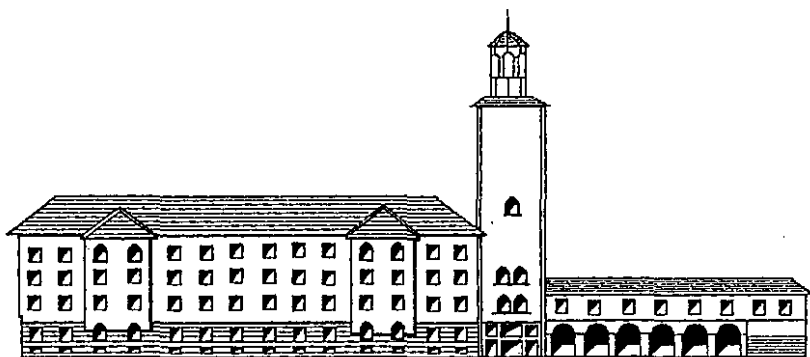


009

ТЕХНИЧЕСКА МЕХАНИКА ИЗБРАНИ ГЛАВИ

ЗА СТУДЕНТИ ОТ ХТМУ – СОФИЯ

Александър С. Александров



Издателство "Абазар"
Велико Търново, 2004

P.C. 757

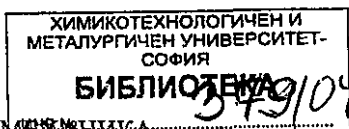
531(075.8)

Учебникът Техническа механика /избрани глави/ представлява кратък курс, целящ подпомагането на студентите при изграждането на основни знания по механика. Той е предназначен за студентите от различните специалности на Химикотехнологичен и металургичен университет – София и колежа интегрирани към него.

В учебника са разгледани избрани основни теми от статика, кинематика, динамика и съпротивление на материалите, без да е покрита цялата учебна програма по техническа механика. Материалът е изложен кратко и изводите са опростени.

Учебникът може да се използва и от други студенти, изучаващи техническа механика

16816



ТЕХНИЧЕСКА МЕХАНИКА
ЗА СТУДЕНТИ ОТ ХТМУ – СОФИЯ

- © Александър С. Александров, автор, 2004
- © доц. д.т.н Климент Б. Хаджов, рецензент, 2004
- © Борислав Ангелов, компютърен дизайн на корицата, 2004
- © ХТМУ – София, 2004
- © Издателство "Абагар", Велико Търново, 2004

ISBN 954-427-556-8

Александър С. Александров. **ТЕХНИЧЕСКА МЕХАНИКА. ИЗБРАНИ ГЛАВИ.** ЗА СТУДЕНТИ ОТ ХТМУ – СОФИЯ. Рецензент доц. д.т.н. Климент Б. Хаджов. Компютърен дизайн на корицата Борислав Ангелов. Формат 60x84/16. Печатни коли 11. Печат "Абагар" АД. Издателство "Абагар", Велико Търново, бул. "Н. Габровски" 98. Главен редактор: 062/64-78-14. Редактори: 062/4-26-86. Организатор продажби: 062/4-27-79. e-mail: abagar@dir.bg

1. Основни понятия и аксиоми на статиката. Конкурентна система сили

1.1 Основни понятия и дефиниции

Статиката е раздел от теоретичната механика, в който се разглеждат силите, тяхното преобразуване от сложни в по-прости системи сили и условията за равновесие на различните системи сили, действащи върху материалните обекти.

Статиката се изгражда върху две основни понятия – материален обект и сила.

Материален обект. В теоретичната механика реалните тела се свеждат до следните три идеализирани модела:

Материална точка е най-опростеният модел на материален обект, размерите на който могат да се пренебрегнат в рамките на разглежданата задача, така че той да се представи като геометрична точка с определена маса. Така например, в небесната механика планетите се приемат за материални точки, тъй като размерите им са пренебрежимо малки спрямо разстоянията между тях;

Механична система е съвкупност от материални точки (тела), движението на които е взаимосвързано и обусловено;

Идеално твърдо тяло е механична система с постоянни (неизменяеми) разстояния между отделните точки.

Сила. Тя е мяра за механичното въздействие на даден материален обект върху друг. Силата е векторна величина, характеризираща се с приложна точка, направление (директриса), големина (модул) и посока. Обикновено се означава с \vec{P} или друга главна буква със стрелка над нея.

В Международната измерителна система (SI) единица мярка за силата е нютон (1 N). Основни мерни единици в системата са:

за разстояния - метър (1 m);

за маса - килограм (1 kg);

за време - секунда (1 s).

Нютонът е производна измерителна единица ($1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$), т.е. такава сила, която придава на маса 1 kg ускорение $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Във връзка със силата ще дефинираме някои предварителни понятия.

Система сили е съвкупността от действащите върху даден материален обект сили.

Уравновесена система е такава система сили, под действието на която материалният обект се намира в равновесие.

Еквивалентни системи сили са тези, които оказват едно и също механично въздействие на материалния обект, върху който са приложени. Еквивалентността на две системи сили се означава така

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n) \sim (\vec{P}'_1, \vec{P}'_2, \vec{P}'_3, \dots, \vec{P}'_k),$$

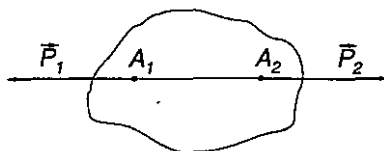
където n е брой на силите в първата, а k е брой на силите във втората система. Еквивалентността означава, че механичното състояние на материалния обект върху който действа системата $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n)$, няма да се промени, ако я заменим със системата $(\vec{P}'_1, \vec{P}'_2, \vec{P}'_3, \dots, \vec{P}'_k)$.

Равнодействаща е сила, еквивалентна на дадена система от сили, т.е. $\vec{R} \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n)$. Равнодействащата на уравновесена система от сили е равна на нула.

1.2 Аксиоми на статиката

В основите на статиката са заложили опитно установени истини, които се приемат без доказателство и се наричат аксиоми на статиката.

Първа аксиома. За да бъде уравновесена система от две сили, приложени върху твърдо тяло, е необходимо и достатъчно те да имат обща директриса, противоположни посоки и равни големина / фиг.1.1/.



Фиг.1.1

Втора аксиома. Ако към действаща върху твърдо тяло система от сили се прибави или премахне уравновесена система сили, получената нова система от сили ще бъде еквивалентна на първоначално действащата.

