{M}{\mu} R T_1$$

Следва, че (11) $P_1 V_1 = P_2 V_2 = P_2 (V_1/2)$ и тогава

$$(12) P_2 = 2 P_1$$
 . Значи увеличаване два пъти на налягането се осъществява при този изотермичен преход (1 \rightarrow 2). От (1) се вижда, че при $P_2 = 2 P_1 \Rightarrow 1,444 \cdot 10^{25} \frac{m^{-3}}{m} = \eta_2 = \frac{2}{\alpha} n_{01}$. Средният свободен пробег

от (2) ще намали два пъти $\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{2} \bar{\lambda}_1 = 1,080 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Средноаритметичната скорост (\bar{v}_1) не се изменя при изотермичен преход ($1 \rightarrow 2$) и тогава $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 = 256,72 \text{ м/с}$. Коефициентът на дифузия (D_1) намаля два пъти и $D_2 = \frac{1}{2} D_1 = 9,240 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Коефициентът на вътрешно триене не се изменя $\eta_1 = \eta_2$, понеже (D_1) намалява два пъти, а (ρ_1) нараства два пъти при прехода ($1 \rightarrow 2$). Коефициентът на топлопроводност също не се изменя ($\kappa_{T1} = \kappa_{T2}$), ако $C_V \neq f(V)$.

ЗАДАЧА № 52 При каква стойност на налягането (P), отношението на динамичния вискозитет (η) на един газ към коефициента на дифузия (D) е $(\eta/D) = 0,35 \text{ кг/м}^3$. Средноквадратичната скорост на неговите молекули е $\bar{v}_{\text{ср.кв}} = 570 \text{ м/с}$.

РЕШЕНИЕ:

Записваме зависимостта (1) и (2), свързани с представянето на (η) и (D).

$$(1) \eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad \text{и} \quad (2) D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$$

$$\text{Следователно (3) } \frac{\eta}{D} = \rho = n(m) = n \left(\frac{m}{N_A} \right)$$

Средноквадратичната скорост ($\bar{v}_{\text{ср.кв}}$) се представя чрез

$$(4) \bar{v}_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3R_T}{M}} \quad \text{или} \quad \frac{R_T}{M} = \frac{(\bar{v}_{\text{ср.кв}})^2}{3} \quad (5)$$

Използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ

$$(6) P = n k_B T = n \left(\frac{P_T}{N_A} \right) T = \frac{n M}{N_A} \left(\frac{R_T}{M} \right) = \frac{\eta}{D} \cdot \frac{(\bar{v}_{\text{ср.кв}})^2}{3}$$

По този начин получената зависимост (6) се явява общо решение на

задачата за определяне на (P) . Численото пресмятане дава следния резултат $P = 3,791 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. За да направим допълнителни пресмятания и на числени стойности на други физични характеристики да приемем условно, че температурата на газа е $T = 290^\circ\text{C}$. Тогава от (6) определяме, че

$$(7) \quad n = \frac{P}{k_B T} = 9,473 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3} \quad . \text{ От (3) определяме, че}$$

$$(8) \quad \mu = \frac{\eta}{D} \left(\frac{N_A}{n} \right) = 22,25 \text{ kg/kmol}$$

Близка молна маса има неона (Ne) с $\mu_A(\text{Ne}) = 20,17 \text{ kg/katom}$. Ако приемем, че газа е "замърсен" неон и неговия ефективен диаметър на атомите е $d_m \approx 3,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, тогава можем да определим и средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) от зависимостта

$$(9) \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d_m^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} p \pi d_m^2} = \frac{3 k_B T D}{\sqrt{2} \pi d_m^2 \eta \sqrt{v_{ср.кв}}}$$

Това е общата решение за ($\bar{\lambda}$). Численото пресмятане дава следния резултат $\bar{\lambda} = 2,642 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Знаейки (\bar{v}) и ($\bar{\lambda}$) можем от (2) да намерим и коефициента на дифузия (D). Численото пресмятане дава следния резултат $D = 5,020 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

ЗАДАЧА № 53 Да се намери броя (n) на молекулите на водорода (H_2) в единица обем $V = 1 \text{ m}^3$, при условие, че когато коефициента на дифузията е $D = 1,42 \text{ cm}^2/\text{s}$, тогава коефициента на вътрешно триене е $\eta = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

РЕШЕНИЕ:

Записваме зависимостите за (D) и (η) от теорията за преносни явления за идеални газове.

$$(1) \quad D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \quad \text{и} \quad (2) \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$$

Делим (2) на (1) и получаваме, че

$$(3) \quad \frac{\eta}{D} = \rho = n \cdot m = n \frac{\mu}{N_A} \quad \text{или (4) } n = \frac{\eta}{D} \left(\frac{N_A}{\mu} \right)$$

Тук $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмол}^{-1}$ е числото на Авогадро, а $\mu(\text{H}_2) = 2 \text{ кг/кмол}$. Получената зависимост (4) е общото решение на задачата за определяне на (n). Численото пресмятане от (4) при $D = 1,42 \text{ см}^2/\text{с} = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, дава следния резултат $n = 1,80 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Можем допълнително към задачата да определим плътността (ρ) на газа от зависимостта (5) $\rho = n \left(\frac{\mu}{N_A} \right)$ от (3). Численото пресмятане дава следния резултат $\rho = 59,86 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3 \approx 60 \text{ г/м}^3$.

ЗАДАЧА № 54 При каква температура $T(\text{N}_2)$ коефициентът на вътрешно триене на азота $\eta(\text{N}_2)$ е равен на коефициента на вътрешно триене на водорода $\eta(\text{H}_2)$ при температура $t(\text{H}_2) = 19^\circ\text{C}$, ако ефективните диаметри на молекулите им са: $d(\text{N}_2) = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ и $d(\text{H}_2) = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

РЕШЕНИЕ:

Първо написваме зависимостта за коефициента на вътрешно триене (η)

$$(1) \quad \eta(\text{N}_2) = \frac{1}{3} \rho_A \bar{v}_A \bar{\lambda}_A \quad \text{и (2) } \eta(\text{H}_2) = \frac{1}{3} \rho_B \bar{v}_B \bar{\lambda}_B$$

Но (3) $\rho = n \cdot m = n \left(\frac{\mu}{N_A} \right)$ и тогава от условието на задачата следва, че $\eta(\text{N}_2) = \eta(\text{H}_2)$ като

$$(4) \quad \frac{1}{3} n_A \frac{\mu_A}{N_A} \sqrt{\frac{8R_r T_A}{\pi \mu_A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} n_A T d_A^2} = \frac{1}{3} n_B \frac{\mu_B}{N_A} \sqrt{\frac{8R_r T_B}{\pi \mu_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} T d_B^2 n_B}$$

При съкращаване на еднаквите множители в двете страни от

(4) се достига до следния окончателен вид

$$(5) \frac{\mu_A}{d_A^2} \sqrt{\frac{T_A}{\mu_A}} = \frac{\mu_B}{d_B^2} \sqrt{\frac{T_B}{\mu_B}} \quad \text{или} \quad (6) \frac{1}{d_A^2} \sqrt{\mu_A T_A} = \frac{1}{d_B^2} \sqrt{\mu_B T_B}$$

Тук $T_B = t_B + 273 = 19 + 273 = 292^\circ\text{K}$

От (6) окончателно получаваме, че

$$(7) T(N_2) = \frac{\mu(H_2)}{\mu(N_2)} T(H_2) \left[\frac{d(N_2)}{d(H_2)} \right]^4$$

Получената зависимост е общото решение на задачата за определяне на $T(N_2)$. Численото пресмятане дава следния резултат $T(N_2) = 68,86^\circ\text{K}$ или $T(N_2) = -204,14^\circ\text{C}$.

ЗАДАЧА № 55 Да се докаже, че коефициента на топлопроводност (K_T) на еднатомен идеален газ $K_T = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} c_v \rho$ може да се изрази с формулата $K_T = \frac{1}{2} k_B n \bar{v} \bar{\lambda}$, където (k_B) е константата на Болцман, а (n) е концентрацията на молекулите (обемна).

РЕШЕНИЕ :

Написваме двете зависимости, дадени в условието на задачата

$$(1) K_T = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} c_v \rho \quad \text{и} \quad (2) K_T^* = \frac{1}{2} k_B n \bar{v} \bar{\lambda}$$

За да бъде $K_T = K_T^*$ следва, че е в сила условието

$$(3) \frac{1}{3} c_v \rho = \frac{1}{2} k_B n$$

Това условие трябва да се докаже,

че е верно. Развиваме лявата част на (3)

$$(4) \frac{1}{3} C_V \rho = \frac{1}{3} C_V \frac{M}{V} = \frac{1}{3} C_V \frac{M}{V} \frac{\mu}{\mu} = \frac{1}{3} (C_V) \frac{M}{\mu} \cdot \frac{1}{V} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{i}{2} R \right) n \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{6} i (k_B N_A) \frac{N}{N_A} \frac{1}{V} = \frac{1}{6} i k_B \frac{N}{V}$$

Понеже за едноатомен газ $i = 3$, тогава от (4) следва, че

$$(5) \frac{1}{3} C_V \rho = \frac{3}{6} k_B \cdot n = \frac{1}{2} k_B n$$

Тук бяха използвани

следните представяния при преработка на (4)

$$(6) \rho = \frac{M}{V} \quad ; \quad (7) (C_V)_{\mu} = C_V / \mu \quad ; \quad (8) (C_V)_{\mu} = \frac{i}{2} R$$

$$(9) R = k_B N_A \quad \text{и} \quad (10) \frac{N}{V} = n \quad , \quad \text{като: } (C_V)_{\mu}$$

е молната топлиемост при $V = \text{const}$; (N_A) е числото на Авогадро, а (N) е общия брой молекули в газа. Получената зависимост

(5) доказва, че е в сила условието (3), което дава възможност при решаване на задачи за (K_T) на едноатомни газове, ако не се знае стойността на (C_V) да се използва представянето чрез (n) .

Нека да преработим зависимостта (2) като внесем в нея формулата за $(\bar{\lambda})$

$$(11) \bar{\lambda} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} n d_A^2} \quad \text{и тогава получаваме, че}$$

$$(12) K_T = \frac{1}{2} k_B n \bar{v} \frac{1}{\pi \sqrt{2} n d_A^2} = \frac{k_B \bar{v}}{\sqrt{8} \pi d_A^2}$$

Тази зависимост (12) за (K_T) е в много съкратен вид по характеристики. Достатъчно е само да знаем какъв е съответния едноатомен газ и каква е неговата абсолютна температура. Нека като пример да вземем газа аргон (Ar) при $T = 300^\circ K$, с $d(Ar) = 3,5 \cdot 10^{-10} m$ и

$\mu(A_2) = 39,94 \text{ kg/katom}$. Тогава използваме (12) и получаваме

$$(13) \quad k_T = \frac{k_B}{\sqrt{8} \pi d_A^2} \sqrt{\frac{8 R T}{\pi \mu_A}} = 5,061 \cdot 10^{-3} \text{ W/m.K.}$$

при $\bar{V} = \bar{V}_{\text{ср.ар.}} = 398,90 \text{ m/s}$.

Важно е да видим каква ще бъде връзката при двуатомни газове, когато са напълно развити и двете моди на хаотично топлинно движение на молекулите - (постъпателно и въртеливо) и $i = 3 + 2 = 5$ степени на свобода. Тогава от (4) следва, че

$$(14) \quad \frac{1}{3} C_V \rho = \frac{5}{6} k_B n$$

и тогава в заключителен план за

двуатомни газове ще се получи следната връзка

$$(15) \quad (k_T)_{i=5} = \frac{1}{3} \bar{V} \bar{\lambda} C_V \rho = \frac{5}{6} k_B n \bar{V} \bar{\lambda}$$

За многоатомни молекулни газови системи $i = 6$ степени на свобода и тогава

$$(16) \quad \frac{1}{3} C_V \rho = k_B \cdot n$$

и условието е от вида

$$(17) \quad (k_T)_{i=6} = \frac{1}{3} \bar{V} \bar{\lambda} C_V \rho = k_B n \bar{V} \bar{\lambda}$$

За двуатомни газове съгласно (15)

$$(18) \quad (k_T)_{i=5} = \frac{5}{6} k_B n \bar{V} \frac{1}{\sqrt{2} n d_M^2} = \frac{5 k_B \bar{V}}{6 \sqrt{2} d_M^2}$$

Да определим (k_T) на въздух при $T = 300^\circ\text{K}$, $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$ и $d_M = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Тогава $k_T = 9,898 \cdot 10^{-3} \text{ W/m.K}$ и $\bar{V}_{\text{ср.ар.}} = 468,14 \text{ m/s}$.

ЗАДАЧА № 56 Да се определят специфичните топлинни капацитети (C_p) и (C_v) на двуатомен газ, ако плътността (ρ) при налягане $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ и температура $T = 273^\circ\text{K}$ (нормални условия), е $\rho = 1,43 \text{ kg/m}^3$.

РЕШЕНИЕ:

Записваме основното уравнение за състоянието на идеалния газ във вида Клапейрон-Менделеев

$$(1) \quad pV = \frac{M}{\mu} R_r T \quad \text{и} \quad (2) \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{R_r T}$$

От (2) определяме (μ) чрез (3) и получаваме (3)

$$(4) \quad (C_\mu)_v = \frac{i}{2} R_r \quad \text{и} \quad (5) \quad C_v = \frac{(C_\mu)_v}{\mu} = \frac{i}{2} \left(\frac{R_r}{\mu} \right)$$

Заместваем (3) в (5) и получаваме, че

$$(6) \quad C_v = \frac{i}{2} R_r \left(\frac{p}{\rho R_r T} \right) = \frac{i \cdot p}{2 \rho T}$$

От уравнението на Роберт-Майер следва, че

$$(7) \quad (C_\mu)_p = (C_\mu)_v + R_r \quad \text{Делим двете страни на}$$

(7) с молната маса (μ) и получаваме, че

$$(8) \quad \frac{(C_\mu)_p}{\mu} = \frac{(C_\mu)_v}{\mu} + \frac{R_r}{\mu} \quad \text{или} \quad (9) \quad C_p = C_v + \frac{R_r}{\mu}$$

Заместваем (6) в (9) и получаваме, че

$$(10) \quad C_p = \frac{i \cdot p}{2 \rho T} + \frac{R_r}{\mu} \quad \text{Но от (3) получаваме}$$

$$(11) \quad \frac{R_r}{\mu} = \frac{p}{\rho T} \quad \text{и заместваем (11) в (10) като получаваме, че} \quad (12) \quad C_p = \frac{i \cdot p}{2 \rho T} + \frac{p}{\rho T} = \frac{p}{\rho T} \left(\frac{i+2}{2} \right)$$

За двуатомен газ $i = 5$ степени на свобода, понеже при напълно развити две моли на топлинно движение – постъпателно и въртливо, за постъпателно $i_n = 3$ степени на свобода и за въртливо $i_B = 2$ степени на свобода.

Получените зависимости (6) и (12) са общите решения на задачата за определяне на (C_V) и (C_P) . Числените пресмятания при $i = 5$ степени на свобода за двуатомен газ дават следния резултат $C_V = 648,71 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ и $C_P = 908,71 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$. допълнително към задачата можем да определим коефициента (γ) на Поасон за този двуатомен газ

$$(13) \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{908,71}{648,71} = 1,399 \approx 1,40$$

Получава се точно съвпадение с теоретичната стойност на $\gamma_{\text{теор.}}$, дадена чрез зависимостта

$$(14) \quad \gamma_{\text{теор.}} = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1,40.$$

ЗАДАЧА № 57 Да се определи коефициента на топлопроводност (k_T) на азот (N_2), ако при температура $t = 27^\circ\text{C}$ има налягане $p = 1,05 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

РЕШЕНИЕ : .

Привеждаме числените стойности на дадените физични характеристики в СИ-система. За целта $T = t + 273 = 27 + 273 = 300^\circ\text{K}$. Написваме формулата за (k_T) , която е от вида

(1) $k_T = \frac{1}{3} \sqrt{\lambda} C_V \rho$. Преобразуваме произведението $(C_V \rho)$

$$(2) \quad C_V \rho = \frac{(C_{\mu})_V}{\mu} (\eta \cdot m) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{i}{2} R_T \right) \eta m = \frac{i}{2} \frac{R_T \cdot \eta}{(\mu/m)} = \frac{i k_B \eta}{2 N_A}$$

Но (3) $(P_r/\lambda_A) = K_5$ и тогава от (2) се получава

(4) $C_V \rho = \frac{i}{2} K_5 \cdot n$ - Азотът (N_2) е двуатомен газ с $i = 5$ степени на свобода при напълно развити двете моли на хаотично топлинно движение на молекулите - постъпателно и въртливо движение. Заместваме (4) в (1) и получаваме, че

$$(5) K_T = \frac{1}{3} \bar{V} \bar{\lambda} \left(\frac{i}{2} K_5 \cdot n \right) = \frac{i}{6} \bar{V} \bar{\lambda} K_5 \cdot n$$

От основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ, броят на молекулите в единица обем (n) е от вида

$$(6) n = P (K_B T)^{-1}, \text{ а } (\bar{V}) \text{ и } (\bar{\lambda}) \text{ са от вида}$$

$$(7) \bar{V} = V_{\text{ср.ар.}} = \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}} \quad \text{и} \quad (8) \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n d_M^2}$$

Заместваме (7) и (8) в (5) и получаваме

$$(9) K_T = \frac{i}{6} \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}} \left(\frac{K_5 n}{\sqrt{2} n d_M^2} \right) = \frac{i K_5}{6 \pi d_M^2} \sqrt{\frac{4 R_r T}{\pi \mu}}$$

Получената зависимост (9) е общо решение на задачата за определяне на (K_T). От него се вижда, че в условието на задачата не е необходимо да се дава налягането (P) на газа, защото $K_T \neq f(P)$. Даването на (P) дава възможност от (6) да определим стойността на (n). Численото пресмятане от (6 + 9) дава следния резултат: $n = 2,536 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$; $\bar{V} = V_{\text{ср.ар.}} = 476,42 \text{ m/s}$; $\bar{\lambda} = 6,487 \cdot 10^{-9} \text{ m}$; $K_T = 9,014 \cdot 10^{-3} \text{ W/K.m}$. Тук използваме, че $d_M = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$; $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/kmol}$.

ЗАДАЧА № 58 В опита по определяне на коефициента на вътрешно триене (η) пространството между два коаксиални цилиндъра

(А и В) е запълнено с въздух при температура $t = 27^{\circ}\text{C}$. Цилиндърът (А) има радиус $r = 8\text{ cm}$ и е поставен на вертикална ос, като се върти с честота $\nu = 10\text{ об/с}$. Цилиндърът (В) е окачен на нишка в (т. С) и при установено движение на (А), той (В) след завъртане на (φ), също остава неподвижен, поради усуквателния момент на нишката. Разстоянието между цилиндрите е $d = 0,2\text{ cm}$. Ако приемем движението на въздуха между двата цилиндъра за ламинарно, да се определи силата, действаща на единица повърхност от цилиндъра (В) и коефициента на вътрешно триене на въздуха.

РЕШЕНИЕ :

Първо ще определим коефициента на вътрешно триене (η) на въздуха от

$$(1) \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \left(n_0 \frac{m}{N_A} \right) \sqrt{\frac{8Rt}{\pi}} \left(\frac{1}{\pi \sqrt{2} n_0 d_m^2} \right)$$

След преобразуване на (1) достигаме до следния окончателен вид

$$(2) \quad \eta = \frac{2 \sqrt{2Rt} \mu}{3 \sqrt{\pi^3} d_m^2 \cdot N_A}$$

Получената зависимост (2) е общото решение

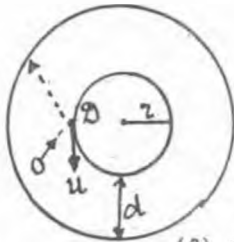
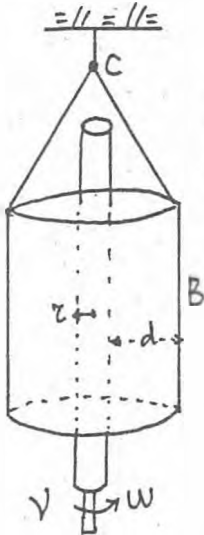
на задачата за определяне на (η). Численото пресмятане от (2) дава следния резултат $\eta = 1,953 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s} = 1,953 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Всяка точка (S) от повърхността на вътрешния цилиндър (А) има линейна скорост (3) $u = \omega r = 2\pi \nu r$. За всяко преносно явление, съответният коефициент по големина е равен на плътността на съответния поток, отнесен за единица гра-

диент на съответната характеристика за случая

$$(4) \eta = \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta t \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)} \quad \text{Тогава от (4) следва, че}$$

$$(5) \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta t} = \frac{F}{\Delta S} = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \eta = \left(\frac{u-0}{d} \right) \eta = \frac{u \eta}{d}$$



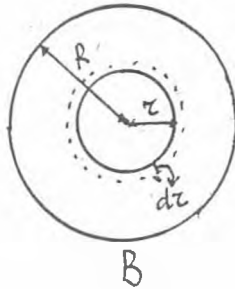
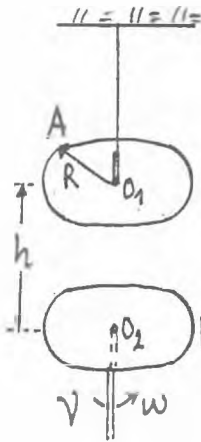
Заместваме линейната скорост (u) от (3) в (5) и получаваме окончателно, че

$$(6) \frac{F}{\Delta S} = \eta \left(\frac{2\pi r \nu z}{d} \right)$$

Получената зависимост (6) е общо решение на задачата за определяне на ($F/\Delta S$). Численото пресмятане дава следния резултат $F/\Delta S = 4,906 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}^2$.

ЗАДАЧА № 59 Кръгов диск (А) е окачен на еластична нишка на друг диск (В) на разстояние $h = 1 \text{ cm}$. Честотата на въртене на долния диск (В) е $\nu = 8 \text{ об/с}$, а радиуса на дисковете са по $R = 10 \text{ cm}$. Модулът на усукване на нишката е $K_M = 10^{-5} \text{ J/rad}$, а коефициента на вътрешно триене на въздуха е $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Определете ъгъла ($\Delta\psi$) на завъртане на горния диск (А) при установено въртене на долния диск (В). Крайните ефекти да се пренебрегнат и движението на въздуха между дисковете да се приеме за ламинарно.

РЕШЕНИЕ :



От диска (B) избираме един кръгов пръстен с радиус (r) и дебелина (dr). Неговата

повърхност има площ
(1) $dS = 2\pi r(dr)$

Всяка точка (C) от обиколката на пръстена има скорост (2)

$$V_c = \omega r = 2\pi \nu r$$

при въртене на диска.

(B) с честота (ν). При удари на молекулите на въздуха върху повърхността (dS) те отнасят "въртящи" импулси и при удари върху симетричната повърхност (dS_A) от горния диск (A) за единица време ($\Delta t = 1s$) ще действат със сила (dF_A), която може да се представи чрез зависимостта

$$(3) \frac{dF_A}{dS_A} = \eta \left(\frac{V_c}{h} \right)$$

или (4) $dF_A = \eta \frac{2\pi \nu r}{h} (2\pi r dr)$

$$(5) dF_A = \frac{4\pi^2}{h} \eta \nu r^2 dr$$

. Тази сила (dF_A) ще

създава момент на въртене (6) $dM_A = r(dF_A)$

. Замест-

ваме (5) в (6) и получаваме, че

$$(7) dM_A = \frac{4\pi^2}{h} \eta \nu r^3 dr$$

Интегрираме (7) и

$$(8) M_A = \int_0^R dM_A = \frac{4\pi^2}{h} \eta \nu \int_0^R r^3 dr = \frac{4\pi^2}{h} \eta \nu \frac{R^4}{4} = \frac{\pi^2 \eta \nu R^4}{h}$$

По този начин в (8) получихме общия въртящ момент, който действа на диска (А). В резултат на този момент на въртене се осъществява завъртване на диска (А), докато този момент се уравновесява от усуквания момент на нишката при завъртване на ъгъл ($\Delta\varphi$). Тогава следва, че

$$(9) (\Delta\varphi) N_M = M_A = \frac{\pi^2 \eta v R^4}{h}$$

и окончателно

$$(10) \Delta\varphi = \frac{\pi^2 \eta v R^4}{h N_M}$$

Получената зависимост

(10) е общо решение на

задачата за определяне на ($\Delta\varphi$). Численото пресмятане дава следния резултат $\Delta\varphi = 1,14198 \text{ рад} = 81,39^\circ = 81^\circ 24'$.

ЗАДАЧА № 60 За пресмятане на отоплителна система се пресмята загубата на топлинна енергия през площ $\Delta S = 1 \text{ m}^2$ от повърхността на стената на сграда в течение на време $\Delta t^* = 1$ денонощие. Дебелината на тухлената стена е $d_1 = 40 \text{ cm}$, температурата на вътрешната част на стената е $t_1 = 18^\circ\text{C}$, а на външната $t_2 = -20^\circ\text{C}$. Определете загубите на топлина през (ΔS) за време (Δt^*), ако коефициента на топлопроводност на тухлената стена е $(k_T)_1 = 0,70 \text{ W/m}\cdot\text{K}$. Каква дебелина (d_2) трябва да има дървена стена за да получат същите загуби на топлинна енергия, ако коефициента на топлопроводност на дървото е $(k_T)_2 = 0,175 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.

РЕШЕНИЕ :

Съгласно дефиницията за коефициент на топлопроводност

(k_T) следва, че

$$(1) \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) = k_T$$

$$\text{или } (2) \left(\frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \right)_1 = (k_T)_1 \left(\frac{T_1 - T_2}{d_1} \right)$$

Общите загуби на топлинна енергия за време $\Delta t^* = 24(3600)$

$S = 8,64 \cdot 10^2 S$ ще бъдат

$$(3) (\tilde{\Delta Q})_1 = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \right)_1 \cdot \Delta t^* = (k_T)_1 \left(\frac{T_1 - T_2}{d_1} \right) \Delta t^*$$

Числените пресмятания от (2) и (3) дават следния резултат:

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \right)_1 = 66,5 \text{ W/m}^2 \quad \text{и} \quad (\tilde{\Delta Q})_1 = 5,7456 \cdot 10^6 \text{ J/m}^2.$$

За да се реализира същата загуба на енергия и при втория случай, трябва $(\tilde{\Delta Q})_1 = (\tilde{\Delta Q})_2$ и тогава, съгласно (3) следва, че

$$(4) (k_T)_1 \frac{(T_1 - T_2)}{d_1} \cdot \Delta t^* = (k_T)_2 \frac{(T_1 - T_2)}{d_2} \Delta t^*$$

$$(5) \frac{(k_T)_1}{d_1} = \frac{(k_T)_2}{d_2} \quad \text{или} \quad (6) \quad d_2 = \frac{d_1 (k_T)_2}{(k_T)_1}$$

Получената зависимост (6) е общо решение на задачата за определяне на (d_2). Численото пресмятане дава следния резултат:

$$d_2 = \frac{0,140(0,175)}{0,70} = 0,10 \text{ m} = 10 \text{ cm}.$$

Тук $T_1 = t_1 + 273 = 18 + 273 = 291^\circ\text{K}$ и $T_2 = t_2 + 273 = 253^\circ\text{K}$.

ЗАДАЧА № 61 Водата в кладенец има температура $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Температурата на външния въздух над водната повърхност е $t_2 = -10^\circ\text{C}$. Каква дебелина (ΔX) на слоя лед ще се образува за време $\Delta t^* = 1$ денонощие при замръзване на водата от повърхността ѝ, ако коефициента на топлопроводност на леда е $k_T = 2,51 \text{ W/m.K}$.

РЕШЕНИЕ :

Използваме връзката между плътността на топлинния поток ($\Delta Q / \Delta S \cdot \Delta t$) и коефициента на топлопроводност (k_T)

$$(1) \frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta t} = k_{\text{т}} \left(\frac{\Delta T}{x} \right)$$

За време (dt) през единица повърхност ще се пренесе количество топлина (dQ), зададено чрез (2).

$$(2) dQ = k_{\text{т}} \left(\frac{\Delta T}{x} \right) dt$$

Количеството топлина (dQ) ще доведе до охлаждане и замръзване на водата, като се образува лед с дебелина (dx). Като имаме предвид специфичния коефициент на замръзване на водата, че е $c_{\text{сп.}} = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$, тогава

$$(3) dQ = \rho c_{\text{сп.}} dx$$

, където (ρ) е плътността на леда $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$. Заместваме (3) в (2) и получаваме, че

$$(4) k_{\text{т}} \left(\frac{\Delta T}{x} \right) dt = \rho c_{\text{сп.}} dx$$

Интегрираме (4) и получаваме

$$(5) k_{\text{т}} (\Delta T) \int_0^{\Delta t^*} dt = \rho c_{\text{сп.}} \int_0^{\Delta x^*} x dx$$

$$\text{или (6) } k_{\text{т}} (\Delta T) \Delta t^* = \frac{\rho c_{\text{сп.}} (\Delta x^*)^2}{2}$$

$$(6) \Delta x^* = \left[\frac{2 k_{\text{т}} (\Delta T) \Delta t^*}{\rho c_{\text{сп.}}} \right]^{1/2}$$

Получената зависимост (6)

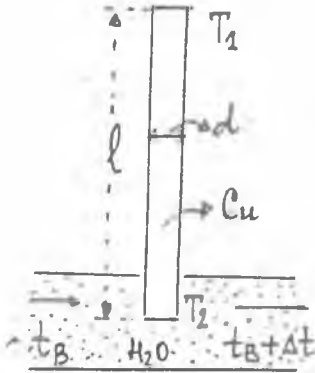
е общо решение на задачата

за определяне на (Δx^*). Численото пресмятане дава следния резултат $\Delta x^* = 0,120 \text{ m} = 12 \text{ cm}$.

ЗАДАЧА № 62 Антикатодеът на рентгенова тръба е във вид на цилиндрична пръчка с дължина $l = 25 \text{ cm}$ и диаметър $d = 1,5 \text{ cm}$. Определете разликата (ΔT) в температурите на горещия и студения край на пръчката, ако през нейната околна повърхност не се предава топлина, а студения край се охлажда с поточна чешмяна вода. Поточната вода увеличава температурата си с $\Delta t = 3^\circ\text{C}$ при разход $\Delta m = 1 \text{ kg/min}$. Коефициентът на топлопроводност на медта е $k_{\text{т.}} = 3,185 \cdot 10^2 \text{ W/m.K}$.

РЕШЕНИЕ :

Привеждаме числените стойности на физичните характеристики-



ки в СИ-система: $l = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$; $d = 1,5 \text{ cm} = 0,015 \text{ m}$; $\Delta \tilde{m} = 1 \text{ kg/min} = 0,0167 \text{ kg/s}$.

Сечението (ΔS) на пръчката е (1) $\Delta S = \frac{\pi d^2}{4}$

Написваме връзката между плътността на топлинния поток, пренасян се по дължината (l) на пръчката и (k_T), която е от вида

$$(2) \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = k_T \frac{(T_1 - T_2)}{l} = k_T \left(\frac{\Delta T}{l} \right)$$

Заместваме (ΔS) от (1) в (2) и получаваме, че

$$(3) \frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T \left(\frac{\Delta T}{l} \right) \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{но (4) } \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \Delta \tilde{m} (\Delta t) c_{H_2O}$$

Записът на (4) осъществяваме от основното калориметрично уравнение за предаване на топлина на тяло с маса (Δm) и специфична топлиемност $c_{H_2O} = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. Обединяваме (3) и (4) и определяме (ΔT)

$$(5) \Delta T = \frac{4 l \Delta \tilde{m} (\Delta t) c_{H_2O}}{\pi k_T d^2}$$

Получената зависимост (5) е общо решение на

задачата за определяне на (ΔT). Численото пресмятане от (5) дава следния резултат $\Delta T = 930^\circ \text{K}$. Допълнително към задачата можем да определим топлинния поток ($\Delta Q/\Delta t$) чрез пръчката и плътността на топлинния поток ($\Delta Q/\Delta S \Delta t$), съответно чрез използване на зависимостите (3) и (2). Тогава получаваме следните стойности:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 209,27 \text{ J/s} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = 1,185 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = 1,185 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$$

ЗАДАЧА № 63 Два съда, всеки с обем по $V = 1$ литър, са съединени с тръбичка с дължина $l = 10 \text{ cm}$ и напречно сечение $S = 1 \text{ cm}^2$. Единият от съдовете е напълнен с влажен въздух, а другия - със сух въздух. Приемайки, че коефициента на дифузия на водните пари във въздуха при атмосферно налягане е $D = 0,23 \text{ cm}^2/\text{s}$ и пренебрегвайки вискозитета на газа, определете след колко време (Δt) разликата в концентрациите на водните пари ще намалее $e = 2,72$ пъти.

РЕШЕНИЕ :

При съединяване на двата съда с тръбичка започва дифузия на водните пари от единия съд към другия. Тогава разликата в концентрациите (обемните) на молекулите на водните пари при неустойчив процес на пренос (дифузия) намалява с времето (t) по експоненциален закон от вида

(1) $\Delta n = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, където: (Δn_0) е началната разлика в концентрацията при ($t = t_0 = 0 \text{ s}$), а (τ) е времето на релаксация на (Δn) , когато (2) $\Delta n_{\tau} = \frac{\Delta n_0}{e} = \frac{n_0}{2,72}$.
Това време на релаксация се дава със зависимостта

(3) $\Delta t = \tau = \frac{1}{D} \left(\frac{V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} \right) \cdot \frac{l}{S}$ Зависимостта (3) се явява общо решение на

задачата за определяне на ($\Delta t = \tau$). Численото пресмятане дава следния резултат $\Delta t = \tau = 2,174 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 6,0386$ часа. Предварително числените стойности на всички дадени характеристики в условието на задачата се привеждат в СИ-система: $V = 1$ литър = 10^{-3} m^3 ; $l = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$; $S = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ и $D = 0,23$

$$cm^2/s = 0,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/s = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/s .$$

ЗАДАЧА № 64 В два еднакви съда, с обеми по (V) всеки, се намира един и същ газ. Температурите в двата съда на газовата система, са еднакви, но налягането в единия съд е (P_1), а в другия е $P_2 = 2P_1$. Когато двата съда са били съединени с цилиндрична тръбичка с дължина (l) и напречно сечение (S) налягането в тях се е уравнило. Приемайки коефициента на дифузия на газа за равен на (D) и пренебрегвайки вискозитета (η), определете установеното налягане (P_3) и времето (T) за изравняване на налягането.

РЕШЕНИЕ :

От основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ следва, че:

$T P_1 V n_{01}$ $T P_2 V n_{02}$ (1) $n_{01} = P_1 (k_B T)^{-1}$
 (2) $n_{02} = P_2 (k_B T)^{-1} = \frac{2P_1}{k_B T} = 2n_{01}$
 (3) $n_{03} = P_3 (k_B T)^{-1}$ ИЛИ
 (4) $P_3 = n_{03} (k_B T)$

От запазване на общия брой молекулите

$$(5) N = n_{01} V + n_{02} V = (n_{01} + n_{02}) V = (n_{01} + 2n_{01}) V = 3n_{01} V$$

в цялата газова система при начално и крайно състояние следва, че

$$(6) N = 3n_{01} V = n_{03} (V + V + l \cdot S) = n_{03} (2V + l \cdot S)$$

Тогава от (6) следва, че

$$(7) n_{03} = \frac{3n_{01} V}{(2V + lS)} = \frac{3V}{(2V + lS)} \cdot \left(\frac{P_1}{k_B T} \right)$$

Но същевременно като заместим (3) в (7) получаваме, че

$$(8) \frac{P_3}{k_B T} = \frac{3V}{(2V + \ell S)} \cdot \left(\frac{P_1}{k_B T} \right) \quad \text{или} \quad (9) \quad P_3 = \frac{3V}{(2V + \ell S)} \cdot P_1$$

Получената зависимост (9) се явява общото решение на задачата за определяне на (P_3) след съединяване на двата съда с тръбичката. Във втория съд обемната концентрация на газа е (n_{02}) - начална и след смесване достига до равновесна стойност от (n_{03}). Тогава намаляването от (n_{02}) до (n_{03}) при неустановен режим е осъществено експоненциално по зависимостта.

$$(10) \quad n_{03} = (n_{02} - n_{01}) \exp\left(-\frac{\tilde{t}}{\tau}\right) = (2n_{01} - n_{01}) \exp\left(-\frac{\tilde{t}}{\tau}\right)$$

$$(11) \quad \frac{n_{03}}{n_{01}} = \exp\left(-\frac{\tilde{t}}{\tau}\right)$$

Но от (7) следва, че

$$(12) \quad \frac{n_{03}}{n_{01}} = \frac{3V}{(2V + \ell S)}$$

Заместваме (12) в (11) и получаваме, че

$$(13) \quad \frac{3V}{2V + \ell S} = \exp\left(-\frac{\tilde{t}}{\tau}\right) \quad \text{или} \quad (14) \quad \tilde{t} = \tau \ln\left[\frac{(2V + \ell S)}{3V}\right]$$

Но времето на релаксация (τ) се дава в случая чрез зависимостта

$$(15) \quad \tau = \frac{1}{D} \left(\frac{V \cdot V}{V + V} \right) \frac{\ell}{S} = \frac{V\ell}{2DS}$$

Заместваме (15) в (14) и получаваме, че

$$(16) \quad \tilde{t} = \frac{V\ell}{2DS} \ln\left(\frac{2V + \ell S}{3V}\right)$$

Получената зависимост (16) се явява общото решение

на задачата за определяне времето (\tilde{t}) за изравняване на налягането (P_3) в двата съда.

ЗАДАЧА № 65. Налягането на въздуха между стените на джаров съд със сферична форма при стайна температура $t_1 = 20^\circ\text{C}$ е $P = 10^{-3} \text{ mm Hg}$. Повърхността на вътрешната стена на джаровия съд е $\Delta S = 600 \text{ cm}^2$, а разстоянието между външната и вътрешната стена е $d = 0,5 \text{ cm}$. Определете масата на течния въздух (Δm), която се изпарява за време $\Delta t = 1$ час от този съд, ако специфичната топлина на парообразуване на въздуха е $q = 2,02 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$, а неговата температура е $T_2 = 80^\circ\text{C}$.

РЕШЕНИЕ:

Съгласно условието на задачата първо ще определим каква е стойността на средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на молекулите на въздуха в обема между стените на джаровия съд. Използваме зависимост (1), като определяме, че: $P = 10^{-3} \text{ mm Hg} = 0,1333 \text{ Pa}$; $T_1 = t_1 + 273 = 20 + 273 = 293^\circ\text{K}$ и ефективния диаметър на молекулите на въздуха е $d_m = (3,5 \cdot 10^{-10}) \text{ m}$. Пресмятането от (1) дава следния резултат $\bar{\lambda} = 0,0559 \text{ m}$. Разстоянието между двете стени е $d = 0,5 \text{ cm} = 0,005 \text{ m}$. Следователно, $\bar{\lambda} > d$ и $k = \bar{\lambda}/d = \frac{0,0559}{0,005} = 11,18$ пъти пъти, като газа може да се приеме за разреден. Съгласно теорията за преносни явления количеството топлина, което се пренася от външната към вътрешната стена на съда е ($\Delta Q_{1 \rightarrow 2}$), а обратно ($\Delta Q_{2 \rightarrow 1}$).

$$(2) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} n_0 \bar{v}_1 \Delta S \Delta t \left(\frac{5}{2} k_B T_1 \right)$$

$$(3) \Delta Q_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} n_0 \bar{v}_2 \Delta S \Delta t \left(\frac{5}{2} k_B T_2 \right)$$

Изваждаме двете количества топлини и получаваме топлинния поток

$$(4) \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_{1 \rightarrow 2} - \Delta Q_{2 \rightarrow 1}}{\Delta t} = \frac{5}{12} \Delta S k_B (n_{01} \bar{v}_1 T_1 - n_{02} \bar{v}_2 T_2).$$

Тогава за време $\Delta \tilde{t} = 1$ час преминалия топлинен поток през (ΔS) ще бъде

$$(5) \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t} \right) \Delta \tilde{t} = \frac{5}{12} \Delta S k_B (\Delta \tilde{t}) (n_{01} \bar{v}_1 T_1 - n_{02} \bar{v}_2 T_2).$$

Тук се има предвид, че $i = 5$ степени на свобода за въздуха като двуатомен газ с напълно развити двете моли на хаотично топлинно движение - постъпателно и въртливо. Полученото количество топлина от (5) ще отиде да изпари течен въздух с маса (Δm) и специфична топлина на гарособразуване (q) . Тогава $(6) \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t} \right) \Delta \tilde{t} = (\Delta m) q$. Заместваме (6) в (5) и получаваме, че

$$(7) \Delta m = \frac{5}{12q} \Delta S k_B (\Delta \tilde{t}) (n_{01} \bar{v}_1 T_1 - n_{02} \bar{v}_2 T_2).$$

Ако приемем, че налягането (P) между стените на джаровия съд е $P = \text{const}$, тогава от основното уравнение на кинетичната теория на газовете

$$(8) n_{01} = \frac{P}{k_B T_1} \quad \text{и} \quad (9) n_{02} = \frac{P}{k_B T_2}$$

За съответните скорости на молекулите записваме зависимостите

$$(10) \bar{v}_1 = (v_1)_{\text{ср.ар}} = \sqrt{\frac{8 R_f T_1}{\pi \mu}} \quad \text{и} \quad (11) \bar{v}_2 = \sqrt{\frac{8 R_f T_2}{\pi \mu}}$$

Заместваме (8 - 11) в (7) и получаваме

$$(12) \Delta m = \frac{5}{12q} \Delta S (\Delta \tilde{t}) P \sqrt{\frac{8 R_f}{\pi \mu}} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) = \frac{5 \Delta S (\Delta \tilde{t}) P \sqrt{2 R_f} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})}{6q \sqrt{\pi \mu}}$$

Така получената зависимост (12) е общата решение на задачата за определяне на (Δm). Численото пресмятане от (12) дава следния резултат $\Delta m = 0,01312 \text{ kg} = 13,12 \text{ g}$.

ЗАДАЧА № 66 Определете минималната стойност на налягането (P_{min}), при която топлопроводността на въздуха затворен между двойните стени на джаров съд още не зависи от налягането (P). Разстоянието между стените е $l = 5 \text{ mm}$, а температурата на въздуха е $t = 15^\circ\text{C}$.

РЕШЕНИЕ :

Първо привеждаме числените стойности на съответните физични характеристики, дадени в условието на задачата, в СИ-система: $l = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ и $T = t + 273 = 15 + 273 = 288^\circ\text{K}$. За да е изпълнено условието $k_T \neq f(P)$ трябва газа да не бъде разреден, тоест $\bar{\lambda} \leq l$. За да определим (P_{min}) приемаме условието $\bar{\lambda} = l$ и тогава

$$(1) \bar{\lambda} = l = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \pi d_m^2}$$

Но от основното уравнение на идеалния газ кинетичната

теория на идеалния газ следва, че (2) $n_0 = P_{min} (k_B T)^{-1}$.

Заместваме (2) в (1) и получаваме, че

$$(3) l = \frac{k_B T}{\sqrt{2} P_{min} \pi d_m^2}$$

$$\text{или (4) } P_{min} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} l \pi d_m^2}$$

Получената зависимост (4) е общо решение на задачата за определяне на (P_{min}) при условие, че ефективния диаметър на молекулите на въздуха е $d_m = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Численото пресмятане от (4) дава следния резултат $P_{min} = 1,461 \text{ Pa}$.

ЗАДАЧА № 67 Цилиндричен джаров съд с височина $H = 60 \text{ cm}$ и двойни стени с радиуси $r_1 = 20 \text{ cm}$ и $r_2 = 21 \text{ cm}$

е напълнен с течен въздух при температура $T_1 = 80^\circ\text{K}$. Налигането на въздуха между стените до напълването на съда с течен въздух е $P = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$. Температурата на стайния въздух е $T_2 = 290^\circ\text{K}$. Да се определи времето (Δt) за изпарение на $\Delta m = 60 \text{ g}$ течен въздух.

РЕШЕНИЕ :

При наличните условия в задачата първо да определим средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на молекулите на въздуха между двете стени на джаровия съд. За целта, определяме средноаритметичната температура

$$(1) T_{\text{ср.ар.}} = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{80 + 290}{2} = 185^\circ\text{K}$$

а след това и средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) от зависимостта (2)

$$(2) \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \pi d_m^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} P \pi d_m^2}$$

Тук използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ (3) $P = n_0 k_B T$ и (4) $n_0 = P (k_B T)^{-1}$.

Ефективният диаметър на молекулите на въздуха е $d_m = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Численото пресмятане от (2) дава следния резултат $\bar{\lambda} = 0,3129 \text{ m} = 31,3 \text{ cm}$. Понеже $(z_2 - z_1) = 1 \text{ cm}$, тогава следва, че $\bar{\lambda} > (z_2 - z_1)$ като $K = \bar{\lambda} (z_2 - z_1)^{-1} = 31,3$

пъти. Тогава можем да приемем, че газа между двете стени на джаровия съд е в разрежено състояние и трябва да разгледаме молекулни потоци да се движат от едната към другата стена.

При навсяване на удар от една молекула, движеща се от външната (T_2) към вътрешната стена (T_1), тя ще отдава енергия (5) $E = \frac{1}{2} k_B (T_2 - T_1)$. Приемаме, че във въз-

духа са развити и двете моли на топлинно движение - постъпателно и въртливо, като броя на степените на свобода е $i = 3 + 2 = 5$.

Тогава (5) добива окончателно вида (6) $E = \frac{5}{2} k_B (T_2 - T_1)$.