Съгласно тази аксиома, прибавянето или премахването на уравновесени системи от сили не променя механичното състояние на материалния обект.

Следствие. Механичното състояние на твърдо тяло не се променя, ако се плъзнат силите, които му действуват, по техните директриси.

Трета аксиома. Равнодействащата на две сили с обща приложна точка е равна по големина и направление на диагонала на паралелограма /фиг.1.2/, образуван от силите, т.е.

$$(1.1) \quad \vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

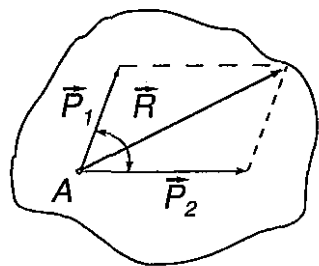
Големината на равнодействащата е

$$(1.2) \quad R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos(\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2)}.$$

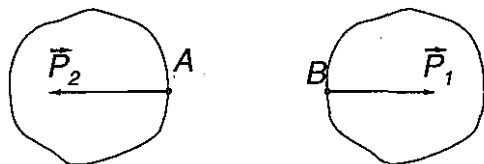
Четвърта аксиома. При взаимодействие на материални обекти, на всяко действие отговаря равно и противоположно насочено противодействие.

Например, ако тялото А действа върху тялото В със сила \vec{P}_1 , а тялото В действа на тялото А със сила \vec{P}_2 /фиг.1.3/, силите са равни по големина, имат обща директриса и противоположни посоки, т.е. $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$.

От аксиомата следва, че силите имат материален произход.



Фиг.1.2



Фиг.1.3

Пета аксиома. Материалните обекти биват свободни, ако никакви причини не ограничават преместванията им в произволно направление, и не свободни, ако са наложени ограничения в едно или повече направления.

Опори или **връзки** се наричат телата, които ограничават свободното преместване на даден материален обект.

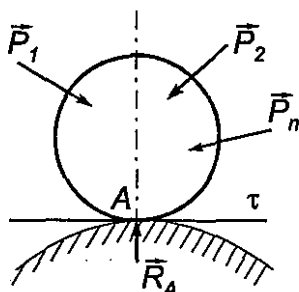
Опорни реакции или **реакции на връзките** се наричат силите, които възникват при взаимодействието на материалните обекти и наложените им връзки.

От казаното до тук следва, че силите, действащи на не свободен материален обект биват:

- *активни сили*, които не зависят от наложените връзки,
- *опорни реакции*, които възникват само, ако върху материалния обект действуват активни сили.

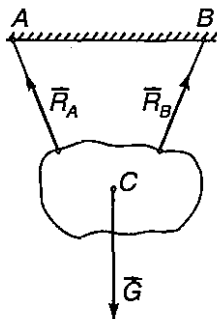
По-долу са разгледани някои от най-често срещаните в статиката връзки и са показани направлението на опорните реакции, които възникват в тях.

А. Идеално гладка повърхнина. Нарича се така, тъй като се пренебрегва триенето между нея и тялото. Направлението на реакцията \vec{R} е по общата нормала към повърхнините на двете тела в точката на допиране /фиг.1.4/.

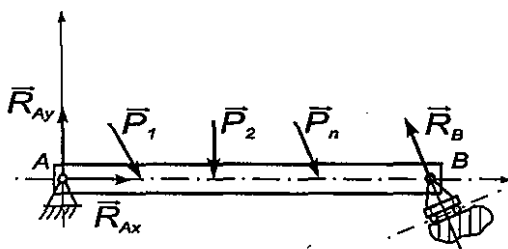


Фиг.1.4

Б. Гъвкава връзка /нишки, въжета, вериги/. Реакцията е насочена по направление на гъвкавия елемент /фиг.1.5/.



Фиг.1.5



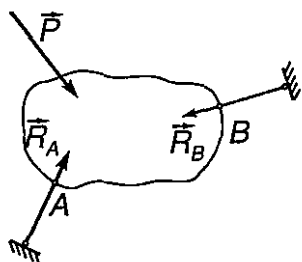
Фиг.1.6

В. Ставна връзка. Този вид опори представляват цилиндрична или сферична става. Тук се разглежда само първата от тях.

На фиг.1.6 е показано несвободно тяло, натоварено с равнинна система сили $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$, закрепено на две цилиндрични става. Лявата A се нарича *неподвижна цилиндрична става*. Тя позволява завъртане на тялото в равнината на чертежа около ос, минаваща през т. A , перпендикулярна на равнината.

Дясната B се нарича *подвижна цилиндрична става*. Тук освен завъртане е възможно и линейно преместване в равнината на търкаляне на ролките. Направлението на опорната реакция в тази става \vec{R}_B е известно – това е направлението по което връзката не допуска преместване, т.е. перпендикулярно на равнината върху която се търкалят ролките.

Направлението на опорната реакция в неподвижната цилиндрична става е неопределено. Затова вместо реакцията \vec{R}_A се използват нейните компоненти по координатните оси \vec{R}_{Ax} и \vec{R}_{Ay} .



Фиг.1.7

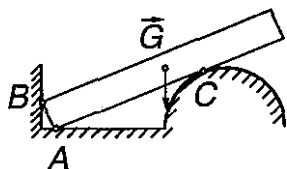
Г. Ставно закрепени пръти. Реакциите са насочени по осите на прътите, които са подложени на опън или на натиск /фиг.1.7/.

Някой от другите видове връзки, които се срещат в механиката се разглеждат по-нататък в изложението.

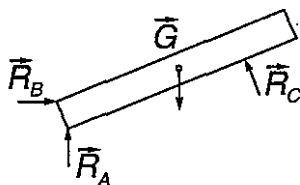
Шеста аксиома. Механичното състояние /движение или покой/ на не свободно твърдо тяло не се променя, ако

наложените връзки /опори/ бъдат заменени със съответните сили на връзките /опорни реакции/.

Следователно, всяко не свободно тяло /фиг.1.8.а/ може да бъде разгледано като свободно, без наложени връзки /опори/, стига към активните сили да бъдат добавени и силите на връзките /опорните реакции / фиг. 1.8.б.