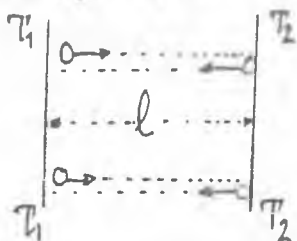
За да определим отдадената енергия (ΔQ) на студената вътрешна стена за време (Δt) от удрящите молекули въздух, трябва да знаем броя на ударите (ΔZ) за това време (Δt). Следователно, получаваме (7) $\Delta Z = \frac{N}{6} \left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)$, при: ($\Delta \tau$) - интервал от време между два последователни удара на една молекула върху студената стена; N - общия брой молекули въздух в обема $V =$

$= \pi (r_2^2 - r_1^2) H$ (8) между двете стени, в джаровия съд. При

(9) $(r_2 - r_1) = \ell$ - разстоянието между двете стени, следва че

$$(10) \Delta \tau = \frac{\ell}{\bar{v}_1} + \frac{\ell}{\bar{v}_2} = \left(\frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{\bar{v}_1 \bar{v}_2} \right) \ell.$$

Заместваме (10) в (7) и получаваме,



че (11) $\Delta Z = \frac{N}{6} \left(\frac{\Delta t}{\ell} \right) \left(\frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2}{\bar{v}_1 + \bar{v}_2} \right)$

След това записваме, че

$$(12) \Delta Q = (\Delta Z) E = \frac{N}{6} \left(\frac{\Delta t}{\ell} \right) \left(\frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2}{\bar{v}_1 + \bar{v}_2} \right) \frac{5}{2} k_B (T_2 - T_1).$$

Ще обработим израза, съдържащ средните скорости (\bar{v}_1) и (\bar{v}_2), като имаме предвид, че

$$(13) \bar{v}_1 = \sqrt{\frac{8 R_f T_1}{\pi \mu}}$$

и (14) $\bar{v}_2 = \sqrt{\frac{8 R_f T_2}{\pi \mu}}$

$$(15) \frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2}{\bar{v}_1 + \bar{v}_2} = \frac{\sqrt{8 R_f T_1 T_2}}{\sqrt{\pi \mu} (\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})}$$

Определяме израз за общия брой молекули (N) в обема (V) между двете стени на джаровия съд

$$(16) N = m_0 \pi (z_2^2 - z_1^2) H = m_0 \cdot V.$$

Освен това, от основното уравнение на кинетичната теория на газовете (17) $m_0 = P (k_B T_2)^{-1}$. Заместваме (17) в (16) и получаваме окончателно, че

$$(18) N = \frac{\pi P}{k_B T_2} (z_2^2 - z_1^2) H.$$

Заместваме (15) и (18) в (12)

и получаваме, че

$$(19) \Delta Q = \frac{5(\Delta t)\pi P}{12k_B T_2} (z_2^2 - z_1^2) H k_B (T_2 - T_1) \left[\frac{\sqrt{8R_r T_1 T_2}}{\sqrt{\pi \mu} (\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})} \right]$$

Като вземем под внимание (9) и че

$$(20) T_2 - T_1 = (\sqrt{T_2})^2 - (\sqrt{T_1})^2 = (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) \cdot (\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})$$

тогава (19) добива вида

$$(21) \Delta Q = \frac{5(\Delta t) P (z_2 + z_1) H (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) \sqrt{2\pi R_r T_1}}{6 \sqrt{\mu T_2}}$$

Това количество топлина (ΔQ) за време (Δt) е отгладено на течния въздух за изпарението му, като (22) $\Delta Q = (\Delta m) q$,

като $q = 2,02 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ е специфичната топлина на парообразуване на течния въздух. Тогава окончателно от (22) и (21) получаваме, че

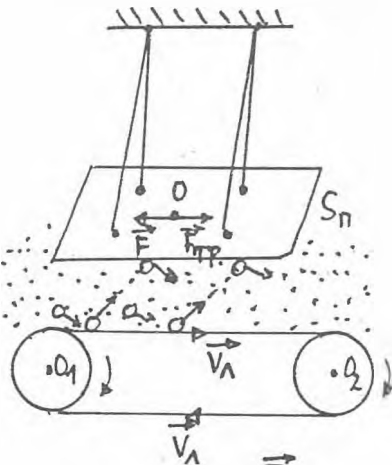
$$(23) \Delta t = \frac{6 (\Delta m) q \sqrt{\mu T_2}}{5 P (z_1 + z_2) H (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) \sqrt{2\pi R_r T_1}}$$

Получената зависимост (23) е общото решение на задачата за определяне на интервала време (Δt). Численото пресмятане дава следния резултат:

$$\Delta t = 2,186 \cdot 10^4 \text{ s} = 6,072 \text{ часа.}$$

ЗАДАЧА № 68 Хоризонтална трансмисионна лента се движи със скорост $V_{\lambda} = 25 \text{ m/s}$. Успоредно на нейната повърхност на височина $h = 18 \text{ cm}$ над нея е поставено хоризонтално паралелопипедна тънка пластинка с дължина $a = 32 \text{ cm}$ и ширина $b = 14 \text{ cm}$. Пластинката е окачена към статив. Каква сила (F) трябва да се приложи към пластинката, за да остане тя неподвижна? Опитът се осъществява при температура на въздуха $t = 32^{\circ}\text{C}$.

РЕШЕНИЕ :



При движение на лентата се предава импулс и на контактуващия слой (абсорбционен) въздух към нейната горна повърхност. Предаването на импулс след това става между хоризонталните въздушни слоеве между повърхностите на лентата и пластинката. Възникналата сила на

вътрешно триене ($\vec{F}_{\text{тр}}$) ще действа върху пластинката и за нейната компенсация трябва да се действа със сила F в (т. О) - масов център на пластинката. Съгласно третия закон на Нютон трябва (1) $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{тр}}$, а съгласно закона на Нютон за силата на вътрешно триене трябва да е изпълнена зависимостта (2)

$$(2) \vec{F}_{\text{тр}} = \eta \left(\frac{dv}{dx} \right) S_n = \eta \left(\frac{V_{\lambda}}{h} \right) ab$$

Градиентът на линејната скорост приемаме за постоянен в слоя въздух с дебелина (h) и тогава:

$$(3) \left(\frac{dV}{dx} \right) = \text{const} \quad (4) \frac{dV}{dx} = \frac{V_h}{h}$$

Атмосферният въздух се намира в условия, за които средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на молекулите му е $\bar{\lambda} \ll h$. Тогава за

коэффициент на вътрешно триене (η) може да се приложи зависимостта (5) $\eta = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \rho$ като (ρ) е плътността на въздуха. Съгласно теорията, можем да приложим и формули за ($\bar{\lambda}$), \bar{v} , ρ от вида

$$(6) \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_M^2 n} \quad (7) \bar{v} = \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}} \quad (8) \rho = \frac{\mu n}{N_A}$$

от където при заместване на (6 + 8) в (5) окончателно получаваме, че

$$(9) \eta = \frac{1}{3} \frac{1}{(\sqrt{2} \pi d_M^2 n)} \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}} \left(\frac{\mu n}{N_A} \right) = \frac{2}{3 \pi d_M^2 N_A} \sqrt{\frac{\mu R_r T}{\pi}}$$

В получената зависимост (9) основните характеристики са съответно:

$\mu = 29 \text{ kg/kmol}$ - ефективната молна маса на въздуха, като газова смес; $R_r = 8315 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ - универсална газова константа; $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ - числото на Авогадро, даващо броя на молекулите в 1 kmol газ; T - абсолютната температура; $d_M = 3,50 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ - ефективния диаметър на молекулите на въздуха. Заместваме вискозитета (η) от (9) в (2) и определяме окончателно, че

$$(10) |\vec{F}| = |\vec{F}_{\text{тр}}| = \frac{2 a b V_h}{3 \pi h N_A d_M^2} \sqrt{\frac{\mu R_r T}{\pi}}$$

Получената зависимост (10) е общото решение на задачата за определяне на големината на (\vec{F}) и $(\vec{F}_{\text{тр}})$. Численото пресмятане от (10) дава следния резултат $|\vec{F}| = |\vec{F}_{\text{тр}}| = 153,48 \cdot 10^{-6}$
 $N = 153,48 \mu N$.

Допълнително към задачата можем да определим вискозитета (η) от (9). Тогава получаваме следния резултат: $\eta = 24,666 \cdot 10^{-6}$
 $\text{Pa}\cdot\text{s} = 24,666 \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$. Съгласно справочни данни при $\tilde{t} = 20^\circ\text{C}$ се дава стойност $\tilde{\eta} = 18,2 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ за въздуха. Понеже $t > \tilde{t}$ тогава следва и $\eta(t) > \eta(\tilde{t})$. Полученият резултат за $\eta(t) = 24,666 \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ може да се приеме за реален.

ЗАДАЧА № 69 В дваров съд разстоянието между двете му стени е $l = 7 \text{ mm}$ и е запълнено с въздух. При какво налягане (P) на въздуха, топлопроводността му (K_T) ще започне да намалява, с увеличаване засмукването на въздуха от обема между двете стени на дваровия съд? Температурата на въздуха е $t = 18^\circ\text{C}$, а ефективния диаметър ($d_{\text{эф}}$)_м на молекулите му е $(d_{\text{эф}})_m = 3,50 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

РЕШЕНИЕ:

Съгласно теорията, средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на молекули на даден газ се представят със зависимостта (1)

$$(1) \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n_0 (d_{\text{эф}})_m^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi P (d_{\text{эф}})_m^2}$$

при отчитане на броя на молекулите в единица обем (n_0) от основното уравнение (2) на кинетичната теория на идеалния (нереален)

газ
 (2) $P = n_0 k_B T$

и (3) $n_0 = \frac{P}{k_B T}$

При нормално атмосферно налягане $\bar{\lambda} \ll l$ и тогава не се търси зависимост на (k_{Γ}) като функция от налягането (P) или от ($\bar{\lambda}$). Но $k_{\Gamma} = f(P)$ при условие, че (4) $\bar{\lambda} \approx l$ и тогава от зависимостта (1) при отчитане на (4) получаваме общото решение на задачата за определяне на (P) във вида (5)

$$(5) P = \frac{k_{\Gamma} T}{\sqrt{2} \pi \bar{\lambda} (d_{\text{эф}})_M^2} = \frac{k_{\Gamma} T}{\sqrt{2} \pi l (d_{\text{эф}})_M^2}$$

В случая $k_{\Gamma} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ и представлява константата на Болцман. Численото пресмятане на (P) от (5) дава следния резултат $P = 1,0543 \text{ Pa} = 1,0407 \cdot 10^{-5} \text{ физ. атм.}$

Допълнително към задачата при тези условия можем да определим и коефициента на топлопроводност (k_{Γ}) на въздуха от зависимостта (6)

$$(6) k_{\Gamma} = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} c_v = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu n_0}{N_A} \right) \frac{1}{\sqrt{2} \pi n_0 (d_{\text{эф}})_M^2} \sqrt{\frac{8 R_{\Gamma} T}{\pi \mu}} c_v$$

$$(7) k_{\Gamma} = \left[\frac{2 c_v}{3 \pi N_A (d_{\text{эф}})_M^2} \right] \sqrt{\frac{\mu R_{\Gamma} T}{\pi}} \quad \text{където: } (c_v) \text{ е специфичната}$$

топлоемност на въздуха при постоянен обем (V); $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмол}^{-1}$ е числото на Авогадро; $\mu = 29 \text{ кг/кмол}$ е ефективната молна маса на въздуха, като газова смес; $R_{\Gamma} = 8315 \text{ J/кмол} \cdot \text{K}$ е универсалната газова константата; (T) е абсолютната температура на газа ($T = t + 273 = 18 + 273 = 291^{\circ}\text{K}$). От справочни данни за $c_v = 720 \text{ J/кг} \cdot \text{K}$ (въздух) и $c_p = 1,009 \cdot 10^3 \text{ J/кг} \cdot \text{K}$.

Зависимостта (7) се явява общо решение на допълнителната задача, която си поставихме за определяне на (k_{Γ}) на въздуха.

Численото пресмятане на $(\kappa_{\text{гп}})$ от (7) дава следния резултат:

$$\kappa_{\text{гп}} = 9,787 \cdot 10^{-3} \text{ W/m.K}.$$

ЗАДАЧА № 70 Хелий под налягане $P = 1,0 \text{ Pa}$ се намира между две големи успоредно разположени пластинки, намиращи се една от друга на разстояние $h = 5,0 \text{ mm}$. Едната пластинка се поддържа при температура $t_1 = 17^\circ\text{C}$, а другата при $t_2 = 37^\circ\text{C}$. Намерете средния свободен пробег $(\bar{\lambda})$ на атомите на хелия в пространството между двете пластинки и плътността на топлинния поток (q) .

РЕШЕНИЕ:

Първо ще определим средния свободен пробег $(\bar{\lambda})$, за да видим в какво състояние се намира хелия между двете пластинки. За целта използваме от теорията зависимостта (1)

$$(1) \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n_0 d^2} = \frac{\kappa_B T}{\sqrt{2} \pi P d^2} \quad (2) T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$$

където: $T_1 = t_1 + 273 = 17 + 273 = 290^\circ\text{K}$; $T_2 = t_2 + 273 = 37 + 273 = 310^\circ\text{K}$; $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2}(290 + 310) = 300^\circ\text{K}$; $\kappa_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ е константата на Болцман; $d = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ е диаметъра на атома на хелия. Следователно, зависимостта (1) е общото решение на задачата за определяне на $(\bar{\lambda})$. Численото пресмятане от (1) дава следния резултат $(\bar{\lambda}) = 0,0233 \text{ m} = 23,3 \text{ mm}$. Това показва, че $\bar{\lambda} = 23,3 \text{ mm} > h = 5,0 \text{ mm}$ и следователно хелия е в ултраразредено състояние. Тогава за да определим коефициента на топлопроводност $(\kappa_{\text{гп}})$ трябва да използваме теорията за ултраразреден газ. От нея се дава следната зависимост (3)

Численото пресмятане на ($K_{\text{г}}$) от (7) дава следния резултат:

$$K_{\text{г}} = 9,787 \cdot 10^{-3} \text{ W/m.K} .$$

ЗАДАЧА № 70 Хелий под налягане $P = 1,0 \text{ Pa}$ се намира между две големи успоредно разположени пластинки, намиращи се една от друга на разстояние $h = 5,0 \text{ mm}$. Едната пластинка се поддържа при температура $t_1 = 17^\circ\text{C}$, а другата при $t_2 = 37^\circ\text{C}$. Намерете средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на атомите на хелия в пространството между двете пластинки и плътността на топлинния поток (q) .

РЕШЕНИЕ :

Първо ще определим средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$), за да видим в какво състояние се намира хелия между двете пластинки. За целта използваме от теорията зависимостта (1)

$$(1) \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n_0 d^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi P d^2} \quad (2) T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$$

където: $T_1 = t_1 + 273 = 17 + 273 = 290^\circ\text{K}$; $T_2 = t_2 + 273 = 37 + 273 = 310^\circ\text{K}$; $T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) = \frac{1}{2} (290 + 310) = 300^\circ\text{K}$; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ е константата на Болцман; $d = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ е диаметра на атома на хелия. Следователно, зависимостта (1) е общото решение на задачата за определяне на ($\bar{\lambda}$). Численото пресмятане от (1) дава следния резултат ($\bar{\lambda}$) = $0,0233 \text{ m} = 23,3 \text{ mm}$. Това показва, че $\bar{\lambda} = 23,3 \text{ mm} > h = 5,0 \text{ mm}$ и следователно хелия е в ултраразредено състояние. Тогава за да определим коефициента на топлопроводност ($K_{\text{г}}$) трябва да използваме теорията за ултраразреден газ. От нея се дава следната зависимост (3)

$$(3) \quad k_T = \frac{1}{6} \rho \bar{V} C_V = \frac{1}{6} n n_0 \bar{V} C_V = \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{N_A} \right) \left(\frac{P}{k_B T} \right) \bar{V} C_V.$$

$$(4) \quad k_T = \frac{1}{6} \left(\frac{\mu P}{R_T T} \right) C_V \sqrt{\frac{8 R_T T}{\pi \mu}} = \frac{P C_V}{6} \sqrt{\frac{8 \mu}{\pi R_T T}}$$

където: (C_V) е специфичната топлиемност на хелия при постоянно налягане; (μ) е молната маса на хелия ($\mu_{He} = 4 \text{ kg/katom}$)

$R_T = 8315 \text{ J/kmol}\cdot\text{K}$ е универсалната газова константата. За да получим окончателното представяне на формулата за (k_T) трябва да изразим (C_V).

$$(5) \quad C_V = \frac{C_V}{\mu} = \left(\frac{R_T}{\alpha e - 1} \right) \frac{1}{\mu}$$

Заместваме (C_V) от (5) в (4) и получаваме

$$(6) \quad k_T = \frac{P}{6} \left[\frac{R_T}{\mu(\alpha e - 1)} \right] \sqrt{\frac{8 \mu}{\pi R_T T}} = \frac{P}{6(\alpha e - 1) T} \sqrt{\frac{8 R_T T}{\pi \mu}}$$

Понеже (7) $\bar{V} = \sqrt{\frac{8 R_T T}{\pi \mu}}$ тогава (8) $k_T = \frac{P \bar{V}}{6(\alpha e - 1) T}$

Численото пресмятане от (7) и (8) дава следните резултати: $\bar{V} = 1260,2 \text{ m/s}$ и $k_T = 1,1113 \text{ W/m}\cdot\text{K}$. При нормални условия хелия има (k_{T0}) = 0,1415 W/m.K и $\alpha e = 1,63$ - коефициент на Пасон.

От теорията за топлопроводност

$$(9) \quad \Delta Q = k_T (\Delta T) \Delta S \Delta t \quad (10) \quad q = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = k_T (t_2 - t_1).$$

Получената зависимост (10) можем да я преобразуваме като заместим в нея (k_T) от (6). Тогава се получава окончателната формула (11), която е общото решение на задачата за определяне на

на плътността на топлинния поток (9) между двете пластинки.

$$(11) \quad q = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = \frac{P(t_2 - t_1)}{6(\alpha - 1)T} \sqrt{\frac{8R_T}{\pi \mu}}$$

като за температурата (T) е изпълнена зависимостта (2) Численото пресмятане от (11) дава следния резултат $q = 22,225 \text{ W/m}^2$.

ЗАДАЧА № 71 Определете масата на течния въздух изпаряваща се за време $\Delta t = 1$ час от "ненормален" джаров съд, ако налягането (P) на въздуха (при температура $T_1 = 293^\circ\text{K}$, останал между стените на съда, е равно на $P = 0,133 \text{ Pa}$. Повърхността на джаровия съд е $\Delta S = 600 \text{ cm}^2$, специфичната топлина (q) на пареообразуване на течния въздух е $q = 0,2 \text{ MJ/kg}$, а неговата температура е $T_2 = 81^\circ\text{K}$. Разстоянието (l) между външната и вътрешната повърхност на съда е много пъти по-малко от средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на молекулите на въздуха.

РЕШЕНИЕ:

Съгласно условието на задачата $\bar{\lambda} \gg l$ и тогава въздуха между двете стени на джаровия съд се намира в състояние на ултраразреден газ. Тогава пренесеното количество топлина (ΔQ) за време (Δt) от външната стена (T_1) към вътрешната стена (T_2) на съда е от вида (1)

(1) $\Delta Q = k_T^* \Delta S \Delta t (T_1 - T_2)$ при условие, че
коэффициента на топлопроводност (k_T^*) на ултраразредения газ е от вида

$$(2) \quad k_T^* = \frac{1}{6} \rho \bar{v} C_V = \frac{1}{6} \left(\frac{\mu n_0}{N_A} \right) \sqrt{\frac{8R_T}{\pi \mu}} \left[\frac{R_T}{\mu(\alpha - 1)} \right]$$

$$(3) \quad \rho = \frac{\mu n_0}{N_A} \quad (4) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8R_T}{\pi \mu}} \quad (5) \quad C_V = \frac{R_T}{\mu(\alpha - 1)}$$

Тук: (ρ) е плътността на газа; (\bar{V}) е средноаритметичната скорост на хаотично топлинно движение на молекулите; (C_V) е специфичната топлиемност на газа при постоянен обем; (n_0) - броят на молекулите в единица обем; (μ) = 29 kg/kmol - ефективната молна маса на въздуха; $R_r = 8315 \text{ J/kmol}\cdot\text{K}$ - универсалната газова константата; (α_e) = 1,40 - коефициент на Поасон за въздух (приет за двуатомен газ). Прилагаме основното уравнение (6) на кинетичната теория на идеалния (нереален) газ и определяйки (n_0) от (7) заместваме в (2), като окончателно за ($K_{\text{гр}}^*$) получаваме зависимостта (8), която се явява междинно общо решение на задачата за определяне на ($K_{\text{гр}}^*$) на въздуха в ултраразредено състояние.

$$(6) \rho = n_0 k_B T \quad ; (7) n_0 = \frac{\rho}{k_B T}$$

$$(8) K_{\text{гр}}^* = \frac{\rho R_r}{6 N_A k_B T_1 (\alpha_e - 1)} \sqrt{\frac{8 R_r T_1}{\pi \mu}} = \frac{\rho}{6 (\alpha_e - 1)} \sqrt{\frac{8 R_r}{\pi \mu T_1}}$$

Численото пресмятане на ($K_{\text{гр}}^*$) от (8) дава следния резултат $K_{\text{гр}}^* = 0,0875 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$. Количеството топлина (ΔQ) ще отиде да изпари (m) kg течен въздух и тогава при заместване на ($K_{\text{гр}}^*$) от (8) в (1) получаваме, че

$$(9) \Delta Q = \frac{\rho}{6 (\alpha_e - 1)} \sqrt{\frac{8 R_r}{\pi \mu T_1}} \Delta S \Delta t (T_1 - T_2) = m \cdot q$$

$$(10) m = \frac{\Delta Q}{q} = \frac{\rho \Delta S \Delta t (T_1 - T_2)}{6 (\alpha_e - 1) q} \sqrt{\frac{8 R_r}{\pi \mu T_1}}$$

Получената зависимост (10) е общото решение на задачата за определяне на (m). Численото пресмятане от (10) дава следния резултат: $m = 0,020033 \text{ kg} \approx 0,020 \text{ kg} = 20 \text{ g}$.

Следователно, независимо, че джаровия съд е приведен в ненормално състояние, понеже $p = 0,133 \text{ Pa}$ е не малко налягане, то "изпарителната" му способност (загубите) е малка.

ЗАДАЧА № 72 Поради неголямата разлика в температури-те (T_1) и (T_2) на две успоредни пластинки, между тях е разреден газ, в единица обем на който има (n) - молекули, възниква плътност на топлинния поток (W_1). При увеличаване налягането (P) на газа плътността на топлинния поток (W) в началото нараства, а след това, достигайки стойност (W_2), престава да зависи от налягането (P). Обяснете този ефект. Определете радиуса (r_M) на молекулите на газа. Разстоянието между двете пластинки е (l).

РЕШЕНИЕ :

В началото газа е в разрежено състояние и плътността на възникналния топлинен поток (W_1) между двете пластинки се представя чрез зависимостта (1)

$$(1) W_1 = \frac{\Delta Q_1}{\Delta S \cdot \Delta t} = K_T^* (T_1 - T_2)$$

$$(2) K_T^* = \frac{1}{6} \rho C_V \bar{v} = \frac{1}{6} \left(\frac{\mu n}{N_A} \right) \left(\frac{R_T}{\mu(2e-1)} \right) \sqrt{\frac{8 R_T T}{\pi \mu}}$$

В случая може да се приеме, че (3) $T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$
а другите величини са представени в следните зависимости:

$$(4) \rho = \frac{\mu n}{N_A} \quad ; (5) C_V = \frac{R_T}{\mu(2e-1)} \quad ; (6) \bar{v} = \sqrt{\frac{8 R_T T}{\pi \mu}}$$

Обяснението, какво представлява всяка от тези физически характеристики е дадено в миналата задача. Окончателно от заместването

на (K_T^*) от (2) в (1) получаваме, че

$$(7) W_1 = \frac{n R_r (T_1 - T_2)}{6 N_A (\alpha - 1)} \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}}$$

С увеличаване на налягането (P) на газа расте и n , понеже от основното уравнение на кинетичната теория (8) $P = n k_B T$.

Следователно, това ще доведе до нарастване на (W_1) при отчитане на (8). Когато $\bar{\lambda} \cong \ell$, тогава газа преминава от разрежено

в нормално състояние и се прилага вече друга теория със зависимост от вида (9), при която $\rho \bar{\lambda} \neq f(P)$ и $(9) K_T = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v}_c$,

тогава и $K_T \neq f(P)$. Това довежда до състояние, в което и $W_2 \neq f(P)$. Да представим (W_2) , при нормално състояние на газа между двете пластинки, от вида

$$(10) W_2 = \frac{\Delta Q_e}{\Delta S \Delta t} = K_T \left(\frac{\Delta T}{\Delta X} \right) = K_T \frac{(T_1 - T_2)}{\ell}$$

В случая (11) $\ell W_2 = K_T (T_1 - T_2)$. Можем да преработим израза (9) за (K_T) и тогава получаваме, че

$$(12) K_T = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu n_0}{N_A} \right) \ell \frac{R_r}{\mu (\alpha - 1)} \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}} = \frac{n_0 \ell R_r}{3 N_A (\alpha - 1)} \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}}$$

Заместваме (12) в (10) и получаваме, че

$$(13) W_2 = \frac{n_0 \ell R_r (T_1 - T_2)}{3 N_A (\alpha - 1) \ell} \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}}$$

$$(14) n_0 = \frac{3 W_2 N_A (\alpha - 1)}{R_r (T_1 - T_2)} \sqrt{\frac{\pi \mu}{8 R_r T}}$$

Определяме $3 N_A (\alpha - 1)$ от (7), което е от вида (15) и след това

го заместваме в (14), като получаваме (16)

$$(15) \quad 3N_A (\alpha - 1) = \frac{n R_r (T_1 - T_2)}{2 W_1} \sqrt{\frac{8 R_r T}{\pi \mu}}$$

$$(16) \quad n_0 = \frac{n W_2}{2 W_1}$$

Зависимостта (16) дава броя (n_0) на молекулите в единица обем, когато газа е в нормално състояние. Записваме от теорията формулата за средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$)

при заместване на (n_0) от (16) в (17). От зависимостта (17) определяме, че

$$(17) \quad \bar{\lambda} = \ell = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_m^2 n_0} = \frac{W_1 \sqrt{2}}{\pi d_m^2 n W_2}$$

при заместване на (n_0) от (16) в (17). От зависимостта (17) определяме, че

$$(18) \quad d_m = 2 r_m = \sqrt{\frac{\sqrt{2} W_1}{\pi n \ell W_2}}$$

$$(19) \quad r_m = \sqrt{\frac{W_1}{2 \sqrt{2} n \ell \pi W_2}}$$

Получената зависимост (19) е общото решение на задачата за определяне на радиуса (r_m) на молекулите на използвания газ в условията на задачата.

ЗАДАЧА № 73 В ~~металда~~ цилиндрична тръба с радиус $r = 5$ см и дължина $\ell = 120$ см се намира въздух при температура $t = 27^\circ\text{C}$ и налягане $P = 0,003$ Pa. Ако се приложи напорна разлика в наляганията (ΔP) на двете кръгови основи на тръба и те се освободят, с каква скорост (V_m) ще изтича въздуха в тръбата и какъв ще бъде масовия въздушен поток (M^*), ако $\Delta P = (P_1 - P_2) = 1,00 \cdot 10^{-4}$ физ.атм.?

РЕШЕНИЕ :

Можем да определим средния свободен пробег ($\bar{\lambda}$) на молекулите в началното предстартово състояние.

(1) $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n d_m^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} P d_m^2}$ при

(2) $P = n k_B T$; (3) $n = \frac{P}{k_B T}$

(4) $T = t + 273 = 27 + 273 = 300^\circ K$.

Тук физичните характеристики са: $(d_m)_{ef}$ - ефективен диаметър на молекулите на въздуха $(d_m)_{ef} = 3,50 \cdot 10^{-10} m = 3,50 \text{ \AA}$; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J/K$ е константата на Болцман. Численото пресмятане от (1) дава следния резултат $\bar{\lambda} = 2,536 m$. Следователно, $\lambda > l > 2r$ и газът в цилиндричната тръба е в разрежено състояние.

Съгласно теорията на разредените газове, скоростта на молекулно изтичане (V_u) на газа в тръбата при напор $\Delta P = (P_1 - P_2)$ ще бъде от вида

(5) $V_u = \frac{\sqrt{6\pi} (\Delta P) r}{2 l k_{eff} m n} = \frac{r (P_1 - P_2)}{2 l P} \sqrt{\frac{6\pi R T}{3\mu}}$

при отчитане, че (6) $k_{eff} = \sqrt{\frac{3R T}{\mu}}$

(7) $m = \frac{\mu}{N_A}$ и (8) $n = \frac{P}{k_B T}$. Тук: (m) е масата на една молекула въздух; (μ) е ефективната молна маса на въздуха $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$ за газова смес; $R = 8315$

$J/kmol \cdot K$ е универсалната газова константата. Численото пресмятане на (V_u) от (5) дава следния резултат $V_u = 51,716 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 51,716 \text{ km/s}$. Тук привеждаме $P = 1,00 \cdot 10^{-4}$ физ.атм. =

$$= 1,00 \cdot 10^{-4} \cdot (1,013 \cdot 10^5) \text{ Pa} = 10,13 \text{ Pa} .$$

За да определим масовия въздушен поток (M^*) използваме формулата на Кнудсен

$$(9) \quad M^* = \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \left(\frac{r}{l}\right)^3 (P_1 - P_2) \sqrt{\frac{\mu}{R_r T}}$$

Численото пресмятане от (9) дава следния резултат $M^* = 1,416 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s} = 1,416 \cdot 10^{-2} \text{ g/s} = 0,01416 \text{ g/s} = 14,16 \text{ mg/s} .$

Допълнително към задачата можем да определим временния интервал (Δt), за който цялата маса разреден газ ще напусне тръбата. За целта определяме общата маса газ в цилиндричната тръба ($M_{\text{г}}$) от зависимостта:

$$(11) \quad M_{\text{г}} = \rho V_{\text{г}} = n m (\pi r^2 l) = \left(\frac{P}{k_B T}\right) \frac{\mu}{N_A} (\pi r^2 l) .$$

$$(12) \quad M_{\text{г}} = \frac{\pi \mu P l r^2}{R_r T} \quad \text{понеже (13) } k_B N_A = R_r .$$

Численото пресмятане на ($M_{\text{г}}$) от (12) дава следния резултат $M_{\text{г}} = 3,287 \cdot 10^{-10} \text{ kg} .$ Тогава интервала време (Δt) ще бъде

$$(14) \quad \Delta t = \frac{M_{\text{г}}}{M^*} = \frac{3,287 \cdot 10^{-10}}{1,416 \cdot 10^{-5}} = 2,321 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 23,21 \mu\text{s}$$

Заколко $\Delta t = 23,0 \mu\text{s}$ ще изтече цялата маса газ от цилиндричната тръба с размери $l = 1,20 \text{ m}$ и $r = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} .$

Проверка: Една молекула въздух за да измени разстояние $l = 1,20 \text{ m}$ със скорост $v_{\text{г}} = 51,716 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ е необходим временен интервал ($\Delta \hat{t}$), определен от зависимостта

$$(15) \quad \Delta \hat{t} = \frac{l}{v_{\text{г}}} = \frac{1,20}{51,716 \cdot 10^3} = 2,320 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 23,20 \mu\text{s} .$$

Следователно получения резултат за $\Delta t = 23,21 \mu\text{s}$ от (14) се потвърждава от (15) .

ГЛАВА II. ФИЗИКА НА РЕАЛНИЯ ГАЗ

1. Изотермична свиваемост: (β_{μ}) - на идеален (β_{μ}^i) - на реален газ.

$$\left[\frac{\partial(PV)}{\partial P} \right]_{T, n_1} = PV \left(\beta_T - \beta_T^i \right) \quad \text{и} \quad \beta_T = \frac{1}{P}$$

2. Силови взаимодействия между молекулите: сила на привличане $F_{пр.} = -a_1(r^{-n_1}) < 0$ при $n_1 \approx 7$, сила на отблъскване $F_{отб.} = a_2(r^{-n_2}) > 0$ при $n_2 \approx 13$.

Потенциална енергия ($E_{пр.}$), дължаща се на силата на привличане ($F_{пр.}$)

$$E_{пр.} = -\frac{a_1^*}{r^{n_1-1}} < 0 \quad \text{при} \quad a_1^* = \frac{a_1}{n_1-1} \quad \text{при} \quad n_1-1 \approx 6.$$

Потенциална енергия ($E_{отб.}$), дължаща се на силата на отблъскване ($F_{отб.}$)

$$E_{отб.} = \frac{a_2^*}{r^{n_2-1}} > 0 \quad \text{при} \quad a_2^* = \frac{a_2}{n_2-1} \quad \text{при} \quad n_2-1 \approx 12.$$

Обща сила на взаимодействие ($F_{од.}$) и обща потенциална енергия ($E_{од.}$) на две молекули

$$F_{од.} = \frac{a_2}{r^{n_2}} - \frac{a_1}{r^{n_1}} ; \quad E_{од.} = \frac{a_2^*}{r^{n_2-1}} - \frac{a_1^*}{r^{n_1-1}}$$

Потенциал на Ленард-Джонс за взаимодействие между две молекули, намиращи се на разстояние (r) една спрямо друга.

$$E_{л.д.} = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\delta}{r} \right)^6 \right] \quad \text{Параметрите } (\varepsilon) \text{ и } (\delta) \text{ се явяват константи, характеризиращи се от химичната природа на взаимодействащите се молекули, като } (\varepsilon) \text{ има измерение на енергия } (\text{J}), \text{ а } (\delta) - \text{ на дължина } (\text{m}).$$

При $r_0 = \delta$, тогава $E_{л.д.} = 0$, а при $\left(\frac{dE_{л.д.}}{dr} \right)_{r=r_0} = 0$

тогава $\tau^* = \delta \sqrt{\frac{6}{2}}$.

3. Уравнение за състоянието на реалния газ - уравнение на Ван дер Ваалс

$(P + P_B)(V_{\mu} - b) = R_r T$ за 1 кмол, но $P_B = \frac{a}{V_{\mu}^2}$
 $(P + \frac{a}{V_{\mu}^2})(V_{\mu} - b) = R_r T$. При маса M кг, газ с обем V , тогава $V_{\mu} = \frac{M}{\mu} V = n_{\mu} V_{\mu}$ или $V_{\mu} = \frac{M}{\mu} V$. Следователно, уравнението на Ван дер Ваалс добива вида

$$\left[P + \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right] \left(V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} R_r T$$

$$\left(P + n_{\mu}^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - n_{\mu} b) = n_{\mu} R_r T$$

Тук (n_{μ}) е броя на кмол газ, а (μ) е молната маса на газа при константи на Ван-дер-Ваал - (a) и (b).

Уравнения на Дитеричи за реален газ

$$\left(P + \frac{a}{V_{\mu}^{5/3}} \right) (V_{\mu} - b) = R_r T \quad \text{за 1 кмол газ}$$

$$P(V_{\mu} - b) = R_r T \exp\left(\frac{a}{V_{\mu} T}\right)$$

Съществува следната връзка между константите на Ван дер Ваалс (a) и (b) и основните критични характеристики на веществото (P_k , V_k и T_k).

$$(V_{\mu})_k = 3b \quad ; \quad P_k = \frac{a}{27b^2} ; \quad T_k = \frac{8a}{27b R_r}$$

или $a = 3P_k (V_{\mu})_k^2 = \frac{27 T_k^2 R_r^2}{64 P_k} ; \quad b = \frac{(V_{\mu})_k}{3} = \frac{R_r T_k}{8 P_k}$

Приведено уравнение на Ван дер Ваалс

$$\left(\pi_n + \frac{3}{\omega_n^2} \right) (3\omega_n - 1) = 8\theta_n \quad \text{при} \quad \pi_n = \frac{P}{P_k} ; \quad \omega_n = \frac{V_{\mu}}{(V_{\mu})_k} ; \quad \theta_n = \frac{T}{T_k}$$

4. Вътрешна енергия на реален газ (U_{μ})

$$U_{\mu} = (C_{\mu})_{V_{\mu}} T - \frac{a}{V_{\mu}} \quad \text{при } (C_{\mu})_{V_{\mu}} - \text{ молна топлиемост при постоянен обем}$$

5. Ефект на Джаул-Томсон

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{(C_{\mu})_p} \left\{ R T_1 \left[\frac{b}{(V_{\mu})_1} - b \right] - \frac{2a}{(V_{\mu})_1} \right\}$$

$(C_{\mu})_p$ - молна топлиемост при постоянно налягане. ΔT - разлика в температурите при адиабатно разширение на реален газ при стартови (начални) $(V_{\mu})_1$ и (T_1) на газа.

6. Топлоемост на реален газ и връзка между тях

$$(C_{\mu})_p = (C_{\mu})_{V_{\mu}} + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V_{\mu}} \cdot \left(\frac{\partial V_{\mu}}{\partial T} \right)_p$$

За случай на идеален газ се доказва, че

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V_{\mu}} \cdot \left(\frac{\partial V_{\mu}}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{R}{V_{\mu}} \right) \left(\frac{R}{p} \right) = \frac{R T}{p V_{\mu}} R = R$$

и тогава

$$(C_{\mu})_p = (C_{\mu})_{V_{\mu}} + R \quad - \text{ уравнение на Роберт Майер.}$$

ЗАДАЧА № 74 За даден реален газ поправката в уравнението на Ван дер Ваалс е $a = 453 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$, а критичната температура е $T_K = 283^{\circ}\text{K}$. Да се определят критичното налягане (p_K), критичния молен обем ($(V_{\mu})_K$) и ефективния диаметър (d) на молекулите на газа.

РЕШЕНИЕ:

Използваме от теорията следните зависимости:

$$(1) T_K = \frac{8a}{27 b R} \quad ; \quad (2) p_K = \frac{a}{27 b^2} \quad \text{и} \quad (3) (V_{\mu})_K = 3b$$

Привеждаме числената стойност на (a) в СИ-система

$$a = 453 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^6}{\text{mol}^2} \right] = 453 \cdot 10^4 \left[\frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^6}{\text{kmol}^2} \right]$$

От (1) определяме, че (4) $b = 8a (27 T_k R_r)^{-1}$. Но от теорията знаем, че когато молекулите при взаимодействие образуват комплекси от двойки молекули, тогава константата (b) на Ван дер Ваалс за обем има вида

$$(5) \quad b = 4 N_A V_{\text{комп.}} = 4 N_A \left(\frac{4}{3} \pi r_M^3 \right) = 4 N_A \left(\frac{1}{6} \pi d_M^3 \right)$$

Тук $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ е числото на Авогадро, а (r_M) и $d_M = 2 r_M$ са радиуси и диаметра на молекулите, а $V_{\text{комп.}}$ е обема на една молекула. Заместваме (5) в (4) и получаваме, че

$$(6) \quad (d_M)_{\text{эф.}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9} \left(\frac{a}{\pi T_k R_r N_A} \right)}$$

Получената зависимост (6) е общото решение на задачата за определяне на $(d_M)_{\text{эф.}}$. Численото пресмятане от (6) дава следния резултат $(d_M)_{\text{эф.}} = 7,68 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ или $(r_M)_{\text{эф.}} = 3,84 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. От зависимост (2) при отчитане на (b) от (4) следва, че

Получената зависимост (7) е общо решение на задачата за определяне на (P_k). Тук, численото пресмятане от (4) дава следния резултат $b = 0,5704 \text{ m}^3/\text{kmol}$, а при използване и на (7) се получава, че $P_k = 5,164 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 5,098 \text{ физ.атм.} = 5,10 \text{ физ.атм.}$ От (3) чрез заместване на (b) от (4), получаваме, че

$$(7) \quad P_k = \frac{a}{27 b^2} = \frac{a}{27 \left(\frac{8a}{27 T_k R_r} \right)^2} = \frac{27 (T_k R_r)^2}{64 a}$$

Получената зависимост (7) е общо решение на задачата за определяне на (P_k). Тук, численото пресмятане от (4) дава следния резултат $b = 0,5704 \text{ m}^3/\text{kmol}$, а при използване и на (7) се получава, че $P_k = 5,164 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 5,098 \text{ физ.атм.} = 5,10 \text{ физ.атм.}$ От (3) чрез заместване на (b) от (4), получаваме, че

$$(8) \quad (V_M)_k = 3b = 3 \left(\frac{8a}{27 T_k R_r} \right) = \frac{8}{9} \left(\frac{a}{T_k R_r} \right)$$

Получената зависимост (8) е обща решение за $(V/\mu)_k$. Численото пресмятане дава следния резултат $(V/\mu)_k = 1,710 \text{ м}^3/\text{кмол}$.

ЗАДАЧА № 75 В съд с обем $V = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ се намира кислород (O_2) с маса $M = 0,3 \text{ кг}$ при температура $T = 300^\circ\text{К}$. Да се определят: а) каква част от обема (V) на съда представлява собствения обем (V_c) на всички кислородни молекули; б) каква част от налягането на газа (P) върху стените на съда представлява вътрешното налягане (P_g), дължащо се на силите на привличане между молекулите?

РЕШЕНИЕ:

а) Молната маса на кислорода е $\mu = 32 \text{ кг/кмол}$, а константите на Ван-дер-Ваалс са $a = 0,136 \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{мол}^2} = 0,136 \cdot 10^6$
 $\frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{кмол}^2}$ и $b = 3,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{мол}} = 3,2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^3}{\text{кмол}}$. Бро-

$$(1) \quad n_\mu = \frac{M}{\mu} = \frac{0,3}{32} = 9,375 \cdot 10^{-3}$$

От теорията (2) $b = 4N_A \cdot V_{\text{молек}} = 4(V_c)_\mu$ или (3) $(V_c)_\mu = \frac{b}{4}$.
 Тогава (4) $V_c = n_\mu (V_c)_\mu = \frac{M}{\mu} \left(\frac{b}{4}\right)$. Получената за-

висимост (4) дава възможност да определим собствения обем на всички молекули в газа (V_c) = $7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 75 \text{ см}^3$. Тогава

$$\text{отношението (5) } \frac{V_c}{V} = \frac{7,5 \cdot 10^{-5}}{8 \cdot 10^{-3}} = 0,9375 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{или } \frac{V_c}{V} \approx 0,94\% \approx 1\%.$$

б) Първо ще определим външното налягане на газа (P), като използваме уравнението на Ван дер Ваалс

$$(6) \quad \left[P + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2} \right] \cdot \left(V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} R_g T$$

и тогава

$$(7) \quad P = \left(\frac{M}{\mu} R_g T \right) \cdot \left(V - \frac{M}{\mu} b \right)^{-1} - \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 \cdot \frac{a}{V^2}$$

Получената зависимост (7) е общото решение на задачата за определяне на (P). Численото пресмятане от (7) дава следния резултат

$$P = 2,850 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 28,13 \text{ физ.атм.}$$

Вътрешното налягане $P_B = \frac{a}{V^2} \left(\frac{M}{\mu} \right)^2$ (8) и численото пресмятане дава следния резултат $P_B = 0,187 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1,846$ физ.атм. Тогава общото налягане (9) $P_{\text{од}} = P + P_B = (2,850 \cdot 10^6 +$

$0,187 \cdot 10^6) = 3,037 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. Следователно, отношението

$$K = \frac{P_B}{P_{\text{од}}} = \frac{0,187 \cdot 10^6}{3,037 \cdot 10^6} = 0,0616 \quad \text{или} \quad K = 6,16 \%$$

ЗАДАЧА № 76 Да се определи обема (V) на съда, в който се намира кислород (O_2) с маса $M = 0,15 \text{ kg}$, ако при температура $T = 320^\circ\text{K}$ притежава налягане $P = 12 \text{ MPa}$.

РЕШЕНИЕ :

Първо от съответни таблици вземаме следните данни за кислород: поправки на Ван дер Ваалс $a = 1,36 \cdot 10^5 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^6}{\text{кмол}^2}$ и

$b = 0,032 \text{ м}^3/\text{кмол}$; молна маса $M(O_2) = 32 \text{ kg}/\text{кмол}$;

критична температура $T'_k = 154^\circ\text{K}$. Следователно, понеже $T = 320^\circ\text{K} > T'_k = 154^\circ\text{K}$ следва, че състоянието на газа е надкритично и от кубичното уравнение на Ван дер Ваалс за обема ще трябва да се вземе един и същ корен (троен) $V_1 = V_2 = V_3 = V$.

Написваме уравнението на Ван дер Ваалс за маса M на газа и молна маса (μ).

$$(1) \quad \left[P + \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right] \cdot \left(V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} R_g T$$

и го пред-

ставяме, като кубично уравнение за обема (V) от вида

$$(2) V^3 - \left(b \frac{M}{\mu} + \frac{M}{\mu} \frac{R_c T'}{P} \right) V^2 + \frac{a}{P} \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 V - \frac{ab}{P} \left(\frac{M}{\mu} \right)^3 = 0.$$

Преминуваме към почленно пресмятане на стойностите на множителите пред всеки член съдържащ (V^i), където (i) приема стойности $i = 0; 1; 2; 3$. Тогава получаваме следните резултати:

$$\begin{aligned} b \frac{M}{\mu} &= 1,5008 \cdot 10^{-4}; & \frac{M}{\mu} &= 4,690 \cdot 10^{-3}; & \frac{M}{\mu} \frac{R_c T'}{P} &= 1,040 \cdot 10^{-3} \\ \left(b \frac{M}{\mu} + \frac{M}{\mu} \frac{R_c T'}{P} \right) &= 1,190 \cdot 10^{-3}; & \frac{a}{P} \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 &= 2,493 \cdot 10^{-7} \\ \frac{ab}{P} \left(\frac{M}{\mu} \right)^3 &= 3,74 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

Заместваме всички тези стойности на множителите в (2) и получаваме, че

$$(3) V^3 - (1,19 \cdot 10^{-3}) V^2 + (2,493 \cdot 10^{-7}) V - 3,740 \cdot 10^{-11} = 0$$

или множителите са $a_1 : b_1 : c_1 : d_1$ в уравнението (3).

Свойствата на корените на кубичното уравнение са от вида:

$$(4) V_1 + V_2 + V_3 = - \frac{b_1}{a_1} \quad (5) \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} = - \frac{c_1}{d_1}$$

$$(6) V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = - \frac{d_1}{a_1}$$

Понеже в нашия случай $V_1 = V_2 = V_3 = V$ от (4) следва, че (7) $3V = - \frac{b_1}{a_1} = 1,19 \cdot 10^{-3}$ или

$$(8) V = \frac{1,19 \cdot 10^{-3}}{3} = 3,967 \cdot 10^{-4} \approx 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

ЗАДАЧА № 77 За газа аргон (Ar) критичното налягане е $P_K = 49 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, а критичната температура е $t_K = -122^\circ \text{C}$. Опре-

делете: а) константите (a) и (b) на Ван дер Ваалс; б) критичния обем (V_k).

РЕШЕНИЕ :

Използваме основните зависимости в теорията между (a, b) и (P_k, T_k, V_k).

$$(1) P_k = \frac{a}{27b^2} \quad ; \quad (2) T_k = \frac{8a}{27bR} \quad \text{и} \quad (3) (V_k)_k = 3b$$

За целта определяме (a) от (1) и получаваме, че $a = 27b^2 P_k$.
Заместваме (4) и (2) и получаваме, че

$$(5) T_k = \frac{8bP_k}{R} \quad \text{или} \quad (6) b = \frac{R T_k}{8 P_k}$$

Тук $T_k = 273 - 122 = 151^\circ\text{K}$ и от (6) при числено пресмятане получаваме, че $b = 0,0327 \text{ м}^3/\text{кмол}$. Заместваме (6) в (4) и получаваме, че

$$(7) a = 27b^2 \left(\frac{R T_k}{8 P_k} \right)^2 = \frac{27}{64} \left(\frac{T_k R}{P_k} \right)^2 P_k = \frac{27}{64} \frac{(T_k R)^2}{P_k}$$

Получената зависимост (7) е обща решение на задачата за определяне на (a). Численото пресмятане от (7) дава следния резултат $a = 1,386 \cdot 10^5 [\text{Pa} \cdot \text{м}^6/\text{кмол}^2]$. Заместваме (6) в (3) и получаваме,

$$\text{че} \quad (8) (V_k)_k = 3b = \frac{3}{8} \left(\frac{R T_k}{P_k} \right) = 0,0981 \text{ м}^3/\text{кмол}.$$

Допълнително към задачата можем да извършим следното: можем да определим обема, който отговаря на един атом (A_2) в течно състояние при (T_k) и (V_k). Тогава $V_{\text{атом}} = \frac{(V_k)_k}{N_A} = \frac{0,0981}{6,023 \cdot 10^{26}} = 1,629 \cdot 10^{-28} \text{ м}^3$. Ефективният диаметър $d_m(A_2)$ на атомите на аргона (A_2) има стойност $d_m(A_2) = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Тогава

ефективния обем на 1 атом е

$$(V_{\text{атом}})_{\text{еф}} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_{\text{атом}}}{2}\right)^3 = \frac{\pi d_{\text{атом}}^3}{6} = 22,438 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3 = 0,2244 \cdot 10^{-28} \text{ м}^3$$

Тогава следва, че $K = \frac{V_{\text{атом}}^*}{(V_{\text{атом}})_{\text{еф}}} = \frac{1,629 \cdot 10^{-28}}{0,2244 \cdot 10^{-28}} = 7,255$.