а



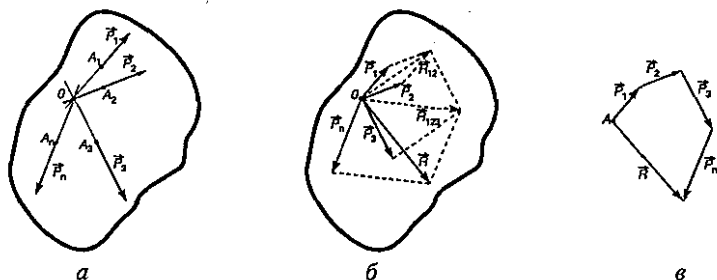
б

Фиг.1.8

1.3 Конкурентна система сили

Система от сили, директрисите на които се пресичат в една точка, се нарича *конкурентна / сходяща /*. Системата може да бъде пространствена или равнинна.

Съгласно втората аксиома на статиката силите могат да се плъзнат по техните директриси и показаната на фиг.1.9.а конкурентна система може да се замени с еквивалентната от фиг.1.9.б, където силите са приложени в т. О.



Фиг.1.9

Чрез прилагане на трета аксиома, тези сили се заменят последователно с еквивалентни на тях

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 + \vec{P}_2 &= \vec{R}_{12}; \\ \vec{R}_{12} + \vec{P}_3 &= \vec{R}_{123}\end{aligned}$$

и т.н. до получаване на една единствена, еквивалентна на системата сили, равнодействаща

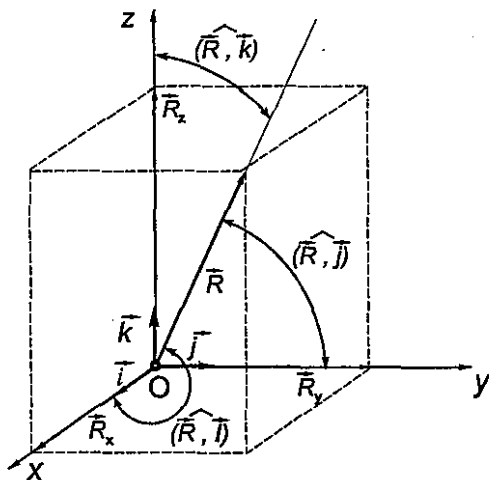
$$(1.3) \quad \vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k.$$

От фиг.1.9.в се вижда познатото от векторното смятане построяване на векторния / в случая силовия / многоъгълник. Равнодействащата \vec{R} в силовия многоъгълник съединява началото на първата сила с края на последната.

Прилагането на векторния метод при пространствена конкурентна система сили е твърде сложно и неудобно.

Най-често за определяне на равнодействащата на конкурентна система сили се използва аналитичният метод.

На фиг.1.10 са показани проекциите R_x, R_y, R_z на вектора равнодействаща \vec{R} върху осите на декартова, дясно ориентирана координатна система $Oxyz$ с единични вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Фиг. 1.10

Следователно

$$(1.4) \quad \vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}.$$

От векторното смятане е известно, че проекцията на векторната сума върху дадена ос е равна на алгебричната сума от проекциите на съставляващите я вектори върху същата ос

$$(1.5) \quad R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^n P_{kz}.$$

След заместване на (1.5) в (1.4) се получава

$$(1.6) \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^n P_{kx} \vec{i} + \sum_{k=1}^n P_{ky} \vec{j} + \sum_{k=1}^n P_{kz} \vec{k}.$$

Големината и направлението на равнодействащата са съответно

$$(1.7) \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n P_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n P_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n P_{kz}\right)^2};$$

$$(1.8) \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{i}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{j}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

1.4 Условия за равновесие на конкурентна система сили

Както се вижда, конкурентна система сили се редуцира до една единствена сила с еквивалентно действие – нейната равнодействаща. Следователно, ако системата е в равновесие, равнодействащата трябва да бъде равна на нула, т.е.

$$(1.9) \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k = 0.$$

Горното равенство изразява *векторното условие за равновесие*.

Това условие означава, че силовият многоъгълник /фиг.1.9.в/ е затворен, т.е. край на последната сила \vec{P}_n съвпада с началото на първата \vec{P}_1 .

С други думи, *графичното условие за равновесие* на конкурентна система сили е силовият многоъгълник да бъде затворен.

От друга страна условието равнодействащата да бъде нула означава съгласно (1.7), че проекциите и върху всяка от трите взаимно перпендикулярни оси също трябва да са равни на нула, т.е.

$$(1.10) \quad R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad R_z = \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0.$$

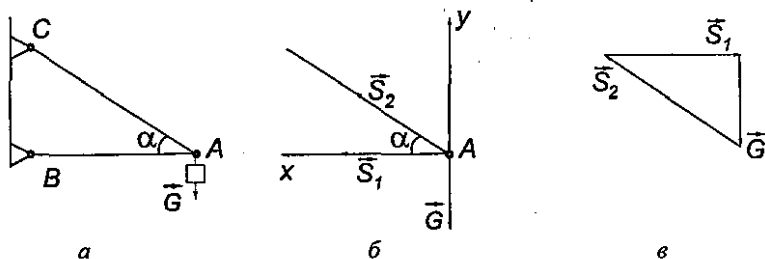
Тези уравнения изразяват *скаларните, аналитични условия* за равновесие на конкурентна система сили.

Когато силите са разположени в равнина /например Оху/, третото условие се превръща в тъждество

$$(1.11) \quad R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0.$$

Примери

Пример 1.1 В точка А на показаната на фиг.1.11а ставна прътова конструкция е окачен товар с маса $m = 80$ kg. Да се определят силите в прътите АВ и АС, ако ъгъл $\alpha = 30^\circ$.



Фиг.1.11

Като се приложи пета аксиома /за освобождение от връзките/, се разглежда равновесието на възела A , в който са приложени силата на товара $G = mg = 800 \text{ N}$ и неизвестните сили в прътите S_1 и S_2 /фиг.1.11б/. Тъй като директрисите на трите сили се пресичат в т. A , може да се приложат условията за равновесие на конкурентна система сили – уравнения (1.10). Избира се правоъгълна координатна система с начало т. A и ос x по направление на пръта AB . Тогава условията за равновесие ще бъдат:

$$\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0 = S_1 + S_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n P_{ky} = 0 = S_2 \sin \alpha - G = 0.$$

След съвместно решаване на двете уравнения се получава

$$S_2 \cdot \frac{1}{2} = G \rightarrow S_2 = 2G = 1600 \text{ N};$$

$$S_1 = -2G \frac{\sqrt{3}}{2} = -800\sqrt{3} \text{ N}.$$

Отрицателният знак показва, че посоката на силата е противоположна на предварително избраната посока.

Задачата може да се реши, като вместо аналитичното условие (1.10) се използва геометричното условие, което в случая означава, че силовия триъгълник трябва да бъде затворен /фиг.1.11.в / . В този триъгълник са познати една страна, съответстваща на силата \vec{G} и ъгъл α .

2. Момент на сила спрямо точка и спрямо ос. Двоица сили

2.1 Момент на сила спрямо точка

Момент на сила спрямо точка O /фиг.2.1/ се нарича приложеният в т. O вектор $\vec{M}_O(\vec{P})$, определен от векторното произведение на радиус-вектора \vec{r} и силата \vec{P} , т.е.

$$(2.1) \quad \vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}.$$

Характеристики на момента на сила спрямо точка:

1. Големина

$$(2.2) \quad M_O(\vec{P}) = |\vec{r} \times \vec{P}| = rP \sin(\vec{r} \wedge \vec{P}) = Ph,$$

където $h = r \sin(\vec{r} \wedge \vec{P})$ е рамото на силата \vec{P} , т.е. перпендикуляра спуснат от т. O до направлението на силата;

2. Приложна точка – точката спрямо, която се дефинира, в случая т. O ;
3. Направление – перпендикулярно на равнината, определена от \vec{r} и \vec{P} ;
4. Посока – определена от правилото на десния винт /дясната ръка/ такава, че за наблюдател, гледащ срещу вектора на момента, силата да се стреми да завърти тялото в посока обратна на въртенето на часовниковата стрелка.

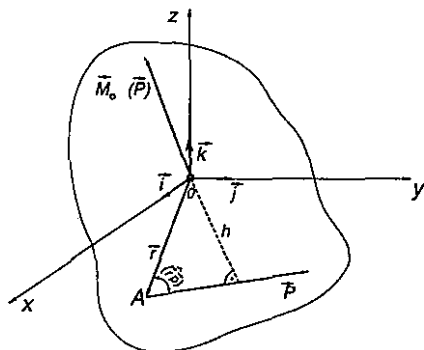
Свойства на момента на сила спрямо точка:

1. Моментът не се променя при плъзгане на силата по нейната директриса;
2. Моментът е равен на нула, когато точката спрямо която се дефинира, лежи върху директрисата на силата, т.е. рамото на силата е нула;
3. Моментът променя посоката си, ако се промени посоката на силата.

В координатна система с единични вектори на осите $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$(2.3) \quad \vec{M}_O(\vec{P}) = M_{ox}(\vec{P})\vec{i} + M_{oy}(\vec{P})\vec{j} + M_{oz}(\vec{P})\vec{k},$$

където $M_{ox}(\vec{P}), M_{oy}(\vec{P}), M_{oz}(\vec{P})$ са проекциите на момента върху координатните оси.



Фиг.2.1

Връзка между моментите на сила спрямо две точки. Нека са дадени силата и двете точки O и O' /фиг.2.2.а/. Непосредствено от фигурата се вижда, че

$$(2.4) \quad \vec{O'A} = \vec{OA} - \vec{OO'}$$

Ако се умножи горното равенство векторно с \vec{P} се получава

$$(2.5) \quad \vec{O'A} \times \vec{P} = \vec{OA} \times \vec{P} - \vec{OO'} \times \vec{P}$$

Но по дефиниция $\vec{O'A} \times \vec{P} = \vec{M}_{O'}(P)$, $\vec{OA} \times \vec{P} = \vec{M}_O(P)$, следователно

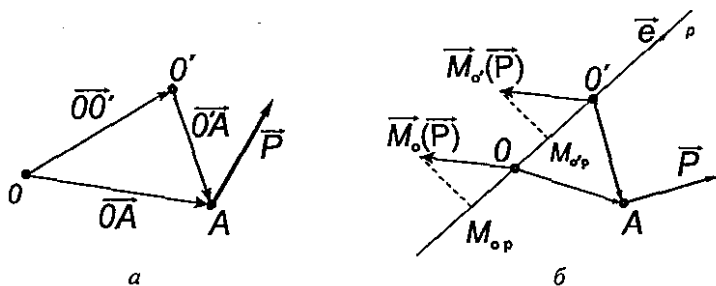
$$(2.6) \quad \vec{M}_{O'}(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{P}) - \vec{OO'} \times \vec{P} \quad \text{или} \quad \vec{M}_{O'}(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{O'O} \times \vec{P}$$

В случая, когато точките O и O' лежат върху права, успоредна на директрисата на силата, векторното произведение $\vec{OO'} \times \vec{P} = 0$ и следователно моментите на силата спрямо двете различни точки ще бъдат равни.

2.2 Момент на сила спрямо ос

Момент на сила \vec{P} спрямо произволна ос p се нарича проекцията $M_p(\vec{P})$ на момента на силата спрямо коя да е точка от оста върху самата ос.

Доказва се, че избора на точката няма значение, като се доказва равенството между проекциите на моментите на сила \vec{P} спрямо две произволни точки /т. O и т. O' / от оста p с единичен вектор \vec{e} /фиг.2.2.б/.



Фиг.2.2

От векторното смятане е известно, че проекцията на вектор върху дадена права се дава със скаларното произведение на вектора и единичния вектор на правата, т.е.

$$M_{op}(\vec{P}) = \vec{e} \cdot \vec{M}_O(\vec{P})$$

Като се вземе предвид (2.6.)

$$M_{O'P}(\vec{P}) = \vec{e} [\vec{M}_O(\vec{P}) - \vec{OO}' \times \vec{P}] = \vec{e} \vec{M}_O(\vec{P}) - \vec{e}(\vec{OO}' \times \vec{P}),$$

където от $\vec{e}(\vec{OO}' \times \vec{P}) = 0$ следва, че

$$(2.7) \quad M_{O'P}(\vec{P}) = M_{OP}(\vec{P}) = M_P(\vec{P}), \text{ т.е.}$$

$$(2.8) \quad M_P(\vec{P}) = \vec{e} \cdot \vec{M}_O(\vec{P}).$$

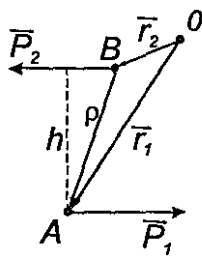
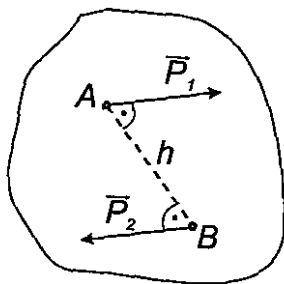
Следователно момента $M_P(\vec{P})$ е скаларна величина. Дименсията му е същата, като момент на сила спрямо точка, т.е. N.m.