Следователно, в критично състояние на аргона на 1 атом аргон се

пада обем 7,255 пъти по-голям от ефективния обем на атома. Налице

е свободен обем в течната система $V_{\text{атом}}^*_{\text{свободен}} = V_{\text{атом}}^* - (V_{\text{атом}})_{\text{еф}} =$

$$= (1,629 - 0,2244) \cdot 10^{-28} = 1,405 \cdot 10^{-28} \text{ м}^3 \text{ отнесен за 1 атом. Тогава}$$

1 атом от аргоновата система ще има свободен обем $(V_{\text{свободен}})_{\text{атом}} =$

$$= N_A (V_{\text{свободен}})_{\text{атом}} = 1,405 \cdot 10^{-28} (6,023 \cdot 10^{26}) = 8,462 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{кмол}$$

ЗАДАЧА № 78 За демонстриране на критично състояние на

веществена система се употребява прибора на руския физик Авенариус,

в който се осъществява загряване на етилов етер, затворен в запоена

стъклена ампула. Каква част от обема на ампулата трябва да заема

етера при температура $t = 20^\circ\text{C}$ и плътност $\rho = 714 \text{ кг/м}^3$,

за да може при загряване и достигане на критична температура $T_k =$

$= 467^\circ\text{K}$ целия обем на ампулата да бъде запълнен от етер при кри-

тично състояние с налягане $P_k = 3,60 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Молната маса на

етера е $\mu = 74 \text{ кг/кмол}$.

РЕШЕНИЕ :

Първо е необходимо да определим критичния обем $(V_k)_\mu$ на

етера. За целта използваме зависимостта (1) $(V_k)_\mu = 3b$ но

(2) $b = R T_k (\rho P_k)^{-1}$. Заместваме (2) в (1) и получаваме, че

(3) $(V_k)_\mu = \frac{3}{8} \frac{R T_k}{P_k}$. Численото решение (3) дава следния

резултат $(V_k)_\mu = 0,4045 \text{ м}^3/\text{кмол}$. Можем да определим плътността

на етера в критичното състояние (4) $\rho_k = \frac{\mu}{(V_k)_\mu} = \frac{74}{0,4045} =$

$$= 182,94 \text{ кг/м}^3.$$

Понеже масата (M) на етера в ампулата е постоянна при

двете състояния - изходно с $T = 293^\circ\text{K}$ и крайно (критично) с

$T_k = 467^\circ\text{K}$, тогава следва, че (5) $M = \rho V = \rho_k V_k = \rho_k V_a$,
 тук $V_k = V_a$. - обема на ампулата. Търсеното отношение е

$$(6) \frac{V}{V_a} = \frac{\rho_k}{\rho} = \frac{182,94}{714} = 0,256 \approx 0,26.$$

Следователно, при $T = 293^\circ\text{K}$ етера заема 26% от обема на ампулата.

ЗАДАЧА № 79 При температура $T' = 310^\circ\text{K}$ един кмол азот (N_2) заема обем $V_\mu = 2,5 \text{ м}^3$. Използвайки критичните параметри на азота, определете налягането (P) и ефективния диаметър (d_m) на молекулите.

РЕШЕНИЕ:

Ще преминем към записване на критичните параметри чрез приведените величини:

$$(1) \pi_n = \frac{P}{P_k} \quad ; \quad (2) \omega_n = \frac{V_\mu}{(V_\mu)_k} \quad \text{и} \quad (3) \theta_n = \frac{T}{T_k}$$

Тогава приведеното уравнение на Ван дер Ваалс има вида:

$$(4) \left(\pi_n + \frac{3}{\omega_n^2} \right) \cdot (3\omega_n - 1) = 8 \theta_n$$

От справочниците определяме за азота $P_k = 3,39 \cdot 10^6 \text{ Pa}$; $T_k = 126,1^\circ\text{K}$;
 $a = 0,133 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{м}^3 / \text{кмол}^2$, $b = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 / \text{кмол}$
 и $(V_\mu)_k = 3b = 11,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 / \text{кмол} = 0,111 \text{ м}^3 / \text{кмол}$.

Използвайки (2) и (3) определяме

$$(5) \omega_n = \frac{2,5}{0,111} = 22,52 \quad (6) \theta_n = \frac{310}{126,1} = 2,458.$$

От (4) определяме (π_n)

$$(7) \pi_n = \frac{P}{P_k} = \frac{8\theta_n}{3\omega_n - 1} - \frac{3}{\omega_n^2}$$

Заместваем стойностите на (ω_n) и

(θ_n) от (5) и (6) в (7) и получаваме, че (8) $\pi n = P(P_k)^{-1} = 0,2895$. Тогава (9) $P = 0,2895$ (P_k) = $0,2895 (3,39 \cdot 10^6) = 9,590 \cdot 10^5$ Pa = 9,467 физ.атм.

За да определим ефективния диаметър (d_m) на молекулите на азота ще използваме от теорията зависимостта

$$(10) \quad b = 4 N_A \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_m}{2} \right)^3 \right] = \frac{2}{3} N_A \pi d_m^3$$

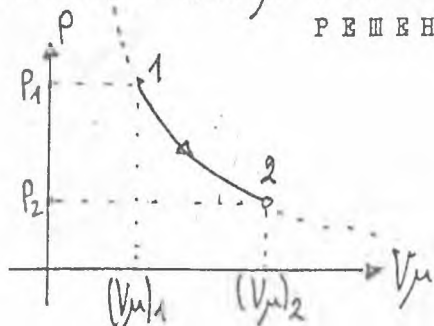
$$(11) \quad d_m = \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_A}}$$

Зависимостта (11) се явява общо решение на задачата

за определяне на (d_m). Численото пресмятане (при $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмол}^{-1}$) от (11) дава следния резултат $d_m = 3,0845 \cdot 10^{-10} \text{ м} \approx 3,10 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. В справочниците е дадена стойност за $d_m(N_2) = (3,6 \div 3,7) \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

ЗАДАЧА № 80 При температура $t = 27^\circ\text{C}$ се извършва изотермично разширение на маса $M = 1 \text{ кмол}$ кислород (O_2) от обем $(V_{\mu})_1 = 1 \text{ м}^3$ до обем $(V_{\mu})_2 = 5 \text{ м}^3$. Определете нарастването на вътрешната енергия ($\Delta U_{\mu} > 0$) на газа, работата (ΔA) $_{\mu}$, извършена от газа при разширението и количеството топлинна енергия (ΔQ) $_{\mu}$, която е подадена на газа отвън.

РЕШЕНИЕ:



От първия закон на термодинамиката следва, че

$$(1) \quad (\Delta Q)_{\mu} = (\Delta U)_{\mu} + (\Delta A)_{\mu}$$

Последователно ще определим $(\Delta U)_{\mu}$ и $(\Delta A)_{\mu}$.

От теорията знаем, че молната вътрешна енергия на реален газ се дава чрез зависимостта:

$$(2) \quad U_{\mu} = (C_{\mu})_V T - \frac{a}{V_{\mu}}$$

От справочни таблици
взимаме, че

$$a = 0,136 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 / \text{kmol}^2 \text{ и } \mu(\text{O}_2) = 32 \text{ kg/kmol.}$$

Заместваме (2) за двете състояния на газа

$$(3) \quad (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V T_1 - \frac{a}{(V_{\mu})_1} \quad ; \quad (4) \quad (U_{\mu})_2 = (C_{\mu})_V T_2 - \frac{a}{(V_{\mu})_2}$$

Но (5) $\Delta U_{\mu} = (U_{\mu})_2 - (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) + a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right]$

По този начин зависимост (5) се явява общото решение на задачата за определяне на (ΔU_{μ}) . Численото пресмятане при $(T_1 = T_2 = T)$ дава следния резултат $\Delta U_{\mu} = 0,1088 \cdot 10^6 \text{ J/kmol} = 0,1088 \text{ MJ/kmol}$. Извършената работа $(\Delta A)_{\mu}$ при разширението на газа определяме от зависимостта

$$(6) \quad (\Delta A)_{\mu} = R T \ln \left[\frac{(V_{\mu})_2}{(V_{\mu})_1} \right]$$

- общо решение на задачата за определяне

на $(\Delta A)_{\mu} = 4,0147 \cdot 10^6 \text{ J/kmol} = 4,0147 \text{ MJ/kmol}$. Заместваме (5) и (6) в (1) и получаваме и общото решение за определяне на $(\Delta Q)_{\mu}$ от вида

$$(7) \quad (\Delta Q)_{\mu} = (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) + a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right] + R T \ln \left[\frac{(V_{\mu})_2}{(V_{\mu})_1} \right]$$

Численото пресмятане от (7) дава следния резултат $(\Delta Q)_{\mu} = 4,1235 \cdot 10^6 \text{ J/kmol} = 4,1235 \text{ MJ/kmol}$. Понеже в справочните таблици е дадена специфичната топлиемост на кислорода $C_v = 650 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$,

тогава (8) $(C_{\mu})_r = \mu C_V = 32(650) = 2,080 \cdot 10^4 \text{ J/K.kmol}$.
 Но $(C_{\mu})_v$ се оказва ненужна защото $(C_{\mu})_v(T_2 - T_1) = 0$ при
 $T_1 = T_2 = T$.

ЗАДАЧА № 81 При каква температура хелия и ксенона при
 опита на Джаул-Томсон ще започнат да се охлаждат? Критическите
 температури на тези два газа са съответно $(T_K)_1 = 5,3^\circ\text{K}$ и
 $(T_K)_2 = 290^\circ\text{K}$.

РЕШЕНИЕ :

Съгласно ефекта на Джаул-Томсон при адиабатно разширение
 на газа изменението на температурата от (T_1) до (T_2) е

$$(1) \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{(C_{\mu})_p} \left[\frac{R T_1 b}{(V_{\mu})_1 - b} - \frac{2a}{(V_{\mu})_1} \right]$$

Следователно, за да бъде $\Delta T = 0$ е необходимо изходната инверс-
 на температура да бъде

$$(2) (T_1)_{\text{инв.}} = \frac{2a [(V_{\mu})_1 - b]}{(V_{\mu})_1 R b} \approx \frac{2a}{b R}$$

Критичната температура (T_K) може да се представи, чрез Ван
 дер Ваалсовите поправки $(a ; b)$ и газовата универсална кон-
 станта R чрез зависимостта:

$$(3) T_K = \frac{8a}{27bR}$$

Сравняваме дясните части
 на (2) и (3) и получаваме, че

$$(4) T_K = \frac{4}{27} \left(\frac{2a}{bR} \right) = \frac{4}{27} (T_{\text{инв.}}) \quad \text{или (5) } T_{\text{инв.}} = 6,75 T_K.$$

Получената зависимост (5) дава възможност да определим $(T_{\text{инв.}})$

на двата газа - хелий и ксенон.

(6) $(T_{инв})_1 = 6,75(5,3) = 35,8^\circ\text{K}$ и (7) $(T_{инв})_2 = 6,75(290) = 1957,5^\circ\text{K}$. За да се реализира положителен ефект ($\Delta T < 0$) на Джаул-Томсон трябва изходната температура $T < T_{инв}$. За хелия $T < 35,8^\circ\text{K}$, а за ксенона $T < 1957,5^\circ\text{K} \approx 1958^\circ\text{K}$.

ЗАДАЧА № 82 В един балон се намира азот (N_2), а в друг - хелий (He) силно сгъстени до моларен обем $V_\mu = 100 \text{ cm}^3/\text{mol}$. и при $T_1 = 300^\circ\text{K}$. При дроселиране те се разширяват до атмосферно налягане (при атмосферно налягане газовете могат да се разгледат като идеални). Използвайки константите (a) и (b) на Ван дер Ваалс, определете за всеки газ инверсната температура ($T_{инв}$) и изменението на температурата (ΔT) при дроселирането.

РЕШЕНИЕ:

А. Първо ще направим пресмятанията за газа азот (N_2) с константи:

$$a = 0,133 \text{ N}\cdot\text{m}^4/\text{mol}^2 = 1,33 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^4/\text{kmol}^2.$$

$$b = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol} = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kmol}.$$

$$V_\mu = (V_\mu)_1 = 100 \text{ cm}^3/\text{mol} = 0,10 \text{ m}^3/\text{kmol}.$$

За изходна зависимост за (ΔT) използваме

$$(1) \Delta T = \left[\frac{R T_1 b}{(V_\mu)_1 - b} - \frac{2a}{(V_\mu)_1} \right] \frac{1}{(C_\mu)_p} \quad \text{Тук (2) } (C_\mu)_p = \mu C_p.$$

където (C_p) е специфичната топлиемост при постоянно налягане.

За случая с газа азот (N_2), тогава $C_p(N_2) = 1040 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

и $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/kmol}$. Заместваме (2) в (1) и получаваме

(3), която е общото решение на задачата за определяне на (ΔT).

$$(3) \Delta T = \frac{1}{C_p \mu} \left[\frac{R_r T_1 b}{(V_{\mu})_1 - b} - \frac{2a}{(V_{\mu})_1} \right].$$

За да определим инверсната температура ($T_{инв}$) на азота използваме зависимостите:

$$(4) T_{инв} = \frac{2a [(V_{\mu})_1 - b]}{b R_r (V_{\mu})_1} \approx \frac{2a}{b R_r} \quad \text{и} \quad (5) T_k = \frac{8a}{27b R_r}$$

При сравняване на (4) и (5) следва, че

$$(6) T_{инв} = \frac{27}{4} T_k = 6,75 T_k. \quad \text{Следователно, получената зависимост (4) може да се използва като общо решение на задачата за определяне на } T_{инв}. \text{ Числените пресмятания от (3) и (4) дават следния резултат: } \Delta T = -34,34^\circ\text{K} \text{ и } T_{инв} = 799,76^\circ\text{K}. \text{ Тогава от (6) следва, че } T_k = 118,48^\circ\text{K}. \text{ Според таблица } T_k(N_2) = 126,1^\circ\text{K}. \text{ Това показва, че получения резултат е добър, като отклонението } \chi = \frac{T_k^* - T_k}{T_k^*} = 0,0604, \text{ което отговаря на } 6,04\%.$$

В. В случая с хелия (He) използваме същите зависимости (3), (4) и (6) при предварителна таблична информация за съответните константи:

$$a = 0,0033 \frac{\text{K} \cdot \text{m}^4}{\text{mol}} = 3,30 \cdot 10^3 \text{ K} \cdot \text{m}^4 / \text{кмол}^2.$$

$$b = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{mol} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 / \text{кмол}.$$

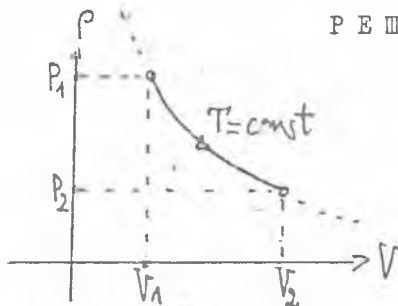
$$V_{\mu} = (V_{\mu})_1 = 100 \text{ cm}^3 / \text{mol} = 0,100 \text{ m}^3 / \text{кмол}.$$

$$C_p(\text{He}) = 2080 \text{ J/kg} \cdot \text{K} \Rightarrow \mu(\text{He}) = 4 \text{ kg/кмол}.$$

Числените пресмятания от (3), (4) и (6) дават следния резултат: $\Delta T = 81,62^\circ\text{K}$; $T_{\text{инв}} = 34,5^\circ\text{K}$ и $T_{\text{к}} = 5,11^\circ\text{K}$. По таблични данни $T_{\text{к}}^*(\text{He}) = 5,0^\circ\text{K}$. Следователно, отклонението е $\chi^* = (T_{\text{к}}^* - T_{\text{к}}) \cdot (T_{\text{к}}^*)^{-1} = 0,022$.

което отговаря на 2,20% отклонение (процентно).

ЗАДАЧА № 83 При изотермично разширение на маса $M = 10 \text{ g}$ кислород (O_2) обема на газа се увеличава от $V_1 = 1$ литър до $V_2 = 5$ литра. Считаеки газа за подчиняващ се на уравнението на Ван дер Ваалс определете работата (ΔA) на вътрешните сили на междумолекулно действие при разширението на газа.



РЕШЕНИЕ :

Привеждаме числените стойности на дадените физични характеристики в условието на задачата в система (СИ): $M = 10 \text{ g} = 0,010 \text{ kg}$; $V_1 = 1$ литър = $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ и $V_2 = 5$ лит-

ра = $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Написваме зависимостта на вътрешната келомолна енергия на газа (U_{μ}).

$$(1) (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V T - \frac{a}{(V_{\mu})_1} \quad \text{и} \quad (2) (U_{\mu})_2 = (C_{\mu})_V T - \frac{a}{(V_{\mu})_2}$$

Изваждаме (1) от (2) и получаваме, че

$$(3) \Delta U_{\mu} = (U_{\mu})_2 - (U_{\mu})_1 = a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right].$$

Понеже взетата маса (M) газ не отговаря на киломола, тогава следва, че

$$(4) \Delta U = n_{\mu} (\Delta U_{\mu}) \quad \text{и} \quad (5) \Delta U_{\mu} = \frac{\Delta U}{n_{\mu}}$$

$$(6) V = n_{\mu} V_{\mu} \quad \text{и} \quad (7) V_{\mu} = \frac{V}{n_{\mu}}$$

Заместваме (5) и (7) в (3), при отчитане на съответните индекси за началното и крайното състояние на газа, като получаваме,

$$\text{че (8) } \frac{\Delta U}{n_{\mu}} = n_{\mu} a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \quad \text{или} \quad (9) \Delta U = n_{\mu}^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

В (9) под (n_{μ}) ще разбирате броя на киломоловете кислород (O_2), участващ в изотермичното разширение, като (10) $n_{\mu} = M/\mu$ при $\mu(O_2) = 32 \text{ кг/кмол}$. Освен това, изменението на вътрешната енергия (ΔU) на газа е за сметка на работата (ΔA) за преодоляване на силите на привличане между молекулите при разширението на газа. Окончателно получаваме, че

$$(11) \Delta A = \Delta U = \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \quad \text{Получената зависимост (11) е общо решение}$$

на задачата за определяне на (ΔA). Численото пресмятане от (11) дава следния резултат $\Delta A = \Delta U = 10,7 \text{ J}$.

Допълнително към задачата, можем да определим изменението на ентропията (ΔS_E) на газа при разширение. За целта определяме първо изменението на ентропията за 1 кмол газ - (ΔS_E) $_{\mu}$.

$$(12) (\Delta S_E)_{\mu} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\mu}}{T} = \int_1^2 \frac{dU_{\mu} + P^* dV_{\mu}^*}{T} = \int_1^2 \frac{(c_{\mu})_V dT}{T} + \int_1^2 \frac{P^* dV_{\mu}^*}{T}$$

$$(17) \Delta S_E = (C_{\mu})_V \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \right] + \int_1^2 \frac{R d(V_{\mu} - b)}{V_{\mu} - b} = R \ln \left[\frac{(V_{\mu})_2 - b}{(V_{\mu})_1 - b} \right].$$

понеже $(C_{\mu})_V \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \right] = 0$ при $T_1 = T_2 = T$.

Тук използваме уравнението на Ван-дер-Ваалс за 1 мол

газ.

$$(14) \left(P + \frac{a}{V_{\mu}^2} \right) (V_{\mu} - b) = R T \quad \text{или} \quad (15) \rho^* V_{\mu}^* = R T$$

при (16) $\rho^* = P + \frac{a}{V_{\mu}^2}$ и (17) $V_{\mu}^* = V_{\mu} - b$

Но за разглеждания случай в задачата

$$(18) \Delta S_E = \eta_{\mu} [\Delta S_E]_{\mu} = \frac{M}{\mu} (\Delta S_E)_{\mu} \quad \text{и} \quad (19) V = \eta_{\mu} V_{\mu} = \frac{M}{\mu} V_{\mu}$$

като (20) $(\Delta S_E)_{\mu} = \frac{\Delta S_E}{\eta_{\mu}} = \frac{M}{M} (\Delta S_E)$ и (21) $V_{\mu} = \frac{V}{\eta_{\mu}} = \frac{M}{M} V$.

Заместваме (20) и (21) в (13) и получаваме

$$(22) \frac{\Delta S_E}{\eta_{\mu}} = R \ln \left[\frac{V_2 - \eta_{\mu} b}{V_1 - \eta_{\mu} b} \right] \quad \text{или} \quad (23) \Delta S_E = \frac{M}{\mu} R \ln \left[\frac{V_2 - \frac{M}{\mu} b}{V_1 - \frac{M}{\mu} b} \right]$$

Получената зависимост (23) се явява общо решение на задачата (до-

пълнително) за определяне на (ΔS_E) . Численото пресмятане от (23) дава следния резултат $\Delta S_E = 4,202 \text{ JK}$ при $\eta_{\mu} = \frac{M}{M_1} = = \frac{0,010}{32} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ (кмол}^{-1} \text{)}$.

ЗАДАЧА № 84 В цилиндър с бутало 0,5 кмол от някакъв газ заема обем $V_1 = 1 \text{ м}^3$. При разширението на газа до обем $V_2 = 1,2 \text{ м}^3$ извършената работа (ΔA) против силите на молекулно привличане е $\Delta A = 5,8 \cdot 10^3 \text{ J}$. Критичния обем на газа е $V_k = 0,12 \text{ м}^3/\text{кмол}$. Определете: а) константите (a) и (b) в уравнението на Ван дер Ваалс за този газ; б) ефективният диаметър (d_m)_{ef} на

молекулите на газа. Да се приеме, че разширението на газа е изотермично.

РЕШЕНИЕ :

а) Написваме зависимостта за кломолната енергия (вътрешна) на газа в двете състояния - начално и крайно (след разширението).

$$(1) (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V T_1 - \frac{a}{(V_{\mu})_1} \quad \text{и} \quad (2) (U_{\mu})_2 = (C_{\mu})_V T_2 - \frac{a}{(V_{\mu})_2}$$

Изваждаме (1) от (2) и получаваме, че

$$(3) \Delta U_{\mu} = (U_{\mu})_2 - (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) + a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right]$$

При изотермично разширение на газа ($T_1 = T_2$) и тогава

$$(4) \Delta U_{\mu} = a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right]$$

Но в задачата приемаме, че $n_{\mu} = 0,5$ кмол и тогава

ва правим прехода

$$(5) \Delta U = n_{\mu} (\Delta U_{\mu})$$

$$\text{или (6) } \Delta U_{\mu} = \frac{\Delta U}{n_{\mu}}$$

$$(7) V = n_{\mu} V_{\mu}$$

$$\text{или (8) } V_{\mu} = \frac{V}{n_{\mu}}$$

Заместваме (6) и (8) в (4) и получаваме

$$(9) \frac{\Delta U}{n_{\mu}} = a n_{\mu} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \quad \text{или} \quad (10) \Delta U = \Delta A = a n_{\mu}^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

Окончателно получаваме, че (11)

$$a = (\Delta A) \left[\frac{n_{\mu}^2}{V_1} - \frac{n_{\mu}^2}{V_2} \right]$$

Получената зависимост (11) е общо решение на задачата за определяне на константата (a). Численото пресмятане от (11) дава следния резултат $a = 1,392 \cdot 10^5 \text{ Nm}^4/\text{kmol}^2$. Константата (b) можем да определим от зависимостта (12) $V_k = 3b$ и тогава

$$(13) \quad b = \frac{V_k}{3n_\mu} = \frac{0,12}{3(0,5)} = 0,08 \text{ m}^3/\text{kmol}.$$

Допълнително към задачата да определим (P_k) и (T_k) на газа от зависимостите

$$(14) \quad P_k = \frac{a}{27b^2} \quad \text{и} \quad (15) \quad T_k = \frac{8a}{27bR}$$

Числените пресмятания от (14) и (15) дават следния резултат: $P_k = 3,223 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ и $T_k = 124^\circ\text{K}$. При сравняване на получените стойности за (a), (b), (P_k) и (T_k) се вижда, че те са близки до съответните стойности на тези основни характеристики за газа азот (N_2). От таблични данни за азота (N_2) е дадено, че $P_k = 3,39 \cdot 10^6 \text{ Pa}$; $T_k = 126,1^\circ\text{K}$; $a = 1,33 \cdot 10^5 \text{ Nm}^4/\text{kmol}^2$; $b = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kmol}$. Следователно, можем да приемем, че разглеждания газ в условието на задачата е азот (N_2).

б) За да определим ефективния диаметър (d_m)_{ef} на молекулите на газа ще използваме информация от теорията на реалния газ, че ако молекулите му образуват комплекси от две молекули, тогава Ван дер Ваалсовата поправка (b) за обем има стойност, зададена чрез зависимостта

$$(16) \quad b = 4N_A \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_m}{2} \right)^3 \right] = \frac{2}{3} \pi N_A d_m^3.$$

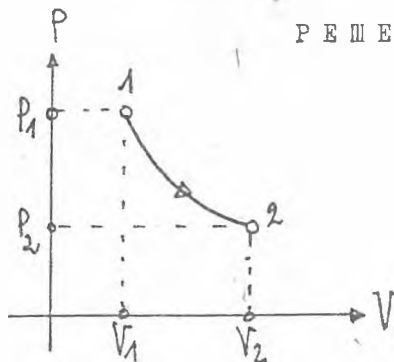
Това от (16) определяме (d_m) като получаваме следната окончателна зависимост:

$$(17) \quad d_m = \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_A}}$$

Получената зависимост (17) е об-

що решение на задачата за определяне на стойността на (d_m). Численото пресмятане от (17) дава следния резултат: $d_m = 3,986 \cdot 10^{-10}$ м. В (17) $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ кмол⁻¹ е числото на Авогадро, даващо броя на молекулите в един кмол газ. В таблиците на различни сборници е дадено, че $(d_m)_{\text{эф}}^*(N_2) = (3,6 \div 3,8) \cdot 10^{-10}$ м. И тук отклонението в стойността на (d_m)_{эф} е приемливо при приемане, че газа е азот (N_2). Отклонението $X = \frac{d_m^* - d_m}{d_m^*} = \frac{3,70 - 3,17}{3,70} = 0,1432$ или $X(\%) = 14,32\%$

ЗАДАЧА № 85 Два балона с обеми $V_1 = V_2^* = 1$ литър са съединени помежду си с тръбичка с кран. В единия балон се намира въздух под нормално атмосферно налягане ($P_1 = 1,013 \cdot 10^5$ Па), а в другия обем въздуха е засмукан с помпа до граничния вакуум, който тя осигурява. Считайки, че въздуха се подчинява на уравнението на Ван дер Ваалс, а балоните и тръбичката са топлинно изолирани, определете изменението на температурата (ΔT) при отваряне на крана и установяване в целия обем на системата еднакво налягане (P_2). Началната температура на въздуха е $T_1 = 290^\circ\text{K}$ и за въздуха константите на Ван дер Ваалс са $a = 1,35 \cdot 10^5$ Н·м²/кмол² и $b = 3,8 \cdot 10^{-2}$ м³/кмол.



РЕШЕНИЕ :

Поради топлинната изолация на цялата система от два балона и съединителна тръбичка следва, че топлообмен с околната среда не се осъществява $\Delta Q = 0$. Тогава от първия принцип на термодинамиката следва, че (1) $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$.

и (2) $\Delta A = - \Delta U$.

Тогава се получава, че при разширението си газа върши работата (ΔA) за сметка на вътрешната си енергия, за преодоляване на силите на привличане между молекулите. Понеже, съгласно условието на задачата, газа се подчинява на уравнението на Ван дер Ваалс, записваме уравнението в общ вид за 1 kmol газ

(3) $(P + \frac{a}{V_{\mu}^2})(V_{\mu} - b) = R_r T$

Разширението се осъществява адиабатно при постоянна енталпия (H_{μ}) на газа

(4) $H_{\mu} = U_{\mu} + P V_{\mu} = const$ при $\Delta Q = 0$

Прилагаме зависимост (4) за началното и крайното състояние на газа

при (5) $(H_{\mu})_1 = (H_{\mu})_2$ и получаваме, че

(6) $(U_{\mu})_1 + P_1 (V_{\mu})_1 = (U_{\mu})_2 + P_2 (V_{\mu})_2$.

Записваме и зависимостта за (U_{μ}) от вида

(7) $U_{\mu} = (C_{\mu})_v T - \frac{a}{V_{\mu}}$ като от (3) след преработка

получаваме и вида

(8) $P V_{\mu} = R_r T + R_r T \left(\frac{b}{V_{\mu} - b} \right) - \frac{a}{V_{\mu}}$

Заместваме (7) и (8) в (6) със съответните индекси за началното и крайното състояние на газа и определяме, че

(9) $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{(C_{\mu})_p} \left[\frac{R_r T_1 b}{(V_{\mu})_1 - b} - \frac{R_r T_2 b}{(V_{\mu})_2 - b} - \frac{2a}{(V_{\mu})_1} + \frac{2a}{(V_{\mu})_2} \right]$

Но (10) $V = \nu_{\mu} V_{\mu}$ и тогава $V_{\mu} = V / \nu_{\mu}$ (11),

като (n_μ) е броя на киломоловете въздух, участващ в разширението. Можем да определим (n_μ) чрез прилагането на уравнението на Ван-дер-Ваалс (12) или чрез уравнението на Клапейрон-Менделеев (13)

$$(12) \left(P_1 + \frac{n_\mu^2 a}{V_1^2} \right) (V_1 - n_\mu b) = n_\mu R T_1$$

$$(13) P_1 V_1 = n_\mu R T_1$$

Определянето на (n_μ)

ще осъществим по-лесно от (13) и тогава

$$(14) n_\mu = \frac{P_1 V_1}{R T_1} = 4,20 \cdot 10^{-5} \text{ кмол}$$

Имаме право да приложим (13) и да разгледаме въздуха в началното състояние като идеален газ, понеже неговото налягане е нормално

($P_1 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$). Но по определение (15) $n_\mu = M/\mu$ и

тогава (16) $M = n_\mu (\mu) = 29 (4,20 \cdot 10^{-5}) = 0,00122 \text{ kg} = 1,22$

g (въздух). Тук $\mu = 29 \text{ kg/кмол}$ е киломолната ефективна маса за въздух като смес от газове.

Можем да заместим (11) в (9) със съответните индекси за началното и крайното състояние на газа и тогава получаваме, че

$$(17) \Delta T = \frac{1}{(C_\mu)_p} \left[\frac{R T_1 b}{\frac{V_1}{n_\mu} - b} - \frac{R T_2 b}{\frac{2V_1}{n_\mu} - b} - \frac{2a n_\mu}{V_1} + \frac{2a n_\mu}{2V_1} \right]$$

Понеже $T_1 \approx T_2$ преработваме (17) и получаваме, че (при отчитане, че $T_2 < 0$)

$$(18) \Delta T \approx \frac{1}{(C_\mu)_p} \left[R T_1 b \left(\frac{1}{\frac{V_1}{n_\mu} - b} - \frac{1}{\frac{2V_1}{n_\mu} - b} \right) - \frac{a n_\mu}{V_1} \right]$$

$$\text{Но (19) } \left(\frac{1}{\frac{V_1}{n_\mu} - b} - \frac{1}{\frac{2V_1}{n_\mu} - b} \right) \approx \frac{(V_1/n_\mu)}{\left(\frac{V_1}{n_\mu}\right)\left(\frac{2V_1}{n_\mu}\right)} = \frac{n_\mu}{2V_1}$$

Заместваме (19) в (18) и получаваме, при отчитане на (20)

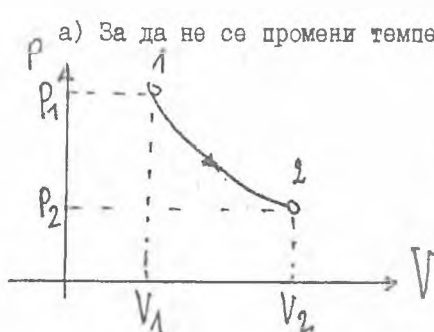
(20) $(C_{\mu})_p = \mu C_p$, като специфичната топлиемост на въздуха е $C_p = 1020 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ - при постоянно налягане.

(21) $\Delta T \approx \frac{1}{\mu C_p} \left[\frac{R T_1}{2 V_1} \nu n_{\mu} - \frac{a n_{\mu}}{V_1} \right] = \frac{n_{\mu}}{\mu C_p V_1} \left(\frac{R T_1 \nu}{2} - a \right)$

Получената зависимост (21) е общо решение на задачата за определяне на (ΔT) . Численото пресмятане от (21) дава следния окончателен и приблизителен резултат $\Delta T = -0,1266^{\circ}\text{K} \approx -0,13^{\circ}\text{K}$.

ЗАДАЧА № 86 Каква топлинна енергия (ΔQ) трябва да се предаде на n_{μ} (кмол-а) газ, подчиняващ се на уравнението на Ван дер Ваалс, за да може при разширение от обем (V_1) до обем (V_2) (вакуумиран): а) температурата на газа да не се измени $(\Delta T = T_2 - T_1 = 0)$; б) налягането (P_1) на газа да не се промени $(P_1 = P_2)$.

Р Е Ш Е Н И Е :



а) За да не се промени температурата $(T_1 = T_2)$ процеса

трябва да бъде изотермично разширение във вакуум от обем (V_1) до обем (V_2) .

Написваме зависимостта за вътрешната n_{μ} - на енергия на газа в двете състояния

(1) $(U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V T_1 - \frac{a}{(V_{\mu})_1}$ и (2) $(U_{\mu})_2 = (C_{\mu})_V T_2 - \frac{a}{(V_{\mu})_2}$

Определяме, че (3) $\Delta Q_{\mu} = \Delta U_{\mu}$ и получаваме

(4) $\Delta Q_{\mu} = \Delta U_{\mu} = (U_{\mu})_2 - (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) + a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right]$

Но съгласно условието на задачата $T_1 = T_2$.

$$(5) \Delta Q_{\mu} = \Delta U_{\mu} = a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right]$$

Осъществяваме преход на (5) към n_{μ} мол

газ. За целта приемаме, че

$$(6) \Delta Q = n_{\mu} \Delta Q_{\mu} = n_{\mu} \Delta U_{\mu} = n_{\mu} a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right]$$

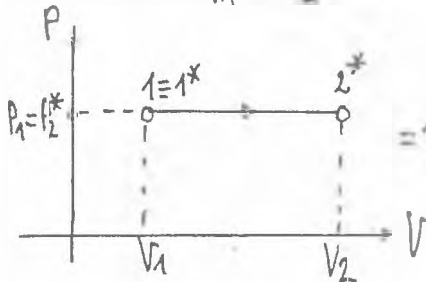
и освен това (7) $V = n_{\mu} V_{\mu}$. Заместваме (7) в (6) и получаваме окончателно, че

$$(8) \Delta Q = n_{\mu}^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

Получената зависимост (8) е общото решение на задачата

за определяне на (ΔQ) в случая (a).

б) В този случай $T_2 \neq T_1$ и $T_2 > T_1$, като разширението е изобарно $P_1 = P_2 = P$. За целта можем да използваме зависи-



висичост (4) и (8), като

$$(9) \Delta Q^* = n_{\mu} \Delta U_{\mu}^* = n_{\mu} (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) + a n_{\mu}^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

От (9) се вижда, че трябва да намерим ново представяне на първия член в дясно, който съдържа като множител

$\Delta T = T_2 - T_1$. За целта написваме уравнението на Ван-дер-

Ваалс за началното и крайното състояние на газа

$$(10) \left(P_1 + n_{\mu}^2 \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - n_{\mu} b) = n_{\mu} R T_1$$

$$(11) \left(P_1 + n_{\mu}^2 \frac{a}{V_2^2} \right) (V_2 - n_{\mu} b) = n_{\mu} R T_2.$$

Изваждаме (10) от (11) и получаваме, че

$$(12) n_{\mu} (T_2 - T_1) = \frac{1}{R} \left[\left(P_1 + n_{\mu}^2 \frac{a}{V_2^2} \right) (V_2 - n_{\mu} b) - \left(P_1 + n_{\mu}^2 \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - n_{\mu} b) \right]$$

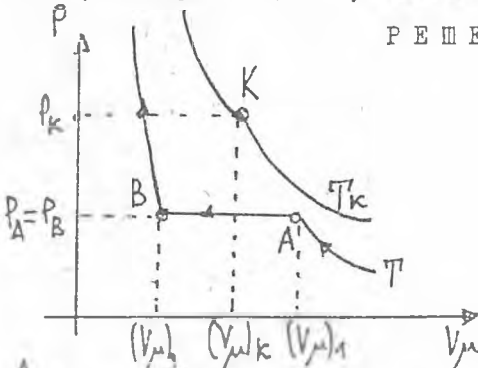
Заместваме (12) в (9) и получаваме, че

$$(13) \Delta Q^* = \frac{(C_{\mu})_v}{R} \left[\left(P_1 + n_{\mu}^2 \frac{a}{V_2^2} \right) (V_2 - n_{\mu} b) - \left(P_1 + n_{\mu}^2 \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - n_{\mu} b) \right] + a n_{\mu}^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

Получената зависимост (13) е общото решение на задачата [за случай (б)] при определяне на ΔQ^* .

ЗАДАЧА № 87 При температура $t = 200^{\circ}\text{C}$ се осъществява изотермично свиване на 1 кмол водна пара. Определете: а) най-голямото налягане на парата; най-голям обем на водата; в) най-малкия обем на ненаситените пари; г) обемът, при който в системата има $0,5 \text{ кмол}$ вода и $0,5 \text{ кмол}$ наситена пара.

РЕШЕНИЕ :



$$b = 31 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{кмол}.$$

поправки са $a = 5,56 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{кмол}^2$. Като се има предвид,

че $(V_{\mu})_k = 3b = 3 (3,1 \cdot 10^{-2}) = 9,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{кмол}$. Следо-

Изотермичното свиване на водната пара се осъществява при $T = t + 273 = 473^{\circ}\text{K}$. Според таблични данни критичните параметри на водните пари са $T_k = 647^{\circ}\text{K}$ и $P_k = 2,20 \cdot 10^7 \text{ Па}$

а, Ван-дер-Ваалсовите

вателно, изотермичното свиване на водната пара става при $T < T_{кр}$ и затова в т. А при обем $(V_{\mu})_1$ се реализира преход на ненаситените водни пари в наситени. След това при изотермично свиване в интервала (АВ) от $(V_{\mu})_1$ до $(V_{\mu})_2$ процесът е изобарен при постоянно налягане ($P_{нп.}$) на наситените водни пари, като част от наситените водни пари се втечняват. В (т.В) когато обема е $(V_{\mu})_2$ всички наситени водни пари са вече втечнени. Специфичният обем на наситените водни пари е $(V_{сп})_{нп} = 0,126 \text{ м}^3/\text{г} = 126 \text{ м}^3/\text{кг}$. Понеже водните пари имат μ -на маса $\mu = 29 \text{ кг/кмол}$, тогава следва, че обема на 1 кмол наситени водни пари е $(V_{\mu})_{нп.} = \mu (V_{сп})_{нп} = 29(126) = 2268 \text{ м}^3/\text{кмол}$ при $T = 473^\circ\text{К}$.

а) За да намерим най-голямото налягане на парата, трябва да определим налягането $P_A = P_B = P_{нп.}$ на наситените пари. За целта използваме уравнението на Ван-дер-Ваалс

$$(1) \left[P_{нп} + \frac{a}{(V_{\mu})_{нп}^2} \right] [(V_{\mu})_{нп} - b] = R_r T$$

$$(2) P_{нп} = \frac{R_r T}{[(V_{\mu})_{нп} - b]} - \frac{a}{(V_{\mu})_{нп}^2}$$

Получената зависимост (2) е общо решение на

задачата за определяне на $(P_{нп.})$. Численото пресмятане от (2) дава следния резултат $P_{нп.} \approx 1734 \text{ Па}$.

б) За да определим най-големия обем на водата $[V(\text{H}_2\text{O})]_{\text{max}} = (V_{\mu})_2$, трябва да приемем, че нейната плътност е $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ (без да отчитаме обемното топлинно разширение, според условието на задачата). Тогава $(V_{\mu})_2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{18}{1000} = 0,018 \text{ м}^3/\text{кмол} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{кмол}$.

Както и трябва да се очаква $(V_{\mu})_2 < (V_{\mu})_{кр}$.

в) Най-малкия обем на ненаситената пара отговаря на $(V_{\mu})_1$ в т. А от изотермата. Тогава $(V_{\mu})_1 = \mu (V_{сп})_{нп} = 29 (126) = 2268 \text{ м}^3/\text{кмол}$ при $T = 427^\circ\text{К}$.

г) Обемът на системата, при който има (0,5 кмол вода + 0,5 кмол наситени водни пари) нека да отбележим с

$$(V_{\mu})^* = \left(\frac{\mu}{2}\right) \frac{(V_{\mu})_2}{\mu} + \left(\frac{\mu}{2}\right) (V_{сп})_{нп} = 9 \left(\frac{1,8 \cdot 10^{-2}}{18} + 126 \right) = (9 \cdot 10^{-3} + 1134) = 1134 \text{ м}^3.$$

ЗАДАЧА № 88. В два съда, всеки с обем $V = 20$ литра, при температура $t = 27^\circ\text{С}$ се намират газове по $n_{\mu} = 50 \text{ мол}$. В единия съд има въглероден двуокис (CO_2), а в другия - водород (H_2). Определете налягането (P) на газовете във всеки съд, ако ги разглеждате като: а) идеални и б) реални.

РЕШЕНИЕ:

Температурата на газовете е $T = t + 273 = 27 + 273 = 300^\circ\text{К}$, а $n_{\mu} = 50 \text{ мол} = 0,050 \text{ кмол}$ и $V = 20 \text{ литра} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$.

а) Разглеждаме газовете като идеални и прилагаме уравнението на Клапейрон-Менделеев

$$(1) P_{и.г} = P_{\text{CO}_2} = P_{\text{H}_2} = n_{\mu} \frac{R T}{V} = 6,235 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

б) При отчитане, че газовете са реални е необходимо да използваме уравнението на Ван-дер-Ваалс

$$(2) \left(P + n_{\mu}^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - n_{\mu} b) = n_{\mu} R T$$

ИЛИ

$$(3) P = \frac{n_{\mu} R T}{V - n_{\mu} b} - n_{\mu}^2 \frac{a}{V^2}$$

Получената зависимост (3) е общото решение на задачата за определяне на (P). За целта вземаме таблични данни за Ван-дер-

Ваалсовите поправки (a) и (b) за двата газа: $a_{CO_2} = 3,64 \cdot 10^5$ $\text{Pa} \cdot \text{m}^6 / \text{кмол}^2$ и $b_{CO_2} = 4,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 / \text{кмол}$; $a_{H_2} = 2,40 \cdot 10^4$ $\text{Pa} \cdot \text{m}^6 / \text{кмол}^2$ и $b_{H_2} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 / \text{кмол}$.

Заместваем стойностите на (a) и (b), (μ) и (V) в (3) и получаваме следния резултат: $P_{CO_2} = 4,711 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ и $P_{H_2} = 6,590 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. Веднага се вижда при сравнение на получените стойности за (P) че е в сила следното неравенство ($P_{CO_2} < P_{H_2} < P$). Понеже при идеален газ не се отчитат междумолекулните сили на взаимодействие - молекулите са индиферентни помежду си, тогава следва, че в (CO_2) преобладават силите на привличане между молекулите, а в (H_2) - силите на отблъскване.

ЗАДАЧА № 89 В цилиндър с бутало в начален обем $V_1 = 20$ литра се намира маса $M = 50 \text{ g}$ аргон (Ar) при температура $T_1 = 120^\circ \text{K}$. Определете налягането на наситените пари на аргон при осъществяване на изотермично свиване на газа.

РЕШЕНИЕ :

Първо привеждаме числените стойности на дадените физични величини в система-СИ: $V_1 = 20$ литра = $20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ и $M = 50 \text{ g} = 0,050 \text{ kg}$. Можем да определим началното налягане на газа (P_1), като използваме уравнението на Клапейрон-Менделеев (1) или уравнението на Ван-дер-Ваалс (2) за да видим каква разлика се проявява при вземане на газа за идеален (1) и реален (2)

$$(1) \quad P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_1 \quad \text{или} \quad P_1 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r T_1}{V_1} \right) \quad (3)$$

$$(2) \left[P_1 + \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V_1^2} \right] \left(V_1 - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} R_r T_1$$

$$(4) P_1 = \frac{\frac{M}{\mu} R_r T_1}{V_1 - \frac{M}{\mu} b} - \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V_1^2}$$

От получените зависимости (3) и (4) можем да определим (P_1) при условие, че

$$(5) \mu_{\mu} = \frac{M}{\mu} = \frac{0,050}{40} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ katom.}$$

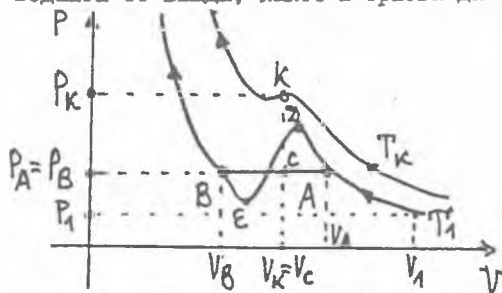
Тук $\mu(Ar) = 40 \text{ kg/katom.}$ - газа е в атомарно състояние.

Направените изчисления на (P_1) от (3) и (4) дават следния резултат: $(P_1)_{иг} = 9,025 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ и $(P_1)_{рг} = 6,185 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

За определянето на $(P_1)_{рг}$ от (4) използваме следните таблични данни за аргона (Ar): за Ван-дер-Ваалсовите поправки - $a = 1,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^6}{\text{katom}^2}$ и $b = 3,20 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{katom}$ за критичните основни характеристики - $T_{кр} = 151^\circ\text{K}$ и $P_{кр} = 4,87 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Критичният katom -ен обем $(V_{\mu})_{кр} = 3b = 9,60 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{katom}$.

Веднага се вижда, както и трябва да се очаква, че $P_{кр} > (P_1)_{кр} > (P_1)_{рг}$.



Налигането на наситените пари е $P_{нп} = P_A = P_B$.

За да определим ($P_{нп}$) - съгласно чертежа, ще трябва да използваме приведеното уравнение на Ван-дер-Ваалс (6)

$$\left(P_{нп} + \frac{3}{w_n^2} \right) (3w_n - 1) = 8 \theta_n.$$

като - приведените характеристики са (за т. С - от чертежа)

$$(7) \mathcal{J}_n = \frac{P_c}{P_k} \quad ; \quad (8) \omega_n = \frac{V_c}{V_k} = 1 \quad \text{и} \quad (9) \theta_n = \frac{T_1}{T_k} = \frac{120}{151} \approx 0,795.$$

Заместваме (7 + 9) в (6) и получаваме, че

$$(10) \left(\mathcal{J}_n + \frac{3}{4} \right) [3(1) - 1] = 8(0,795) \approx 6,358.$$

$$(11) \mathcal{J}_n = 0,179 = \frac{P_c}{P_k} \quad \text{или} \quad (12) P_c = 0,1788 P_k$$

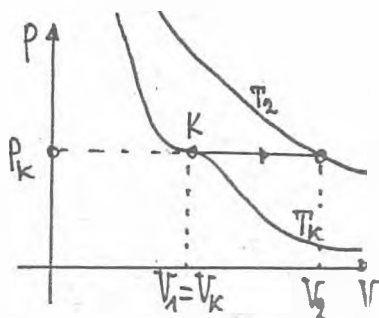
$$(13) P_c = P_{\text{ин}} = P_A = P_B = 0,179 (4,87 \cdot 10^6) = 8,708 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

По този начин в (13) определяме налягането на наситените пари при осъществяване на изобарно-изотермичния процес ($A \rightarrow C \rightarrow B$), в който част от наситените пари започва да се втечнява. Съгласно уравнението на Ван-дер-Ваалс при налягане $P_c = P_{\text{ин}}$, уравнението има три корена, понеже е от трета степен за обема и решаването му дава възможност да определим $V_{\text{min}} = V_B$ и $V_{\text{max}} = V_A$. Тогава знаейки вече (V_A) и (V_B) ще определим $\Delta V = V_A - V_B$ - тоест интервалния обем, в който се реализира втечняване на наситената пара на аргона при $T_1 = 120^\circ\text{K}$.