2.3 Двоица сили

Система от две сили с успоредни директриси, еднакви големина и противоположни посоки се нарича двоица (фиг.2.3а).

Най-малкото разстояние h между двете сили, се нарича рамо на двоицата, а равнината, определена от директрисите им – равнина на двоицата.

Приложената върху тялото двоица се стреми да го завърти. Мярка за въртящият ефект на двоицата е нейният момент. Той представлява сумата от моментите на двете сили спрямо произволна точка.



Фиг.2.3

На фиг.2.3 б е показана двоица сили, точка О е произволна точка в пространството.

Съгласно дефиницията за момент на сила спрямо точка, сумата от моментите на двете сили спрямо т.О ще бъде

$$\vec{M}_O(\vec{P}_1) + \vec{M}_O(\vec{P}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{P}_1) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{P}_1 = \vec{\rho} \times \vec{P},$$

където $\vec{\rho}$ е вектор, определен от приложените точки на силите, лежащ в равнината на двоицата. Следователно, горната сума е вектор перпендикулярен на равнината на двоицата, който не зависи от положението на т. О, т.е. моментът на двоицата е свободен вектор

$$(2.9) \quad \vec{M} = \vec{\rho} \times \vec{P},$$

без фиксирана приложна точка, перпендикулярен на равнината на двоицата.

Големината на момента на двоицата е

$$(2.10) \quad M = \rho P \sin(\vec{\rho}, \wedge \vec{P}) = P \cdot h,$$

т.е. произведението на големината на едната от силите и рамото на двоицата. Посоката му е такава, че наблюдател, гледащ срещу вектора \vec{M} , да вижда въртенето на двоицата в посока, обратна на въртенето на часовниковата стрелка.

От казаното до тук следва, че механичното действие на двоицата сили върху дадено тяло се изразява изцяло с един свободен вектор-момент, който може да се плъзга и мести успоредно на себе си, като остава винаги перпендикулярен на равнината на двоицата. Тези свойства обособяват двоицата като самостоятелен елемент на статиката. Във връзка с това е важно да се дефинират условията за:

Еквивалентност на двоици сили. Ако две двоици сили имат еднакво механично действие върху дадено тяло, те са еквивалентни. Това означава, че лежат в успоредни равнини, силите им въртят в една и съща посока и големините им са равни;

Редукция на произволна система от двоици. Произволна система от двоици сили $[(\vec{P}_1, \vec{P}_2), (\vec{P}_1^1, \vec{P}_2^1), (\vec{P}_1^n, \vec{P}_2^n)]$, действаща върху дадено тяло може да бъде редуцирана до една равнодействаща двоица (\vec{R}_1, \vec{R}_2) . Както се отбеляза вече, механичното действие на една двоица сили може да се замени изцяло с един свободен моментен вектор. Свободните моментни вектори на всяка от двоиците могат да бъдат пренесени в произволно избрана точка от пространството при което получената конкурентната система се редуцира до

$$(2.11) \quad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k.$$

От своя страна векторът \vec{M} може да се представи с една двоица (\vec{R}_1, \vec{R}_2) , която лежи в перпендикулярната му равнина. Големините на \vec{R} и рамото h могат да се изберат така, че $Rh = M$.

Следователно $(\vec{R}_1, \vec{R}_2) \sim [(\vec{P}_1, \vec{P}_2), (\vec{P}_1^1, \vec{P}_2^1), (\vec{P}_1^n, \vec{P}_2^n)]$;

Условие за равновесие на система от двоици. Очевидно е

$$(2.12) \quad \vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k = 0.$$

3. Редукция на произволна система сили. Условия за равновесие.

3.1 Редукция на произволна система сили.

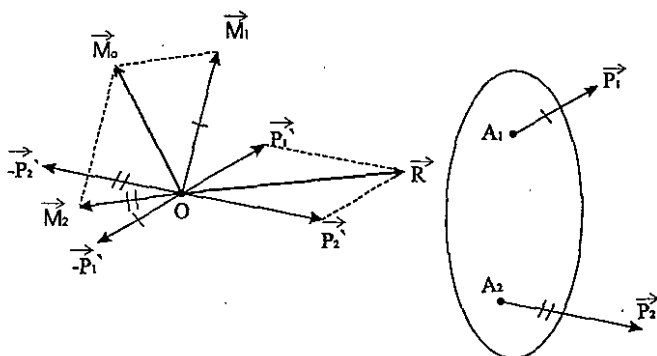
Произволна система сили се нарича, система сили директрисите на които не се пресичат в една точка. Редукция на такава система сили, се нарича замяната на нейното действие с друга еквивалентна на нея, по-проста система сили.

Нека върху дадено тялото действа произволната система сили $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\}$, приложени съответно в точките A_1, A_2, \dots, A_n . За удобство и прегледност са показани само първите две от системата сили /фиг.3.1/.

В произволно избрана точка O , намираща се в тялото или вън от него, съгласно първа аксиома на статиката, се прилагат последователно уравновесените системи сили $\vec{P}'_1, -\vec{P}'_1$; $\vec{P}'_2, -\vec{P}'_2$ и т.н., където

$$(3.1) \quad \vec{P}'_1 = \vec{P}_1; \quad \vec{P}'_2 = \vec{P}_2.$$

Но силите \vec{P}'_1 и $-\vec{P}'_1$ представляват двойца сили с момент \vec{M}_1 , аналогично \vec{P}'_2 и $-\vec{P}'_2$ двойца с момент \vec{M}_2 и т.н. Сумата на тези моментни векторис общо начало точка O се нарича *главен момент*



Фиг.3.1

$$(3.2) \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k.$$

Остават силите \vec{P}'_1, \vec{P}'_2 и т.н., които са с обща приложна точка и тяхната сума представлява

$$(3.3) \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{P}'_k$$

В случая за произволната система сили $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\}$ векторът \vec{R} се нарича *главен вектор /главна сила/*. Понятията главен вектор и равнодействаща, въпреки, че се представят с един и същ математичен израз не са тъждествени и трябва да се разграничават. Векторът \vec{R} е равнодействаща само на системата $\{\vec{P}'_1, \vec{P}'_2, \dots, \vec{P}'_n\}$, защото е еквивалентен на нея.

Така произволната система $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\}$, сили се редуцира до съвкупност от главен вектор \vec{R} и главен момент \vec{M}_o , наречени в механиката с общото име *динама*.

Главният вектор \vec{R} не зависи от избора на точката на редукция и следователно той е инварианта на динамата. Главният момент \vec{M}_o е вектор свързан с точката на редукция /т. О/ , т.е той е различен за всяка точка.

3.2 Условия за равновесие на произволна система сили

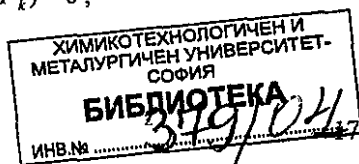
Видя се, че всяка произволна система сили може да се редуцира до динама. Следователно, ако системата е в равновесие, в равновесие ще бъде и еквивалентната и система /динамата/, състояща се от главен вектор \vec{R} и главен момент \vec{M}_o приложени в произволно избрана точка О.

За да бъде системата $\{\vec{R}, \vec{M}_o\}$ в равновесие, е необходимо и достатъчно да бъдат изпълнени двете векторни условия

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{k=1}^n \vec{P}_k = 0; \\ \vec{M}_o &= \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{P}_k) = 0. \end{aligned}$$

Ако горните вектори \vec{R} и \vec{M}_o са равни на нула, равни на нула ще бъдат и техните проекции върху координатните оси. Така от векторните условия (3.4) се получават скаларните условия за равновесие на произволна система сили

$$(3.5) \quad R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad M_{Ox} = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{P}_k) = 0;$$



$$(3.6) \quad R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{P}_k) = 0;$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0; \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{P}_k) = 0,$$

т.е. необходимите и достатъчни условия за равновесие на произволна система сили са сумите от проекциите на силите върху трите координатни оси и сумите от моментите на силите спрямо същите оси да бъдат равни на нула.

Условията за равновесие имат физичен смисъл. Преместването на дадено тяло в пространството може да се представи чрез шест прости движения – три трансляционни по трите оси на неподвижна координатна система и три ротационни около същите оси. Едно свободно тяло, което може да извърши тези шест прости движения, притежава шест степени на свобода. Всяко от условията (3.6) отнема една степен на свобода, следователно изпълнението на шестте условия означава, че са отнети всички степени на свобода – т.е. тялото е в равновесие.

В частния случай за равнинна система сили условията за равновесие са три.

Например, ако системата сили лежи в равнината Oxy , скаларните условия са:

$$(3.7) \quad R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0;$$

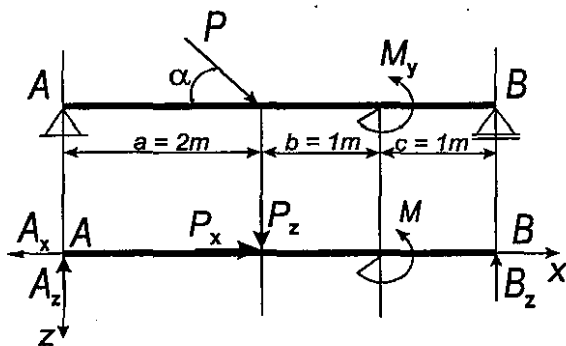
$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{P}_k) = 0$$

Другите три уравнения са тъждествено удовлетворени, тъй като проекциите на силите върху Oz и моментите спрямо Ox и Oy са нули.

Условията за равновесие на произволна система сили се наричат още условия за равновесие на твърдо тяло. Ако в дадена задача броят на неизвестните превишава броя на уравненията за равновесие, тя е статически неопределима и за нейното решение са необходими допълнителни зависимости.

Примери

Пример 3.1 На фиг.3.3 е показана гредя на две опори A и B , натоварена със сила $P = 10 \text{ kN}$ и момент $M_y = 4 \text{ kN.m}$. Останалите размери са дадени на фигурата. Да се определят опорните реакции.



Фиг.3.3

Разглежда се равновесието на гредата под действието на активните – сила P и момент M . Прилага се пета аксиома на статиката и несвободното тяло след заместване на опорите с опорните реакции, се представя като свободно.

Прилагат се условията за равновесие (3.7), като се отчита че гредата е в равнина Oxz

$$\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0 = -A_x + P_x;$$

$$\sum_{k=1}^n P_{kz} = 0 = -A_z + P_z - B_z;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{P}_k) = 0 = -P_z \cdot a + M + B_z \cdot (a + b + c).$$

Моментовото уравнение е записано спрямо точка A . След съвместно решаване на уравненията се получава:

$$A_x = P_x = P \cos \alpha = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ N};$$

$$A_z = P_z - B_z = 3,5 \text{ N};$$

$$B_z = \frac{M - P_z a}{4} = \frac{4 - 10}{4} = -1,5 \text{ N}.$$

Проверка на получените стойности на опорните реакции може да се направи, като се напише моментовото уравнение спрямо друга точка, различна от т.А, например т.В.

$$-A_z(a + b + c) + P_z(b + c) + M = 0,$$

след заместване се получава $0=0$.

Отрицателния знак пред опорната реакция B_z означава, че посоката и е обратна на условно приетата на фиг.3.3.

4. Кинематика на материална точка

Кинематиката е раздел от теоретичната механика, в който се изучава движението на материалните обекти, без да се взимат под внимание действащите върху тях сили, т.е. без да се отчита причината за движението.

Движението на материалните обекти се извършва в пространството и времето. Пространството е тримерно, евклидово, независимо от времето и движещите се в него обекти. Положението на даден обект в пространството се определя винаги спрямо някаква координатна система:

Времето в теоретичната механика се приема за универсално, т.е. за непрекъснато изменяща се величина, чието изменение е еднакво за всяка избрана координатна система, независимо от това как тя се движи.

В действителност, времето и пространството са зависими и това се отчита в квантовата механика. За обекти обаче, чиято скорост е значително по-малка от скоростта на светлината, тази взаимна обусловеност може да се пренебрегне.