ЗАДАЧА № 90 Въглероден двуокис (CO_2) с маса $M = 1,25 \text{ kg}$ се намира в цилиндър с бутало в критично състояние. След изобарно загряване на газа се достига до обем $V_2 = 7$ литра. Определете температурата (T_2) на газа.

РЕШЕНИЕ :

За критичното състояние на въглеродния двуокис (CO_2) използваме следните таблични данни: $T_k = 304^\circ\text{K}$ и $P_k = 7,38 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.



Освен това, поправките на Ван-дер-Ваалс имат следните стойности: $a = 3,61 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^4 / \text{кмол}^2$ и $b = 4,28 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 / \text{кмол}$. Използваме зависимост (1) $(V_{\mu})_K = 3b = 3(4,28 \cdot 10^{-2}) = 0,1284 \text{ м}^3 / \text{кмол}$ за да определим начал-

ния (стартов) кмол -ен критичен обем на газа. В разглеждания случай масата на газа е $M = 1,25 \text{ kg}$ и при $\mu(\text{CO}_2) = 44 \text{ kg} / \text{кмол}$, тогава (2) $n_{\mu} = \frac{M}{\mu} = 0,02841 \text{ кмол}$. Следователно, (3) $V_1 = (V_1)_K = n_{\mu}(V_{\mu})_K = 3,648 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 3,648 \text{ литра}$. За да определим температурата (T_2') в крайно състояние на газа, след изобарно разширение ($V_1 < V_2$) при загряване ще използваме приведеното уравнение на Ван-дер-Ваалс

$$(9) \left(\pi_n + \frac{3}{\omega_n^2} \right) (3\omega_n - 1) = 8\theta_n$$

където приведените характеристики са:

$$(5) \pi_n = \frac{P_2}{P_K} = \frac{P_K}{P_K} = 1$$

$$(6) \omega_n = \frac{V_2}{(V_1)_K} = \frac{7}{3,648} = 1,919.$$

$$(7) \theta_n = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{(T_1)_K}$$

Заместваме (5 + 7) в (4) и получаваме, че

$$\theta_n = \frac{T_2}{(T_1)_K} = 1,079$$

и тогава $T_2 = 1,079 \cdot (T_1)_K =$

$= 1,079 \cdot (304) = 328,04^\circ\text{K}$. Следователно, при изобарното разширение температурата е нараснала от $T_1 = (T_1)_K = 304^\circ\text{K}$ до $T_2 = 328^\circ\text{K}$ или $\Delta T = T_2 - T_1 = 328 - 304 = 24^\circ\text{K}$.

Допълнително към задачата можем да определим: а) Извършената работа ($\Delta H_{1 \rightarrow 2}$) при изобарното разширение на газа, вследствие загряването му.

$$(8) \Delta A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 P dV = P(V_2 - V_1) = 7,36 \cdot 10^6 (7 - 3,648) 10^{-3} = 1,416 \cdot 10^4 \text{ J} = 14,16 \text{ kJ}.$$

б) Нарастването на вътрешната енергия на газа $\Delta U = U_2 - U_1$. За целта записваме зависимостта за вътрешната енергия на 1 kmol газ в двете състояния - начално и крайно.

$$(9) (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V T_1 - \frac{a}{(V_{\mu})_1} \quad (10) (U_{\mu})_2 = (C_{\mu})_V T_2 - \frac{a}{(V_{\mu})_2}$$

$$(11) \Delta U_{\mu} = (U_{\mu})_2 - (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) + a \left[\frac{1}{(V_{\mu})_1} - \frac{1}{(V_{\mu})_2} \right]$$

Но в сила са зависимости за преход от 1 kmol газ към $M \text{ kg}$ газ.

$$(12) \Delta U = n_{\mu} (\Delta U_{\mu}) \quad \text{и} \quad (13) \Delta U_{\mu} = \frac{\Delta U}{n_{\mu}}$$

$$(14) V = n_{\mu} V_{\mu} \quad \text{и} \quad (15) V_{\mu} = \frac{V}{n_{\mu}}$$

Като имаме предвид (12) и (15) от (11) получаваме окончателно, че

$$(16) \Delta U = n_{\mu} (\Delta U_{\mu}) = n_{\mu} (C_{\mu})_V \Delta T + a n_{\mu}^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

Но (17) $(C_{\mu})_V = \mu C_V$ при $\mu = 44 \text{ kg/kmol}$
и $C_V(\text{kg}) = 650 \text{ J/kg.K}$. Заместваме (17) в (16) и получаваме окончателния вид на зависимостта за определяне на изменението на вътрешната енергия (ΔU) на газа при изобарното разширение

$$(18) \Delta U = n_{\mu} (\Delta U_{\mu}) = n_{\mu} (\mu C_V) \Delta T + a n_{\mu}^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

Численото пресмятане на (ΔU) от (18) дава следния резултат $\Delta U = 3,8247 \cdot 10^4 \text{ J} = 38,247 \text{ kJ}$.

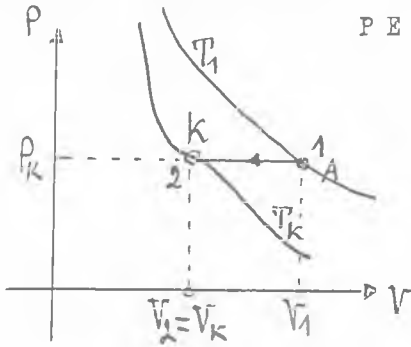
в) Можем да определим общото количество топлина (ΔQ),

което е прилажено на газа за осъществяване на изобарното разширение от обем $V_1 = (V_1)_k$ до обем (V_2) . За целта използваме първия принцип на термодинамиката

$$(19) \Delta Q = \Delta U + \Delta A = 3,825 \cdot 10^4 + 1,416 \cdot 10^4 = 5,241 \cdot 10^4 \text{ J.}$$

$$\Delta Q = 52,41 \text{ kJ.}$$

ЗАДАЧА № 91 Хлор с маса $M = 50 \text{ g}$ се намира в цилиндър с бутало при обем (V_1) и температура $T_1 = 573,4^\circ \text{K}$. След осъществяване на изобарно свиване газа се привежда в критично състояние. Определете началния обем (V_1) на газа.



РЕШЕНИЕ:

От схемата се вижда, че в (P, V) диаграма изобарното свиване става от $(P_1 = P_k, T_1, V_1)$ до $(P_2 = P_k, T_k, V_2 = V_k)$. За целта използваме таблични данни за критичните характеристики на хлора (Cl_2):

$T_k = 417^\circ$ и $P_k = 7,71 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. Освен това, представяме и

стойностите на Ван-дер-Ваалсовите поправки за налягане (a) и обем (b), които са от вида: $a = 6,50 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kmol}^2$ и $b = 5,62 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 / \text{kmol}$. Използваме зависимост (1) $(V_{\mu})_k = 3b =$

$= 3(5,62 \cdot 10^{-2}) = 0,1686 \text{ m}^3 / \text{kmol}$ за хлора (Cl_2) kmol -ната маса е $\mu(\text{Cl}_2) = 2(35,453) = 70,906 \text{ kg/kmol}$ и тогава

(2) $\mu_{\text{Cl}_2} = \frac{M}{m} = \frac{0,050}{70,906} = 7,0516 \cdot 10^{-4} \text{ kmol}$. Тогава обема на газа в критичното състояние е (3) $(V_2)_k = \mu_{\text{Cl}_2} (V_{\mu})_k = 7,0516 \cdot 10^{-4} \cdot (0,1686) = 1,189 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. За да определим началния (стартовия) обем (V_1) на газа ще използваме приведеното уравнение на Ван-дер-Ваалс

$$(4) \left(\pi_n + \frac{3}{w_n^2} \right) (3w_n - 1) = 8 \theta_n \quad \text{при}$$

$$(5) \pi_n = \frac{p_1}{p_k} = 1 \quad ; \quad (6) w_n = \frac{V_1}{(V_2)_k} \quad ; \quad (7) \theta_n = \frac{T_1}{T_k} = \frac{573,4}{417} =$$

= 1,375. Заместваме (5 + 7) в (4) и получаваме следното кубично уравнение за приведения обем (w_n).

$$(8) w_n^3 - 4w_n^2 + 3w_n - 1 = 0$$

Уравнение (8) привеждаме в каноничен вид при (9) $w_n = x - \frac{\hat{b}}{3\hat{a}}$ (при $\hat{a} = 1$; $\hat{b} = -4$; $\hat{c} = +3$ и $\hat{d} = -1$), като се получава,

$$\text{че (10) } x^3 + \hat{p}x + \hat{q} = 0 \quad , \quad \text{където}$$

$$(11) \hat{p} = -\frac{\hat{b}^2}{3\hat{a}^2} + \frac{\hat{c}}{\hat{a}} \quad \text{и (12) } \hat{q} = \frac{2\hat{b}^3}{27\hat{a}^3} - \frac{\hat{b}\hat{c}}{3\hat{a}^2} + \frac{\hat{d}}{\hat{a}}$$

Решението на (10) осъществяваме по формулата на Кардано

$$(13) X = \sqrt[3]{-\frac{\hat{q}}{2} + \sqrt{\frac{\hat{q}^2}{4} + \frac{\hat{p}^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\hat{q}}{2} - \sqrt{\frac{\hat{q}^2}{4} + \frac{\hat{p}^3}{27}}}$$

В разглеждания от нас случай от (11) и (12) следва, че $\hat{p} = -2,33$;

$\hat{q} = -1,74$, и при прилагане на (13) се получава, че $X = 1,813$.

Заместваме $X = 1,813$ в (9) и получаваме, че $w_n = 3,146$. Но

$w_n = \frac{V_1}{(V_2)_k}$ и тогава $V_1 = w_n (V_2)_k = 3,146 \cdot (1,189 \cdot 10^{-4}) = 3,7406 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. С това определяме окончателно търсения начален обем (V_1) на хлора (Cl_2).

Допълнително към задачата можем да определим: а) работата ($\Delta A_{1 \rightarrow 2}$), която се извършва при движението на буталото за свързване на газа до критичното му състояние.

$$(14) \Delta A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 p_1 dV = p_1 (V_2 - V_1) = 7,71 \cdot 10^6 (1,189 \cdot 10^{-4} - 3,1706 \cdot 10^{-4}) = -1,967 \cdot 10^3 \text{ J} = -1,967 \text{ kJ}.$$

б) Изменението на вътрешната енергия (ΔU) при преход от начално състояние (T_1, p_1, V_1) - т. А, до крайно състояние (p_1, T_2, V_2) - т. К на изобарата (АК).

$$(15) (U_\mu)_1 = (C_\mu)_V T_1 - \frac{a}{(V_\mu)_1} \quad \text{и} \quad (16) (U_\mu)_2 = (C_\mu)_V T_2 - \frac{a}{(V_\mu)_2}$$

$$(17) \Delta U_\mu = (U_\mu)_2 - (U_\mu)_1 = (C_\mu)_V (T_2 - T_1) + a \left[\frac{1}{(V_\mu)_1} - \frac{1}{(V_\mu)_2} \right]$$

Осъществяваме преход от 1 kmol газ към (M) kg газ.

$$(18) \Delta U = \eta_\mu (\Delta U_\mu) = \eta_\mu (C_\mu)_V (T_2 - T_1) + a \eta_\mu^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

при отчитане, че (19) $V = \eta_\mu (V_\mu)$ или (20) $V_\mu = \frac{V}{\eta_\mu}$ и заместване на (20) в (17). Освен това (21) $(C_\mu)_V = \mu C_V$, където специфичната топлоемност на хлора е $C_V(\text{Cl}_2) = 354,15 \text{ J/kg.K}$. Заместваме (21) в (18) и окончателно получаваме, че

$$(22) \Delta U = \eta_\mu \mu C_V (T_2 - T_1) + a \eta_\mu^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

Това е общото решение за определяне на (ΔU). Численото пресмятане от (22) дава следния резултат $\Delta U = -4,623 \cdot 10^3 \text{ J} = -4,623 \text{ kJ}$.

в) Да определим количеството топлина (ΔQ), което цялата топлинно неизолирана система от газ, цилиндър и бутало, отдава на околната среда. За целта използваме първия принцип на термодинамиката.

$$(23) \Delta A^* = \Delta U + \Delta Q = |\Delta A_{1 \rightarrow 2}|$$

и тогава

$$(24) \Delta Q = -(\Delta U) + |\Delta A_{1 \rightarrow 2}| = -(-4,623 \cdot 10^3) + 1,967 \cdot 10^3$$

$$\text{или } \Delta Q = 6,590 \cdot 10^3 \text{ J} = 6,590 \text{ kJ.}$$

г) Да определим ефективния диаметър $(d_m)_{\text{еф.}}$ на молекулите на хлора (Cl_2). За целта приемаме, от теорията, че

$$(25) V \approx 4N_A \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_m}{2} \right)^3 \right] = \frac{2}{3} \pi N_A d_m^3$$

$$\text{или } (26) (d_m)_{\text{еф.}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi N_A}}$$

Това е общото решение за определяне

на $(d_m)_{\text{еф.}}$. Численото пресмятане от (26) дава следния резултат $(d_m)_{\text{еф.}} = 3,546 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3,546 \text{ \AA}$.

ЗАДАЧА № 92 Стъклен балон е напълнен с вода при стайна температура $T_1 = 300^\circ\text{K}$, до половината от обема му ($V/2$). След това, той е херметично запоеен, като водата в него се загрява до температура $T_2 = 650^\circ\text{K}$. Определете налягането (P_2) на водната пара в балона при температура (T_2).

РЕШЕНИЕ:

Масата на водата в балона е (1) $M = \rho(V/2)$ или

$$V = 2M/\rho \quad (2), \text{ където } \rho = 973 \text{ kg/m}^3 \text{ е плътността на}$$

водата при $T_1 = 300^\circ\text{K}$ (условно приета). По таблични данни

$$\rho_3(\text{H}_2\text{O}) = 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ при } T_3 = 277 \text{ K и } \rho_4(\text{H}_2\text{O}) = 960 \text{ kg/m}^3$$

при $T_4 = 373^\circ\text{K}$. На маса (M) отговаря брой на kmol -овете

$$(3) n_{\mu} = M/\mu \quad \text{при } \mu = 18 \text{ kg/kmol} \quad . \text{ За да определим}$$

налягането (P_2) ще използваме уравнението на Ван-дер-Ваалс

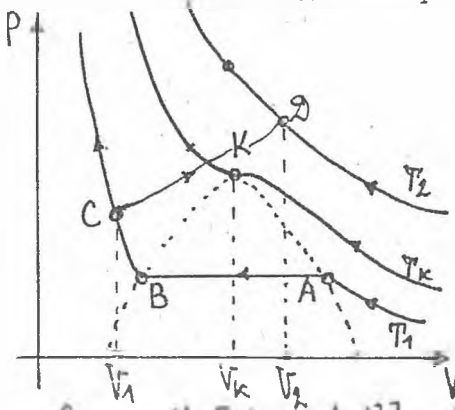
$$(4) \left(P_2 + n_{\mu}^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - n_{\mu} b) = n_{\mu} R T_2$$

(5)
$$P_2 = \frac{n_{\mu} R_r T}{V - n_{\mu} b} - \frac{n_{\mu}^2 a}{V^2}$$
 Заместваме (2) и (3) в (5) и получаваме, че

(6)
$$P_2 = \frac{\frac{M}{\rho} R_r T}{\left(\frac{2M}{\rho} - \frac{M}{\rho} b\right)} - \left(\frac{M}{\rho}\right)^2 \frac{a}{\left(\frac{2M}{\rho}\right)^2} = \rho \left[\frac{R_r T}{2\mu - \rho b} - \frac{a \rho}{4\mu^2} \right]$$

Получената зависимост (6) е общо решение на задачата за определяне на (P_2). Численото пресмятане от (6) дава следния резултат $P_2 = 4,9435 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 494,35 \text{ MPa}$.

Съгласно таблични данни критичните характеристики на водната пара са: $T_k = 647^\circ\text{K}$ и $P_k = 22,10 \text{ MPa}$. Константите на Ван-дер-Ваалс имат стойности: $a = 5,56 \cdot 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^4}{\text{kmol}^2}$ и $b = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kmol}$. Понеже $T_2 = 650^\circ\text{K} > T_k = 647^\circ\text{K}$, следователно при ~~никакви~~ приложени ~~налягания~~ при изотермично свиване на водната пара тя не може да се втечни. Освен това и $P_2 = 494,35 \text{ MPa} > P_k = 22,10 \text{ MPa}$ и графично в (P, V) - координати състоянието на водните пари се реализира от начално състояние (т.С) с (P_1, V_1, T_1) до (т.Д) с (P_2, V_2, T_2).



Допълнително към задачата да определим ефективния диаметър ($d_{\text{мкф}}$) на молекулите на водната пара. За целта използваме от теорията зависимостта

(7)
$$b \approx 4 N_A \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_{\text{мкф}}}{2} \right)^3 \right] = \frac{2}{3} N_A \pi (d_{\text{мкф}})^3$$

ИЛИ

$$(8) (d_m)_{\text{эф}} = \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_A}} = 10^{-10} \sqrt[3]{24,587} = 2,908 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

По таблични данни за водата се дава, че $(d_m)_{\text{эф}}^* = 3,0 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 3,0 \text{ \AA}$.

ЗАДАЧА № 93 Налягането (P) на кислорода (O_2) е $P = 7 \text{ MPa}$, а неговата плътност е $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$. Намерете каква е температурата (T) на газа.

РЕШЕНИЕ:

Записваме уравнението на Ван-дер-Ваалс във вида:

$$(1) \left(P + n_{\mu}^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - n_{\mu} b) = n_{\mu} R T \quad \text{или}$$

$$(2) T = \left[P + n_{\mu}^2 \left(\frac{a}{V^2} \right) \right] \cdot (V - n_{\mu} b) \cdot (n_{\mu} R)^{-1}$$

Съгласно дефиниционно равенство (3) $\rho = \frac{M}{V}$ и (4) $n_{\mu} = \frac{M}{\mu}$

Определяме от (3), че (5) $M = \rho V$ и заместваме (5) в (4) като получаваме, че

$$(6) n_{\mu} = \frac{\rho V}{\mu} \quad \text{Заместваме (6) в (2) и получаваме}$$

$$(7) T = \left[P + \left(\frac{\rho V}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right] \cdot \left(V - \frac{\rho V}{\mu} b \right) \cdot \left(\frac{\rho V R}{\mu} \right)^{-1}$$

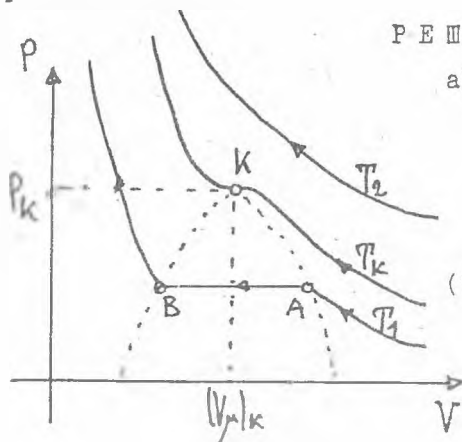
или, окончателно след преработка се получава зависимост (8)

$$(8) T = \frac{\left(P + \frac{\rho^2 a}{\mu^2} \right) (\mu - \rho b)}{\rho R} = \frac{(\rho \mu^2 + \rho^2 a) (\mu - \rho b)}{\mu^2 \rho R}$$

Получената зависимост (8) е общо решение на задачата за определяне на (T). Численото решение от (8) дава следната

стойност на $T = 288,45^\circ\text{K} \approx 288^\circ\text{K}$. Съгласно таблични данни използваме следните стойности на Ван-дер-Ваалсовите поправки за налягане (a) и обем (b) за кислорода (O_2): $a = 1,36 \cdot 10^5 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^4}{\text{кмол}^2}$ и $b = 3,17 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{кмол}$. Освен това, $\mu(\text{O}_2) = 32 \text{ кг/кмол}$, а критичните характеристики на кислорода са съответно $P_k = 5,08 \text{ МПа}$ и $T_k = 155^\circ\text{K}$. Следователно, от сравняване на числените стойности на основните характеристики се вижда, че $T = 288^\circ\text{K} > T_k = 155^\circ\text{K}$ и $P = 7 \text{ МПа} > P_k = 5,08 \text{ МПа}$. Незнанието на обема (V) или масата (M) на газа ни ограничава във възможността да определим и други характеристики на газа.

ЗАДАЧА № 94 По дадени стойности на Ван-дер-Ваалсовите поправки за налягане (a) и обем (b), които за водните пари са съответно $a = 5,45 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{кмол}^2$ и $b = 3,04 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{кмол}$ определете: а) най-големия обем, който може да заеме 1 кмол вода; б) плътността (ρ) на водните пари в критично състояние; в) най-голямото налягане (P_{max}) на водните пари в критично състояние.



РЕШЕНИЕ :

а) Най-големият обем (V_{max}), който може да заеме 1 кмол вода (H_2O) това е критичния моларен обем ($V_{\text{m}})_k$.

$$\begin{aligned}
 (1) (V_{\text{m}})_{\text{max}} &= (V_{\text{m}})_k = \\
 &= 3b = 3(3,04) \cdot 10^{-2} = \\
 &= 9,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{кмол} = \\
 &= 0,0912 \text{ м}^3/\text{кмол}.
 \end{aligned}$$

б) Плътноста (ρ_k) на водните пари в критично състояние е

$$(2) \rho_k = \frac{\mu}{(V_\mu)_k} = \frac{18}{0,0912} = 197,37 \text{ kg/m}^3$$

в) Най-голямото налягане (P_{\max}) на водните пари при критично състояние е равно на критичното налягане (P_k)

$$(3) P_{\max} = P_k = \frac{a}{27b^2} = \frac{5,45 \cdot 10^5}{27(3,04 \cdot 10^{-2})^2} = 2,184 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 21,84 \text{ MPa}$$

По таблични данни за водните пари $P_k = 22,10 \text{ MPa}$.

ЗАДАЧА № 95 Колко пъти концентрацията на молекулите ($n_{kr.}$) на азота в критично състояние е по-голяма от концентрацията на молекулите (n_0) при нормални условия.

РЕШЕНИЕ:

Нека разглеждането направим за 1 кмол азот (N_2). Тогава търсеното отношение е

$$(1) X = \frac{n_{kr.}}{n_0} = \frac{[N_A/(V_\mu)_k]}{[N_A/(V_\mu)_0]} = \frac{(V_\mu)_0}{(V_\mu)_k}$$

Тук $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ е числото на Авогадро. Съгласно закона на Авогадро, при нормални условия ($T_0 = 273^\circ\text{K}$ и $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$), Всички газове взети в 1 кмол притежават еднакъв обем (2) $(V_\mu)_0 = 22,41 \text{ m}^3/\text{kmol}$. В критично състояние на азота (N_2), моларния обем е (3) $(V_\mu)_k = 3 \text{ l}$.

За азота константата $b = 0,0386 \text{ m}^3/\text{kmol}$ и тогава (4)

$$(V_\mu)_k = 3 \text{ l} = 3 (0,0386) = 0,1158 \text{ m}^3/\text{kmol}$$

(2) и (4) в (1) и получаваме, че

$$(5) \quad X = \frac{(V_{\mu})_0}{(V_{\mu})_k} = \frac{22,41}{0,1158} = 193,52 \text{ пъти.}$$

В същото отношение се намират и плътностите на азота, в двете състояния (ρ_0) и ($\rho_{кр}$), понеже (6) $\rho_0 = n_0 m$ и

$$(7) \quad \rho_{кр} = n_{кр} \cdot m, \quad \text{където } (m) \text{ е масата на една молекула азот.}$$

ЗАДАЧА № 96 . Течен пентан C_5H_{12} , плътността (ρ) на който е равна на $\rho_n = 626 \text{ kg/m}^3$, частично запълва обема на здрава, херметично затворена, кварцова тръба, като над течната фаза се намират наситени пари на пентан. Определете, какво част (X) от вътрешния обем на колбата трябва да заема течния пентан, за да може при налягане на колбата да се наблюдава преход на веществото през критичната точка. Константата за обем (b) на Ван-дер-Ваалс за пентаномом е $b = 14,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$.

РЕШЕНИЕ :

След като е известна константата (b) можем да определим критичния моларен обем (1) $(V_{\mu})_k = 3b$. Предварително представяме стойността на $b = 14,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kmol} = 0,145 \text{ m}^3/\text{kmol}$ - в система - СИ. Като знаем химическата формула на пентан (C_5H_{12}) определяме молната маса (μ) от зависимостта

$$(2) \quad \mu = 5A(C) + 12A(H) = 5(12,011) + 12(1,00794) \\ \mu = 60,055 + 12,095 = 72,15 \text{ аем}$$

Тогава приемаме, че $\mu(C_5H_{12}) = 72,15 \text{ kg/kmol}$. Понеже $1 \text{ аем} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, тогава следва че $\mu(C_5H_{12}) = 72,15 (1,67 \cdot 10^{-27}) = 1,205 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. От (1) като вземем под внимание стойността на константата (b) определяме, че $(V_{\mu})_k = 3(0,145) = 0,435 \text{ m}^3/\text{kmol}$. Критичната плътност на пентан е:

$$(3) \rho_k = \frac{\mu}{(V_{\mu})_k} = \frac{72,15}{0,435} = 165,86 \text{ kg/m}^3.$$

Но масата (M_n) на пентан е една и съща в колбата при началното и крайното състояние. Тогава е изпълнена зависимостта

$$(4) M_n = \rho_n \cdot V_n = \rho_k (V_{\mu})_k. \quad \text{Търсеното отношение}$$

$$(5) X = \frac{V_n}{(V_{\mu})_k} = \frac{\rho_k}{\rho_n} = \frac{\mu}{\rho_n (V_{\mu})_k} = \frac{\mu}{\rho_n 36}$$

Получената зависимост (5) е обща решение на задачата за определяне на (X). Численото пресмятане от (5) дава следния резултат:

$$(6) X = \frac{72,15}{3(626) 0,145} = 0,2674. \quad \text{Следователно, в началното състояние при стайна}$$

температура, течния пентан заема 26,44% от целия обем на колбата, който е равен на $(V_{\mu})_k$, при използване на 1 kmol пентан в колбата, понеже в критично състояние целия обем е зает с наситената пара.

Ако в условието на задачата е дадена масата на течния пентан, поставен в колбата, можем веднага да определим какъв трябва да бъде обема на колбата за да се наблюдава критично състояние.

Например, нека се използва маса $M_n = 10 \text{ g}$ течен пентан и се постави за съответния опит в колбата. Тогава определяме, че $M_n = 10 \text{ g} = 0,010 \text{ kg}$ и $n_{\mu} = \frac{M_n}{\mu} = \frac{0,010}{72,15} = 1,386 \cdot 10^{-4} \text{ kmol}$. Следователно обема на колбата, за наблюдаване на опит с преход в критично състояние на пентан, трябва да е

$$V = n_{\mu} (V_{\mu})_k = 1,386 \cdot 10^{-4} (0,435) = 6,029 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 60,29 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 60,3 \text{ cm}^3. \quad \text{Ако кварцовата колба има сферична форма, тогава за да има обем } 60,3 \text{ cm}^3 \text{ трябва да има радиус}$$

$$z_k = 2,43 \text{ см.}$$

ЗАДАЧА № 97 Газ, с количество вещество $n_{\mu} = 1 \text{ кмол}$ се намира в състояние с температура ($T_1 = T_k$), отговаряща на критичната, като обема му е $(V_{\mu})_1 = 3(V_{\mu})_k$ е три пъти по-голям от съответния критичен. Колко пъти критичното налягане (P_k) на газа е по-голямо от налягането (P_1), в което се намира газа?

РЕШЕНИЕ:

За да определим отношението (1) $X = P_k/P_1$ е необходимо да използваме приведеното уравнение на Ван-дер-Ваалс от вида

$$(2) \left(P_n + \frac{3}{w_n^2} \right) (3w_n - 1) = 8 \theta_n \quad \text{като}$$

$$(3) P_n = \frac{P_1}{P_k} \quad (4) w_n = \frac{(V_{\mu})_1}{(V_{\mu})_k}$$

$$(5) \theta_n = \frac{T_1}{T_k} = 1$$

Тогаво заместваме приведените характеристики (P_n , w_n , θ_n) с тяхните стойности от зависимостите (3 - 5) в (2) и получаваме, че

$$(6) \left[P_n + \frac{3}{(3)^2} \right] [3(3) - 1] = 8(1) = 8$$

$$(7) 9P_n + 3 = 8 \quad \text{или (8) } P_n = \frac{P_1}{P_k} = \frac{2}{3}$$

Тогаво, окончателно от (8) получаваме, че

$$(9) X = \frac{P_k}{P_1} = \frac{3}{2} = 1,50 \quad \text{пъти.}$$

ЗАДАЧА № При каква температура (T) се намира азотен оксид (NO), ако неговия обем (V) и налягането (P), са съответно по три пъти по-големи по стойност от стойностите на критичното състояние (V_k) и (P_k). Критичната температура на

азотния оксид е $T_k = 180^\circ\text{K}$.

РЕШЕНИЕ :

Използваме приведеното уравнение на Ван-дер-Ваалс във вида

$$(1) \left(T_n + \frac{3}{\omega_n^2} \right) (3\omega_n - 1) = 8 \theta_n \quad \text{при}$$

$$(2) T_n = \frac{p}{p_k} = 3 \quad ; (3) \omega_n = \frac{V}{V_k} = 3$$

$$(4) \theta_n = \frac{T_1}{T_k}$$

Заместваме приведените характеристики с техните числени стойности от (2+4) в (1) и получаваме, че

$$(5) \left[3 + \frac{3}{(3)^2} \right] [3(3) - 1] = 8 \theta_n$$

$$(6) \left(\frac{27+3}{9} \right) 8 = 8 \theta_n \quad \text{или (7) } \theta_n = \frac{30}{9} = 3,33$$

$$\text{Но (8) } \theta_n = \frac{T}{T_k} = 3,33 \quad \text{или (9) } T = 3,33 T_k$$

Получената зависимост (9) е общото решение за определяне на (T). Численото пресмятане от (9) дава

$$T = 3,33 (180) = 599,99 \approx 600^\circ\text{K} .$$

ГЛАВА III ФИЗИЧНИ ОСНОВИ НА ТЕРМОДИНАМИКАТА

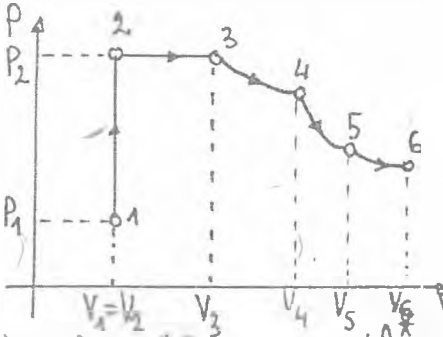
1. Видове изотермодинамични процеси

а) изохорен процес - $V = \text{const.}$

От първия принцип на термодинамиката

(1) $\Delta Q = \Delta A = \Delta U + \Delta Q^* + \Delta A^*$ където: (ΔQ) и

(ΔA) са съответно придадените отвън към термодинамичната газова система количество топлина и извършена работа; ΔU е изменението на вътрешната енергия на газовата система, а (ΔQ^*) и (ΔA^*) са количеството топлина, което отдава системата на околната среда и работата, която тази газова система извършва. Ако извършва изохор-



ния процес (1 → 2) на графика, тогава $P_2 > P_1$ и $V_1 = V_2$, като $\Delta V = V_2 - V_1 = 0$. Тогава работа (ΔA) не се извършва, понеже (2) $\Delta A = P(\Delta V) = 0$ и от I принцип

на термодинамиката следва, че (3) $\Delta Q = \Delta U$ при $\Delta A^* = \Delta Q^* = 0$. Приетото количество топлина от газа отива за изменение на неговата вътрешна

енергия. Но (4) $\Delta Q_V = C_V M \Delta T = \frac{M}{\mu} (C_V)_V \Delta T$ и тогава следва, че:

(5) $\Delta U_V = U_2 - U_1 = \Delta Q_V = \frac{M}{\mu} (C_V)_V (T_2 - T_1)$, където

(M) е масата на газа, (μ) е молната маса, $(C_V)_V$ е молната топлиемост при постоянен обем; C_V е специфичната топлиемост при постоянен обем.

б) изобарен процес - $P = \text{const.}$

По дадената графика, това е процеса (2 → 3). Тук газа извършва работа (6) $A_{2 \rightarrow 3} = P_2 (V_3 - V_2)$. От първия принцип

на термодинамиката (при наличие на идеален газ) следва, че

$$(7) \Delta Q_p = \Delta U + \Delta A^* \quad \text{или} \quad (8) \frac{M}{\mu} (C_p)_p \Delta T = \frac{M}{\mu} (C_v)_v \Delta T + p \Delta V.$$

От уравнението на Клапейрон-Менделеев (9) $pV = \frac{M}{\mu} R_r T$

$$\text{и} \quad (10) p dV = \frac{M}{\mu} R_r dT$$

Заместваме (10) в (8) и получаваме,

че

$$(11) \frac{M}{\mu} (C_p)_p dT = \frac{M}{\mu} (C_v)_v dT + \frac{M}{\mu} R_r dT \quad \text{или} \quad (12) (C_p)_p = (C_v)_v + R_r$$

Получената зависимост (12) е уравнение на Роберт Майер. Съгласно

$$(6) \text{ и } (10) \text{ за изобарен процес } (13) A_{2 \rightarrow 3} = \frac{M}{\mu} R_r (T_3 - T_2).$$

При реален газ

$$(14) U_{p,r} = \frac{M}{\mu} (U_{\mu})_{p,r} = \frac{M}{\mu} \left[(C_v)_v T - \frac{a}{V_{\mu}} \right]$$

или

$$(15) dU_{p,r} = \frac{M}{\mu} \left[(C_v)_v dT + \frac{a}{V_{\mu}^2} dV_{\mu} \right]$$

И първия принцип на термодинамиката приложен за реален газ има вида

$$(16) \frac{M}{\mu} (C_p)_p dT = \frac{M}{\mu} \left[(C_v)_v dT + \frac{a}{V_{\mu}^2} dV_{\mu} \right] + p dV_{\mu}.$$

в) изотермичен процес - $T = \text{const.}$

Това е процеса (3 \rightarrow 4) на графиката, като в случая

$$(17) dU = \frac{M}{\mu} (C_p)_p dT = 0 \quad \text{и} \quad U = \text{const.} \quad \text{тоест при изотермичен процес вътрешната енергия на газовата система не се изменя.}$$

Тогавя, съгласно първия принцип на термодинамиката

$$(18) Q_{3 \rightarrow 4} = A_{3 \rightarrow 4} = \int_{V_3}^{V_4} p dV = \int_{V_3}^{V_4} \frac{M}{\mu} \frac{R_r T}{V} dV = \frac{M}{\mu} R_r T \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right).$$

за случай на идеален газ, подчиняващ се на уравнението на Клапейрон-Менделеев (9). Но при изотермичен процес е в сила закона на Бойл-Марйот

$$(19) P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad \text{и} \quad (20) \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2} \quad \text{Заместваме (20)}$$

в (18) и получаваме, че

$$(21) Q_{3 \rightarrow 4} = A_{3 \rightarrow 4} = \frac{M}{\mu} R T \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

г) адиабатен процес - $\Delta Q = 0$

Това е процеса (4 → 5) на графиката, при който топлообмен на газа с външната среда не се осъществява. Съгласно първия принцип на термодинамиката

$$(22) \Delta Q_{4 \rightarrow 5} = \Delta U_{4 \rightarrow 5} + \Delta A_{4 \rightarrow 5}^* = 0 \quad \text{или}$$

$$(23) \Delta A_{4 \rightarrow 5}^* = -\Delta U_{4 \rightarrow 5} \quad , \text{ което показва, че}$$

при своето адиабатно разширение газа върши работа за сметка на намаление на неговата вътрешна енергия, като ($T_4 > T_5$). От

(23) следва, че

$$(24) \Delta A_{4 \rightarrow 5}^* = -\frac{M}{\mu} \int_{T_4}^{T_5} (C_{\mu})_v dT = \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_v (T_4 - T_5)$$

Но коефициента на Поасон е (γ) дефиниран чрез

$$(25) \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{(C_{\mu})_p}{(C_{\mu})_v} \quad \text{и} \quad (26) (C_{\mu})_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Заместваме (26) в (24) и получаваме, че

$$(27) \Delta A_{4 \rightarrow 5}^* = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R}{\gamma - 1} \right) (T_4 - T_5) = \frac{M}{\mu} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{T_5}{T_4} \right)$$

Уравнението на адиабатния процес дава следната връзка между основните газови характеристики.

$$(28) PV^{\gamma} = \text{const} ; (29) T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{const}; (30) TV^{\gamma-1} = \text{const}^*$$

Съществуват следните връзки между отношенията на физичните термодинамични характеристики при преход от едно начално към друго крайно състояние

$$(31) \frac{T_5}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{P_4}{P_5}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{P_5}{P_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Замествама (31) в (27) и получаваме, че

$$(32) \Delta A_{4 \rightarrow 5}^* = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r}{\gamma-1}\right) T_4 \left[1 - \left(\frac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r}{\gamma-1}\right) T_4 \left[1 - \left(\frac{P_5}{P_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

Изотермичния и адиабатният процес са екстремални процеси по бързина на реализация. Изотермичният е супер бавен, а адиабатният е супер бърз. В природата в повечето случаи се реализират междинни по бързина процеси, които се наричат политропни с уравнение (33) $PV^{\alpha} = \text{const}$, където (α) е константа на политропния процес. Следователно $1 < \alpha < \gamma$ при сравняване на (33) с $PV = \text{const}$ за изотермичен и $PV^{\gamma} = \text{const}$ за адиабатен процес.

Молната топлоемност $(C_{\mu})_{\alpha_n}$ при политропнен процес се дава със зависимостта (11)

$$(34) (C_{\mu})_{\alpha_n} = (C_{\mu})_v + \frac{\mu}{M} P \left(\frac{dV}{dT}\right); \text{ но } (35) TV^{\alpha_n-1} = \text{const}$$

От (35) чрез диференциране определяме, че (36) $\frac{dV}{dT} = -\frac{V}{(\alpha_n-1)T}$

и заместваме (36) в (34) като получаваме, че

$$(37) \quad (C_{\mu})_{\alpha_n} = (C_{\mu})_V - \frac{\mu P V}{M(\alpha_n - 1) T} = (C_{\mu})_V - \frac{1}{(\alpha_n - 1)} \frac{P V}{\frac{M}{\mu} T}$$

$$(C_{\mu})_{\alpha_n} = (C_{\mu})_V - \frac{R_r}{\alpha_n - 1}$$

Заместваме $(C_{\mu})_V$ от (26) в (37) и получаваме

$$(38) \quad (C_{\mu})_{\alpha_n} = \frac{R_r}{\alpha - 1} - \frac{R_r}{\alpha_n - 1} = \left[\frac{\alpha_n - \alpha}{(\alpha - 1)(\alpha_n - 1)} \right] R_r.$$

Получената зависимост (38) характеризира молната топлиемност на идеалния газ при политропен процес. В различните частни случаи: при $\alpha_n = 0$ (изобарен процес)

$$C_{\alpha_n} = \frac{\alpha R_r}{\alpha - 1} = \alpha (C_{\mu})_V = (C_{\mu})_P \quad \text{при } \alpha_n = 1 \text{ (изотер-$$

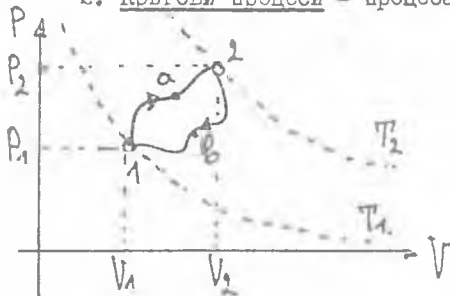
мичен процес), тогава $|C_{\alpha_n}| = \infty$; при $\alpha_n = \alpha$ (адиабатен процес), тогава $C_{\alpha_n} = 0$; при $\alpha_n = \pm \infty$ (изохорен процес), тогава $C_{\alpha_n} = \frac{R_r}{\alpha - 1} = (C_{\mu})_V$.

Извършената работа при политропни процеси (α_n) се дава както в случая с адиабатни (α). Тук $P V^{\alpha_n} = P_1 V_1^{\alpha_n} = P_2 V_2^{\alpha_n}$ (39)

$$(40) \quad \Delta A_{5 \rightarrow 6}^* = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r}{\alpha_n - 1} \right) T_5 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_6} \right)^{\alpha_n - 1} \right]$$

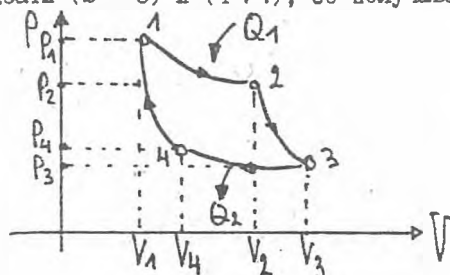
$$\Delta A_{5 \rightarrow 6}^* = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r}{\alpha_n - 1} \right) T_5 \left[1 - \left(\frac{P_6}{P_5} \right)^{\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n}} \right]$$

2. Кръгови процеси - процеса (1а 2в 1). Прилагаме първия



принцип на термодинамиката във вида (41) $\oint \delta Q = \oint \delta dU + \oint \delta A$
 $\oint_{1a2в1} \delta Q = \oint_{1a2в1} \delta dU + \oint_{1a2в1} \delta A$
 понеже (42) $\oint_{1a2в1} \delta dU = 0$.
 При цикъл на Карно, осъществен с идеален газ при

наличие на две изотерми (1 → 2) и (3 → 4), както и на две адиабати (2 → 3) и (4 → 1), се получава, че коефициента на полезно



действие (КПД) е (43) $\eta_{\text{КПД}} = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, където (T_1) е температурата на нагревателя, а (T_2) – е на хладилника.

3. Втори принцип на термодинамиката

При обратим кръгов процес сумата от приведените топлини е тъждествено равна на нула, а при необратим кръгов процес е винаги по-малка от нула (отрицателна). В обобщен вид се представя

$$(44) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta Q}{T} \right)_i \stackrel{\text{необр.}}{\leq} 0$$

Под интегралната функция е пълен диференциал и тогава следва, че (46)

$$(45) \oint_{\text{забл}} \left(\frac{\delta Q}{T} \right) \stackrel{\text{необр.}}{\leq} 0$$

като (S_E) е ентропия на термодинамичната газова система. Понеже от условието за адиабатен процес, че $\delta Q = 0$, тогава ако вземем под внимание (46) следва, че $dS_E = 0$ и $S_E = \text{const}$. Следователно всеки адиабатен процес е същевременно и изотропен.

$$(46) \left(\frac{\delta Q}{T} \right) = dS_E$$

$$(47) \oint_{\text{забл}} \left(\frac{\delta Q}{T} \right) = \oint_{\text{забл}} dS_E \stackrel{\text{необр.}}{\leq} 0$$

При обединяване на първия с втория принцип на термодинамиката следва, че

При обединяване на първия с втория принцип на термодинамиката следва, че

$$(48) dS_E = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + \delta A}{T} = \frac{dU + p dV}{T} \text{ но (49) } p = \frac{M}{\mu} R T V^{-1}$$

$$(50) \quad d(S_E)_\mu = \left[\frac{M}{\mu} (C_\mu)_V \frac{dT}{T} + \frac{M}{\mu} R_V \frac{dV}{V} \right]$$

$$(51) \quad d(S_E)_\mu = \frac{M}{\mu} \left[(C_\mu)_V \frac{dT}{T} + R_V \frac{dV}{V} \right]$$

При интегриране на (51) следва, че

$$(52) \quad (S_\mu)_2 - (S_\mu)_1 = \frac{M}{\mu} \left[(C_\mu)_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R_V \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \right]$$

Следователно (52) може да се използва за да се определи (S_E) в дадено състояние, ако знаем нейната стойност в друго състояние на термодинамичната система. Това решава третия принцип на термодинамиката, като приема, че ентропията на идеален кристал е равна на нула при температура $T = 0^\circ\text{K}$.

4. Термодинамични потенциални

а) вътрешна енергия - U .

Тя се явява функция на (S_E) и (V). При диференциране на $U = f(S_E, V)$ следва, че

$$(53) \quad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S_E} \right)_V dS_E + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S_E} dV \quad \text{но}$$

$$(54) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial S_E} \right)_V = T \quad \text{и} \quad (55) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S_E} = -P$$

и тогава за обратим процес (56) $dU = T dS_E - P dV$.

б) свободна енергия - E_{SE} .

За обратим процес от (56) при изваждане почленно в ляво и лясно на $d(T \cdot S_E)$ се получава

$$(57) \quad dU - d(T \cdot S_E) = T dS_E - P dV - d(T \cdot S_E)$$

$$(58) d(U - TS_E) = -pdV - S_E dT$$

Приемаме (59) $U - TS_E = E_{CE}$

и тогава

$$(60) dE_{CE} = -pdV - S_E dT$$

От (60) се вижда, че

$$E_{CE} = f(V, T) \quad \text{и тогава}$$

$$(61) dE_{CE} = \left(\frac{\partial E_{CE}}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial E_{CE}}{\partial T}\right)_V dT$$

При сравняване на (60) с (61) след-

ва, че

$$(62) \left(\frac{\partial E_{CE}}{\partial V}\right)_T = -p$$

$$\text{и (63) } \left(\frac{\partial E_{CE}}{\partial T}\right)_V = -S_E$$

Заместваме (63) в (59) и получаваме, че

$$(64) E_{CE} = U + \left(\frac{\partial E_{CE}}{\partial T}\right)_V T$$

- което се явява уравнение на Гибс-Хелмхолц.

в) енталпия - H.

Към двете части на (56) прибавяме диференциала $d(PV)$

и за обратим процес получаваме, че

$$(65) dU + d(PV) = Tds_E - pdV + d(PV)$$

$$(66) d(U + PV) = Tds_E + Vdp$$

Приемаме, че

$$(67) H = U + PV$$

$$\text{и (68) } dH = Tds_E + Vdp$$

Тогава

от (68) следва, че $H = f(S_E, P)$

и при диференци-

ране получаваме, че

$$(69) dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S_E}\right)_P ds_E + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{S_E} dp$$

Сравняваме (69) с

(68) и получаваме, че

$$(70) \left(\frac{\partial H}{\partial S_E} \right)_P = T \quad \text{и} \quad (71) \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S_E} = V$$

От първия принцип на термодинамиката при изобарен процес ($P = \text{const}$) следва, че (72) $\Delta Q_{1 \rightarrow 2} = U_2 - U_1 + P(V_2 - V_1) = (U_2 + PV_2) - (U_1 + PV_1) = H_2 - H_1 = \Delta H_{1 \rightarrow 2}$.

Следователно, при изобарен процес приетото количество топлина от газа отива да измени енталпията му. Тогава следва, че

$$(73) \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = \frac{\delta Q_P}{dT} = C_P \quad \text{и} \quad (74) dH = C_P dT.$$

г) термодинамичен потенциал на Гибс - Z .

От двете страни на (56) изваждаме диференциала $d(TS_E - PV)$ и получаваме, че

$$(75) dU - d(TS_E - PV) = TdS_E - PdV - d(TS_E - PV)$$

$$(76) d(U - TS_E + PV) = -S_E dT + VdP$$

Приемаме, че (77) $Z = U - TS_E + PV$

и тогава

$$(78) dZ = -S_E dT + VdP$$

изобаро-изотермичен потенциал на Гибс. Тук

Тук (Z) се явява $Z = f(T, P)$.