Кинематиката се разделя на кинематика на точка и кинематика на тяло. В много случаи, когато размерите на дадено тяло са пренебрежимо малки спрямо преместванията му в пространството, то се разглежда като материална точка.

4.1 Закон за движение. Траектория

Зависимостта между времето и положението на движеща се материална точка спрямо избрана система се нарича закон за движение на точка. Законът на движение може да се определи по няколко начина. Тук се разглеждат най-често използваните.

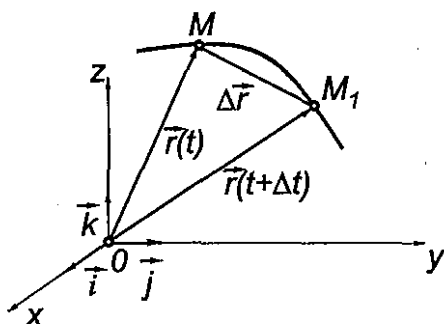
Координатен метод. Ако за отправна система е избрана декартова координатна система /фиг.4.1/, положението на дадена точка M е напълно определено, ако се познават координатите \dot{y} . При движението на точката тези координати се променят във времето, т. е.

$$(4.1) \quad x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Ако тези функции са *дефинирани и еднозначни* в определен интервал, като при това са *непрекъснати и диференцируеми* поне от втори ред, те представляват закона за движение в координатна форма.

Ако точката се движи така, че остава винаги в една равнина, уравненията са две, например в равнината Oxy третото уравнение отпада. Аналогично при движение на точката по права законът на движението се дава само с една зависимост.

При движението си подвижната точка M съвпада с различни точки от пространството. Съвкупността на всички точки от пространството в които последователно попада подвижната точка, се нарича *траектория на движението*. С други думи траекторията е линията, която се вижда, ако при движението си точката оставя някаква следа – например следата на реактивен снаряд.



Фиг.4.1

За намиране на траекторията при известен закон на движение са възможни два начина:

а. *Построяване на траекторията по точки*, чрез задаване на непрекъснатата редица от стойности на времето t_k ($k=1,2,\dots$) и пресмятане по (4.1) на съвкупността от координати x_k, y_k, z_k , след което се строи редица от точки M_k , принадлежащи на траекторията;

б. *Определяне на траекторията, чрез елиминирание на времето t от уравненията на закона за движение*, които се считат за параметрични уравнения. За елиминирание на параметъра t уравненията се решават съвместно по някой от известните подходи при което се получава декартовия запис на траекторията, например уравнение на права, парабола и т.н.

Векторен метод. За определяне положението на подвижната точка M се използва радиус-векторът $\vec{r} = \vec{OM}$.

Зависимостта

$$(4.2) \quad \vec{r} = \vec{r}(t),$$

представлява закона за движение във векторна форма.

Траекторията в случая представлява геометричното място на точки от пространството, с които последователно е съвпадал върхът на радиус-векторът \vec{r} . В механиката геометричното място на върховете на вектори с общо начало се нарича *ходограф*. Следователно траекторията представлява ходограф на движещата се точка M .

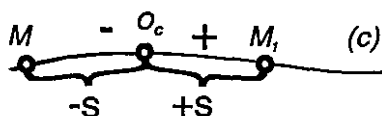
Между двата метода на задаване на закона за движение – векторният и координатният съществува еднозначна връзка.

Проекциите на радиус-вектора \vec{r} върху координатните оси са равни във времето на координатите на движещата се точка M

$$(4.3) \quad \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

където $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ са единичните вектори на осите на декартовата координатна система.

Естествен метод. Този метод се прилага, когато траекторията на точката е предварително известна /фиг.4.2/. Върху траекторията (с) се избира една неподвижна точка или начало O_c , спрямо която може да се определи положението на подвижната точка M . Това става чрез разстоянието $OM = s$, мерено по кривата (с). За еднозначност може да се приеме $s > 0$, когато точка M се намира надясно от O_c и $s < 0$,



Фиг 4.2

когато M е отляво на точка O_c .

Величината s се нарича криволинейна абсциса. Зависимостта

$$(4.4) \quad s = s(t)$$

представлява естествената форма на закона за движение на точка.

Съществува връзка между координатния и естествения метод на задаване на движението на материална точка. Ако се приеме, че при $t = 0$ и $s = 0$, от връзката

$$ds = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt,$$

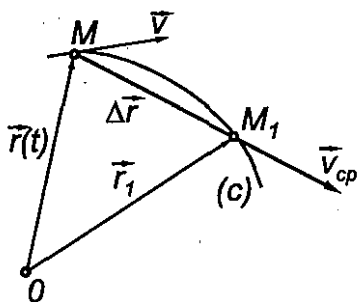
се получава

$$(4.5) \quad s = \pm \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

4.2 Скорост на точка

Понятието скорост интуитивно се свързва с представата за изминаване на някакво разстояние за определено време. Направлението и посоката на движещия се обект също са необходими елементи на скоростта. Тези характеристики подсказват, че скоростта е векторна величина и за дефинирането и трябва да се излезе от векторната форма на закона на движение.

Скорост на точка при векторна форма на закона. Нека в момент t положението на точка M се определя от радиус-вектора \vec{r} , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ точката M се намира в положение M_1 , определено от радиус-вектора $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ /фиг.4.3/. Преместването се определя от вектора $\Delta\vec{r}$ и така дефинирано се различава от преместването, което в действителност прави точката M , движейки се по кривата (с).



Фиг.4.3

Отношението на вектора преместване към интервала от време, за който се е извършило преместването се нарича средна скорост на точка M

$$(4.6) \quad \vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

От дефиниционното равенство (4.6) следва, че средната скорост е вектор с направлението на $\Delta\vec{r}$ и посока от точка M към M_1 .

Колкото е по-малко Δt , толкова преместването ще съвпада по-точно с преместването на точката върху кривата (с). Ако оставим $\Delta t \rightarrow 0$, тогава и $\Delta\vec{r} \rightarrow 0$. Границата на средната скорост е крайна величина, която се нарича скорост на точка в даден момент или само *скорост*

$$(4.7) \quad \vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

При извършения граничен преход $\Delta\vec{r} = \overline{MM_1}$ от секуща става допирателна към траекторията (с) в точка M .