и при диференциране се получава, че

$$(79) dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial Z}{\partial P} \right)_T dP$$

Сравняваме (79) с (78) и получаваме

$$(80) \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P = -S_E \quad \text{и} \quad (81) \left(\frac{\partial Z}{\partial P} \right)_T = V.$$

При реализация на термодинамични процеси може да се извършва работа (A_V) при $V = \text{const}$, тогава от обобщението на пър-

вия с втория принцип на термодинамиката следва, че

$$(82) \quad T ds_E = dU + \delta A + \delta A_V = dU + p dV + \delta A_V$$

$$(83) \quad \delta A_V = -dU + T ds_E - p dV$$

При изобаро-изотермичен процес ($p = \text{const}$ и $T = \text{const}$), като от (83) следва, че

$$(84) \quad \delta A_V = -d(U - T s_E + pV) = -dZ$$

Следователно, работата която е свързана не с изменението на обема е равна на изменението на потенциала на Гибс (Z) при изобаро-изотермични процеси. Подобно на изотермичните процеси когато работата (δA), извършена от системата за увеличаване на обема δV е равна на намаляване на свободната енергия (δE_{CE}). При сравняване на (67) с (77) се получава, че

$$(85) \quad Z = H - T s_E \quad \text{или} \quad (86) \quad H = Z + T s_E$$

Следователно енталпията (H) се състои от две части, едната (Z) в изобаро-изотермичен режим може да се превръща в работа, а другата ($T ds_E$) не може да се превръща в работа и се нарича свързана енергия. Тогава термодинамичния потенциал на Гибс може да се нарича още и свободна енталпия. Заместваме в (86) зависимост (80) и получаваме, че

$$(87) \quad H = Z + T s_E = Z - T \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p$$

като и това уравнение се нарича уравнение на Гибс-Хелмхолц.

5. Химичен потенциал - μ

Това е функция на състоянието, използвана за описване на термодинамични системи с променливо число (N) частици. Под химичен потенциал на \bar{i} -компонента на хомогенна система (или фаза на хетерогенна система) се нарича частната производна от термодинамичните функции на системата (фази) спрямо числото на мо-

коэффициента на повърхностно напрежение на граничната повърхност между двете фази. Тогава

$$(98) \Delta Z = \Delta Z_{I \rightarrow II} + \Delta Z_2 = N_1 \left(\hat{\mu}_{II}^0 - \hat{\mu}_I^0 \right) + 4\pi R^2 \sigma$$

Нека да изразим (N_1) с броя на частиците (n_1) в единица обем на зародиша (99) $N_1 = n_1 V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot n_1$

където (V) е обема на зародиша. Заместваме (99) в (98) и получаваме окончателно, че

$$(100) \Delta Z = 4\pi R^2 \left[\frac{1}{3} R n_1 \left(\hat{\mu}_{II}^0 - \hat{\mu}_I^0 \right) + \sigma \right]$$

Понеже по предположение $\hat{\mu}_{II}^0 < \hat{\mu}_I^0$, тогава първия член в дясната част на (100) е отрицателен. При малки стойности на радиуса (R) на зародиша, повърхностната му енергия е по-голяма от обемната. Образуването на малък зародиш довежда до увеличаване на (Z), което е енергийно неизгодно за термодинамичната система.

От (100) се вижда, че $\Delta Z = 0$ при

$$(101) R_0 = R = \left| \frac{3\sigma}{n_1 (\hat{\mu}_{II}^0 - \hat{\mu}_I^0)} \right|$$

Следователно, при $R > R_0$, тогава $\Delta Z = 0$ и обемната енергия е по-голяма по модул от повърхностната енергия, като увеличаването на размерите на зародиша е вече енергийно изгодно. Нарастването на (R) на зародиша до критичния размер (R_0) може да стане в резултат на топлинни плътности флукутации в локални обем.

При всички фазови преходи термодинамичния потенциал $Z(T, P)$ остава непрекъснат. Обачи неговите производни могат да изпитват прекъсване на непрекъснатостта. Ако скокообразно се изменят първите производни на $Z(T, P)$, тогава превръщанията във веществената система са фазови преходи от първи род. Ако първите производни на $Z(T, P)$ остават непрекъснати, а вторите се изменят със

скок - фазовите преходи са от втори род. Понеже от

$$(80) \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P = -S_E \quad \text{и} \quad (81) \left(\frac{\partial Z}{\partial P} \right)_T = V$$

следва, че фазовите преходи от първи род са свързани със скокообразно изменение на (S_E) и (V). При фазовите преходи от втори род търпят скокообразни изменения вторите производни на $Z(T, P)$

$$(102) \frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} = - \left(\frac{\partial S_E}{\partial T} \right)_P = - \frac{C_P}{T}$$

$$(103) \frac{\partial^2 Z}{\partial T \partial P} = \frac{\partial^2 Z}{\partial P \partial T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (104) \frac{\partial^2 Z}{\partial P^2} = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

които в случая се явяват: молната топлиемост (C_P)_μ; обемния коефициент на термично разширение при $P = \text{const}$; обемната изотермична свиваемост при $T = \text{const}$. Опитните изследва-

ния показват, че при фазовите преходи от втори род са валидни следните условия: $\Delta S_E = (S_E)_2 - (S_E)_1 = 0$; $\Delta V = V_2 - V_1 = 0$ и $\Delta Z = Z_2 - Z_1 = 0$, тоест те имат непрекъснат характер за фазовите преходи от втори род са в сила уравненията на Еренфест:

$$(105) \Delta C_P = (C_P)_2 - (C_P)_1 = T \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \cdot \frac{dP}{dT}$$

$$(106) \Delta C_V = (C_V)_2 - (C_V)_1 = -T \Delta \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \cdot \frac{dV}{dT}$$

$$(107) \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial V_2}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial V_1}{\partial T} \right)_P = \Delta \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \cdot \frac{dV}{dP}$$

$$(108) \quad \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \cdot \frac{dP}{dT}$$

В уравненията на Еренфест с (Δ) се обозначават всички физически величини, които търпят скок при фазовите преходи от втори род: молните топлоемности (C_p) и (C_v) ; изотермичния коефициент на свиваемост $\left[-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \right]$; коефициента на топлинно разширение $\left[\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right]$; термичния коефициент на налягането $\left[\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \right]$

7. Статистически смисъл на втория принцип на термодинамиката

Ентропията (S_E) на една термодинамична система се свързва с нейната термодинамична вероятност (W_T) по формулата на Болцман

$$(109) \quad S_E = f(W_T) = K_B \ln W_T \quad \text{където } K_B =$$

$= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ е константата на Болцман. Под термодинамична вероятност (W_T) на едно макросъстояние на веществената система се разбира произведението от вероятността на всяко микросъстояние, с помощта на което се реализира даденото макросъстояние, по броя на наличните микросъстояния. Нека една термодинамична система е в равновесно състояние с ентропията $(S_E)_{\max} = (S_E)_m$. Ако се реализира флукуация $\Delta S_E = [(S_E)_1 - (S_E)_m] < 0$ с намаляване на ентропията, тогава

$$(110) \quad \ln(W_T)_1 = \frac{(S_E)_1}{K_B} = \frac{(S_E)_m - |\Delta S_E|}{K_B} \quad \text{или}$$

$$(111) \quad (W_T)_1 = \exp \left[\frac{(S_E)_m - |\Delta S_E|}{K_B} \right] = \exp \left[\frac{(S_E)_m}{K_B} \right] \exp \left[-\frac{|\Delta S_E|}{K_B} \right]$$

Следователно, колкото по-голяма е флукуацията на ентропията

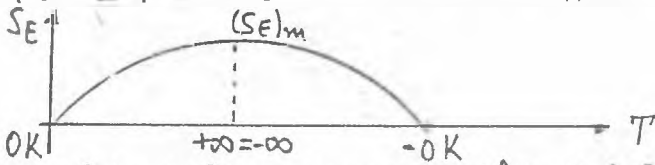
(ΔS_E), толкова е по-малка термодинамичната вероятност за реализация на такава флуктуация.

8. Веществени системи с отрицателни абсолютни температури

Това са атомни системи с прекъснат енергиен спектър на разпределение на атомите (Болцманов), на които броят на атомите (N) е много пъти по-голям от ограничения брой (n) на енергетичните нива.

$$(112) N_i = N_0 \exp\left[-\frac{(E_i - E_0)}{k_B T}\right] \quad \text{или} \quad (113) T = -\frac{(E_i - E_0)}{k_B \ln(N_i/N_0)}$$

От (113) веднага се вижда, че може $T < 0$ само ако $N_i > N_0$, настъпила е инверсия в населеността с атоми на съответните енергийни нива. На по-високо енергийно ниво има по-голям брой частици. Такива веществени системи са лазерите и мазерите. От (113) се вижда, че когато $N_i < N_0$ и $N_i \rightarrow N_0$, тогава $T \rightarrow (+\infty)$ със стойности $T > 0$. Обратно, когато $N_i > N_0$ и $N_i \rightarrow N_0$, тогава $T \rightarrow (+\infty)$ със стойности $T < 0$. Следователно, $T = +\infty = T = -\infty$ и абсолютната скала добива вида

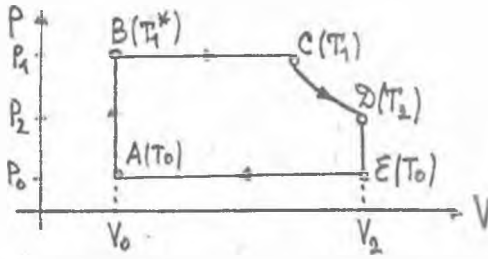


като при (0°K) и (-0°K) ентропията е $S_E(0^{\circ}\text{K}) = S_E(-0^{\circ}\text{K}) = 0$, а при $T = \pm \infty^{\circ}\text{K}$ тогава $S_E(\pm \infty^{\circ}\text{K}) = (S_E)_{\text{max}} = (S_E)_m$ е максимална.

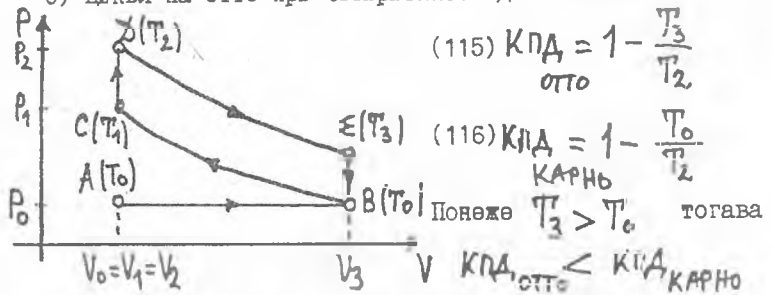
9. Технически цикли.

а) Цикъл на Ренке при идеална парна машина

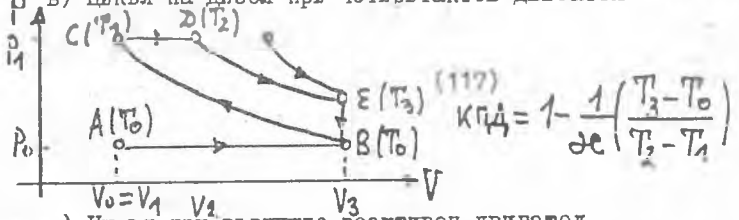
$$(114) \text{КПД} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_1^*} \right)$$



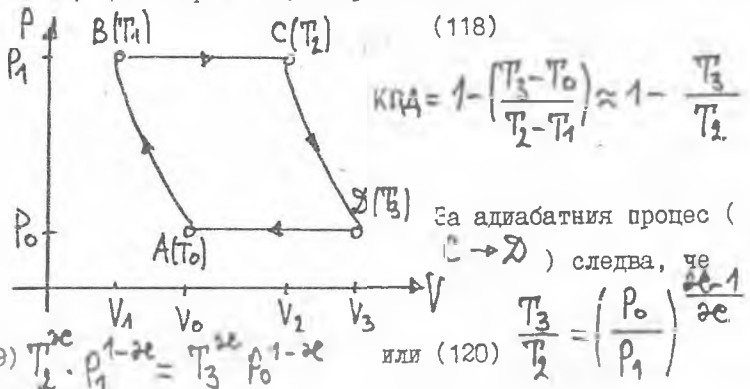
б) Цикъл на Отто при четиритактов двигател



в) Цикъл на Дизел при четиритактов двигател



г) Цикъл при въздушно-реактивен двигател



Също така при

$$(121) T_2^{2\epsilon-1} V_2 = T_3^{2\epsilon-1} V_3 \quad \text{или} \quad (122) \frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{2\epsilon-1}$$

заместваме (120) и (122) в (118) и получаваме, че

$$(123) \text{КПД} \approx \left[1 - \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{2\epsilon-1}{2\epsilon}} \right] \approx \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{2\epsilon-1} \right]$$

Но при условие, че $K_1 = \frac{P_1}{P_0}$ (124) и $K_2 = \frac{V_3}{V_2}$ (125)

следва от (123), че

$$(126) \text{КПД} \approx \left[1 - \frac{1}{K_1^{\frac{2\epsilon-1}{2\epsilon}}} \right] \approx \left[1 - \frac{1}{K_2^{2\epsilon-1}} \right]$$

Тук (K_1) показва колко пъти се увеличава налягането на въздуха от навлизането в двигателя (P_0) до пълната му компресия (P_1), а (K_2) показва колко пъти нараства обема на газовете, получени в горивната камера, от момента на получаването им (спиране на процеса горене) до изтичането им през изходното сопло на двигателя.

ЗАДАЧА № 99 При температура $T_1 = 300^\circ\text{K}$ и налягане $P_1 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ кислород с маса $M = 5 \text{ kg}$ се свива адиабатно до налягане (P_2). След това газът се разширява изотермично. Да се определят параметрите на газа след разширението, ако увеличението на вътрешната енергия при адиабатния процес $\Delta U = 120 \text{ kJ}$

е равно на количеството топлина придадено на газа при изотермичния процес.

РЕШЕНИЕ :

Можем в началото да определим броя (n_{μ}) на kmol° - овете газ взет в случая даден в условието на задачата

$$(1) n_{\mu} = \frac{M}{\mu} = \frac{5}{32} = 0,156 \text{ kmol}$$

Тук молната маса на кислорода

е $\mu(\text{O}_2) = 32 \text{ kg/kmol}$. Съгласно първия принцип на термодинамиката

$$(2) \Delta Q_{\mu} + \Delta A_{\mu} = \Delta U_{\mu} + \Delta A_{\mu}^* + \Delta Q_{\mu}^* \quad \text{но в}$$

случая е осъществено адиабатно свиване на газа, като $\Delta Q_{\mu} = \Delta A_{\mu}^* = \Delta Q_{\mu}^* = 0$ и тогава

$$(3) \Delta A_{\mu} = \Delta U_{\mu} \quad , \text{ тоест работата се върши от външните сили и тя довежда до увеличаване на}$$

вътрешната енергия на газа. Написваме зависимостта за ΔU_{μ} , която е от вида

$$(4) \Delta U_{\mu} = (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) \quad \text{Но в разглеждания случай}$$

$n_{\mu} = 0,156 \text{ kmol}$ и тогава

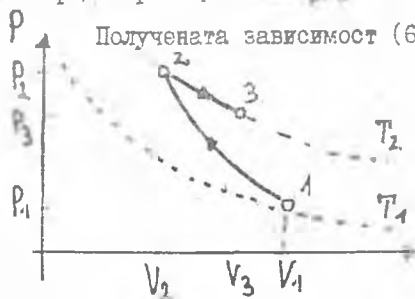
$$(5) \Delta U = n_{\mu} (\Delta U_{\mu}) = n_{\mu} (C_{\mu})_V (T_2 - T_1)$$

От (5) определяме крайната температура (T_2) и получаваме, че:

$$(6) T_2 = T_1 + \frac{\Delta U}{n_{\mu} (C_V)_{\mu}} = T_1 + \frac{\Delta U}{n_{\mu} \mu C_V}$$

Тук молната топлиемост

$$(7) (C_{\mu})_V = \mu C_V \quad , \text{ където специфичната топлиемост на кислорода при } V = \text{const} \text{ е } C_V(\text{O}_2) = 650 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$$



$$\text{че } T_2 = 336,98^{\circ}\text{K} \approx 337^{\circ}\text{K}.$$

Адиабатното свиване е осъществено чрез процеса (1 \rightarrow 2), като $\Delta T = T_2 - T_1 = 337 - 300 = 37^{\circ}\text{K}$. Приемаме газа

за идеален и използваме уравнението на Ван-дер-Ваалс, можем да определим началния обем (V_1)

$$(7) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_1 = \eta_{\mu} R_r T_1 \quad \text{или (8) } V_1 = \frac{\eta_{\mu} R_r T_1}{P_1}$$

Численото пресмятане от (8) дава следния резултат $V_1 = 2,594 \text{ m}^3$.
За да определим обема (V_2) в крайното състояние използваме уравнението на адиабатата

$$(8) T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} \quad \text{или (9) } V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

Кислородът може да се разгледа като двуатомен газ с $\kappa = 1,40$.
От (9) определяме, че $V_2 = 1,938 \text{ m}^3$.

При изотермичното разширение газа получава количество топлина $\Delta Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = \Delta U$ съгласно условието на задачата и това количество топлина се изразходва за извършване на работа $\Delta A_{2 \rightarrow 3}$ тогава

$$(10) \Delta U = \Delta A_{2 \rightarrow 3} = \eta_{\mu} R_r T_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) \quad \text{и следва, че}$$

$$(11) V_3 = V_2 \exp \left(\frac{\Delta U}{\eta_{\mu} R_r T_2} \right) \quad \text{Численото пресмятане}$$

от (11) дава следния резултат $V_3 = 2,551 \text{ m}^3$. Чрез прилагането на уравнението на Клапейрон-Менделеев определяме, че

$$(12) P_3 V_3 = \eta_{\mu} R_r T_2 \quad \text{или (13) } P_3 = \frac{\eta_{\mu} R_r T_2}{V_3}$$

Числената стойност от (13) за (P_3) е от вида $P_3 = 1,7136 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. По този начин намерени са стойностите на физичните харак-

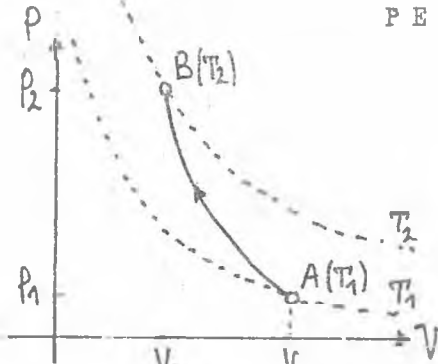
теристики в крайното състояние ($V_3, P_3, T_3 = T_2$). От
 тук се вижда, че $V_1 = 2,594 \text{ m}^3 > V_3 = 2,551 \text{ m}^3$. Нека допъл-
 нително да определим P_2 като използваме зависимостите

$$(14) P_2 V_2 = n \mu R T_2 \quad \text{или} \quad (15) P_2 = \frac{n \mu R T_2}{V_2}$$

От (15) получаваме при пресмятането, че $P_2 = 2,256 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.
 Както и трябва да се очаква $P_1 < P_2 < P_3$.

ЗАДАЧА № 100 Азот с маса $M = 8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ се намира при
 температура $T_1 = 280^\circ \text{K}$ и се свива адиабатно, така че обемът
 му намалява $n = 2,85$ пъти. Да се определят крайната температу-
 ра (T_2) на газа и извършената работа $A_{1 \rightarrow 2}$ за неговото свиване.

РЕШЕНИЕ:



От условието на задачата след-
 ва, че (1) $n = \frac{V_1}{V_2} = 2,85$.
 За да определим температурата
 (T_2) в крайното състояние
 на адиабатния процес ($A \rightarrow B$)
 прилагаме уравнението на ади-
 абатата във вида

$$(2) T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{или} \quad (3) T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

Заместваме (1) в (3) и получаваме окончателния вид на общото ре-
 шение на задачата за определяне на (T_2) (4) $T_2 = T_1 (n)^{\gamma-1}$.

Приемаме газа азот (N_2) за двуатомен с коефициент на Поасон
 $\gamma = 1,40$ и от (4) определяме, че $T_2 = 280 (2,85)^{1,40-1} =$
 $= 425,69^\circ \text{K} \approx 426^\circ \text{K}$.

Съгласно първия принцип на термодинамиката

$$(5) \Delta Q = -\Delta A + \Delta U + \Delta A^* + \Delta Q^* \quad \text{но}$$

$$\Delta Q = \Delta A^* = \Delta Q^* = 0 \quad \text{и тогава (6) } \Delta A = \Delta U.$$

Следователно извършената работа от външните сили отива да увеличи вътрешната енергия на газа

$$(7) \Delta A_{1 \rightarrow 2} = \Delta A = \eta_{\mu} (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) = \eta_{\mu} \left(\frac{R_{\Gamma}}{\gamma - 1} \right) (T_2 - T_1).$$

Заместваме (4) в (7) и получаваме окончателно общата решение на задачата за определяне на работата $\Delta A_{1 \rightarrow 2}$ при адиабатното свиване на газа

$$(8) \Delta A_{1 \rightarrow 2} = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_{\Gamma}}{\gamma - 1} \right) [T_1 (\eta)^{\gamma - 1} - T_1] = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_{\Gamma} T_1}{\gamma - 1} \right) [(\eta)^{\gamma - 1} - 1].$$

Тук използваме, че (9) $\eta_{\mu} = \frac{M}{\mu} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{28} = 2,857 \cdot 10^{-4} \text{ kmol}$

при $\mu(N_2) = 28 \text{ kg/kmol}$. Численото пресмятане на $\Delta A_{1 \rightarrow 2}$ от (8) дава следния резултат ($\Delta A_{1 \rightarrow 2}$) = 865,27 J \approx 865 J.

Допълнително, да определим работата, извършена при адиабатното свиване на газа, отнесена за един от неговите молекули. Следователно, трябва да определим броя (N) на молекулите на газа. Тогава следва, че

$$(10) N = N_A \cdot \eta_{\mu} = N_A \left(\frac{M}{\mu} \right) = 6,023 \cdot 10^{26} \cdot 2,857 \cdot 10^{-4} = 17,208 \cdot 10^{22} = 1,7208 \cdot 10^{23} \text{ молекули, като}$$

$$(11) \frac{\Delta A_{1 \rightarrow 2}}{N} = \frac{865}{1,72 \cdot 10^{23}} = 5,027 \cdot 10^{-21} \text{ J/молекула} = \\ = \frac{5,027 \cdot 10^{-21}}{1,60 \cdot 10^{-19}} \text{ eV/молекула} = 0,0314 \text{ eV/молекула}.$$

При температура $T_1 = 280^\circ\text{K}$, средната кинетична енергия на една молекула е

$$(12) \bar{\epsilon}_k(T_1) = \frac{5}{2} k_B T_1 = 9,66 \cdot 10^{-21} \text{ J.}$$

А при температура $T_2 = 426^\circ\text{K}$, тогава

$$(13) \bar{\epsilon}_k(T_2) = \frac{5}{2} k_B T_2 = 14,697 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

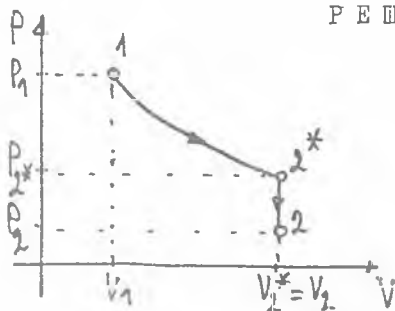
Тогава

$$(14) \Delta \epsilon_k = \bar{\epsilon}_k(T_2) - \bar{\epsilon}_k(T_1) = (14,697 - 9,66) \cdot 10^{-21} = 5,037 \cdot 10^{-21} \text{ J.}$$

И действително тази стойност ($\Delta \epsilon_k$) е приблизително равна на определената ($\Delta A_{1 \rightarrow 2} / N$) = $5,027 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

ЗАДАЧА № 101 Идеален газ, с коефициент на Поасон $\gamma = 1,40$, заема при налягане $P_1 = 3,8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ обем $V_1 = 3,4$ литра. Следва разширение на газа до обем $V_2 = 5,2$ литра, като налягането пада до $P_2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Целият процес протича първоначално адиабатно, а след това изохорно. Определете работата на силите на налягането на газа, изменението на вътрешната му енергия и количеството погълната топлина при осъществяване на целия процес.

РЕШЕНИЕ :



На координатна равнина (P, V) представяме прехода от състояние (1) до състояние (2) на газа, чрез последователното реализиране на адиабатния процес ($1 \rightarrow 2^*$) и изохорния - ($2^* \rightarrow 2$).

Използваме уравнението на адиабатата в параметри (P, V)

$$(1) P V^{\gamma} = \text{const} \quad \text{или} \quad (2) P_1 V_1^{\gamma} = P_2^* V_2^{*\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

Тук се извършва изохорен процес ($2^* \rightarrow 2$) и тогава $V_2^* = V_2$. От (2) определяме

$$(3) P_2^* = \frac{P_1 V_1^{2e}}{V_2^{2e}} = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{2e}$$

Получената зависимост (3) е общо решение на

задачата за определяне на (P_2^*). Численото пресмятане от (3) дава следния резултат $P_2^* = 2,096 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, при отчитане, че $V_1 = 3,4 \text{ литра} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ и $V_2 = 5,2 \text{ литра} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Получената стойност на (P_2^*) дава основание за проверка, че $P_2^* > P_2$. Следователно, следващия изохорен процес ($2^* \rightarrow 2$) е процес на намаляване на налягането при постоянен обем ($V_2^* = V_2$).

а) За да определим работата ($A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2}$) на силите на налягането на газа, следва, да приемем че

$$(4) A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = A_{1 \rightarrow 2^*} + A_{2^* \rightarrow 2} \quad \text{но (5) } A_{2^* \rightarrow 2} = 0$$

Работата, която газа извършва при своето разширение от ($1 \rightarrow 2^*$) е за сметка на намаляване на неговата вътрешна енергия. Това следва от първия принцип на термодинамиката

$$(5) \Delta Q_{1 \rightarrow 2^*} + \Delta A_{1 \rightarrow 2^*} = \Delta U_{1 \rightarrow 2^*} + \Delta A_{1 \rightarrow 2^*}^* + \Delta Q_{1 \rightarrow 2^*}^*$$

Но в разглеждания случай (6) $\Delta Q_{1 \rightarrow 2^*} = \Delta A_{1 \rightarrow 2^*} = \Delta Q_{1 \rightarrow 2^*}^* = 0$ понеже процеса е адиабатен. Следователно:

$$(7) A_{1 \rightarrow 2^*} = A_{1 \rightarrow 2^*}^* = \Delta A_{1 \rightarrow 2^*}^* = -\Delta U_{1 \rightarrow 2^*} = -\frac{M}{\mu} (C_V)_\mu (T_2^* - T_1)$$

Но за идеален газ (8) $(C_\mu)_V = \frac{i}{2} R$ и тогава

$$(9) A_{1 \rightarrow 2^*} = -\frac{i}{2} R \left(\frac{M}{\mu} \right) (T_2^* - T_1)$$

За осъществяване на адиабатния преход от

(1 \rightarrow 2^{*}) прилагаме уравнението за състоянието на идеалния газ на Клапейрон-Менделеев

$$(10) \quad P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_1 \quad \text{и} \quad (11) \quad P_2^* V_2^* = \frac{M}{\mu} R_r T_2^*$$

Изваждаме (10) от (11) и получаваме, че

$$(12) \quad \frac{M}{\mu} R_r (T_2^* - T_1) = P_2^* V_2^* - P_1 V_1 = P_2^* V_2 - P_1 V_1$$

Заместваме (12) в (9) и получаваме, че

$$(13) \quad A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = -\frac{i}{2} (P_2^* V_2 - P_1 V_1) \quad \text{В (13) заместваме } (P_2^*)$$

от (3) и получаваме, че

$$(14) \quad A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = -\frac{i}{2} [P_1 V_2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma e} - P_1 V_1] = -\frac{i P_1}{2} \left[V_2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma e} - V_1 \right]$$

Понеже газа има $\gamma e = 1,40$ и (15) $\gamma e = \frac{i+2}{2}$, следва, че $i = 5$, тоест газа притежава $i = 5$ степени на свобода - напълно са развити двете мода на хаотичното топлинно движение на молекулите му - постъпателно и въртливо. Зависимост (14) се явява общо решение на задачата за определяне на ($A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2}$). Численото пресмятане от (14) дава следния резултат $A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = +5,048 \cdot 10^2 \text{ J} = +504,8 \text{ J} \approx 505 \text{ J}$.

б) При осъществяването на възхорния процес ($2^* \rightarrow 2$) поради факта, че $P_2^* > P_2$ се осъществява намаление на температурата от (T_2^*) до (T_2), като $T_2^* > T_2$. Това става в резултат на отдаване на количество топлина ($\Delta Q_{2^* \rightarrow 2}$) от газа на околната среда. Тогава следва, че

$$(15) \quad \Delta Q_{2^* \rightarrow 2} = -\frac{M}{\mu} (C_v)_r (T_2 - T_2^*) = -\Delta U_{2^* \rightarrow 2}$$

Понеже процесът ($2^* \rightarrow 2$) е изохорен, тогава следва, че

$$(16) \frac{P_2^*}{P_2} = \frac{T_2^*}{T_2} \quad \text{и} \quad (17) P_2^* \cdot V_2^* = \frac{M}{\mu} R T_2^*$$

$$(18) P_2 V_2 = \frac{M}{\mu} R T_2$$

Чрез почленно изваждане на (17)
от (18) получаваме, че

$$(19) T_2 - T_2^* = (P_2 V_2 - P_2^* V_2^*) \frac{\mu}{M R}$$

Заместваме (19)
в (15) и получа-

ваме, че

$$(20) Q_{2^* \rightarrow 2} = - \frac{M}{\mu} (C_V)_{\mu} \left(\frac{\mu}{M R} \right) V_2 (P_2 - P_2^*) = - \frac{(C_V)_{\mu}}{R} V_2 (P_2 - P_2^*)$$

Заместваме (8) в (26) и получаваме, че

$$(21) Q_{2^* \rightarrow 2} = \frac{i}{2} V_2 (P_2^* - P_2)$$

Получената зависимост
(21) е общо решение за

определяне на $Q_{2^* \rightarrow 2}$. Численото пресмятане от (21) дава следния
резултат $Q_{2^* \rightarrow 2} = 1,4079 \cdot 10^3 \text{ J} = 1407,9 \text{ J} \approx 1408 \text{ J}$.

в) Прилагаме първия принцип на термодинамиката за пълния
процес ($1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2$) и получаваме, че

$$(22) \Delta Q_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} + \Delta Q_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2}. \text{ Но}$$

$$(23) \Delta Q_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = \Delta A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = 0$$

Тогава окончателно полу-
чаваме от (22) при отчи-

тане на (23), че

$$(24) \Delta U_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = - (\Delta Q_{2^* \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2^*}) =$$

$$= - \left\{ \frac{i}{2} V_2 (P_2^* - P_2) + \frac{i}{2} P_1 \left[V_1 - V_2 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} \right] \right\}.$$

Заместваме (3) в (24) и получаваме

$$(25) \Delta U_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = - \frac{i}{2} \left\{ V_2 \left[P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} - P_1 \right] + P_1 \left[V_1 - V_2 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} \right] \right\} =$$

$$= - \frac{i P_1}{2} \left\{ V_2 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} - 1 \right] + \left[V_1 - V_2 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} \right] \right\}.$$

Получената зависимост (25) се явява общо решение на задачата за определяне на $\Delta U_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2}$. Численото пресмятане за улеснение ще направим от (24) при отчитане на (21) и (14)

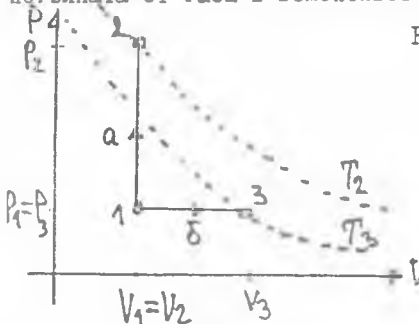
$$(26) \Delta U_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = - (\Delta Q_{2^* \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2^*}) = - (1408 + 505) \text{ J} = -1913 \text{ J}.$$

С това задачата е напълно решена, като са определени стойностите на: $(\Delta A_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2} = \Delta A_{1 \rightarrow 2^*})$; $\Delta Q_{2^* \rightarrow 2}$ и $\Delta U_{1 \rightarrow 2^* \rightarrow 2}$.

ЗАДАЧА № 102 Въздух, заеман при температура $t_1 = 27^\circ\text{C}$ и налягане $P_1 = 202,65 \text{ kPa}$ обем $V_1 = 120$ литра се загрева:

- 1) изохорно, при което налягането нараства с $\Delta P = 56,74 \text{ kPa}$;
- 2) изобарно, при което обема се увеличава до $V_3 = 150$ литра.

Определете: масата (M) на газа; количеството топлина (ΔQ), погълната от газа и изменението на вътрешната енергия (ΔU).



РЕШЕНИЕ :

Първо представете числените стойности на всички дадени физични величини в условието на задачата в системата СИ: $P_1 = 2,0265 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 $T_1 = t_1 + 273 = 27 + 273 = 300^\circ \text{ K}$; $P_2 = P_1 + \Delta P$

$= (202,65 + 56,74) \cdot 10^3 \text{ Pa} = 2,5939 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $V_1 = 120 \text{ литра} = 0,120 \text{ m}^3$; $V_2 = 150 \text{ литра} = 0,150 \text{ m}^3$. Разглеждаме въздуха като идеален газ с молна маса (ефективна) $\mu \approx 29 \text{ kg/kmol}$.

а) При осъществяване на изохорно загряване се осъществява увеличаване на температурата от (T_1) до (T_2), което също довежда до увеличаване на налягането от (P_1) до (P_2), като (P_2) $>$ (P_1) . Това следва от основното уравнение на кинетичната теория на газовете (1) $P_1 = n_01 k_B T_1$ и (2) $P_2 = n_02 k_B T_2$.

Но в случая на изохорен процес $V_1 = V_2$ и тогава $n_01 = n_02$ - това е броя на молекулите в единица обем. Тогава ако $T_1 < T_2$ веднага следва, че $P_1 < P_2$.

Написваме основното уравнение за състоянието на идеалния газ в началното състояние (P_1, V_1) .

$$(3) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1 \quad \text{и тогава (4) } M = \frac{\mu P_1 V_1}{R T_1}$$

Получената зависимост (4) е общото решение на задачата за намиране на масата (M) на газа. Численото пресмятане от (4) дава следния резултат $M = 2,827 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 2,827 \text{ g}$ - или броя на молвете газ е (5) $n_{\text{mol}} = \frac{M}{\mu} = \frac{2,827 \cdot 10^{-3}}{29} = 9,748 \cdot 10^{-5} \text{ kmol}$.

Прилагаме първия закон на термодинамиката за изохорния процес ($1 \rightarrow 2$) на загряване на газа.

$$(6) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = -\Delta A_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2}^* + \Delta Q_{1 \rightarrow 2}^*$$

Но при изохорен процес $\Delta A_{1 \rightarrow 2}^* = 0$. Освен това и $\Delta A_{1 \rightarrow 2} = 0$, като от (6) следва, че $\Delta Q_{1 \rightarrow 2}^* = 0$,

$$(7) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = M c_v (T_2 - T_1)$$

Прилагаме отново уравнението за състоянието на идеалния газ за началното и крайното състояние на процеса (1 → 2)

$$(8) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1 \quad \text{и} \quad (9) P_2 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_2$$

При почленно делене на (8) и (9) се получава, че (10) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$
и (11) $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$.

Получената зависимост (11) е общо решение на задачата за определяне на (T_2), като численото пресмятане дава следния резултат $T_2 = 384^\circ\text{K}$. Заместваме (11) в (7) и получаваме

$$(12) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = M C_V \left(\frac{T_2 P_2}{P_1} - T_1 \right) = M C_V T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$$

Тук $C_V = 730 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ е специфичната топлиемност на въздуха при постоянно налягане. Получената зависимост (12) е общо решение на задачата за определяне на $\Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 173,35 \text{ J}$.

б) При изобарно разширение се осъществява процеса (1 → 3) като $P_1 = P_3$ и $V_3 > V_1$. Прилагаме първия принцип на термодинамиката.

$$(13) \Delta Q_{1 \rightarrow 3} = -\Delta A_{1 \rightarrow 3} + \Delta U_{1 \rightarrow 3} + \Delta A_{1 \rightarrow 3}^* + \Delta Q_{1 \rightarrow 3}^*$$

В разглежания случай $\Delta A_{1 \rightarrow 3} = \Delta Q_{1 \rightarrow 3}^* = 0$ и тогава от (13) се получава, че

$$(14) \Delta Q_{1 \rightarrow 3} = \Delta U_{1 \rightarrow 3} + \Delta A_{1 \rightarrow 3} = M C_V (T_3 - T_1) + P_1 (V_3 - V_1)$$

Прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за началното и крайното състояние на газа при осъществяване на изобарния процес (1 → 3).

$$(15) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1$$

$$(16) P_1 V_3 = \frac{M}{\mu} R T_3$$

Делим почленно (15) и (16) и получаваме, че

$$(17) \frac{V_1}{V_3} = \frac{T_1}{T_3} \quad \text{или (18) } T_3 = T_1 \left(\frac{V_3}{V_1} \right).$$

От (18) определяме, че $T_3 = 375^\circ\text{K}$, което показва, че $T_3 < T_2$ при сравняването им. Заместваме (18) в (14) и получаваме, че

$$(19) \Delta Q_{1 \rightarrow 3} = M c_v \left(\frac{V_3}{V_1} T_1 - T_1 \right) + P_1 (V_3 - V_1)$$

$$(20) \Delta Q_{1 \rightarrow 3} = M c_v T_1 \left(\frac{V_3}{V_1} - 1 \right) + P_1 (V_3 - V_1)$$

$$(21) \Delta Q_{1 \rightarrow 3} = (V_3 - V_1) \left[\frac{M c_v T_1}{V_1} + P_1 \right] = \left(\frac{V_3}{V_1} - 1 \right) (M c_v T_1 + P_1 V_1).$$

Получената зависимост (21) се явява общо решение за $(\Delta Q_{1 \rightarrow 3})$, а общите решения за $\Delta U_{1 \rightarrow 3}$ и $\Delta A_{1 \rightarrow 3}$ са от вида

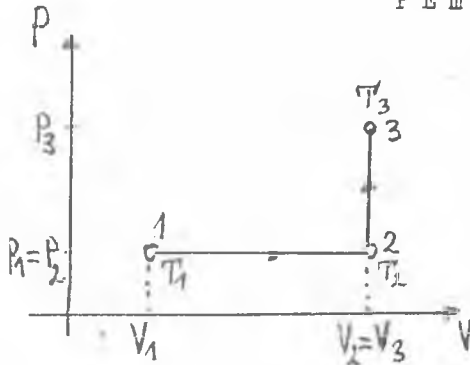
$$(22) \Delta U_{1 \rightarrow 3} = \frac{M c_v T_1}{V_1} (V_3 - V_1) \quad \text{и} \quad (23) \Delta A_{1 \rightarrow 3} = P_1 (V_3 - V_1).$$

Числените пресмятания от (21 + 23) дават следния резултат:

$$\Delta U_{1 \rightarrow 3} = 154,78 \text{ J}; \quad \Delta A_{1 \rightarrow 3} = 6079,5 \text{ J} \quad \text{и} \quad \Delta Q_{1 \rightarrow 3} = 6234,28 \text{ J}.$$

ЗАДАЧА № 103 Кислород (O_2) заема обем $V_1 = 350$ литра и се намира при налягане $P_1 = 0,25 \text{ MPa}$. Газът се нагрява отначало при постоянно налягане ($P_1 = P_2$) до обем $V_2 = 620$ литра, а след това при постоянен обем ($V_2 = V_3$) до налягане $P_3 = 0,40 \text{ MPa}$. Да се определи изменението на вътрешната енергия на газа ($\Delta U_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}$), количеството получена от него топлина ($\Delta Q_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}$) и извършената от газа работа ($\Delta A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}$).

РЕШЕНИЕ:



Първо превръщаме числените стойности на дадените физични величини със съответните мерни единици за система СИ:

$$V_1 = 350 \text{ литра} = 0,350 \text{ м}^3;$$

$$V_2 = 620 \text{ литра} = 0,620 \text{ м}^3;$$

$$P_1 = 0,25 \text{ МПа} = 2,50 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$P_3 = 0,40 \text{ МПа} = 4,0 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

а) При осъществяване на изобарния процес (1 → 2) обема нараства от (V_1) до (V_2) при $P_1 = P_2 = \text{const}$. Прилагаме първия принцип на термодинамиката:

$$(1) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2}^* + \Delta Q_{1 \rightarrow 2}^*$$

Но в случая

$$(2) \Delta A_{1 \rightarrow 2} = \Delta Q_{1 \rightarrow 2}^* = 0$$

и тогава от (1) следва

$$\text{че } (3) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2}^*$$

Прилагаме зависимостите:

$$(4) \Delta U_{1 \rightarrow 2} = M c_v (T_2 - T_1) \quad \text{и} \quad (5) \Delta A_{1 \rightarrow 2}^* = P_1 (V_2 - V_1)$$

Зависимост (5) се явява общо решение на задачата за определяне на $\Delta A_{1 \rightarrow 2}^* = 6,75 \cdot 10^4 \text{ J} = 67,5 \text{ kJ}$. Специфичната топлиемност $c_v(O_2) = 650 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ и за да определим ($\Delta U_{1 \rightarrow 2}$) от (4)

прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ при началното състояние (1) и крайното (2)

$$(6) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_1 \quad \text{и} \quad (7) P_1 V_2 = \frac{M}{\mu} R_r T_2$$

От (7) и (8) определяме, че

$$(9) T_2 - T_1 = \frac{\mu}{M R_r} (P_1 V_2 - P_1 V_1) = \frac{\mu P_1}{M R_r} (V_2 - V_1)$$

Заместваме (9) в (4) и получаваме, че

$$(10) \Delta U_{1 \rightarrow 2} = M C_V \frac{\mu P_1}{M R_r} (V_2 - V_1) = \frac{C_V \mu P_1}{R_r} (V_2 - V_1)$$

Получената зависимост (10) е общо решение на задачата за определяне на $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 16,888 \cdot 10^4 \text{ J} = 168,9 \text{ kJ}$.

Заместваме (5) и (10) в (3) и получаваме, че

$$(11) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{C_V \mu P_1}{R_r} (V_2 - V_1) + P_1 (V_2 - V_1) = P_1 (V_2 - V_1) \left(\frac{C_V \mu}{R_r} + 1 \right)$$

Получената зависимост (11) е общо решение на задачата за определяне на $\Delta Q_{1 \rightarrow 2} = (16,89 + 6,75) \cdot 10^4 \text{ J} = 23,64 \cdot 10^4 \text{ J} = 236,4 \text{ kJ}$.

б) При осъществяване на изохорния процес (2 \rightarrow 3) поради загряване се увеличава температурата от (T_2) до (T_3) и налягането от ($P_1 = P_2$) до (P_3). Прилагаме първия принцип на термодинамиката

$$(12) \Delta Q_{2 \rightarrow 3} + \Delta A_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta A_{2 \rightarrow 3}^* + \Delta Q_{2 \rightarrow 3}^* \quad \text{Тук}$$

$$(13) \Delta A_{2 \rightarrow 3} = \Delta A_{2 \rightarrow 3}^* = \Delta Q_{2 \rightarrow 3}^* = 0 \text{ и тогава от (12) следва, че (14) } \Delta Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = M C_V (T_3 - T_2).$$

Отново прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за началното (2) и крайното състояние (3) на изохорния процес (2 \rightarrow 3).

$$(15) P_1 V_2 = \frac{M}{\mu} R_r T_2$$

$$\text{и } (16) P_3 V_2 = \frac{M}{\mu} R_r T_3$$

От (16) изваждаме (15) и получаваме, че

$$(17) T_3 - T_2 = \frac{\mu V_2}{M R_r} (P_3 - P_1)$$

Заместваме (17) в (14) и

тогава се получава, че

$$(18) \Delta Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = M C_v \frac{\mu V_2}{M R_r} (P_3 - P_1) = \frac{C_v \mu V_2}{R_r} (P_3 - P_1).$$

Получената зависимост (18) е общо решение на задачата за определяне на $\Delta Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 23,264 \cdot 10^4 \text{ J} = 232,64 \text{ kJ}$.

За целия процес ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$) се получава, че

$$(19) \Delta Q = \Delta Q_{1 \rightarrow 2} + \Delta Q_{2 \rightarrow 3} = (23,64 + 23,26) \cdot 10^4 = 4,65 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

$$(20) \Delta U = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} = (16,89 + 23,26) \cdot 10^4 = 4,015 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

$$(21) \Delta A = \Delta A_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{2 \rightarrow 3} = \Delta A_{1 \rightarrow 2} = 6,75 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

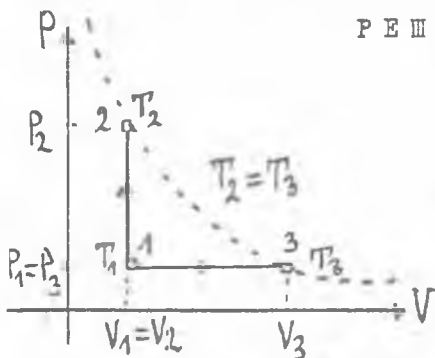
И действително, както трябва и да се очаква

$$(22) \Delta Q = \Delta U + \Delta A = (4,015 + 6,75) \cdot 10^4 = 4,69 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

ЗАДАЧА № 104 Азот с маса $M = 0,310 \text{ kg}$ се загрева от температура $t_1 = 12^\circ\text{C}$ до температура $t_2 = 154^\circ\text{C}$ изохорно ($V_1 = V_2$). От същото начално състояние с $P_1 = 1,40 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ газа се загрева изобарно ($P_1 = P_3$) до състояние с температура ($t_3 = t_2$). Определете погълнатото количество топлина, изменението на вътрешната енергия и извършената работа от газа

последователно за всеки от двата процеса.

РЕШЕНИЕ :



Определяме абсолютните температури при всяко състояние на газа: $T_1 = t_1 + 273 = 285^\circ\text{K}$ и $T_2 = t_2 + 273 = 427^\circ\text{K}$.

а) При осъществяването на изохорното загряване при ($V_1 = V_2$) се достига до увеличаване на температурата $T_2 > T_1$ и налягането ($P_2 > P_1$). Това след-

ва, от основното уравнение на кинетичната теория на идеалния газ, където: (1) $P_1 = n_{01} k_B T_1$ и (2) $P_2 = n_{02} k_B T_2$

В случая при изохорен процес $V_1 = V_2$, тогава и $n_{01} = n_{02}$ и следва, че ($P_1 \sim T_1$) и ($P_2 \sim T_2$). От първия принцип на термодинамиката за процеса (1 → 2) следва, че

$$(3) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2}^* + \Delta Q_{1 \rightarrow 2}^*$$

Но в случая (4) $\Delta A_{1 \rightarrow 2} = \Delta A_{1 \rightarrow 2}^* = \Delta Q_{1 \rightarrow 2}^*$

и тогава (5) $\Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = M c_v (T_2 - T_1)$

За азота, специфичната му топлиемост е $c_v(N_2) = 740 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. при постоянен обем. Замислюването (5) се явява общо решение на задачата за определяне на $\Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 3,2575 \cdot 10^4 \text{ J} = 32,575 \text{ kJ}$.

б) При осъществяване на загряване на газа в изобарен режим ($P_1 = P_3$), с увеличаване на обема от V_1 до V_3 и температурата от (T_1) до ($T_3 = T_2$), съгласно първия принцип на

термодинамиката следва, че

(6) $\Delta Q_{1 \rightarrow 3} + \Delta A_{1 \rightarrow 3} = \Delta U_{1 \rightarrow 3} + \Delta A_{1 \rightarrow 3}^* + \Delta Q_{1 \rightarrow 3}^*$. Тук трябва да отчитем, че (7) $\Delta A_{1 \rightarrow 3} = \Delta Q_{1 \rightarrow 3}^* = 0$ и тогава от (6) следва, че

(8) $\Delta Q_{1 \rightarrow 3} = \Delta U_{1 \rightarrow 3} + \Delta A_{1 \rightarrow 3}^*$ Последователно, представяме $\Delta U_{1 \rightarrow 3}$ и $\Delta A_{1 \rightarrow 3}^*$ чрез зависимостите

$$(9) \Delta U_{1 \rightarrow 3} = M c_v (T_3 - T_1) = M c_v (T_2 - T_1) = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = 32,575 \text{ кДж}$$

$$(10) \Delta A_{1 \rightarrow 3}^* = P_3 (V_3 - V_1) = P_1 (V_3 - V_1)$$

Прилагаме уравнението за състоянието на идеалния газ за началното и крайното състояние на газа при изобарния процес

$$(11) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1 \quad \text{и} \quad (12) P_1 V_3 = \frac{M}{\mu} R T_2$$

От (12) изваждаме почленно (11) и получаваме

$$(13) V_3 - V_1 = \frac{M R}{\mu P_1} (T_2 - T_1) \quad \text{Заместваме (13) в (10) и получаваме, че}$$

$$(14) \Delta A_{1 \rightarrow 3}^* = P_1 \left(\frac{M R}{\mu P_1} \right) (T_2 - T_1) = \frac{M R}{\mu} (T_2 - T_1)$$

Получената зависимост (14) е общо решение за определяне на $\Delta A_{1 \rightarrow 3}^*$. Численото пресмятане от (14) дава следния резултат: $\Delta A_{1 \rightarrow 3}^* = 1,307 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 13,07 \text{ кДж}$. Тогава от (8) следва, че

$$(15) \Delta Q_{1 \rightarrow 3} = \Delta U_{1 \rightarrow 3} + \Delta A_{1 \rightarrow 3}^* = (32,57 + 13,07) \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$$\Delta Q_{1 \rightarrow 3} = 45,64 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 45,64 \text{ кДж}$$

Както и трябва да се очаква $\Delta Q_{1 \rightarrow 2} < \Delta Q_{1 \rightarrow 3}$ понеже при изобарния процес, допълнително се върши работата от газа за разшире-

ние от (V_1) до (V_3) , като $\Delta A_{1 \rightarrow 3}^* = 13,07 \text{ кДж}$.

Изчисляването на търсените характеристики е осъществено при $\mu(N_2) = 28 \text{ кг/кмол}$. Допълнително към задачата можем да определим от (11) и (12), че

$$(16) V_1 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r T_1}{P_1} \right) \quad \text{и} \quad (17) V_3 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r T_2}{P_1} \right)$$

Числените пресмятания от (16) и (17) дават следния резултат: $V_1 = 0,1874 \text{ м}^3$ и $V_3 = 0,2808 \text{ м}^3$.

Да определим концентрацията на молекулите на азота във всяко от разглежданите състояния на газа:

$$(18) n_{O_1} = n_{O_2} = \frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} = \frac{(M/m)}{V_1} = \frac{M}{m V_1} = \frac{M N_A}{\mu V_1}$$

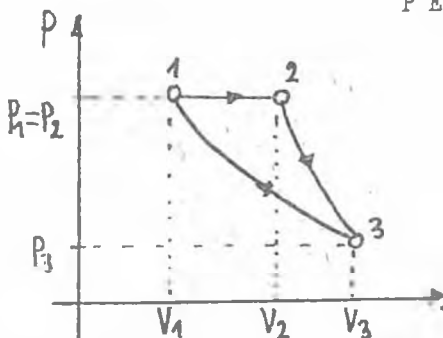
Тук е в сила зависимостта (19) $m = \frac{\mu}{N_A}$, където (m) е масата на една молекула азот, а $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмол}^{-1}$.

е числото на Авогадро. За състояние с обем (V_3) следва, че

$$(20) n_{O_3} = \frac{M N_A}{\mu V_3} \quad \text{Численото пресмятане от (18) и (20) дава следния резултат: } n_{O_1} = n_{O_2} = 3,558 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \text{ и } n_{O_3} = 2,375 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

ЗАДАЧА № 105 Топлинен двигател с работно тяло идеален газ осъществява цикъл, състоящ се от изобарен процес $(1 \rightarrow 2)$, адиабатен - $(2 \rightarrow 3)$ и изотермичен - $(3 \rightarrow 1)$. При изобарния процес работното тяло се нагрява от начална температура $t_1 = 11^\circ\text{C}$ до крайна температура $t_2 = 338^\circ\text{C}$. Определете коефициента на полезно действие (η) на двигателя и го сравнете с (η_K) на идеален карнотов двигател, работещ при същите стойности на минималната (t_1) и максималната (t_2) температури.

РЕШЕНИЕ :



Привеждаме дадените температури от целзиеви в абсолютни: $T_1 = t_1 + 273 = 284^\circ\text{K}$ и $T_2 = t_2 + 273 = 611\text{ K}$.

а) за да се осъществи изобарния процес ($1 \rightarrow 2$) при $P_1 = P_2$, свързан с разширение на идеалния газ от (V_1) до (V_2), се осъществява увеличаване на температурата от (T_1) до (T_2). Прилагаме първия принцип на термодинамиката за процеса ($1 \rightarrow 2$)

$$(1) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{M}{\mu} (C_p)_\mu (T_2 - T_1) = \frac{M}{\mu} \left(\frac{i+2}{2} \right) R_r (T_2 - T_1).$$

Тук $(C_p)_\mu = \left(\frac{i+2}{2} \right) R_r$

(2) е специфичната топлоем-

ност на идеалния газ при постоянно налягане ($P_1 = P_2 = \text{const}$)

б) Процесът ($2 \rightarrow 3$) е адиабатен, като $\Delta Q_{2 \rightarrow 3} = 0$. В

този случай на адиабатно разширение на идеалния газ работа

$\Delta A_{2 \rightarrow 3}^*$ се върши за сметка на намаляване на вътрешната енергия на газа. Следователно (3) $\Delta A_{2 \rightarrow 3}^* = -\Delta U_{2 \rightarrow 3}$

в) Процесът ($3 \rightarrow 1$) е изотермичен ($T_3 = T_1$) и свързането на газа е за сметка на извършена работа $\Delta A_{3 \rightarrow 1}$, която е свързана с отдаване на топлинна енергия $\Delta Q_{3 \rightarrow 1}$ на околната среда

$$(4) |\Delta Q_{3 \rightarrow 1}| = \left| \frac{M}{\mu} R_r T_1 \ln \left| \frac{V_1}{V_3} \right| \right| = \frac{M}{\mu} R_r T_1 \ln \left(\frac{V_3}{V_1} \right)$$

Съгласно теорията, коефициента (η) на полезно действие се дава със зависимостта:

$$(5) \quad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\Delta Q_{1 \rightarrow 2} - |\Delta Q_{3 \rightarrow 1}|}{\Delta Q_{1 \rightarrow 2}}$$

$$(6) \quad \eta = \frac{\frac{M}{\mu} \left(\frac{i+2}{2}\right) R_r (T_2 - T_1) - \frac{M}{\mu} R_r T_1 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)}{\frac{M}{\mu} \left(\frac{i+2}{2}\right) R_r (T_2 - T_1)}$$

Понеже процеса ($1 \rightarrow 2$) е изобарен, тогава (7) $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$

При адвобатния процес ($2 \rightarrow 3$) в сила е зависимостта

$$(8) \quad \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma c - 1} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_2}{T_1}$$

Заместваме (7) в (8) и получаваме, че:

$$(9) \quad \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma c - 1} = \frac{V_2}{V_1}$$

От (9) все още не можем да получим отношението (V_3/V_1) необходимо за (6). Ето защо, използваме (8) и от нея получаваме, че (10) $\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma c - 1}}$ Умножаваме по-

$$(11) \quad \left(\frac{V_2}{V_1}\right) \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma c - 1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1 + \frac{1}{\gamma c - 1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma c}{\gamma c - 1}} = \frac{V_3}{V_1}$$

Освен това, можем да използваме, че

$$(12) \quad \gamma c = \frac{(C_p)_{\mu}}{(C_v)_{\mu}} = \left(\frac{i+2}{2}\right) \left(\frac{i}{2}\right)^{-1} = \frac{i+2}{i}$$

$$(13) \quad \frac{\gamma c}{\gamma c - 1} = \left(\frac{i+2}{i} / \left(\frac{i+2}{i} - 1\right)\right)^{-1} = \frac{i+2}{2} \quad \text{Тогава, вземайки под внимание (11) и (13)}$$

можем да запишем (4) до следния вид

$$(14) \quad |\Delta Q_{3 \rightarrow 1}| = \frac{M}{\mu} R_r T_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma c}{\gamma c - 1}} = \frac{M}{\mu} R_r T_1 \left(\frac{\gamma c}{\gamma c - 1}\right) \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$(15) |AQ_{3 \rightarrow 1}| = \frac{MR_r T_1}{\mu} \left(\frac{i+2}{2} \right) \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right).$$

Заместваме (15) в (6) и получаваме, че

$$(16) \eta = 1 - \frac{\frac{MR_r T_1}{\mu} \left(\frac{i+2}{2} \right) \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)}{\frac{MR_r}{\mu} \left(\frac{i+2}{2} \right) R_r (T_2 - T_1)} = 1 - \left(\frac{T_1}{T_2 - T_1} \right) \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Получената зависимост (16) се явява общо решение на задачата за определяне на (η). Численото пресмятане дава следния резултат:

$\eta = 0,3346$, което отговаря на η (%) = 33,46%. Ако двигателя работи по цикъл на Карно, тогава

$$(17) \eta_k = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{284}{611} = 1 - 0,465 = 0,535$$

или η_k (%) = 53,52%. $\eta_k > \eta$ и $\eta_k = 1,60 \eta$.

ЗАДАЧА № 106. По цикъл на Карно работи идеален газ, като получава от нагревателя количество топлина. $Q_1 = 2,3 \text{ кJ}$ и извършва работа $A = 510 \text{ J}$. Да се определи коефициента на полезно действие (η) на този цикъл и колко пъти температурата (T_1) на нагревателя е по-голяма от тази на хладилника (T_2).

РЕШЕНИЕ:

Съгласно теорията, коефициента (η) на полезно действие при Карнотов идеален двигател се дава със зависимостта

$$(1) \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

като Q_1 е топлината, която работното тяло отдава на хладилника при изотермичното свиване. Зависимостта (1) се явява общо решение на задачата за определяне на (η). Численото пресмятане дава

следния резултат:

$$(2) \eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{510}{2300} = 0,2217 \text{ или } \eta(\%) = 22,17\%$$

За да определим стойността на отношението (T_1/T_2) използваме зависимост (1) във вида

$$(3) \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{или} \quad (4) \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{A}{Q_1}$$

От (4) окончателно получаваме, че:

$$(5) \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1 - \frac{A}{Q_1}} = \frac{Q_1}{Q_1 - A}$$

Получената зависимост (5) е общото решение на задачата за определяне на отношението (T_1/T_2). Численото пресмятане от (5) дава следния резултат:

$$(6) \frac{T_1}{T_2} = \frac{2300}{2300 - 510} = \frac{2300}{1790} = 1,285$$

ЗАДАЧА № 107 Топлинна машина, използва нагревател с температура $T_1 = 495^\circ\text{K}$ и хладилник с температура $T_2 = 286^\circ\text{K}$, като приема топлина $Q_1 = 38 \text{ kJ}$ от нагревателя. Определете максималния коефициент (η_m) на полезно действие на топлинната машина и какво количество топлина (Q_2) е предадено на хладилника от работното тяло.

РЕШЕНИЕ:

За да има топлинна машина максимален коефициент (η_m) на полезно действие тя трябва да работи с идеален газ по цикъла на Карно. Тогава е в сила зависимостта:

$$(1) \eta_m = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Понеже в задачата са дадени двете температури (T_1) и (T_2) зависимостта (1) се явява общо решение за определяне на η_m . Численото решение дава следния резултат

$$(2) \eta_m = 1 - \frac{286}{495} = 0,4222 \quad \text{или} \quad \eta_m (\%) = 42,22\%$$

От зависимост (1) следва, че

$$(3) 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{или} \quad (4) \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

тогава (5) $Q_2 = Q_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$ Следователно, зависимост

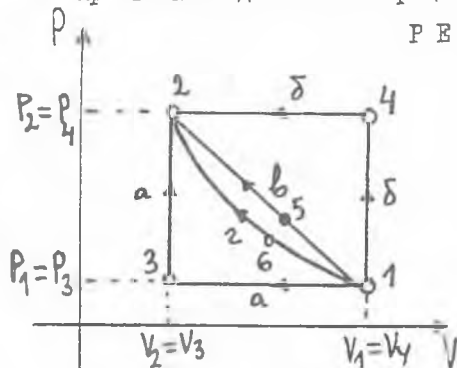
(5) се явява също решение за определяне на (Q_2). Численото пресмятане дава следния резултат:

$$(6) Q_2 = 38 \cdot 10^3 \left(\frac{286}{495} \right) = 21,96 \cdot 10^3 \text{ J} = 21,96 \text{ kJ}$$

ЗАДАЧА № 108' Аргон с маса $M = 36 \text{ g}$ се намира в начално състояние с обем $V_1 = 32$ литра и налягане $P_1 = 1,56 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Преход на газа в крайно състояние с обем $V_2 = 23$ литра и налягане $P_2 = 2,93 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ се осъществява по следните начини: А) Изобарно свиване ($P_1 = P_3$) до обем $V_3 = V_2$ със следващо изохорно нагриване до налягане (P_2); Б) изохорно загриване до налягане (P_2) със следващо изобарно свиване от обем (V_1) до обем (V_2); В) Линейно свиване на газа от (P_1, V_1) до (P_2, V_2) Г) Адиабатно свиване на газ от (P_1, V_1) до (P_2, V_2). Приемайки процесите за квазистатистически да се определят стойнос-

тите на основните физични величини - извършена работа (ΔA), количество топлина (ΔQ) и изменение на вътрешната енергия (ΔU) на газа при всеки отделно взет процес.

РЕШЕНИЕ :



Първо представяме числените стойности на някои от дадените физични величини в условието на задачата в система - СИ: $M = 86 \text{ g} = 0,086 \text{ kg}$; $V_1 = 8 \text{ литра} = 0,008 \text{ m}^3$; $V_2 = 3 \text{ литра} = 0,003 \text{ m}^3$.

А) При осъществяване на процеса ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$) се извършва работа ($\Delta A_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2}$), която е от вида

$$(1) \Delta A_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} = \Delta A_{1 \rightarrow 3} + \Delta A_{3 \rightarrow 2} = P_1(V_3 - V_1) = P_1(V_2 - V_1)$$

Тук $\Delta A_{3 \rightarrow 2} = 0$, понеже $\Delta V_{3 \rightarrow 2} = V_2 - V_3 = 0$. Изчисленията от (1) дават следната стойност на (2) $\Delta A_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} = \Delta A_{1 \rightarrow 3} = -1404 \text{ J}$. Тук работа се върши от външните сили за свиване на газа изобарно ($P_1 = P_3$) от обема (V_1) до обема ($V_2 = V_3$). Количеството топлина $\Delta Q_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2}$ можем да определим от зависимостта

$$(3) \Delta Q_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} = \Delta Q_{1 \rightarrow 3} + \Delta Q_{3 \rightarrow 2} = |C_p(T_3 - T_1)| + C_v(T_2 - T_3)$$

Трябва да имаме предвид, че

(4) $C_p = M c_p$ и (5) $C_v = M c_v$, като за аргона (A_2) специфичната топлоемност при постоянен обем е $C_v(A_2) = 320 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, а специфичната топлоемност при постоянно налягане

$$(6) C_p(Ar) = \gamma C_v(Ar) = 1,67(310) = 534,4 \text{ J/kg} \cdot \text{K}.$$

Тук $\gamma = 1,67$ е константата на Поасон за газа аргон, който е едноатомен с $i = 3$ степени на свобода при хаотичното топлинно постъпателно движение на атомите

$$(\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1,67)$$

Прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ

$$(7) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_1 ; (8) P_1 V_2 = \frac{M}{\mu} R_r T_3 ; (9) P_2 V_2 = \frac{M}{\mu} R_r T_2.$$

От (7 + 9) чрез почленно изваждане определяме, че

$$(10) T_3 - T_1 = \frac{\mu}{M R_r} (P_1 V_2 - P_1 V_1) = \frac{\mu P_1}{M R_r} (V_2 - V_1)$$

$$(11) T_2 - T_3 = \frac{\mu}{M R_r} (P_2 V_2 - P_1 V_2) = \frac{\mu V_2}{M R_r} (P_2 - P_1)$$

Заместваме (10) и (11) в (3) и получаваме, че

$$(12) \Delta Q_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} = \frac{C_p \mu P_1}{R_r} (V_2 - V_1) + \frac{C_v \mu V_2}{R_r} (P_2 - P_1)$$

Получената зависимост (12) е общо решение на задачата за определяне на $\Delta Q_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} = -400,44 + 4843,33 \approx 4442,89 \text{ J}.$

Изменението на вътрешната енергия е

$$(13) \Delta U_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} = \Delta Q_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} + |\Delta A_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2}| = 4442,89 - 1404 = 3038,89 \text{ J}.$$

За да направим проверка на получения резултат ще определим стойността на $(\Delta U_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2})$ по прякия метод

(14) $\Delta U_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} = M C_v (T_2 - T_1)$, като определим стойностите на температурите в различните състояния на газа:

$$(15) T_1 = \mu P_1 V_1 (M R_r)^{-1} = 278,8^\circ \text{K} \quad (16) T_2 = \mu P_2 V_2 (M R_r)^{-1} = 389,2^\circ \text{K}.$$

$$(16^*) \quad T_3 = \frac{\mu P_2 V_2}{M R_r} = 200,4^\circ \text{K}.$$

Заместваме стойностите на (T_1) и (T_2) , съответно

от (15) и (16) в (14) и определяме, че

$$(17) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2} = 0,086(320)(389,2 - 278,8) = 3038,21 \text{ J}.$$

Сравняването на стойностите на $\Delta U_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2}$ от (13) и (17) показва едно много добро съвпадение.

Б) Да разгледаме процеса $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$, който се състои от изохората $(1 \rightarrow 4)$ и изобарата $(4 \rightarrow 2)$. Тогава за извършената работа от външните сили получаваме

$$(18) \quad \Delta A_{1 \rightarrow 4 \rightarrow 2} = \Delta A_{1 \rightarrow 4} + \Delta A_{4 \rightarrow 2} = \Delta A_{4 \rightarrow 2} = P_2(V_2 - V_1) = -2637 \text{ J}.$$

Количеството топлина ($\Delta Q_{1 \rightarrow 4 \rightarrow 2}$) можем да определим от зависимостта:

$$(19) \quad \Delta Q_{1 \rightarrow 4 \rightarrow 2} = \Delta Q_{1 \rightarrow 4} + \Delta Q_{4 \rightarrow 2} = C_v(T_4 - T_1) + C_p(T_2 - T_4)$$

$$(20) \quad \Delta Q_{1 \rightarrow 4 \rightarrow 2} = M C_v(T_4 - T_1) + M C_p(T_2 - T_4)$$

Можем да определим температурата (T_4) от зависимостта

$$(21) \quad T_4 = \frac{\mu P_2 V_1}{M R_r} = 523,7^\circ \text{K}$$

За да неутежняваме задачата допълнително за търсене на общо решение за $\Delta Q_{1 \rightarrow 4 \rightarrow 2}$ ще използваме пряко стойностите на температурите $(T_1; T_2; T_4)$. Тогава численото решение от (20) дава следния резултат:

$$(22) \quad \Delta Q_{1 \rightarrow 4 \rightarrow 2} = 6739,65 - 6181,41 = 558,24 \text{ J}.$$

Изменението на вътрешната енергия ще бъде

$$(23) \Delta U = \Delta Q + \Delta A = 558,24 + 2637 = 3195,24 \text{ J.}$$

При сравняване на (23) с (13) се наблюдава малко отклонение от 4,9%.

В) При осъществяване на процеса (1 → 5 → 2) се наблюдава линейно нарастване на налягането (P) с намаляване на обема (V). Тук работата ($\Delta A_{1 \rightarrow 5 \rightarrow 2}$) се определя графично като

$$(24) \Delta A_{1 \rightarrow 5 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} (P_2 - P_1) (V_2 - V_1) = -616,5 \text{ J.}$$

Изменението на количеството топлина е

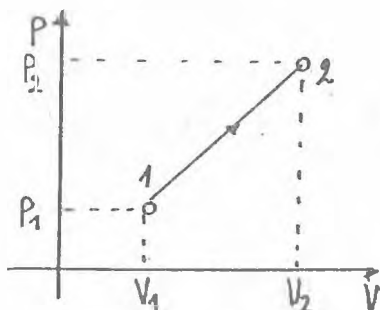
$$(25) \Delta Q_{1 \rightarrow 5 \rightarrow 2} = \Delta U + \Delta A = 3038,21 - 616,50 = 2421,71 \text{ J.}$$

Г) При осъществяването на адиабатния процес (1 → 6 → 2) се извършва свиване на газа от обем (V_1) до обем ($V_2 = V_3$) с нарастване на налягането от (P_1) до (P_2) и на температурата от (T_1) до (T_2). Тогава $\Delta Q_{1 \rightarrow 6 \rightarrow 2} = 0$ и повишаването на вътрешната енергия на газа е за сметка на работата на външните сили (25) $\Delta U_{1 \rightarrow 6 \rightarrow 2} = \Delta A_{1 \rightarrow 6 \rightarrow 2} = 3038,21 \text{ J.}$

ЗАДАЧА № 109 Въздух с маса $M = 0,104 \text{ kg}$ е затворен в цилиндър с бутало в начално състояние с обем (V_1), налягане $P_1 = 1,42 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ при температура $T_1 = 295^\circ \text{K}$. Върху газа е осъществено въздействие от външни сили, като се осъществява линейно нарастване на налягането от (P_1) до $P_2 = 1,5 P_1$ при увеличаване на обема от V_1 до $V_2 = 1,2 V_1$. Определете изменението на вътрешната енергия на газа, извършената от него работа и полученото количество топлина.

РЕШЕНИЕ :

Можем първоначално да определим обема (V_1) на газа в началното му състояние като използваме, че основното уравнение



за състоянието на идеалния газ

$$(1) p_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1$$

или

$$(2) V_1 = \frac{M R T_1}{\mu p_1}$$

Численото пресмятане от (2) дава следния резултат $V_1 = 0,0618 \text{ м}^3$ при $\mu = 29 \text{ кг/кмол}$.
 Ще определим температурата (T_2) в крайното състояние на газа

$$(3) \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \text{ или } (4) T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = \frac{(1,5 p_1)(1,2 V_1)}{p_1 V_1} T_1$$

или (5) $T_2 = 1,8 T_1 = 1,8 (295) = 531^\circ \text{К}$. Съответните стойности на: (6) $p_2 = 1,5 p_1 = 1,5 (1,42 \cdot 10^5) = 2,13 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ и (7) $V_2 = 1,2 V_1 = 1,2 (0,0618) = 0,07416 \text{ м}^3$. Изменението на вътрешната енергия е (8) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = M C_V (T_2 - T_1)$.

В (8) (C_V) е специфичната топлиемост на въздуха при постоянен обем и има стойност $C_V = 730 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$.

Численото пресмятане от (8) дава следния резултат

$$(8) \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 17917 \text{ J}$$

Извършената от газа работа е

$$(9) \Delta A_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (V_2 - V_1) = 0,05 p_1 V_1 = 397,6 \text{ J}$$

Предаденото количество топлина на газа от външните сили, съгласно първия принцип на термодинамиката е

$$(10) \Delta Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta A_{1 \rightarrow 2} = 17917 + 397,6 = 18314,6 \text{ J}$$

Допълнително към задачата можем да определим концентрацията на молекулите на въздуха в двете състояния

$$(11) n_{01} = \frac{(M/m)}{V_1} = \frac{M}{m V_1} = \frac{M}{(\mu/N_A) V_1} = \frac{M N_A}{\mu V_1} = 3,495 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

$$(12) n_{O_2} = \frac{M N_A}{\mu V_2} = 2,9125 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Вътрешната енергия на газа в двете състояния

$$(13) U_1 = M c_V T_1 = 0,104 (730) 295 = 22396,4 \text{ J.}$$

$$(14) U_2 = M c_V T_2 = 0,104 (730) 531 = 40313,5 \text{ J.}$$

$$(15) \Delta U_{1 \rightarrow 2} = U_2 - U_1 = 40313,5 - 22396,4 = 17917,1 \text{ J.}$$

При сравняване на (8) с (15) се получава пълно съвпадение на стойностите. Енергията, отнесена за една молекула на газа

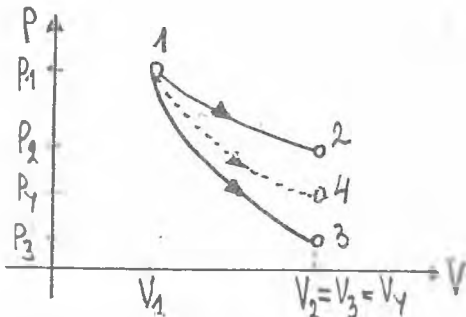
$$(16) \bar{\epsilon}_1 = \frac{U_1}{n_{O_2}} = \frac{22396,4}{3,495 \cdot 10^{25}} = 6,408 \cdot 10^{-22} \text{ J} = 0,0040 \text{ eV.}$$

$$(17) \bar{\epsilon}_2 = \frac{U_2}{n_{O_2}} = \frac{40313,5}{2,9125 \cdot 10^{25}} = 1,384 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0087 \text{ eV.}$$

ЗАДАЧА № 110 Кислород с маса $M = 0,250 \text{ kg}$ се намира в начално състояние с температура $T_1 = 483^\circ \text{K}$ и налягане $P_1 = 2,95 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Осъществено е политропно разширение на газа от обем (V_1) до обем ($V_2 = 2,8 V_1$) чрез осъществяване на процеса ($1 \rightarrow 4$). Определете коефициента (α_n) на политропния процес ($1 \rightarrow 4$), ако се приеме, че налягането (P_4) е средноаритметично по стойност спрямо наляганията (P_2) и (P_3), получени при същия обем (V_2), ако са осъществени съответно изотермичен ($1 \rightarrow 2$) и адиабатен процес ($1 \rightarrow 3$).

РЕШЕНИЕ:

Първоначално ще определим обема (V_1) на газа в началното състояние чрез използване на основното уравнение за состо-



явиего на идеален газ

$$(1) p_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_f T_1$$

или

$$(2) V_1 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_f T_1}{p_1} \right)$$

Численото пресмятане от

(2) дава следния резултат $V_1 = 0,106 \text{ m}^3$ при $\mu(O_2) = 32 \text{ kg/kmol}$. От условието на задачата (3) $V_2 = 2,8 V_1 = 2,8(0,106) = 0,298 \text{ m}^3$. Понаже процеса (1 \rightarrow 2) е изотермичен, тогава следва, че $T_1 = T_2 = 483^\circ\text{K}$. Ще определим налягането (p_2) от зависимостта:

$$(4) p_2 = \frac{M R_f T_1}{\mu V_2} = 1,053 \cdot 10^5 \text{ Pa} \text{ при } \mu(O_2) = 32 \text{ kg/kmol}.$$

Процесът (1 \rightarrow 3) е адиабатен и чрез използване на уравнението на адиабатата можем да определим (p_3) от зависимостта:

$$(5) p_1 V_1^{2\epsilon} = p_3 V_2^{2\epsilon} \text{ или } (6) p_3 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{2\epsilon} = 0,694 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Съгласно условието на задачата

$$(7) p_4 = \frac{p_1 + p_3}{2} = 0,8735 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Накрая за да определим константата (α_n) на политропата ще използваме нейното уравнение от вида

$$(8) p_1 V_1^{\alpha_n} = p_4 V_2^{\alpha_n} \text{ или } (9) \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\alpha_n} = \frac{p_1}{p_4}$$

$$(10) \alpha_n \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_4} \right) \text{ и } (11) \alpha_n = \left[\ln \left(\frac{p_1}{p_4} \right) \right] \left[\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right]^{-1}$$

Численото пресмятане от (11) дава следния резултат $\alpha_n = 1,178$.

Както трябва да се очаква, според теорията $1 < \alpha_n < 1,40$ за двуатомни газове, какъвто е и кислорода (O_2). Тук $\alpha_n = 1$ за

изотермичен, а $\alpha_n = 1,40 = \gamma$ за адиабатен процес.

Допълнително към задачата можем да определим изменението на вътрешната енергия на газа при политропния процес ($1 \rightarrow 4$)

чрез зависимостта (12) $\Delta U_{1 \rightarrow 4} = M c_v (T_4 - T_1)$ От (12)

се вижда, че за да определим ($\Delta U_{1 \rightarrow 4}$) трябва да знаем температурата (T_4) каква стойност притежава. За целта използваме зависимостта:

$$(13) P_4 V_4 = \frac{M}{\mu} R T_4 \quad \text{и (14) } T_4 = \frac{\mu P_4 V_4}{M R}$$

Численото пресмятане от (14) дава следния резултат $T_4 = 400,7^\circ\text{K}$.

Тогава, съгласно (12) следва, че

$$(15) \Delta U_{1 \rightarrow 4} = 0,250 (650) (400,7 - 483) = -13373,75 \text{ J}$$

Съгласно теорията за политропните процеси, извършената работа ($\Delta A_{1 \rightarrow 4}$) от газа се дава със зависимостта:

$$(16) \Delta A_{1 \rightarrow 4} = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R}{\alpha_n - 1} \right) T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\alpha_n - 1} \right]$$

Численото пресмятане от (16) дава следния резултат $\Delta A_{1 \rightarrow 4} = 29623,3 \text{ J}$. Следователно, газа е получил количество топлина от външните сили.

$$(17) \Delta Q_{1 \rightarrow 4} = \Delta U_{1 \rightarrow 4} + \Delta A_{1 \rightarrow 4} = -13373,8 + 29623,3 = 16249,5 \text{ J}$$

Извършената работа ($\Delta A_{1 \rightarrow 4}$) от газа при политропния процес ($1 \rightarrow 4$) е за сметка на намаляването на вътрешната му енергия с ($\Delta U_{1 \rightarrow 4}$) и на полученото количество топлина $\Delta Q_{1 \rightarrow 4}$ от околната среда (външни сили).

Можем да определим и молната топлоемност на газа (C_{μ}) α_n при политропния процес, съгласно съответната формула от теорията

$$(18) (C_{\mu})_{\alpha_n} = \frac{(\alpha_n - \gamma) R_r}{(\gamma - 1)(\alpha_n - 1)} = -25925,98 \text{ J/mol.K}$$

$$(19) C_{\alpha_n} = \frac{(C_{\mu})_{\alpha_n}}{\mu} = -\frac{25925,98}{32} = -810,19 \text{ J/kg.K}$$

ЗАДАЧА № 111 За някакъв политропен процес, в който участва многоатомен газ, показателя на политропата е $\alpha_n = 1,70$. Определете стойността на молната топлоемност на този газ в политропния процес.

РЕШЕНИЕ:

Понеже газа е многоатомен, тогава броя на степените на свобода (i) на молекулите му, при хаотичното топлинно движение е $i = 6$. Коэффициентът на Поасон за този газ е от вида

$$(1) \gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{6+2}{6} = \frac{8}{6} = 1,33$$

От теорията записваме формулата за молната топлоемност $(C_{\mu})_{\alpha_n}$ при политропен процес, която е от вида

$$(2) (C_{\mu})_{\alpha_n} = \frac{(\alpha_n - \gamma) R_r}{(\gamma - 1)(\alpha_n - 1)}$$

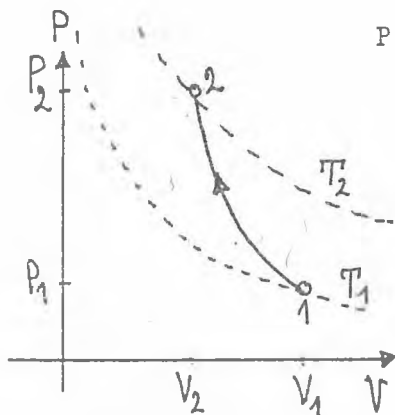
Численото пресмятане от (2) дава следния

резултат

$$(3) (C_{\mu})_{\alpha_n} = 1,60 R_r = 13318,40 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} = 13,318 \frac{\text{kJ}}{\text{mol.K}}$$

ЗАДАЧА № 112 Горящата смес в двигателя на Дизел се възпламенява при температура $t_2 = 527^{\circ}\text{C}$. Началната температура на сместа е $t_1 = 70^{\circ}\text{C}$. Колко пъти (n) се намалява обема на сместа при адиабатно свиване за да може тя да се възпламени, при условие, че коэффициента на Поасон се приеме за $\gamma = 1,40$.

РЕШЕНИЕ:



Първо привеждаме дадените температури от целзиеви в абсолютни: $T_1 = t_1 + 273 = 70 + 273 = 343^\circ \text{K}$; $T_2 = t_2 + 273 = 527 + 273 = 800^\circ \text{K}$. При осъществяване на адиабатния процес ($1 \rightarrow 2$) можем да използваме уравнението на адиабатата

в (T, V) - координати, което е от вида

$$(1) \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{или} \quad (2) \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$(3) \quad n = \frac{V_1}{V_2} = \sqrt[\gamma-1]{\frac{T_2}{T_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Получената зависимост (3) дава общото решение на задачата за определяне на (n) . Численото пресмятане от (3) дава следния резултат:

$$(4) \quad n = \left(\frac{800}{343} \right)^{\frac{1}{1,40-1}} = (2,332)^{2,5} = 8,308.$$

Допълнително към задачата можем да определим колко пъти (\hat{n}) е нараснало налягането на сместа при адиабатното свиване

$$(5) \quad \hat{n} = \frac{P_2}{P_1}$$

Но съгласно уравнението на адиабатата в (T, P) координати следва, че

$$(6) \quad T_1^{\gamma} P_1^{1-\gamma} = T_2^{\gamma} P_2^{1-\gamma} \quad \text{или} \quad (7) \quad \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\gamma}$$

$$(8) \quad n = \frac{\hat{n}}{P_1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Получената зависимост (8) се явява общо решение на допълнителната задача, която си поставяме. Численото пресмятане от (8) дава следния резултат

$$(9) \quad \tilde{n} = \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{800}{343} \right)^{\frac{1,40}{1,40-1}} = (2,332)^{3,5} = 19,366$$

ЗАДАЧА №113! Приемайки, че процеса на разпространение на звуковата вълна във въздушна среда се явява адиабатен, Лаплас е получил формула за определяне големината на скоростта на звука от вида $V = \left(\alpha \frac{P}{\rho} \right)^{1/2}$, където $\alpha = 1,40$ е коефициента на Понсон за въздуха, ρ - налягането и ρ - плътността на въздуха. Докажете, че: а) скоростта на звука в идеален газ се явява функция само на температурата (T); б) скоростта на звука във въздух при $t_0 = 0^\circ\text{C}$ е $V_0 = 331,63 \text{ m/s}$; в) определете скоростта на звука при температура $t = 70^\circ\text{C}$.

РЕШЕНИЕ :

Използваме основното уравнение за състоянието на идеален газ:

$$(1) \quad PV = \frac{M}{\mu} R_r T$$

$$\text{или (2) } P = \frac{M}{V} \left(\frac{R_r T}{\mu} \right) = \rho \left(\frac{R_r T}{\mu} \right)$$

$$(3) \quad \frac{P}{\rho} = \frac{R_r T}{\mu}$$

Заместваме (3) във формулата за скоростта на звука, дадена от Лаплас и получаваме, че

$$(4) \quad V = \sqrt{\alpha \frac{R_r T}{\mu}}$$

Преобразуваме стойностите на температурите от целзиеви в келвини и получаваме $T_0 =$

$$= t_0 + 273 = 273^\circ\text{K}; \quad T = t + 273 = 70 + 273 = 343^\circ\text{K}.$$

Използваме получената зависимост (4) и определяме скоростта на звука във въздуха ($\mu = 29 \text{ kg/kmol}$) при дадените температури:

$$(5) \quad V_0 = \sqrt{\frac{\gamma e R_r T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,40 (8315) 273}{29}} = 331 \text{ m/s}$$

$$(6) \quad V = \sqrt{\frac{\gamma e R_r T}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,40 (8315) 373}{29}} = 371 \text{ m/s}$$

ЗАДАЧА № 114 При политропно разширение на $n_{\mu} = 1 \text{ kmol}$ идеален едноатомен газ неговата температура намалява на 1°K . Показателят на политропата е $\alpha_n = 1,50$. Определете: а) молната топлиемост на газа в този процес; б) количеството топлина прието или отдадено от газа; в) работата, извършена от газа.

Р Е Ш Е Н И Е :

Понеже идеалния газ е едноатомен, тогава константата на Поасон за него е $\gamma e = 1,67$. От теорията формулата за молната топлиемост при политропен процес е от вида:

$$(1) \quad (C_{\mu})_{\alpha_n} = \frac{(\alpha_n - \gamma e) R_r}{(\gamma e - 1)(\alpha_n - 1)} = -0,507 R_r = -4219,55 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

Количеството топлина се дава със зависимостта:

$$(2) \quad (\Delta Q_{\mu})_{\alpha_n} = (C_{\mu})_{\alpha_n} \cdot (T_2 - T_1) = 0,507 R_r = 4219,55 \frac{\text{J}}{\text{kmol}}$$

Това количество топлина прието от газа при разширението му, изменението на вътрешната енергия е

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta U_{\mu} &= (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) = \left[(C_{\mu})_{\alpha_n} + \frac{R_r}{\alpha_n - 1} \right] (T_2 - T_1) = \\ &= (-0,507 R_r + 2 R_r) (-1) = -1,493 R_r = -12444,3 \frac{\text{J}}{\text{kmol}} \end{aligned}$$

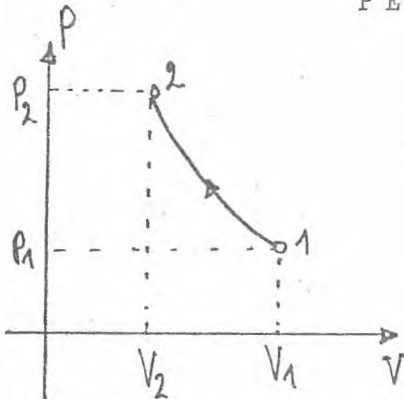
Прилагаме първия принцип на термодинамиката и получаваме, че

$$(4) \quad \Delta Q_{\mu} = \Delta U_{\mu} + \Delta A_{\mu} \quad (5) \quad \Delta A_{\mu} = \Delta Q_{\mu} - \Delta U_{\mu} =$$

$$= 0,507 R_r - (-1,493 R_r) = 2 R_r = 16630 \text{ J.}$$

ЗАДАЧА № 115. Едноатомен газ се свива политропно от начален обем $V_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ и налягане $P_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ до краен обем $V_2 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ и налягане $P_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Началната температура на газа е $T_1 = 300^\circ \text{K}$. Определете: а) показателя (α_n) на политропата; б) молната топлиемост на газа при този политропен процес; в) изменението на вътрешната енергия на газа; г) какво количество топлина получава или отдава газа.

РЕШЕНИЕ :



а) За да определим показателя (α_n) на политропата ще използваме нейното уравнение в (P , V) координати, което е от вида

$$(1) P_1 V_1^{\alpha_n} = P_2 V_2^{\alpha_n}$$

или

$$(2) \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\alpha_n}$$

$$(3) \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = \alpha_n \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad \text{или} \quad (4) \alpha_n = \left[\ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \right] \cdot \left[\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right]^{-1}$$

Получената зависимост (4) е общо решение на задачата за определяне на (α_n). Численото пресмятане от (4) дава следния резултат $\alpha_n = 1,497 \approx 1,500$.

б) За да определим молната топлиемост на газа при този политропен процес ще използваме съответната формула от теорията.

$$(5) (C_{m})_{\alpha_n} = \frac{(\alpha_n - \gamma_e) R_r}{(\gamma_e - 1)(\alpha_n - 1)}$$

Понеже газа е едноатомен неговия коефициент на

Поасон е $\gamma = 1,67$. Зависимостта (5) се явява общо решение на задачата за определяне на $(C_{\mu})_{\alpha_n}$. Численото решение от (5) дава следния резултат $(C_{\mu})_{\alpha_n} = -0,523 R_T = -4349,38 \text{ J} / \text{кмол} \cdot \text{K}$. Можем да определим количеството газ, чрез броя на киломовете ($n_{\mu} = M/\mu$). За целта прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за началното състояние на едноатомния газ.

$$(6) p_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_T T_1 = n_{\mu} R_T T_1 \quad \text{или (7) } n_{\mu} = \frac{p_1 V_1}{R_T T_1}$$

Численото пресмятане от (7) дава следния резултат $n_{\mu} = 1,6035 \cdot 10^{-4} \text{ кмол}$.

в) Количеството топлина, участващо в процеса, определяме от зависимостта:

$$(7) \Delta Q = n_{\mu} (\Delta Q)_{\mu} = n_{\mu} (C_{\mu})_{\alpha_n} (T_2 - T_1)$$

Следователно, за да определим $(\Delta Q)_{\mu}$ от (8) е необходима информация за числената стойност за температурата на газа в крайното състояние (T_2). За целта използваме уравнението на политропата в (T, V) координати, което е от вида

$$(9) T_1 V_1^{\alpha_n - 1} = T_2 V_2^{\alpha_n - 1} \quad \text{или (10) } T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\alpha_n - 1}$$

Получената зависимост (10) дава възможност да определим, че $T_2 = 600^{\circ}\text{K}$. Заместваме (10) в (8) и получаваме, че

$$(11) \Delta Q = n_{\mu} (C_{\mu})_{\alpha_n} T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\alpha_n - 1} - 1 \right] \quad \text{Численото пресмятане от (11) дава}$$

следния резултат:

$$(12) \Delta Q = -0,02516 R_T = -209,19 \text{ J} .$$

г) Можем да определим и изменението на вътрешната енер-

гия на газа

$$(13) \Delta U = \eta_{\mu}(\Delta U_{\mu}) = \eta_{\mu}(C_{\mu})_V (T_2 - T_1) \quad \text{Но от теорията}$$

$$(14) (C_{\mu})_V = (C_{\mu})_{\alpha_n} + \frac{R_r}{\alpha_n - 1}$$

Заместваме (14) в (13) и получаваме, че

$$(15) \Delta U = \eta_{\mu}(T_2 - T_1) \left[(C_{\mu})_{\alpha_n} + \frac{R_r}{\alpha_n - 1} \right]$$

$$(16) \Delta U = \eta_{\mu} T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\alpha_n - 1} - 1 \right] \cdot \left[(C_{\mu})_{\alpha_n} + \frac{R_r}{\alpha_n - 1} \right]$$

Численото пресмятане от (16) дава следния резултат $\Delta U = 0,07105$

$R_r = 590,79 \text{ J}$. От първия принцип на термодинамиката след-

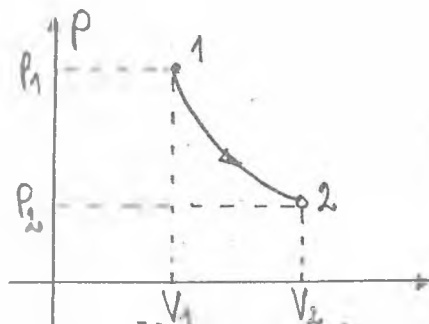
ва, че (17) $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$

или (18) $\Delta A = \Delta Q - \Delta U = -209,2 - 590,8 = -800 \text{ J}$.

За сметка на работата на външните сили, вътрешната енергия на газа е нараствала с (ΔU) и част от топлината се отделя от газа.

ЗАДАЧА № 116 За движение на торпеди се използва двигател, работещ със съгътен въздух. Определете максималната полезна работа на двигателя, ако обема на съгъстения въздух е $V_1 = 0,2 \text{ m}^3$ а налягането $P_1 = 2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$. Торпедото е регулирано за движение във водата на дълбочина $h = 3 \text{ m}$. Температурата на съгъстения въздух и на водата е $T_1 = T_2 = 280^\circ \text{K}$. Считайки, че движението на торпедото във водата е равномерно, определете силата на тягата (F_T) на двигателя, ако радиуса на действие на торпедото е $l = 2 \text{ km}$.

РЕШЕНИЕ :



Изтичането на сгъстения въздух от двигателя на торпедото към водата може да разгледаме в (p, V) - координати като изотермичен процес $T_1 = T_2 = 280^\circ\text{K}$, при който става разширение на сгъстения въздух

от обем (V_1) до обем (V_2) с намаляване на налягането от (p_1) до (p_2) . Изтичането на сгъстения въздух от двигателя е неравномерно понеже намалява разликата в наляганята. Можем да намерим налягането на водата (p_2) , като използваме зависимостта:

$$(1) p_2 = p_0 + \rho g h = 1,013 \cdot 10^5 + 10^3 (981) \cdot 3$$

$$(2) p_2 = 1,013 \cdot 10^5 + 0,2943 \cdot 10^5 = 1,3073 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за началното състояние на сгъстения въздух

$$(3) p_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1$$

$$\text{и (4) } M = \frac{\mu p_1 V_1}{R T_1}$$

От (4) определяме масата на сгъстения въздух $M = 49,8 \text{ kg}$

при $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$. Тогава броят на kmol -овете ще

$$\text{бъде (5) } n_{\mu} = \frac{M}{\mu} = \frac{49,8}{29} = 1,718 \text{ kmol.}$$

Извършената работа от двигателя се осъществява при изотермично разширение на сгъстения въздух и тогава

$$(6) \Delta A_{1 \rightarrow 2} = n_{\mu} (\Delta A_{1 \rightarrow 2})_{\mu} = n_{\mu} R T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Понеже нямаме информация за обема (V_2) ще направим смяна на

характеристиките, като приемем че при изотермичен процес е в сила закона на Бойл-Мариот

$$(7) P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad \text{или} \quad (8) \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

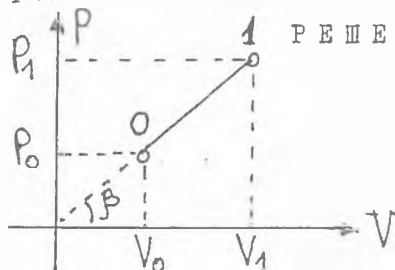
Заместваме (8) в (6) и получаваме окончателно, че

$$(9) \Delta A_{1 \rightarrow 2} = n_{\mu} R T_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

Получената зависимост (9) е общо решение на задачата за определяне на $\Delta A_{1 \rightarrow 2}$. Численото пресмятане от (9) дава следния резултат $\Delta A_{1 \rightarrow 2} = 20,12 \cdot 10^6 \text{ J} = 20,12 \text{ MJ}$. От механиката следва, че (10) $\Delta A_{1 \rightarrow 2} = F_{\text{т}} \cdot \ell$ и тогава

$$(11) F_{\text{т}} = \frac{\Delta A_{1 \rightarrow 2}}{\ell} = \frac{2,012 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^{-3}} = 10060 \text{ N} = 10,06 \text{ kN}.$$

ЗАДАЧА № 117 Някаква маса едноатомен газ, първоначално заемаща обем $V_0 = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ при налягане $P_0 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, политропно се разширява до обем $V_1 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. При това налягането на газа линейно нараства с увеличаване на обема както е показано на координатната равнина (P, V). Определете: а) показателя на политропния процес ($\alpha_{\text{п}}$); б) молната топлиемност ($C_{\mu} \alpha_{\text{п}}$) при този политропен процес; в) изменението на вътрешната енергия на газа; г) работата, която извършва газа при разширението си; количеството топлина, което е прието от газа от околната среда (външните сили).



РЕШЕНИЕ :

От чертежа се вижда, че продължението на линейната част на политропния процес ($O \rightarrow 1$) преминава през началото на координатната система ($P,$

V). Тогава от чисто геометрични съображения следва, че е изпълнена зависимостта

$$(1) \operatorname{tg} \beta = \frac{P_0}{V_0} = \frac{P_1}{V_1} \quad \text{или} \quad (2) \quad P_1 = \frac{P_0 V_1}{V_0}$$

Численото пресмятане от (2) дава следния резултат $P_1 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

а) За да определим показателя (α_n) на политропния процес ($0 \rightarrow 1$) използваме уравнението на политропата

$$(3) \quad P_0 V_0^{\alpha_n} = P_1 V_1^{\alpha_n} \quad \text{или} \quad (4) \quad \frac{P_0}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{\alpha_n}$$

$$(5) \quad \alpha_n = \left[\ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right) \right] \cdot \left[\ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right) \right]^{-1}$$

Численото пресмятане от (5) показва, че

$\alpha_n = -1$. Понеже газа е едноатомен, то следва, че неговия коефициент на Поасон е $\gamma = 1,67$.

б) Определете молната топлиемост (C_{μ}) $_{\alpha_n}$ при този политропен процес от зависимостта

$$(6) \quad (C_{\mu})_{\alpha_n} = \frac{(\alpha_n - \gamma) R_r}{(\gamma - 1)(\alpha_n - 1)} = 1,9925 R_r = 16567,9 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

в) Определете изменението на вътрешната енергия на газа от зависимостта

$$(7) \quad \Delta U = n_{\mu} (\Delta U_{\mu}) = n_{\mu} (C_{\mu})_{\alpha_n} (T_1 - T_0)$$

Прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за началното и крайното състояние на едноатомния газ при политропния процес и получаваме, че

$$(8) \quad P_0 V_0 = \frac{M}{\mu} R_r T_0 = n_{\mu} R_r T_0 \quad \text{и} \quad (9) \quad P_1 V_1 = n_{\mu} R_r T_1$$

Тогава чрез почленно изваждане на (8) и (9) получаваме, че

$$(10) \quad n_{\mu}(T_1 - T_0) = \frac{1}{R_r} (P_1 V_1 - P_0 V_0) \quad \text{Заместваме (10) в}$$

(7) и получаваме, че

$$(11) \quad \Delta U = \frac{(C_{\mu})_V}{R_r} (P_1 V_1 - P_0 V_0) = \frac{1}{(\gamma - 1)} (P_1 V_1 - P_0 V_0)$$

Тук се използва известната вече зависимост (12) $(C_{\mu})_V = \frac{R_r}{(\gamma - 1)}$

Получената зависимост (11) е общо решение на задачата за определяне на (ΔU) . Численото пресмятане от (11) дава следния резултат $\Delta U = 70,746 \text{ J}$.

г) Определяме извършената работа от газа (ΔA) , чрез използване на чисто геометрични съображения - лицето на фигурата $(V_0, 0, 1, V_1, V_0)$ - правоъгълен трапец.

$$(13) \quad \Delta A = \left(\frac{P_0 + P_1}{2} \right) (V_1 - V_0) \quad \text{Получената зависимост}$$

(13) е общо решение на

задачата за определяне на (ΔA) . Численото пресмятане от (13) дава следния резултат $\Delta A = 22,5 \text{ J}$.

д) За да определим количеството топлина (ΔQ) , което е предадено на газа за да осъществи политропния процес на разширение използваме зависимостта:

$$(14) \quad \Delta Q = n_{\mu} (C_{\mu})_{\alpha_n} (T_1 - T_0) = \frac{(C_{\mu})_{\alpha_n}}{R_r} (P_1 V_1 - P_0 V_0)$$

при отчитане на зависимост (10). Но от теорията използваме, че

$$(15) \quad (C_{\mu})_{\alpha_n} = (C_{\mu})_V - \left(\frac{R_r}{\alpha_n - 1} \right) \quad \text{Заместваме (15) в (14) и}$$

получаваме окончателно,

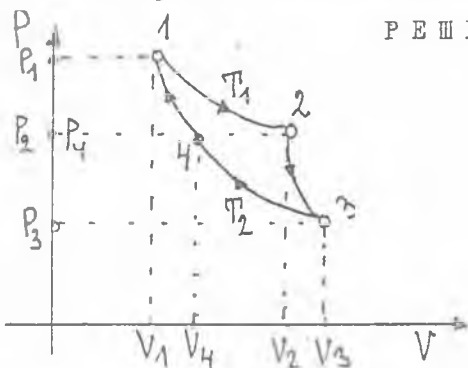
че (16)
$$\Delta Q = \left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{\alpha_n - 1} \right) \cdot (P_1 V_1 - P_0 V_0)$$

Получената зависимост (16) е общо решение на задачата за определяне на (ΔQ) . Численото пресмятане от (16) дава следния резултат $\Delta Q = 94,44 \text{ J}$. Тогава съгласно първия принцип на термодинамиката следва, че

(17)
$$\Delta \tilde{Q} = \Delta U + \Delta A = 70,746 + 22,50 = 93,25 \text{ J}.$$

Сравняваме (ΔQ) и $(\Delta \tilde{Q})$, налице е много добро съвпадение на числените стойности.

ЗАДАЧА № 118. С маса $M = 1 \text{ kg}$ въздух се осъществява цикъл на Карно в температурния интервал от $T_1 = 600^\circ\text{K}$ до $T_2 = 200^\circ\text{K}$. Наляганията в края на изотермичния процес на разширение (P_2) и в края на изотермичния процес на свиване (P_4) са равни на $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Определете полезната работа ($A_{\text{пол.}}$), която извършва въздуха за един цикъл и термодинамичните характеристики на газа, в четерите основни състояния по цикъла.



РЕШЕНИЕ :

Начертavamo цикъл на Карно на (P, V) диаграма, с основните състояния в точките 1; 2; 3; 4). Ако по цикъла на Карно се работи с идеален газ в температурния интервал (T_1, T_2) тогава

коэффициента на полезно действие ($\text{кпд} = \eta$) ще бъде представен чрез зависимостта:

(1)
$$\eta = \text{кпд} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{200}{600} = \frac{2}{3} \approx 0,67.$$

Разглеждаме работното тяло (въздух) също като идеален газ с молна маса $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$ и прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за всяка основна точка от цикъла - в случая т. [2] и т. [4].

За т. [2] $\rightarrow P_2 V_2 = \frac{M}{\mu} R_T T_1$ (1) и (2) $V_2 = \frac{M}{\mu} \frac{R_T T_1}{P_2} = 0,860 \text{ m}^3$

За т. [4] $\rightarrow P_4 V_4 = \frac{M}{\mu} R_T T_2$ (3) и (4) $V_4 = \frac{M}{\mu} \frac{R_T T_2}{P_4} = 0,287 \text{ m}^3$

За т. [1] и т. [3] не можем да приложим веднага основното уравнение, понеже не се знаят две основни характеристики (P, V).

Ето защо, ще използваме уравнението на адиабатата в координати (T, V), съответно за адиабатните процеси ($4 \rightarrow 1$) и ($2 \rightarrow 3$).

(5) $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$ или (6) $\frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

(7) $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ или (8) $\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

При сравняването на (6) с (8) се получава, че (9) $\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$.

От (6) чрез заместване на (V_4) от (4) се получава, че

(10) $V_1 = V_4 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_T T_2}{P_4}\right) \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0,0184 \text{ m}^3$

От (8) чрез заместване на (V_2) от (2) се получава, че

(11) $V_3 = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_T T_1}{P_2}\right) \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 13,406 \text{ m}^3$

Зависимостите (10) и (11) са общи решения на задачата за определяне на обемите (V_1) и (V_3).

За да определим наляганята (P_1 и P_3) ще използваме отново уравнението за състоянието на идеалния газ.

$$\text{За т. [1]} \rightarrow P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1 \quad (12) \text{ или } (13) \quad P_1 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R T_1}{V_1} \right)$$

В (13) заместваме (V_1) от (10) и получаваме, че

$$(14) \quad P_1 = \frac{M}{\mu} (R T_1) \frac{\mu P_4}{M R T_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = P_4 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = P_4 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Същата зависимост (14) можем да получим ако приложим уравнението на адиабатата в (P, T) координати за адиабатния процес (4 → 1). Тогава следва, че

$$(15) \quad P_4^{(1-\gamma)} T_2^{\gamma} = P_1^{(1-\gamma)} T_1^{\gamma} \quad \text{или } (16) \quad P_1 = P_4 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_4 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$\text{За т. [3]} \rightarrow P_3 V_3 = \frac{M}{\mu} R T_2 \quad (17) \text{ или } (18) \quad P_3 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R T_2}{V_3} \right)$$

Заместваме (V_3) от (11) в (18) и получаваме, че

$$(19) \quad P_3 = \frac{M}{\mu} (R T_2) \frac{\mu P_2}{M R T_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = P_2 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Получените зависимости (14) и (19) са общи решения за определяне на (P_1) и (P_3), като числените пресмятания дават следните стойности: $P_1 = 9,35 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ и $P_3 = 4,28 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. По този начин пресметвахме всички основни термодинамични характеристики на четерите основни състояния на цикъла. Получените резултати представяме в таблица за нагледност.

Накрая ще определим ($A_{\text{пол}}$) за един цикъл

$$(20) \quad A_{\text{пол}} = \frac{M}{\mu} R T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + \frac{M}{\mu} R T_2 \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)$$

СЪСТОЯНИЯ ВЕЛИЧИНИ	[1]	[2]	[3]	[4]
$T [^{\circ}K]$	600	600	200	200
$V [m^3]$	0,0184	0,860	13,406	0,287
$P [Pa]$	$9,35 \cdot 10^6$	$2,0 \cdot 10^5$	$4,28 \cdot 10^3$	$2,0 \cdot 10^5$

$$(21) A_{\text{пол.}} = \frac{M}{\mu} R_T \left[T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) - T_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) \right].$$

Но съгласно (9) следва, че (22) $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ и отчитайки

(21) окончателно получаваме, че

$$(23) A_{\text{пол.}} = \frac{M}{\mu} R_T \left[\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right] \cdot (T_1 - T_2)$$

Заместваме (V_2) от (2) и (V_1) от (10) в зависимост (23) и получаваме, че

$$(24) A_{\text{пол.}} = \frac{M}{\mu} R_T \left\{ \ln \left[\frac{\frac{M}{\mu} \left(\frac{R_T T_1}{D_2} \right)}{\frac{M}{\mu} \left(\frac{R_T T_2}{P_4} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \right] \right\} \cdot (T_1 - T_2).$$

$$(25) A_{\text{пол.}} = \frac{M}{\mu} R_T \left\{ \ln \left[\frac{P_4 T_1}{P_1 T_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right] \right\} \cdot (T_1 - T_2)$$

$$(26) A_{\text{пол.}} = \frac{M}{\mu} R_T \left\{ \ln \left[\left(\frac{P_4}{P_1} \right) \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] \right\} \cdot (T_1 - T_2).$$

Получената зависимост (26) е общо решение за определяне на ($A_{\text{пол.}}$) в задачата. Численото пресмятане от (26), при $\gamma =$

= 1,40 за двуатомни газове, дава следния резултат $A_{\text{пол.}} = 4,409 \cdot 10^5 \text{ J} = 440,9 \text{ kJ} \approx 441 \text{ kJ}$.

ЗАДАЧА № 119/ При извършване на цикъла на Карно газ е получил количество топлина $Q_1 = 16,77 \text{ kJ}$ от нагревателя и е извършил полезна работа $A_{\text{пол.}} = 5,59 \text{ kJ}$. Определете коефициента на полезно действие (КПД = η) при извършения цикъл и колко пъти (n) температурата на нагревателя (T_1) е по-висока от температурата на хладилника. Р Е Ш Е Н И Е :

Според теорията за цикъла на Карно

$$(1) \text{ КПД} = \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_{\text{пол.}}}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{където}$$

(Q_2) е количеството топлина, предадено на хладилника от работното тяло (газа) при изотермичното му свиване. От (1) следва, че

$$(2) \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{A_{\text{пол.}}}{Q_1} = \frac{Q_1 - A_{\text{пол.}}}{Q_1} \quad \text{и тогава}$$

$$(3) n = \frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_1 - A_{\text{пол.}}} \quad \text{Зависимостите (1) и (3) се явяват общи решения}$$

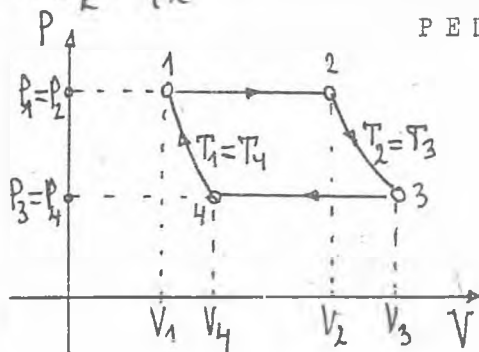
в задачата за определяне на ($\text{КПД} = \eta$) и на (n). Численото пресмятане от (1) и (3) дават съответно следния резултат: $\text{КПД} = \eta = 33,33\%$ и $n = \frac{T_1}{T_2} = 1,50$.

Допълнително към задачата, можем да определим от (1), че

$$(4) Q_2 = Q_1 - A_{\text{пол.}} = 16,77 - 5,59 = 11,18 \text{ kJ}.$$

1 ЗАДАЧА № 120 Един киломол идеален газ извършва цикъл, състоящ се от две изобари ($1 \rightarrow 2$) и ($3 \rightarrow 4$) и две изотерми ($2 \rightarrow 3$) и ($4 \rightarrow 1$). Докажете, че КПД = η на този цикъл е по-малък от

(КПД)_к = η_к на цикъл на Карно.



РЕШЕНИЕ:

Съгласно теорията на топливните цикли

$$(1) \text{КПД} = \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_{\text{пол.}}}{Q_1}$$

където: (Q_1) е топлината, приета от нагревателя, (Q_2)

и топлината отдадена на хладилника, а ($A_{\text{пол.}}$) е полезната работа, извършена от работното тяло (идеален газ). За да определим ($A_{\text{пол.}}$) трябва да използваме зависимостта

$$(2) A_{\text{пол.}} = A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 3} + A_{3 \rightarrow 4} + A_{4 \rightarrow 1}$$

Тогава определяме извършената работа при всеки процес:

$$(3) A_{1 \rightarrow 2} = P_1 (V_2 - V_1) \quad ; \quad (4) A_{2 \rightarrow 3} = R_r T_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

$$(5) A_{3 \rightarrow 4} = P_4 (V_4 - V_3) \quad ; \quad (6) A_{4 \rightarrow 1} = R_r T_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_4} \right)$$

Понеже сравнението на (КПД = η) на този цикъл трябва да стане с (КПД)_к = η_к за цикъл на Карно (7) η_к = 1 - (T₂/T₁), тогава се налага и работите при всеки конкретен процес от зависимостите (3 + 6) да бъдат по възможност представени чрез характеристичните температури (T₂ = T₃) и (T₁ = T₄). За всяко състояние на газа в точките (1 + 4) прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ - уравнението на Клапейрон.

$$(8) V_1 = \frac{R_r T_1}{P_1}$$

$$(9) V_2 = \frac{R_r T_2}{P_1}$$

$$(10) V_3 = \frac{R_r T_2}{P_4}$$

и (11) $V_4 = \frac{R_r T_1}{P_4}$ Тогава следва, че:

(12) $V_2 - V_1 = \frac{R_r}{P_1} (T_2 - T_1)$

(13) $V_4 - V_3 = \frac{R_r}{P_4} (T_1 - T_2)$

(14) $\frac{V_3}{V_2} = \frac{P_1}{P_4}$ и (15) $\frac{V_4}{V_1} = \frac{P_4}{P_1}$. Заместваме

(12 + 15) в (3 + 6) и получаваме работи при всеки процес заместваме в (2) като получаваме, че

(16) $A_{\text{пол.}} = R_r (T_2 - T_1) + R_r T_2 \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right) + R_r (T_1 - T_2) + R_r T_4 \ln\left(\frac{P_4}{P_1}\right)$

(17) $A_{\text{пол.}} = R_r (T_2 - T_4) \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right) = R_r (T_2 - T_1) \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right)$

Остава да определим количеството топлина (Q_1) получено от нагревателя за реализация на процеса (1 → 2 → 3).

(18) $Q_1 = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} = (C_{\mu})_p (T_2 - T_1) + A_{2 \rightarrow 3}$

(19) $Q_1 = (C_{\mu})_p (T_2 - T_1) + R_r T_2 \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right)$

Тогава (КПД = η) при този цикъл, съгласно зависимост (1) ще бъде:

(20) $\text{КПД} = \eta = \frac{A_{\text{пол.}}}{Q_1} = \frac{R_r (T_2 - T_1) \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right)}{(C_{\mu})_p (T_2 - T_1) + R_r T_2 \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right)}$

(21) $\text{КПД} = \eta = (T_2 - T_1) \left[T_2 + \frac{(C_{\mu})_p (T_2 - T_1)}{R_r \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right)} \right]^{-1}$

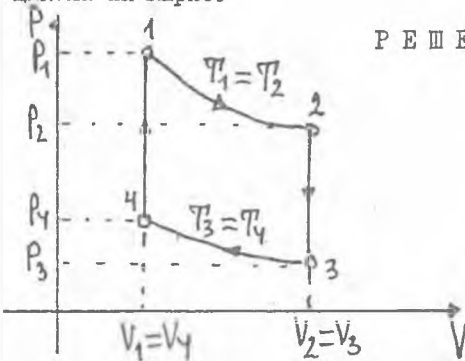
От зависимост (7) следва, че:

$$(22) \quad \eta_K = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

При сравняване на (21) с (22) следва, че

$$\eta < \eta_K$$

ЗАДАЧА № 121³ С един киломол идеален газ се осъществява кръгов процес, състоящ се от две изохори и две изотерми. Докажете, че КПД = η на този процес е по-малък от (КПД)_к = η_K от цикъла на Карно.



РЕШЕНИЕ :

За цикъла на Карно (1) (КПД)_к = $\eta_K = 1 - \frac{T_3}{T_1} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}$

За цикъла, при изобразените процеси (1 → 2 → 3 → 4 →

1) на графиката, следва, че

$$(2) \quad \text{КПД} = \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_{\text{пол.}}}{Q_1} \quad \text{където: } (Q_1) \text{ е}$$

количеството топлина, прието от нагревателя; (Q_2) - количеството топлина отдадено на хладилника, $(A_{\text{пол.}})$ е полезната работа, извършена от работното тяло (идеален газ). И тук

$$(3) \quad A_{\text{пол.}} = A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 3} + A_{3 \rightarrow 4} + A_{4 \rightarrow 1} \quad \text{Но в случая при изохорните процеси (2 → 3) и (4 → 1) следва, че}$$

$$(4) \quad A_{2 \rightarrow 3} = A_{4 \rightarrow 1} = 0. \quad \text{Тогава от (3) се получава, че}$$

$$(5) \quad A_{\text{пол.}} = A_{1 \rightarrow 2} + A_{3 \rightarrow 4} = R_r T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + R_r T_3 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right).$$

$$(6) A_{\text{пол}} = R_r \left[\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right] (T_1 - T_3) \text{ при условие, че}$$

$$(7) V_1 = V_4 \quad \text{и} \quad (8) V_2 = V_3 \quad \text{Остава да определим } (Q_1) \text{ от зависимостта}$$

$$(9) Q_1 = Q_{4 \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2} = (C_{\mu})_V (T_1 - T_3) + R_r T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Заместваме (6) и (9) в (2) и получаваме

$$(10) \kappa_{\text{пд}} = \eta = \frac{A_{\text{пол.}}}{Q_1} = \frac{R_r (T_1 - T_3) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}{(C_{\mu})_V (T_1 - T_3) + R_r T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}$$

$$(11) \kappa_{\text{пд}} = \eta = (T_1 - T_3) \left[T_1 + \frac{(C_{\mu})_V (T_1 - T_3)}{R_r \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} \right]^{-1}$$

Сравняваме (11) с (1) и получаваме, че $\eta_{\text{к}} > \eta$, понеже при еднакъв числител, знаменателя в (11) е по-голям от този в (1).

ЗАДАЧА № 122 Хладилна машина, работеща по цикъла на Карно поддържа в хладилна камера температура $T_1 = 260^\circ\text{К}$. За всеки цикъл машината отнема от хладилната камера количество топлина $Q_1 = 40 \text{ кДж}$ и го предава на обкръжаващата въздушна среда с температура $T_2 = 300^\circ\text{К}$. Определете мощността, употребена от хладилната машина, ако продължителността на цикъла е за време $\Delta t = 1,5$.

РЕШЕНИЕ :

Съгласно теорията, при обратния равновесен цикъл на Карно, по който работи хладилната машина, за нейния коефициент на полезно действие е в сила зависимостта:

$$(1) (\text{КПД})_{\text{хл.}} = \eta_{\text{хл.}} = \frac{|\dot{Q}_1|}{|\dot{\Delta A}|} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

Товага следва, че извършената работа (ΔA) за един цикъл ще бъде представена чрез

$$(2) |\Delta A| = \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) |\Delta Q_1|$$

а съответната мощност (N) ще бъде

$$(3) N = \frac{|\Delta A|}{\Delta t} = \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) \left[\frac{|\Delta Q_1|}{\Delta t} \right]$$

Получената зависимост

(3) е общото решение на задачата за определяне на употребената мощност (N) от хладилната машина при всеки цикъл. Численото решение при всеки цикъл. Численото решение от (3) дава следния резултат

$$(4) N = \left(\frac{300 - 260}{260} \right) \left(\frac{40 \cdot 10^3}{1,5} \right) = 4,103 \cdot 10^3 \text{ J} = 4,103 \text{ kJ.}$$

Допълнително към задачата можем да определим (КПД)_{хл.} = $\eta_{\text{хл.}}$ от (1). Товага се получава, че

$$(5) \eta_{\text{хл.}} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = \frac{260}{300 - 260} = \frac{260}{40} = 6,5.$$

ЗАДАЧА № 123 Домашен хладилник употребява от електричната мрежа мощност $N = 200 \text{ W}$. Температурата на обкръжаващата въздушна среда в стаята е $T_0 = 293^\circ \text{K}$. Определете температурата (T_1) в хладилната камера, ако отнетото количество топлина (ΔQ_1) от хладилната камера е пет пъти по-голямо от количеството консумирана електрична енергия при всеки работен цикъл на Карно.

РЕШЕНИЕ :

От теорията за хладилна машина, работеща по обратния равновесен цикъл на Карно следва, че коефициента на полезно действие

е (1) $(\text{КПД})_{\text{хл.}} = \eta_{\text{хл.}} = \frac{|\Delta Q_1|}{|\Delta A|} = \frac{T_1}{T_0 - T_1}$ Но съгласно условието на задачата

следва (2) $|\Delta Q_1| = 5 (N \Delta t) = 5 |\Delta A|$

Заместваме (2) в (1) и получаваме, че

(3) $\frac{5 |\Delta A|}{|\Delta A|} = \frac{T_1}{T_0 - T_1}$ или (4) $5 = \frac{T_1}{T_0 - T_1}$ Тогав

от (4) следва, че (5) $T_1 = \frac{5}{6} T_0 = \frac{5}{6} (293) = 244,2^\circ \text{K}$.

Допълнително към задачата можем да определим $(\text{КПД})_{\text{хл}} =$
 $= \eta_{\text{хл.}}$ от зависимост (1)

(6) $(\text{КПД})_{\text{хл.}} = \eta_{\text{хл.}} = \frac{244,2}{293 - 244,2} = \frac{244,2}{48,8} = 5,00$.

ЗАДАЧА № 124 В идеална топлинна машина, работеща по цикъла на Карно, за всеки килоджаул топлинна енергия, получена от нагревателя, се извършва работа $\Delta A = 320 \text{ J}$, при всеки един прав обратим и равновесен цикъл, от работното тяло. Да се определи $(\text{КПД} = \eta)$ на машината и температурата (T_1) на нагревателя, ако температурата на охладителя е $T_2 = 290^\circ \text{K}$.

РЕШЕНИЕ :

Съгласно условието на задачата, извършената работа ($A_{\text{пол}}$) от работното тяло при всеки цикъл ще бъде:

$$(1) A_{\text{пол.}} = \Delta A \left(\frac{Q_1}{1000} \right)$$

Съгласно теорията за (КЩД = η) е в сила зависимостта

$$(2) \text{кпд} = \eta = \frac{A_{\text{пол.}}}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

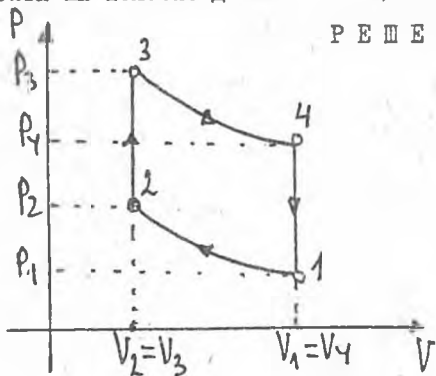
Заместваме (1) в (2) и получаваме, че

$$(3) \text{кпд} = \eta = \frac{\Delta A (Q_1)}{1000 (Q_1)} = \frac{\Delta A}{1000} = \frac{320}{1000} = 0,32$$

или окончателно получаваме, че КЩД (%) = η (%) = 32,0%. Заместваме (3) в (2) и получаваме зависимостта

$$(4) 0,32 = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{или (5) } T_1 = \frac{T_2}{0,68} = \frac{290}{0,68} = 426,5^\circ \text{K}$$

ЗАДАЧА № 125. На (P, V) диаграма е изобразен цикъл на двигателя на Отто, състоящ се от две изохори (2 → 3) и (4 → 1) и две адiabати (1 → 2) и (3 → 4). Известен е коефициента на свиване $\eta = \frac{V_1}{V_2}$ на работното тяло в състояние (V₁) и (V₂). Определете коефициента на полезно действие на цикъла (КЩД) = η .



РЕШЕНИЕ:

От теорията следва, че (1) КЩД =

$$= \eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}, \quad \text{където:}$$

(Q₁) е приетото количество топлина отработеното тяло при изохорния процес (2 → 3); а (Q₂) е отдаденото количество

топлина на околната среда при изохорния процес (4 → 1)

$$(2) Q_1 = Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_3 - T_2)$$

$$(3) Q_2 = Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_1 - T_4)$$

При адиабатните процеси (1 → 2) и (3 → 4) следва, че топлообмен не се осъществява и (4) $Q_{1 \rightarrow 2} = Q_{3 \rightarrow 4} = 0$.

Заместваме (2) и (3) в (1) и получаваме, че

$$(5) \text{КПД} = \eta = \frac{\frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_3 - T_2) + \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_1 - T_4)}{\frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_3 - T_2)}$$

$$(6) \text{КПД} = \eta = 1 + \left(\frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \right) = 1 - \left(\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \right)$$

$$(7) \text{КПД} = \eta = 1 - \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}$$

Процесите (1 → 2) и (3 → 4) са адиабатни и за тях написваме уравнението на адиабатата

$$(8) T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{или (9) } \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} = \eta^{\gamma-1}$$

$$(10) T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1} \quad \text{или (11) } \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_3}{T_4} = \eta^{\gamma-1}$$

От (9) и (11) следва зависимостта

$$(12) \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \quad \text{или (13) } \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \quad \text{. Като вземем}$$

под внимание под внимание (13) и (9), тогава (7) добива оконча-

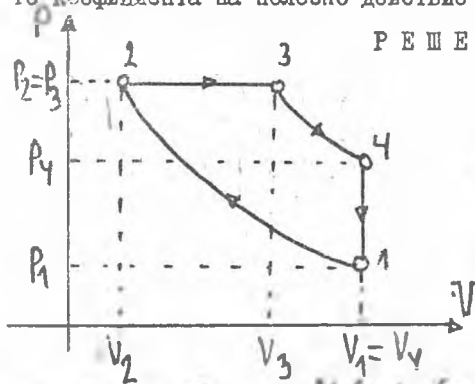
ТЪЛБИЯ ВИД

$$(14) \text{ КПД} = \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{T_1}{T_2/T_1} \right) = 1 - \frac{1}{n^{2\gamma-1}}$$

Получената зависимост (14) е общо решение на задачата за определяне на (КПД = η). Да направим числено пресмятане за КПД = η от (14) при условие, че $n_1 = 10$ и $\gamma = 1,40$ (работното тяло се извършва като двуатомен газ). Тогава от (14) се получава, че (КПД) $_1 = \eta_1 = 0,6019$ или $\eta_1 (\%) = 60,2\%$. При условие, че $n_2 = 5$ и $\gamma = 1,40$, тогава следва, че (КПД) $_2 = \eta_2 = 0,4747$ или $\eta_2 (\%) = 47,47\% \approx 47,5\%$.

ЗАДАЧА № 126' Работно тяло извършва цикъл на Дизел, състоящ се от адиабати (1 \rightarrow 2) и (3 \rightarrow 4), изобара (2 \rightarrow 3) и изохора (4 \rightarrow 1). Известен е коефициента на адиабатното свиване $n = V_1/V_2$ и коефициента на изобарното разширение $k = V_3/V_2$. Определете коефициента на полезно действие на (КПД = η) на цикъла.

РЕШЕНИЕ :



Записваме формулата (1) КПД =

$$= \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Приетото количество топлина (Q_1) е в процеса (1 \rightarrow 2) на изобарното разширение на газа.

(2) $Q_1 = Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{M}{\mu} (C_p)_p (T_3 - T_2)$ Отдаденото количество топлина от работното тяло на околната среда (Q_2) е при изохорния процес (4 \rightarrow 1).

$$(3) Q_2 = Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{M}{\mu} (C_v)_v (T_1 - T_4)$$

Заместваме (2) и (3)

в (1) и получаваме, че

$$(4) \text{ КПД} = \eta = \frac{\frac{M}{\mu} (C_{\mu})_p (T_3 - T_2) + \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_v (T_1 - T_4)}{\frac{M}{\mu} (C_{\mu})_p (T_3 - T_2)}$$

$$(5) \text{ КПД} = \eta = 1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \right] = 1 - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \right]$$

$$(6) \text{ КПД} = \eta = 1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right) \cdot \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)^{-1}$$

За адиабатните процеси (1 → 4) и (3 → 4) прилагаме уравнението на адиабатата и получаваме, че

$$(7) T_1 V_1^{\alpha-1} = T_2 V_2^{\alpha-1} \quad \text{или (8)} \quad \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\alpha-1} = \frac{T_2}{T_1} = n^{\alpha-1}$$

$$(9) T_3 V_3^{\alpha-1} = T_4 V_4^{\alpha-1} \quad \text{или (10)} \quad \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\alpha-1} = \frac{T_4}{T_3}$$

От (8) следва, че (11) $\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\alpha-1} = \frac{T_1}{T_2}$ Делим почленно (10)

на (11) и получаваме, че

$$(12) \frac{(T_4/T_3)}{(T_1/T_2)} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\alpha-1} = K^{\alpha-1}, \quad \text{Но от (12) следва, че}$$

$$(13) \frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2} K^{\alpha-1} \quad \text{или (14)} \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} K^{\alpha-1}$$

Заместваме (8) и (14) в (6) и получаваме, че

$$(15) \text{ КПД} = \eta = 1 - \frac{1}{\alpha n^{\alpha-1}} \left[\frac{(T_3/T_2) K^{\alpha-1} - 1}{(T_3/T_2) - 1} \right]$$

Прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ за състояние [2] и [3] и получаваме, че

$$(16) \quad p_2 V_2 = \frac{M}{\mu} R_r T_2 \quad \text{и} \quad (17) \quad p_2 V_3 = \frac{M}{\mu} R_r T_3$$

Делим почленно (17) на (16) и получаваме, че

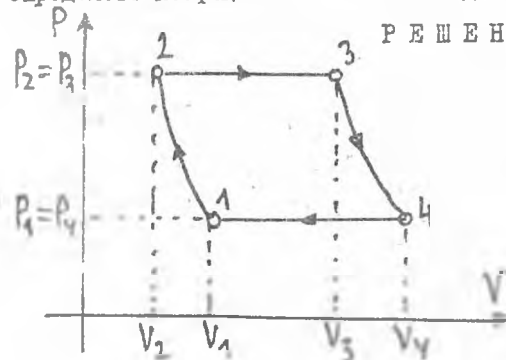
$$(18) \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = K$$

Заместваме (18) в (15) и получаваме окончателно, че

$$(19) \quad \eta_{\text{КПД}} = \eta = 1 - \frac{1}{\alpha \eta^{\alpha-1}} \left[\frac{K \cdot K^{\alpha-1} - 1}{K-1} \right] = 1 - \frac{K^{\alpha} - 1}{\alpha \eta^{\alpha-2} (K-1)}$$

Получената зависимост (19) е общото решение на задачата за определяне на (КПД = η). Нека да определим (КПД = η) на цикъла на Дизел от (19) при условие, че: $\alpha = 5$; $K = 2$ и $\alpha = 1,40$. Тогава се получава, че $\eta = 0,3850$ или $\eta (\%) = 38,5\%$.

ЗАДАЧА № 127. Идеален газ осъществява цикъл на правооточен въздушно-реактивен двигател, състоящ се от две адиабати ($1 \rightarrow 2$) и ($3 \rightarrow 4$) и две изобари ($2 \rightarrow 3$) и ($4 \rightarrow 1$). Известен е коефициента на адиабатно свиване на газа ($\alpha = p_2/p_1$) при процеса ($1 \rightarrow 2$). Определете коефициента на полезно действие при този вид цикъл.



РЕШЕНИЕ:

Използваме отново формулата

$$(1) \quad \eta_{\text{КПД}} = \eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}$$

като (Q_1) е количеството топлина получено от газа в процеса ($2 \rightarrow 3$) на изобарното

разширение, а (Q_2) е отдадено количество топлина от газа на околната среда при процеса ($4 \rightarrow 1$) на изобарно свиване.

$$(2) \quad Q_1 = Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{M}{\mu} (C_p)_p (T_3 - T_2) \quad \text{и}$$

$$(3) \quad Q_2 = Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{M}{\mu} (C_p)_p (T_1 - T_4)$$

Заместваме (2) и (3) в (1) и получаваме, че

$$(4) \quad \text{кпд} = \eta = \frac{\frac{M}{\mu} (C_p)_p (T_3 - T_2) + \frac{M}{\mu} (C_p)_p (T_1 - T_4)}{\frac{M}{\mu} (C_p)_p (T_3 - T_2)}$$

$$(5) \quad \text{кпд} = \eta = 1 - \left(\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \right) = 1 - \frac{T_1}{T_2} \left[\frac{(T_4/T_1) - 1}{(T_3/T_2) - 1} \right]$$

За адиабатните процеси ($1 \rightarrow 2$) и ($3 \rightarrow 4$) прилагаме основното уравнение на адиабатата в (T, p) координати и получаваме, че

$$(6) \quad T_1 p_1^{\gamma-1} = T_2 p_2^{\gamma-1} \quad \text{или (7) } \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$(8) \quad T_3 p_3^{\gamma-1} = T_4 p_4^{\gamma-1} \quad \text{или (9) } \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{T_4}{T_3} = n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

От сравняването на (7) и (9) следва, че

$$(10) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \quad \text{или (11) } \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \quad \text{Заместваме (7) и (11) в (5)}$$

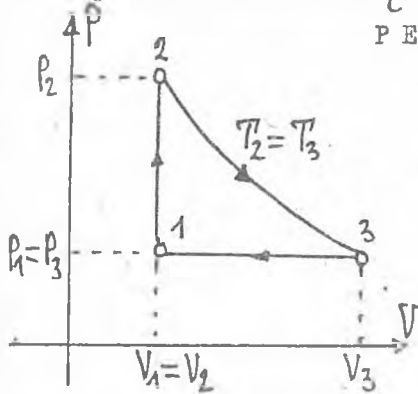
и получаваме окончателно

$$(12) \quad \text{кпд} = \eta = 1 - n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - \frac{1}{n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Получената зависимост (12) е общо решение на задачата за определяне на (КПД = η) на този вид цикъл.

Като пример, да приемем, че $\alpha = 1,40$ и $\eta = 10$, тогава от (12) следва, че КПД = $\eta = 0,4820$ или $\eta (\%) = 48,2\%$.

ЗАДАЧА № 128. Въздух с маса $M = 25$ г се намира при температура $T_1 = 280^\circ\text{K}$ в обем $V_1 = 8$ литра. Отначало газа е изохорно ($V_1 = V_2$) загреят до температура $T_2 = 473^\circ\text{K}$. След това, при изотермично разширение ($T_2 = T_3$) газа се довежда до налягане $P_3 = P_1$. След това, чрез изобарно свиване газа се довежда до първоначалното му състояние. Определете коефициента на полезно действие при този цикъл (КПД = η).



РЕШЕНИЕ :

Съгласно теорията

$$(1) \text{КПД} = \eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}$$

където: (Q_1) е полученото количество топлина от газа при процеса ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$); а (Q_2) е количеството отдадена топлина от газа при процеса ($3 \rightarrow 1$).

$$(2) Q_1 = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_2 - T_1) + \frac{M}{\mu} P T_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

$$(3) Q_2 = Q_{3 \rightarrow 1} = \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_P (T_1 - T_3)$$

Заместваме (2) и

(3) в (1) и получаваме, че

$$(4) \text{КПД} = \eta = 1 - \frac{(C_{\mu})_P (T_3 - T_1)}{(C_{\mu})_V (T_2 - T_1) + P T_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{P T_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)}{R T_2} \right) \left(\frac{C_{\mu})_P}{C_{\mu})_V} \right)}$$

Но процеса е (3 → 1) е изобарен и тогава (5) $\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_1}$. Но съгласно условието на задачата, са изпълнени следните зависимости $V_1 = V_2$ и $T_3 = T_2$. Тогава от (5) следва, че

(6) $\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_2}{T_1}$ Заместваме (6) в (4) и получаваме окончателно, че

(7) $\text{КПД} = \eta = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\gamma} + [R \cdot T_2 \ln(\frac{T_2}{T_1})] [(C_{\mu})_p (T_2 - T_1)]^{-1}}$

Получената зависимост (7) се явява общо решение на задачата за определяне на (КПД = η) при този вид цикъл. За въздух $\gamma = 1,40$ и $(C_{\mu})_p = \gamma (C_{\mu})_v = \gamma \mu (c_v) = 1,40 (29) (730) = 29638 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Численото пресмятане по (7) дава следния резултат КПД = $\eta = 0,0696$ или $\eta (\%) = 6,96\% \approx 7,0\%$.

Допълнително към задачата можем да определим стойностите на основните физични характеристики на съответните основни състояния [1; 2; 3] по целия цикъл (1 → 2 → 3 → 1).

За целта за всяко основно състояние [1; 2; 3] прилагаме основното уравнение за състоянието на идеалния газ, като получаваме, че:

(8) $P_1 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R \cdot T_1}{V_1} \right) = 2,509 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2,477 \text{ физ. атм.}$

(9) $P_2 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R \cdot T_2}{V_1} \right) = 4,238 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 4,184 \text{ физ. атм.}$

(10) $V_3 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R \cdot T_2}{P_1} \right) = 0,0135 \text{ m}^3 = 13,5 \text{ литра.}$

Следователно, коефициента на изотермично разширение при цикъла ще бъде

$$n = \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{0,0135}{0,0080} = 1,688 \approx 1,69.$$

Коефициента (K) на изохорно нарастване на налягането ще бъде: $K = \frac{P_2}{P_1} = \frac{4,1837}{2,4766} = 1,69.$

От (7) ясно се вижда, че за определяне на (КПД = η) за цикъла не е необходимо да се знае масата (M) на работното тяло. Знанието на числената стойност на масата (M) на газа, дава възможност да се определят числените стойности на ($P_1 ; P_2 ; V_3$). Допълнително към задачата могат да бъдат определени плътността на газа (ρ), броят на молекулите в единица обем (n_0) и средната кинетична енергия ($\Sigma_{к}$) на една молекула, при всяко от основните състояния [1; 2; 3] на цикъла ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$).

ЗАДАЧА № 129. Топлоизолиран съд е разделен на две части с преграда, като в едната половина на съда се съдържа $M = 0,20 \text{ kg}$ водород (H_2), а втората половина се намира при висок вакуум. Преградата се маха и газът запълва целия обем. Като се приеме, че газът се проявява като идеален, да се определи нарастването (ΔS_E) на ентропията.

РЕШЕНИЕ :

H_2	
M	
$\frac{V}{2}$	$\frac{V}{2}$

H_2
M
V

Първо ще определим изменението на вътрешната енергия (ΔU) на газа при преход от състояние [1] в състояние [2]. Тогава е в сила зависимостта:

$$(1) \Delta U_{\mu} = (U_{\mu})_2 - (U_{\mu})_1 = (C_{\mu})_2 T_2 - (C_{\mu})_1 T_1 = (C_{\mu})_V (T_2 - T_1)$$

Съгласно дефиниционното равенство за изменението на ентропията

(втория принцип на термодинамиката, представен в интегрален вид) следва, че

$$\begin{aligned}
 (2) (\Delta S_E)_\mu &= \int_1^2 \frac{(\delta Q)_\mu}{T} = \int_1^2 \frac{dU_\mu + \delta A_\mu}{T} = \int_1^2 \frac{dU_\mu}{T} + \int_1^2 \frac{\delta A_\mu}{T} = \\
 &= \int_1^2 (C_{\mu})_V \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{p dV_\mu}{T} = (C_{\mu})_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \int_1^2 R_r \frac{dV_\mu}{V_\mu} = \\
 &= (C_{\mu})_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R_r \ln\left[\frac{(V_\mu)_2}{(V_\mu)_1}\right]
 \end{aligned}$$

В случая тук се прилага основното уравнение за състоянието на 1 kmol идеален газ (3) $p V_\mu = R_r T$ или (4) $\frac{p}{T} = \frac{R_r}{V_\mu}$.

Приемаме, че процеса на разширение на газа във вакуумното пространство на втората половина на обема ($V/2$) е адиабатен и тогава прилагаме уравнението на адиабатата за преход от състояние [1] в състояние [2].

$$(5) T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{или} \quad (6) \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

В разглеждания случай $V_2 = 2 V_1$ (7) и като заместим (6) и (7) в (2) получаваме, че

$$(8) (\Delta S_E)_\mu = (C_{\mu})_V \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} + R_r \ln\left(\frac{2 V_1}{V_1}\right) = (C_{\mu})_V \ln\left(\frac{1}{2}\right) + R_r \ln 2.$$

Водородът има: молекулна маса $\mu(H_2) = 2 \text{ kg/kmol}$; специфична топлиемост при постоянен обем $C_V(H_2) = 1,01 \cdot 10^4 \text{ J/kg.K}$; коефициент на Поасон $\gamma = 1,40$. Тогава

$$(9) (C_{\mu})_V = \mu C_V = 2(1,01 \cdot 10^4) = 2,02 \cdot 10^4 \text{ J/kg.K.}$$

Получената зависимост (8) може да се приеме за общо решение на задачата за определяне на $(\Delta S_E)_\mu$. Численото пресмятане от (8)

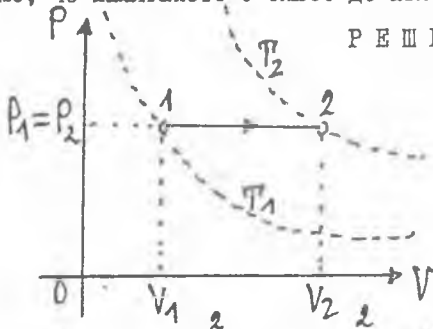
дава следния резултат (10) $(\Delta S_E)_\mu = -5,60063 \cdot 10^3 + 5,76360 \cdot 10^3 = 0,16297 \cdot 10^3 \text{ J/K} = 163 \text{ J/K}$.

В задачата е дадена масата $M = 0,2 \text{ kg}$, която отговаря на $n_\mu = \frac{M}{\mu} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ кмол}$. Тогава за тази маса газ (H_2) следва, че изменението на ентропията ще бъде

$$(11) \Delta S_E(n_\mu) = n_\mu (\Delta S_E)_\mu = 0,1 (163) = 16,3 \text{ J/K}.$$

ЗАДАЧА № 130: Азот с маса $M = 0,4 \text{ kg}$ се нагрява изобарно от температура $T_1 = 320^\circ\text{K}$ до температура $T_2 = 400^\circ\text{K}$. Да се определи изменението на ентропията (ΔS_E), като се приеме, че налягането е близо до атмосферното.

РЕШЕНИЕ:



Отново прилагаме втория принцип на термодинамиката, представен в интегрална форма

$$(1) (\Delta S_E)_\mu = \int_1^2 \frac{\delta Q_\mu}{T} = \int_1^2 \frac{dU + PdV_\mu}{T}$$

$$(1) (\Delta S_E)_\mu = \int_1^2 (C_\mu)_V \frac{dT}{T} + \int_1^2 R_r \frac{dT}{T} = [(C_\mu)_V + R_r] \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = (C_\mu)_P \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Можем да осъществим следното представяне

$$(2) (C_\mu)_P = (C_\mu)_V + R_r = \frac{R_r}{\alpha - 1} + R_r = \frac{\alpha R_r}{\alpha - 1}$$

Заместваме (2) в (1) и получаваме

$$(3) (\Delta S_E)_\mu = \left(\frac{\alpha R_r}{\alpha - 1}\right) \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

при $\alpha = 1,40$ за двуатомни газове, както се

проявява и молекулата на азота (N_2). Понеже, газът има маса

$M = 0,40 \text{ kg}$, тогава

$$(4) \quad n_{\mu} = \frac{M}{\mu} = \frac{0,40}{28} = 0,0143 \text{ кмол.}$$

при молна маса на азота $\mu(N_2) = 28 \text{ кг/кмол}$. Следователно, окончателната зависимост ще бъде от вида

$$(5) \quad \Delta S_E = n_{\mu} (\Delta S_E)_{\mu} = \frac{n_{\mu} \alpha R_r}{(\alpha - 1)} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Получената зависимост (5) е общо решение на задачата за определяне на (ΔS_E) . Численото пресмятане от (5) дава следния резултат:

$$\Delta S_E = 92,772 \text{ J/K. Ако газът е в количество } 1 \text{ кмол, тогава}$$

$$(\Delta S_E)_{\mu} = \frac{\Delta S_E}{n_{\mu}} = \frac{92,772}{0,01429} = 6493,9 \text{ J/K} \approx 6494 \text{ J/K.}$$

ЗАДАЧА № 131- Два съда, обемите на които са $V_1 = 1,6$ литра и $V_2 = 3,4$ литра, съдържат съответно $M_1 = 0,014 \text{ kg}$ въглероден окис (CO) и $M_2 = 0,016 \text{ kg}$ кислород (O_2). Температурата на газовете е една и съща. Съдовете се съединяват и газовете се смесват. Определете изменението на ентропията при този процес.

РЕШЕНИЕ :

Първи начин: Използваме интегралната форма на втория принцип на термодинамиката

$$(1) \quad (\Delta S_E)_{\mu} = \int_1^{2*} \frac{\Delta Q_{\mu}}{T} = \int_1^{2*} \frac{dU_{\mu}}{T} + \int_1^{2*} \frac{p dV_{\mu}}{T}$$

$$(2) \quad (\Delta S_E)_{\mu} = \int_1^{2*} \frac{(C_{\mu})_V dT}{T} + \int_1^{2*} \frac{R_r dV_{\mu}'}{V_{\mu}} = (C_{\mu})_V \ln\left(\frac{T_2^*}{T_1}\right) + R_r \ln\left(\frac{V_2^*}{V_1}\right).$$

Но в случая приемаме, че смесването на газовете при разширение е изотермично и тогава $T_1 = T_2^*$, тогава от (2) следва

$$(3) (\Delta S_E)_\mu = R_T \ln \left(\frac{V_2^*}{V_1} \right) = R_T \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right)$$

За маса (M) kg , тогава

$$(4) \Delta S_E(M) = n_\mu (\Delta S_E)_\mu = n_\mu R_T \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right)$$

Първо определяме, че $n_\mu(\text{CO}) = \frac{M(\text{CO})}{\mu(\text{CO})} = \frac{0,014}{28} = 5 \cdot 10^{-4}$ кмол при $\mu(\text{CO}) = 28$ kg/кмол, а след това $n_\mu(\text{O}_2) = \frac{M(\text{O}_2)}{\mu(\text{O}_2)} = \frac{0,016}{32} = 5 \cdot 10^{-4}$ кмол.

Прилагаме последователно зависимост (4) за газа и получаваме, че

$$(5) [\Delta S_E(M)]_{\text{CO}} = 5 \cdot 10^{-4} (8315) \ln \left(\frac{1,6 + 3,4}{1,6} \right) = 4,737 \text{ J/K}$$

$$(6) [\Delta S_E(M)]_{\text{O}_2} = 5 \cdot 10^{-4} (8315) \ln \left(\frac{1,6 + 3,4}{3,4} \right) = 1,603 \text{ J/K}$$

Тогава общото изменение на ентропията за цялата газова система от (CO) и (O₂) ще бъде

$$(7) \Delta S_E = (\Delta S_E)_{\text{CO}} + (\Delta S_E)_{\text{O}_2} = 4,737 + 1,603 = 6,340 \text{ J/K}$$

Втори начин: Съединението на двата съда не изменя вътрешната енергия на всеки от газовете (CO) и (O₂), но увеличава достъпния за всяка молекула от дадения газ обем в съответно число

пъти:

$$n(\text{CO}) = \frac{1,6 + 3,4}{1,6} = \frac{5}{1,6} = 3,125$$

$$n(\text{O}_2) = \frac{1,6 + 3,4}{3,4} = \frac{5}{3,4} = 1,471$$

пъти и

Числото на достъпните за молекулата състояния е пропорционално на обема на съда. Затова числото на достъпните за

една молекула състояния нараства (\mathcal{N}) пъти. Тъй като в съда може да има общо N молекули, тогава числото на достъпните за всички (N) молекули състояния ще се увеличи $(n)^N$ пъти. Тогава началното число достъпни състояния ако приемем за (Ω_0), а крайното за Ω в сила е зависимостта (8) $\Omega = (n)^N \Omega_0$ и тогава $\Omega \gg \Omega_0$. Но съгласно формулата на Болцман, ентропията се дава със зависимостта (9) $S_E = k_B \ln \Omega$. В случая (Ω) играе роля на термодинамичната вероятност (W_T). Изменението на ентропията на газа ще бъде

$$(10) \Delta S_E = S_E - (S_E)_0 = k_B \ln \Omega - k_B \ln \Omega_0$$

$$(11) \Delta S_E = k_B \ln \frac{\Omega}{\Omega_0} = k_B \ln (n)^N = k_B N \ln n$$

Прилагаме окончателната зависимост (11) за всеки един от газовете (CO) и (O_2), като предварително определяме броя на молекулите

$$(12) N(CO) = \eta_{CO} N_A = 5 \cdot 10^{-4} (6,023 \cdot 10^{26}) = 30,115 \cdot 10^{22} = 3,0115 \cdot 10^{23}$$

$$(13) N(O_2) = \eta_{O_2} N_A = 5 \cdot 10^{-4} (6,023 \cdot 10^{26}) = 3,0115 \cdot 10^{23}$$

Получава се, че $N(CO) = N(O_2)$ - тоест броя на молекулите на двата газа е един и същ

$$(14) S_E(CO) = k_B N(CO) \ln [n(CO)] = k_B N(CO) \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right)$$

$$(15) \Delta S_E(CO) = (1,38 \cdot 10^{-23}) 3,0115 \cdot 10^{23} \ln \left(\frac{1,6 + 3,4}{1,6} \right) = 4,735 \text{ J/K}$$

$$(16) \Delta S_E(O_2) = k_B N(O_2) \ln [n(O_2)] = k_B N(O_2) \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_2} \right)$$

$$(17) \Delta S_E(O_2) = (1,38 \cdot 10^{-23}) 3,0115 \cdot 10^{23} \ln \left(\frac{1,6 + 3,4}{3,4} \right) = 1,603 \text{ J/K}$$

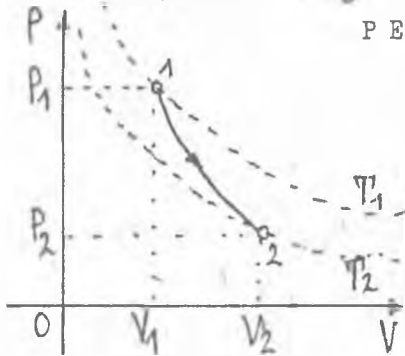
Тогава общото изменение на ентропията на цялата газова система от двата газа (CO) и (O_2) ще бъде

$$\Delta S_E = \Delta S_E(\text{CO}) + \Delta S_E(\text{O}_2) = 4,735 + 1,603 = 6,338 \text{ J/K}.$$

Както се вижда и по двата начина се получава почти една и съща стойност на ().

ЗАДАЧА № 132. В процеса на политропно разширение към маса $M = 4 \text{ kg}$ въздух е подадено количество топлина $Q = 90 \text{ kJ}$. Температурата на газа се изменя от $t_1 = 25^\circ\text{C}$ до $t_2 = -37^\circ\text{C}$. Определете константата на политропния процес (α_n) и изменението на ентропията (ΔS_E) на газа.

РЕШЕНИЕ :



Количеството прието топлина от газа при политропното разширение може да се представи със зависимостта

$$(1) Q = \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_{\alpha_n} (T_2 - T_1)$$

Но за политропен процес е из-

пълнена зависимостта

$$(2) (C_{\mu})_{\alpha_n} = \left(\frac{\alpha_n - \gamma}{\alpha_n - 1} \right) \frac{R_r}{\gamma - 1} = \left(\frac{\alpha_n - \gamma}{\alpha_n - 1} \right) (C_{\mu})_V$$

Заместваме (2) в (1) и получаваме, че

$$(3) Q = \frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V \left(\frac{\alpha_n - \gamma}{\alpha_n - 1} \right) (T_2 - T_1)$$

От (3) трябва да определим (α_n),

като приемем, че

$$(4) X = \frac{Q}{\frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_2 - T_1)} \quad \text{и (5) } X = \frac{\alpha_n - 2\epsilon}{\alpha_n - 1}$$

Тогава от (5) следва, че (6) $\alpha_n = \frac{2\epsilon - X}{1 - X}$ Заместваме
(4) в (6) и получаваме, че

$$(7) \alpha_n = \left[2\epsilon - \frac{Q}{\frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_2 - T_1)} \right] \cdot \left[1 - \frac{Q}{\frac{M}{\mu} (C_{\mu})_V (T_2 - T_1)} \right]^{-1}$$

В случая (8) $(C_{\mu})_V = \mu (C_V) = 29(730) = 21170 \text{ J/кмол.К.}$
при приемане, че μ (въздух) = 29 kg/кмол и C_V (въздух) = 730 J/kg.K .

Получената зависимост (7) е общо решение на задачата за определяне на (α_n) . Численото пресмятане от (7) дава следния резултат $\alpha_n = 1,7957$.

Премитнаваме към определяне на изменението на ентропията ΔS_E при политропния процес

$$(9) \Delta S_E = \frac{M}{\mu} \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{M}{\mu} \int_1^2 \left(\frac{dU_{\mu} + PdV_{\mu}}{T} \right)$$

$$\Delta S_E = \frac{M}{\mu} \left[\int_{T_1}^{T_2} (C_{\mu})_V \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{PdV}{T} \right]$$

Но от основното уравнение за състоянието на идеалния газ

$$(10) PV_{\mu} = R_r T \quad \text{и (11) } \frac{P}{T} = \frac{R_r}{V_{\mu}} \quad \text{Тогава заместваме}$$

$$(11) \text{ в (9) и получаваме, че}$$

$$(12) \Delta S_E = \frac{M}{\mu} \left\{ (C_{\mu})_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R_r \ln \left[\frac{(V_{\mu})_2}{(V_{\mu})_1} \right] \right\}$$

Понеже процеса (1 → 2) е политропен, тогава от уравнението за политропен процес, следва, че

$$(13) T_1 (V_{\mu})_1^{\alpha_n - 1} = T_2 (V_{\mu})_2^{\alpha_n - 1} \quad \text{и (14) } \frac{(V_{\mu})_2}{(V_{\mu})_1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_n - 1}}$$

Заместваме (14) в (12) и получаваме окончателно, че

$$(15) \Delta S_E = \frac{M}{\mu} \left[(C_{p, V})_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R_r \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_{n-1}}} \right]$$

Получената зависимост (15) е общо решение на задачата за определяне на (ΔS_E). Численото пресмятане от (15) дава следния резултат $\Delta S_E = 342,83 \text{ J/K}$.

Допълнително към задачата можем да определим и другите основни термодинамични характеристики на газа в началното [1] и крайното [2] състояния. За целта приемаме, че в началното (стартово) състояние въздуха има налягане $P_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Тогава от основното уравнение за идеалния газ

$$(16) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_1 \quad \text{или} \quad (17) V_1 = \frac{M}{\mu} \left(\frac{R_r T_1}{P_1} \right) \text{ определяме, че}$$

$$V_1 = 0,854 \text{ m}^3 = 854 \text{ литра. От зависимостта (14) следва,$$

$$(18) V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_{n-1}}} \quad \text{и тогава получаваме, че}$$

$$V_2 = 1,1449 \text{ m}^3 = 1144,9 \text{ литра} \approx 1145 \text{ литра (тоест обема нараства 1,34 пъти при политропното разширение).$$

Накрая ще определим и налягането (P_2) пак от уравнението на политропния процес

$$(19) T_1^{\alpha_n} \cdot P_1^{1-\alpha_n} = T_2^{\alpha_n} \cdot P_2^{1-\alpha_n} \quad \text{или} \quad (20) \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1-\alpha_n} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\alpha_n}$$

при окончателно получаваме, че

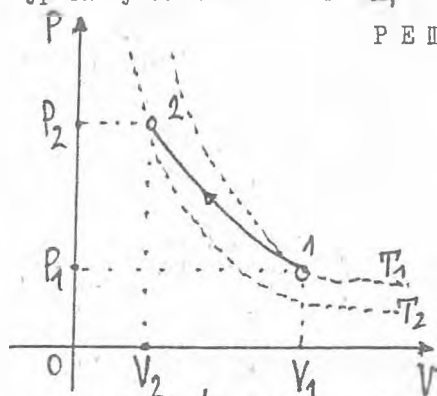
$$(21) P_2 = P_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}} = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n-1}} = 4 \cdot 10^5 (0,5907) = 2,363 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Следователно при политропното разширение на въздуха от състояние [1] до състояние [2] налягането му е намаляло с

$$\frac{1}{0,5907} = 1,693 \text{ пъти.}$$

ЗАДАЧА № 133. Определете изменението на ентропията (ΔS_E) на маса $M = 1 \text{ kg}$ въздух, ако неговото налягане се увеличава от $P_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ до $P_2 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, а температурата му се понижават от $t_1 = 327^\circ\text{C}$ до $t_2 = 127^\circ\text{C}$.

РЕШЕНИЕ :



Осъществява се политропния процес ($1 \rightarrow 2$), на който можем да определим коефициента (α_n) чрез прилагане на уравнението на политропата за двете състояния на газа - начално [1] и крайно [2]

$$(1) P_1^{1-\alpha_n} \cdot T_1^{\alpha_n} = P_2^{1-\alpha_n} \cdot T_2^{\alpha_n}$$

$$\text{или } (2) \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1-\alpha_n} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\alpha_n}$$

$$(3) \left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}}$$

$$\text{или } (4) \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Окончателно от (4) получаваме, че

$$(5) \alpha_n = \left[\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \cdot \left[\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \right] \right]^{-1}$$

Това е общото решение на задачата за определяне на (α_n).

Численото пресмятане от (5) дава следния резултат $\alpha_n = 0,7987 \approx 0,80$. Преминваме към определяне на изменението на ентропията (ΔS_E) при политропния процес ($1 \rightarrow 2$).

$$(6) \Delta S_E = \frac{M}{\mu} \left[\int_1^2 (C_{\mu})_V \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{P dV_{\mu}}{T} \right]$$

От основното уравнение за състоянието на идеалния газ следва, че

$$(7) P V_{\mu} = R_r T \quad \text{и} \quad (8) \frac{P}{T} = \frac{R_r}{V_{\mu}} \quad . \text{Заместваме (8)}$$

в (6) и получаваме, че

$$(9) \Delta S_E = \frac{M}{\mu} \left\{ (C_{\mu})_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R_r \ln \left[\frac{(V_{\mu})_2}{(V_{\mu})_1} \right] \right\}$$

Прилагаме уравнението за състоянието на идеалния газ за началното [1] и крайното [2] състояние на газа

$$(10) P_1 (V_{\mu})_1 = R_r T_1 \quad \text{и} \quad (11) P_2 (V_{\mu})_2 = R_r T_2$$

Тогава (12) $\frac{(V_{\mu})_2}{(V_{\mu})_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \cdot \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$ Заместваме (12)

ме, че

$$(13) \Delta S_E = \frac{M}{\mu} \left\{ (C_{\mu})_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R_r \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \right\}$$

В случая (14) $(C_{\mu})_p = (C_{\mu})_V + R_r$ от уравнението
на Роберт-Майер и (15) $(C_{\mu})_p = \alpha (C_{\mu})_V = \alpha \mu C_V = 1,40(29)$.

730 = 29638 J/kmol.K за въздуха (при $\alpha = 1,40$, $\mu = 29$

kg/kmol и $C_V = 730$ J/kg.K). Получената зависимост (13)

се явява общо решение на задачата за определяне на (ΔS_E) . Численото пресмятане от (13) дава следния резултат $\Delta S_E = -875,85$ J/K.
= -0,876 kJ/K .

ЗАДАЧА № 134. Определете изменението на ентропията (ΔS_E) при изотермично свиване ($T_1 = T_2$) на количество вещество $n_{\mu} = 1 \text{ mol}$ кислород (O_2) от обем V_1 до обем $V_2 = \frac{1}{3} V_1$.

РЕШЕНИЕ:

Първи начин: Чрез използване на втория закон на термодинамиката представен в интегрален вид

$$(1) (\Delta S_E)_{\mu} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\mu}}{T} = \int_1^2 \frac{(C_{\mu})_V dT}{T} + \int_1^2 \frac{p dV_{\mu}}{T}$$

Но съгласно уравнение за състоянието на идеален га (2) $pV_{\mu} = p_r T$ или (3) $(p/T) = (R_r/V_{\mu})$. Заместваме (3) в (1) и получаваме, че

$$(4) (\Delta S_E)_{\mu} = (C_{\mu})_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R_r \ln \left[\frac{(V_{\mu})_2}{(V_{\mu})_1} \right]$$

Но в случая при изотермичен процес на свиване $T_1 = T_2$ и

(5) $\ln(T_2/T_1) = 0$, а (6) $V = \frac{M}{\mu} V_{\mu} = n_{\mu} V_{\mu}$ и

(7) $V_{\mu} = (V/n_{\mu})$.
Следователно (8) $\frac{(V_{\mu})_2}{(V_{\mu})_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{(1/3)V_1}{V_1} = \frac{1}{3}$

Заместваме (5) и (8) в (4) като получаваме окончателно, че

(9) $(\Delta S_E)_{\mu} = R_r \ln \left(\frac{1}{3} \right)$ и (10) $\Delta S_E = n_{\mu} (\Delta S_E)_{\mu}$

Заместваме (9) в (10) и получаваме, (11) $\Delta S_E = n_{\mu} R_r \ln \left(\frac{1}{3} \right)$.

Това е общото решение на задачата за определяне на (ΔS_E). В случая $n_{\mu} = 1 \text{ mol} = 10^{-3} \text{ kmol}$. Численото пресмятане от (11) дава следния резултат $\Delta S_E = -9,135 \text{ J/K}$.

Втори начин: При изотермично свиване не се изменя вътрешната енергия на газа, но се намаля достъпния за всяка молекула

обем с $(V_2/V_1) = \frac{1}{3}$ пъти. Тогава числото на достъпните за всички (N_A) молекули в 1 kmol газ се намалява с $(\frac{V_2}{V_1})^{N_A} = (\frac{1}{3})^{N_A}$ пъти. Следователно, ако при състояние [1] броят на достъпните състояния за (N_A) молекули е (Ω_1), тогава за крайното състояние [2], броят на достъпните състояния е Ω_2 , като

(2) $\Omega_2 = \Omega_1 (\frac{V_2}{V_1})^{N_A}$. В случая $\Omega_2 \ll \Omega_1$. Съгласно формулата на Болцман (13) $S_E = k_B \ln \Omega$ и тогава

$$(14) (\Delta S_E) = (S_E)_2 - (S_E)_1 = k_B \ln \Omega_2 - k_B \ln \Omega_1 =$$

$$= k_B \ln \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) = k_B \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{N_A} = k_B N_A \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = R_T \ln \left(\frac{1}{3} \right)$$

В заключение (15)

$$\Delta S_E = n_\mu (\Delta S_E)_\mu = n_\mu R_T \ln \left(\frac{1}{3} \right)$$

Получената зависимост (15) отговаря на (11). И по втория начин на решаване на задачата следва, че $\Delta S_E = -9,135 \text{ J/K}$.

ЗАДАЧА № 135 Опитът показва, че количество вещество $n_\mu = 1 \text{ mol}$ от всеки идеален газ при стайна температура и нормално атмосферно налягане $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ заема обем $V = 22,4$ литра. Използвайки този резултат, определете големината на елементарния топлинен квант енергия ($k_B T$) при стайна температура в [eV]. От определението за абсолютна температура намерете процентното нарастване на числото на състоянията, достъпни за такава система, при нарастване на енергията на $\Delta E = 10^{-3} \text{ eV}$.

РЕШЕНИЕ :

Превръщаме мерните единици на дадените физични величини в система СИ: $n_\mu = 1 \text{ mol} = 10^{-3} \text{ kmol}$ и $V_\mu = 22,4 \text{ m}^3/\text{kmol}$. В количество вещество 1 kmol се съдържат $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ молекули (число на Авогадро). Тогава броя на молекулите в единица обем (n_0) ще бъде

$$(1) n_0 = \frac{N_A}{V_{\mu}} = \frac{6,023 \cdot 10^{26}}{22,4} = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

Използваме основното уравнение на кинетичната теория на идеалния

газ (2) $p_0 = n_0 k_B T$ и тогава

$$(3) k_B T = \frac{p_0}{n_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{2,69 \cdot 10^{25}} = 3,769 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$k_B T = \frac{3,769 \cdot 10^{-21}}{1,60 \cdot 10^{-19}} [\text{eV}] = 2,355 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$$

По определението за абсолютна температура следва, че

$$(3) \frac{1}{k_B T} = \frac{\partial(\ln \Omega)}{\partial E} \quad \text{или (4) } k_B T = \frac{\Delta E}{\ln \Omega_2 - \ln \Omega_1} = \frac{\Delta E}{\ln\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}$$

Окончателно от (4) получаваме, че

$$(5) \ln\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) = \frac{\Delta E}{k_B T} \quad \text{или (6) } \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$$

$$(6) \Omega_2 = \Omega_1 \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad \text{Тогава следва, че}$$

$$(7) \frac{\Delta \Omega}{\Omega_1} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_1} = \frac{[\Omega_1 \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right)] - \Omega_1}{\Omega_1} = \left[\exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right)\right] - 1$$

Получената зависимост (7) е общо решение на задачата за определяне на $\frac{\Delta \Omega}{\Omega_1}$. Численото пресмятане от (7) дава следния резултат

$$(8) \frac{\Delta \Omega}{\Omega_1} = \left[\exp\left(\frac{10^{-3}}{2,355 \cdot 10^{-2}}\right)\right] - 1 = \left[\exp(0,0429)\right] - 1$$

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega_1} = 1,0429 - 1 = 0,0429$$

Следователно,

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega_1} (\%) = 4,29 \% \approx 4,3 \%$$

ЗАДАЧА № 136. Макроскопична система поглъща енергия $\Delta E = 10^{-20} \text{ J}$, като числото на достъпните състояния на системата нараства с 10%. Каква е била абсолютната температура на тази система?

РЕШЕНИЕ :

За решаване на задачата използваме зависимост (7) от предстоищата задача, като $(\Delta \Omega / \Omega) = 0,10$ съгласно условието. Тогава следва, че

$$(1) \frac{\Delta \Omega}{\Omega} = 0,10 = \left[\exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \right] - 1$$

$$(2) 1,10 = \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad \text{или} \quad (3) T = \frac{\Delta E}{k_B \ln(1,10)}$$

Получената зависимост (3) е общото решение на задачата за определяне на абсолютната температура (T) на макроскопичната система. Численото пресмятане от (3) дава следния резултат $T = 7602,9^\circ \text{ K} \approx 7603^\circ \text{ K}$. Допълнително можем да определим големината на елементарния топлинен квант ($k_B T$) енергия при тази температура. Изчисляването показва, че $k_B T \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 7603 = 1,0492 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,65575 \text{ eV}$.

ЗАДАЧА № 137 Каква работа (ΔA) извършва съгъстен въздух, ако той се намира в балон с обем $V_0 = 0,04 \text{ m}^3$ и под налягане $P_0 = 150 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, и при отваряне на съответния кран се разширява в обкръжаваша въздушна атмосферна среда с налягане $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$ и температура $T_1 = T_0 = 300^\circ \text{ K}$? Въздухът да се приеме за идеален газ.

РЕШЕНИЕ :

Приемаме, че разширението на въздуха е изотермично и тогава вътрешната енергия (U) на газа не се изменя ($\Delta U = 0$). Прилагаме първия принцип на термодинамиката

$$(1) \Delta Q = T \Delta S_E = \Delta U + \Delta A = \Delta A.$$

Освен това, при изотермично разширение

$$(2) \Delta A = \frac{M}{\mu} R_r T_0 \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right)$$

От основното уравнение на Клапейрон-Менделеев за състоянието на идеалния газ следва, че

$$(3) P_0 V_0 = \frac{M}{\mu} R_r T_0 \quad \text{и} \quad (4) \frac{M}{\mu} R_r = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

$$(5) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_0 \quad \text{и} \quad (6) P_0 V_0 = P_1 V_1$$

$$\text{като (7) } \frac{V_1}{V_0} = \frac{P_0}{P_1}$$

Заместваме (4) и (7) в (2) и окончателно получаваме, че

$$(8) \Delta A = \left(\frac{P_0 V_0}{T_0} \right) T_0 \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right) = P_0 V_0 \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right)$$

Получената зависимост (8) е общо решение на задачата за определяне на (ΔA). Численото пресмятане от (8) дава следния резултат $\Delta A = 30,0638 \cdot 10^5 \text{ J} = 3,0064 \text{ MJ}$. Допълнително в задачата можем да

определим: а) обема (V_1) от зависимост (7), като се получава, че (9) $V_1 = \frac{P_0 V_0}{P_1} = 6 \text{ m}^3$. Тогава $\Delta V = V_1 - V_0 = 6 - 0,04 = 5,96 \text{ m}^3$.

б) изменението на ентропията (ΔS_E) на изотермично разширяващия се въздух.

от зависимостта (1), като се получава, че

$$(10) \Delta S_E = \frac{\Delta A}{T_0} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) \quad \text{при отчитане на (8).}$$

Получената зависимост

(10) е общо решение на задачата за определяне на (ΔS_E). Численото пресмятане дава следния резултат

$$\Delta S_E = \frac{300,638 \cdot 10^4}{300} = 1,002 \cdot 10^4 \text{ J/K} = 10,02 \text{ kJ/K}$$

в) броят на молекулите съгъстен въздух (n_0) в единица

обем

$$(11) n_0 = \frac{N}{V_0} = \frac{n \mu N_A}{V_0} = \frac{\left(\frac{P_0 V_0}{R_f T_0}\right) N_A}{V_0} = \frac{P_0 N_A}{R_f T_0}$$

Тук: $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ е числото на Авогадро, а $R_f = 8315 \text{ J/kmol.K}$ е универсалната газова константа. От (11) определяме, че $n_0 = 3,622 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}$.

г) броят на всички молекули (N) в съгъстения въздух

$$N = n_0 V_0 = 1,449 \cdot 10^{26}.$$

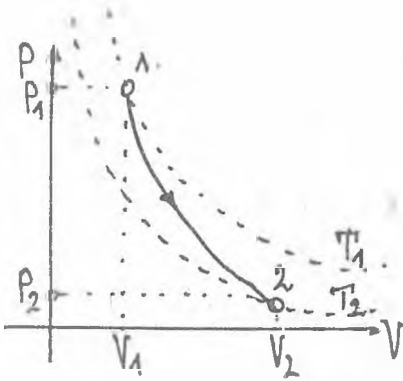
д) изменението на ентропията (ΔS_E), отнесено към една молекула на газа

$$\frac{\Delta S_E}{N} = \frac{1,002 \cdot 10^4}{1,449 \cdot 10^{26}} = 6,901 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

ЗАДАЧА № 138. Определете изменението на ентропията (ΔS_E) на маса $M = 60 \text{ g}$ хелий при разширението му от обем $V_1 = 1,25 \text{ dm}^3$ до $V_2 = 8,35 \text{ dm}^3$, ако процеса на разширение е политропен при уравнение на политропата от вида $PV^3 = \text{const}$.

РЕШЕНИЕ :

Начертаваме съответния чертеж, даващ зависимостта $P =$



$= f(V)$. Началното състояние [1] се определя от стойностите на основните характеристики (M, P_1, V_1, T_1) , а крайното [2] - (M, P_2, V_2, T_2) . Процесът на разширение е $(1 \rightarrow 2)$ и е политропен с уравнение $(1) PV^\gamma = \text{const.}$ Ентропията (S_E) на маса (M)

газ ще представим чрез $S_E(M)$, която е от вида (2) за състоянието [1] и (3) за състояние [2] на газа

$$(2) [S_E(M)]_1 = n_{\mu} [(C_{\mu})_V \ln T_1 + R_r \ln V_1] + S_0$$

$$(3) [S_E(M)]_2 = n_{\mu} [(C_{\mu})_V \ln T_2 + R_r \ln V_2] + S_0$$

Изменението на ентропията $\Delta S_E(M)$, при преход на газа от състояние [1] в [2] ще се представи, чрез вида (4)

$$(4) \Delta S_E(M) = n_{\mu} \left[(C_{\mu})_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R_r \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right]$$

За двете състояния [1] и [2] на газа прилагаме уравнението на Клапейрон-Менделеев и определяме съответните отношения

$$(5) P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R_r T_1$$

$$\text{и } (6) P_2 V_2 = \frac{M}{\mu} R_r T_2$$

$$(7) \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

Но от уравнението на политропата (1) можем да отбележим след-

ното за двете състояния на газа [1] и [2]

$$(8) P_1 V_1^3 = P_2 V_2^3 \quad \text{и} \quad (9) \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^3$$

Заместваме (9) в (7) и получаваме, че

$$(10) \frac{T_2}{T_1} = \frac{(V_2/V_1)}{(P_1/P_2)} = \frac{V_2/V_1}{(V_2/V_1)^3} = \frac{1}{(V_2/V_1)^2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2$$

Заместваме (10) в (4) и получаваме, че

$$(5) \Delta S_E(M) = \frac{M}{\mu} \left[(C_{\mu})_V \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 + R_r \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \right] \quad \text{при} \quad (6) \eta = \frac{M}{\mu}$$

Хелияте едноатомен газ и ако се разглежда като идеален, тогава при три степени на свобода ($i = 3$) на атомния център на масите следва, че

$$(7) (C_{\mu})_V = \frac{i}{2} R_r = \frac{3}{2} R_r \quad \text{Заместваме (7) в (5) и получаваме, че}$$

$$(8) \Delta S_E(M) = \left[\frac{M}{\mu} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \right] (R_r - 3R_r) = -2 R_r \left(\frac{M}{\mu}\right) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Получената зависимост (8) е общото решение на задачата за определяне на $\Delta S_E(M)$. Молната маса (μ) на хелия, като едноатомен газ е $\mu(\text{He}) = 4 \text{ kg/katom}$. Тогава от (6) следва, че

$$(9) \eta_{\mu} = \frac{M}{\mu} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{4} = 15 \cdot 10^{-3} = 0,015 \text{ katom}$$

Численото пресмятане на $\Delta S_E(M)$ от (8), при отчитане на $\left(\frac{M}{\mu}\right)$ и че $R_r = 8315 \text{ J/kmol.K}$ добива следния вид

$$(10) \Delta S_E (M) = -2(0,015)8315 \ln\left(\frac{8,35 \cdot 10^{-3}}{1,25 \cdot 10^{-3}}\right) = -249,45 \ln(6,68)$$

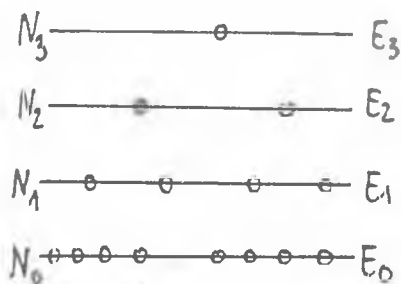
$$(11) \Delta S_E (M) = -249,5(1,899) = 473,735 \text{ J/K}$$

Допълнително към задачата можем да направим опит за определяне на стойностите на (T) и (P) в двете състояния [1] и [2] на газа, като приемем, че $T_1 = 291^\circ\text{K}$. Тогава от (10) определяме, че (12) $T_2 = T_1 (V_1/V_2)^2$, а от (5) и (6), че (13) $P_1 = MR_r T_1 / \mu V_1$ и (14) $P_2 = MR_r V_1^2 / \mu V_2^3$ - при отчитане на (10). Численото пресмятане от (12 + 14) дава следните резултати: $T_2 = 43,56^\circ\text{K}$; $P_1 = 2,9036 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 2,866 \cdot 10^2 \text{ физ. атм.} = 286,6 \text{ физ. атм.}$ $P_2 = 9,741 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 9,616 \cdot 10^{-1} \text{ физ. атм.} = 0,9616 \text{ физ. атм.}$

ЗАДАЧА № 139. Да допуснем, че маса $M = 120 \text{ g}$ газ хелий се намира при температура $T = 6000^\circ\text{K}$. Разглеждаме некинетичната компонента на общата енергия (E) на атомите на хелия, която се подчинява на Болцмановото разпределение по енергетични нива. Нека да допуснем (с учебна цел), че атомната система съдържа 4 енергетични еквилибриционни нива, като $E_1 = E_0 + \Delta E$;
 $E_2 = E_1 + \Delta E$; $E_3 = E_2 + \Delta E$. Определете при равновесно състояние на атомната система при температура $T = 6000^\circ\text{K}$: какво е разпределението на атомите (N_0, N_1, N_2, N_3) по съответните енергетични нива; стойността (ΔE) на енергетична преход между две съседни нива и общата енергия (E) на атомната система.

РЕШЕНИЕ :

Първо ще определим броя на атомите (N) хелий (^4He) в $M = 120 \text{ g}$. Тогава следва, че (1) $n_{\mu} = \frac{M}{\mu} = \frac{0,120}{4} = 0,030$



катом при "молна" маса на хелия (${}^4\text{He}$), като едноатомен газ $\mu = \mu_A = 4 \text{ kg/катом}$. Следователно (2) $N(M) = \eta_\mu N_A = \frac{M}{\mu} N_A = 0,030 (6,023 \cdot 10^{26}) = 18,069 \cdot 10^{24} = 1,8096 \cdot 10^{25}$ атома (${}^4\text{He}$). Определяме елементарния топлинен квант ($k_B T$) при температура $T = 6000^\circ\text{K}$. Тогава следва, че (3) $k_B T = 1,38 \cdot 10^{-23} (6000) = 8,28 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,5175 \text{ eV}$ при условие, че (N_A) е числото на Авогадро и (N_A) = $6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$; (k_B) е числото на Болцман и $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, а $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Съгласно теорията, при Болцманово разпределение на атомите по енергийни еквиливанционни нива, следва, че е изпълнено условието (4) $\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_3}{N_2} = k$ при термодинамично равновесно състояние на атомната система. Записваме (N_1, N_2 и N_3) съгласно експоненциалния Болцманов закон и получаваме съответно, че

$$(5) \quad N_1 = N_0 \exp\left[-\frac{(E_1 - E_0)}{k_B T}\right] = N_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$$

$$(6) \quad N_2 = N_0 \exp\left[-\frac{(E_2 - E_0)}{k_B T}\right] = N_0 \exp\left(-\frac{2 \Delta E}{k_B T}\right)$$

$$(7) \quad N_3 = N_0 \exp\left[-\frac{(E_3 - E_0)}{k_B T}\right] = N_0 \exp\left(-\frac{3 \Delta E}{k_B T}\right)$$

Като използваме зависимостта (4) и (5) следва, че

$$(8) \quad N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = N_0 + k N_0 + k^2 N_0 + k^3 N_0$$

$$(9) N = N_0 (1 + \kappa + \kappa^2 + \kappa^3)$$

където

$$(10) \kappa = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$$

По този начин излиза, че за да определим разпределението на атомите по енергийните нива (N_0, N_1, N_2, N_3) трябва да знаем множителя (κ) или (ΔE). Следователно, условието на задачата е недостатъчно за изпълнение на поставените цели. Нека да приемем условно (с учебна цел), че $\kappa = 1/3$. Тогава следва от (10), че

$$(11) \kappa = \frac{1}{3} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$$

$$(12) \Delta E = k_B T \ln 3$$

При отчитане на ($k_B T$) = $8,28 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ от (3), тогава за (ΔE) от (12) получаваме, че

$$(13) \Delta E = 8,28 \cdot 10^{-20} \ln 3 = 8,28 \cdot 10^{-20} (1,0986) = 9,096 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,569 \text{ eV}$$

Съгласно условието (4) при отчитане на $\kappa = 1/3$ получаваме от (9), че

$$(14) N = N_0 \left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] = 1,481 N_0$$

$$(15) N_0 = \frac{N}{1,481} = \frac{18,069 \cdot 10^{24}}{1,481} = 12,20 \cdot 10^{24} = 1,22 \cdot 10^{25} \text{ атома}$$

Окончателно получаваме, че

$$(16) N_1 = \frac{N_0}{1/\kappa} = \kappa N_0 = \frac{1}{3} (12,20 \cdot 10^{24}) = 4,07 \cdot 10^{24} \text{ атома}$$

$$(17) N_2 = \kappa^2 N_0 = \frac{1}{9} (12,20 \cdot 10^{24}) = 1,356 \cdot 10^{24} \text{ атома}$$

$$(18) N_3 = \kappa^3 N_0 = \frac{1}{27} (12,20 \cdot 10^{24}) = 4,519 \cdot 10^{23} \text{ атома}$$

За да определим общата некинетична енергия на атомната система (E) е необходимо да я представим във вида:

$$(19) \quad E = E_0 N_0 + E_1 N_1 + E_2 N_2 + E_3 N_3$$

$$(20) \quad E = E_0 N_0 + k N_0 (E_0 + \Delta E) + k^2 N_0 (E_0 + 2\Delta E) + k^3 N_0 (E_0 + 3\Delta E)$$

$$(21) \quad E = E_0 N_0 (1 + k + k^2 + k^3) + k N_0 \Delta E (1 + 2k + 3k^2)$$

$$(22) \quad E = N_0 [E_0 (1 + k + k^2 + k^3) + k \Delta E (1 + 2k + 3k^2)]$$

Следователно, за да определим (E) от (22) е необходимо да знаем (E_0). Можем да приемем условно (с учебна цел), че $E_0 = k_B T = 8,28 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ съгласно (3). Тогава от (22) получаваме окончателно, че

$$(23) \quad E = 1,22 \cdot 10^{25} [8,28 \cdot 10^{-20} (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}) + \frac{1}{3} (9,097 \cdot 10^{-20})] [1 + 2(\frac{1}{3}) + 3(\frac{1}{9})] = 1,22 \cdot 10^{25} [8,28 \cdot 10^{-20} (1,481 + 3,032 \cdot 10^{-20} (2))] = 1,22 \cdot 10^{25} [12,263 \cdot 10^{-20} + 6,064 \cdot 10^{-20}] = 1,22 \cdot 10^{25} (18,327 \cdot 10^{-20}) = 22,359 \cdot 10^5 \text{ J} = 2,236 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$E = 2,236 \text{ MJ.}$$

Ако всичките $N = 1,8069 \cdot 10^{25}$ атома са само в най-ниското енергетично ниво ($N = N_0$), тогава общата енергия ще бъде:

$$(24) \quad E(N=N_0) = N E_0 = N (k_B T) = 1,807 \cdot 10^{25} (8,28 \cdot 10^{-20}) = 14,96 \cdot 10^5 = 1,496 \cdot 10^6 \text{ J} = 1,496 \text{ MJ.}$$

Както и трябва да се очаква при сравнение на (E) от (23) и (\hat{E}) от (24), следва, че $E > \hat{E}$.

Допълнително към задачата можем да определим каква ще бъде температурата (T^*) на веществената система, ако се осъществи инверсия в населеността на енергостатичните нива, отговаряща на условието

$$(25) N_2^* = \frac{1}{3} N_3^* ; (26) N_1^* = \frac{1}{3} N_2^* ; (27) N_0^* = \frac{1}{3} N_1^*$$

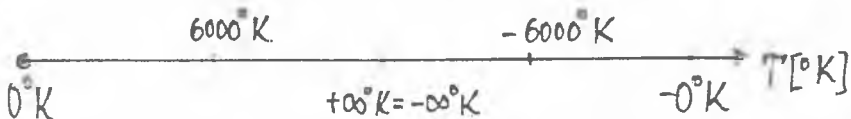
$$(28) N_3^* = N_0 \quad (\text{в началния случай}). \text{ Тогава следва, че при } \Delta E = 9,096 \cdot 10^{-20} \text{ J.}$$

$$(29) \frac{N_1^*}{N_0^*} = 3 = \exp\left[-\frac{\Delta E}{k_B T^*}\right] ; (30) T^* = -\left(\frac{\Delta E}{k_B \ln 3}\right).$$

Получената зависимост (30) е общото решение за определяне на новата температура (T^*) на веществената система. Численото пресмятане на (T^*) от (30) дава следния резултат

$$(31) T^* = -\frac{9,096 \cdot 10^{-20}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1,0986} = -6,000,10^3 = -6000^\circ \text{K.}$$

Следователно, новата температура $T^* = -6000^\circ \text{K}$ е отрицателна абсолютна температура и симетрично разположена спрямо температурния център на скалата, зададен с условието $+\infty^\circ \text{K} = -\infty^\circ \text{K}$.



Следователно, всяка отрицателна абсолютна температура е по-висока от всяка положителна абсолютна температура. Веществена система

с отрицателна абсолютна температура е в силно неравновесно състояние и при преход към положителни абсолютни температури се съществува преход към по-равновесно състояние на веществената система. При отрицателни абсолютни температури е налице неравенството

$N_0^* < N_1^* < N_2^* < N_3^*$ в заселеността на енергетичните нива с атоми. Само при $T = +\infty^\circ K = -\infty^\circ K$ налице е еднаква (равномерна) заселеност на енергийните нива с атоми. ($N_0 = N_1 =$

положителни абсолютни температури

$N_2 > N_3$) - по долните нива са заселени с по-голям брой атоми на веществената система. Такива веществени системи, които имат ограничен брой нива и много пъти по-малък от броя на атомите, при "напомпване" с енергия могат да преминат в силно неустойчиво състояние с отрицателна абсолютна температура. Такива системи са мазерите и лазерите, които са вече с широко приложение в съвременната научно-техническа практика.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мекитшев Г., И. Попов, Д. Велчева. Сборник от задачи по обща физика, Пловдивски университет, 1985.
2. Волохов АН, А.А. Воробьев, М.Ф. Федоров, А.Г. Чертов. Задачник по физике, Росвузиздат, 1963.
3. Гурьев Л.Г., А.В. Кортнев, А.Н. Куценко, Б.В. Лягьев, С.Е. Минкова, Р.В. Протопопов, Ю.В. Рублев, В.В. Тищенко, М.И. Шепетуша. Сборник задач по общему курсу физики. Изд. "Высшая школа", Москва, 1966.
4. Сахаров Д.И. Сборник задач по физике, изд. "Просвещение", Москва, 1967.
5. Пенский А.А. Задачи по физике, изд. "Наука", Москва, 1977.
6. Иродов И.Е. "Задачи по общей физике", изд. "Наука", Москва, 1988.
7. Дамянов С., К. Казанджиев, Т. Димчев, В. Буриев. Сборник от задачи по физика. изд. "Наука и изкуство", София, 1987.
8. Рубан И.И., С.М. Жаврид, Н.Е. Великевич, Ж.П. Лагутина. Физика. Задания к практическим занятиям, изд. "Высшая школа", Минск, 1989.
9. Взоров Н.Н., О.И. Замша, И.Е. Иродов, И.В. Савельев. Сборник задач по общей физике. изд. "Наука", Москва, 1968.
10. Новодворская Е.М., Э.М. Дмитрев. Методика проведения упражнений по физике во втузе. изд. "Высшая школа", Москва, 1981.
11. Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения. Пособие для учителя. изд. "Просвещение", Москва, 1983.
12. Гончаренко С.У. Конкурсные задачи по физике, изд. "Техника", Киев, 1966.
13. Воробьев И.И., П.И. Зубков, Г.А. Кутузова, О.Я. Савченко, А.М. Трубочев, В.Г. Харитонов. Задачи по физике, изд. "Наука", Москва, 1988.

14. Козел С.М., Э.И.Рашба, С.А.Славатинский. Сборник задач по физике задачи МФТИ. изд. "Наука", Москва, 1987.
15. Слободецкий И.Ш., В.А.Орлов. Всесоюзные олимпиады по физике, изд. "Просвещение", Москва, 1982.
16. Горшковский В. Польские физические олимпиады, изд. "Мир", Москва, 1982.
17. Кабардин О.Ф., В.А. Орлов. Международные физические олимпиады школьников, библио. "Квант", вып. 43, изд. "Наука", Москва, 1985.
18. Буздин А.И., В.А.Ильин, И.В.Кривченков, С.С.Кротов, Н.А.Свешников. Задачи московских физических олимпиад. библио. "Квант" вып. 60, изд. "Наука", Москва, 1988.
19. Бутиков Е.И., А.А. Быков, А.С. Кондратьев - Физика в задачах, изд. Ленинградского университета, Ленинград, 1976.
20. Горбунова О.И., А.М.Зайцева, С.Н.Красников. Задачник - практикум по общей физики. Термодинамика и молекулярная физика, изд. "Просвещение", Москва, 1976.
21. Харитонов В.В., Э.В. Гончаров, Э.Д. Егорова, Р.Г. Пунчик. Задания для самостоятельной работы по общей физике. Изд. "Высшая школа", Минск, 1984.
22. Серова Ф.Г., А.А.Янкина. Сборник задач по термодинамике, изд. "Просвещение", Москва, 1976.
23. Волькенштейн В.С., Сборник задач по общему курсу физики, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959.
24. Стрелков С.П., И.А. Эльцин, И.А. Яковлев. Сборник задач по общему курсу физики. Часть I. Механика. Электричество и магнетизм. Изд. "Наука", Москва, 1964.

25. Варикаш В.М., Ю.М. Хачатрян. Избрание задачи по физике твердого тела. Изд. "Высшая школа", Минск, 1969.
26. Бутиков Е.И., А.А. Быков, А.С. Кондратьев. Физика в примерах и задачах. изд. "Наука", Москва, 1989.
27. Физика - задания к практическим занятиям. Изд. "Высшая школа", Минск, 1989.
28. Задачи по физике. Под редакцией О.Я. Савченко, изд. "Наука", Москва, 1988.
29. Чертов А.Г., А.А. Воробьев. Задачник по физике, изд. "Высшая школа", Москва, 1988.
30. Волохов А.Н., А.А. Воробьев, М.Ф. Федоров, А.Г. Чертов. Задачник по физике, изд. "Высшая школа", Москва, 1968.
31. Бендриков Г.А. Б.Б. Буховцев, В.В. Керженцев, Г.Я. Мякишев. Задачи по физике - для поступающих в вузы. изд. "Наука", Москва, 1987.
32. Мърваков Д., И. Петров. Задачи по термодинамика и статистическа физика. Университетско издателство "Климент Охридски", София, 1990.
33. Кронин Дж., Д. Гринберг, В. Телегди. Сборник задач по физике с решениями, Атомиздат, Москва, 1975.
34. Цедрик М.С., А.С. Микулич, И.Ф. Савицкая, Г.А. Загуста, Г.П. Макеева. Сборник задач по физике, изд. "Высшая школа", Минск, 1969.
35. Лукашик В.И. Физическая олимпиада, изд. "Просвещение" Москва, 1987.
36. Буздин А.И., В.А. Ильин, И.В. Кривченков, С.С. Кротов, Н.А. Свешников. Задачи московских физических олимпиад, изд. "Наука", Москва, 1988.

37. Меледин Г.В. Физика в задачах Экспериментальные задачи с решениями. изд. "Наука", Москва, 1989.
38. Шаскольская М.П., И.А. Эльцин. Сборник избранных задач по физике, изд. "Наука", Москва, 1986.
39. Тарасов А.В., Л.Н.Тарасова. Вопросы и задачи по физике, изд. "Высшая школа", Москва, 1968.
40. Тарасов Л.В., Тарасова А.Н., Вопросы и задачи по физике - анализ характерных ошибок поступающих во вузы. Изд. "Высшая школа", Москва, 1975.
41. Бухомцев Б.Б., В.Д. Кринчевков, Г.А. Мяхишев, И.М.Сараева, Сборник задач по элементарной физике, изд. "Наука", Москва, 1987.
42. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике, изд. "Высшая школа", Москва, 1982.
43. Переломова Н.В., М.М.Тагиева. Задачник по кристалло физике изд. "Наука", Москва, 1982.
44. Варикаш В.М., А.И. Болсун, В.В. Аксенов. Сборник задач по статистической физике, изд. "Высшая школа", Минск, 1979.

2. Кръгови процеси	192
3. Втори принцип на термодинамиката	193
4. Термодинамични потенциали	194
а) вътрешна енергия - U	194
б) свободна енергия - E_{ce}	194
в) енталпия - H	195
г) термодинамичен потенциал на Гибс - Z	196
5. Химичен потенциал - μ	197
6. Фазови преходи	199
7. Статистически смисъл на втория принцип на термодинамиката	202
8. Веществени системи с отрицателни абсолютни температури	203
9. Технически цикли	203
10. Задачи по Глава III	205
11. Литература	292
12. Съдържание	296

Паскал Каргалов

**СБОРНИК С РЕШЕНИ ЗАДАЧИ
ПО МОЛЕКУЛНА ФИЗИКА И ТЕРМСДИНАМИКА
първа част**

Дадена за печат: февруари 1994 г.

Излязла от печат: април 1994 г.

Формат: 70x100x16

Печатни коли: 18,25

Издателски коли: 23,75

Отпечатано в печатната база на ПУИ „Паисий Хилендарски“