Уравнението (4.7) дефинира скоростта като производна спрямо времето на радиус-вектора на движещата се точка. Скоростта лежи по тангентата към траекторията в точка M и посоката ѝ съвпада с движението на точката, т.е. от точка M към точка M_1 .

Измерението на \vec{V} е m/s.

Скорост на точка при координатна форма на закона на движение.

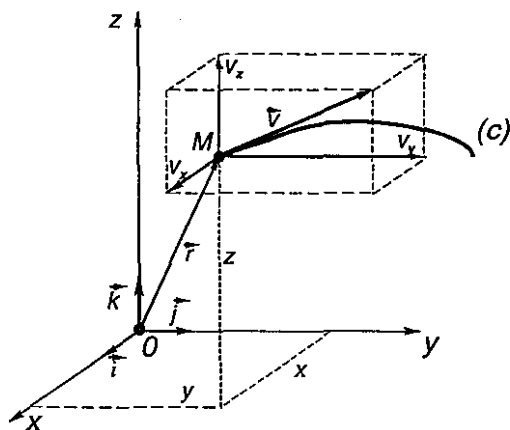
Видяхме, че ако закона за движение на точка е в координатен вид, лесно можем да го получим във векторен вид

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Тъй като единичните вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ са постоянни величини, съгласно (4.7) се получава

$$(4.8) \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Нека с V_x, V_y, V_z означим проекциите на скоростта върху осите на декартовата координатна система /фиг.4.4/, тогава



Фиг.4.4

$$(4.9) \quad \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}.$$

При сравняване на левите и десни страни на (4.9) и (4.8) се получава

$$(4.10) \quad V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

т.е. проекциите на скоростта върху координатните оси са първите производни на уравнения изразяващи закона за движение на точка в координатна форма.

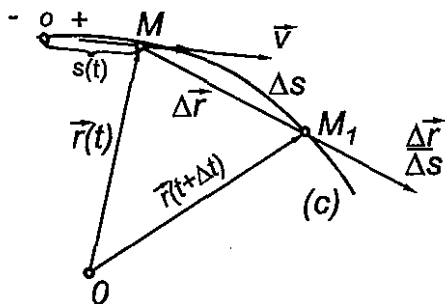
Големината на скоростта се определя от

$$(4.11) \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Направлението на скоростта се определя от посочните косинуси на ъглите, които скоростта сключва с координатните оси:

$$(4.12) \quad \cos(\vec{V}, \hat{i}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\vec{V}, \hat{j}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(\vec{V}, \hat{k}) = \frac{V_z}{V}.$$

Скорост на точка при естествена форма на закона на движение. Известни са траекторията на точката M и законът на движение по траекторията /фиг.4.5/.



Фиг.4.5

Както се вижда от горната фигура на всяка точка от траекторията /на всяка стойност на s / съответствува определен радиус-вектор \vec{r} . Функционалната зависимост между радиус-вектора и криволинейната абсциса може да се изрази като сложна функция на времето

$$(4.13) \quad \vec{r}(t) = \vec{r}[s(t)].$$

Като се изходи от правилото за диференциране на такава функция се получава

$$(4.14) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Тъй като $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \right)$, в граничния преход при $\Delta s \rightarrow 0$ направлението на вектора $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ се слива с тангентата към траекторията на точка M и

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta s} \right) = 1,$$

се стига до извода, че това е единичният вектор на тангентата, насочен в посока на растящите стойности на s , т.е.

$$(4.15) \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

При заместване на (4.15) в (4.14) се получава

$$(4.16) \quad \vec{V} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}.$$

Последното уравнение показва, че $\frac{ds}{dt}$ представлява проекцията на скоростта \vec{V} върху тангентата към траекторията V_τ . Тогава

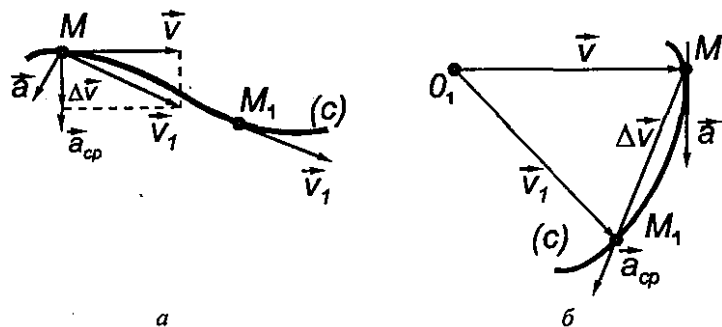
$$(4.17) \quad \vec{V} = V_\tau \vec{\tau}.$$

Това показва, че проекцията на скоростта би могла да се различава от модула на скоростта само по знак, т.е. $V_\tau = \pm |\vec{V}|$. Тъй като знакът на \vec{V} съвпада със знака на ds , следва, че ако $V > 0$, векторът скорост \vec{V} ще съвпадне по посока с посоката на нарастване на криволинейната абциса.

4.3 Ускорение на точка

Ускорение наричаме величината, характеризираща промяната на скоростта с течение на времето по големина и направление. И тук аналогично на понятието скорост се дефинира ускорението и се показват начините за намирането му при различните форми на закона на движение.

Ускорение на точка при векторна форма на закона на движение. Нека в момента от време t скоростта на точка M да бъде \vec{V} , а в момента $t_1 = t + \Delta t$, когато точката е в положение M_1 , скоростта да бъде \vec{V}_1 /фиг.4.6/.



Фиг.4.6

Промяната на скоростта $\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ може да се покаже нагледно, като се пренесе векторът \vec{V}_1 в точка M_1 . От фигурата се вижда, че векторът $\Delta \vec{V}$ ще бъде насочен винаги към вдлъбнатата страна на траекторията (с).

Средно ускорение се нарича векторът

$$(4.18) \quad \vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}.$$

Ускорение се нарича границата на \vec{a}_{cp} когато $\Delta t \rightarrow 0$

$$(4.19) \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}},$$

т.е. ускорението на точка представлява първа производна на скоростта или втора производна на нейният радиус вектор спрямо времето.

Ускорението има измерение m/s^2 .

От фиг.4.6.б се вижда, че когато $\Delta t \rightarrow 0$ ускорението ще има направление по тангентата в точка M към ходографа на скоростта (к). Интерес представлява направлението на ускорението спрямо траекторията (с). За тази цел най-удобно е да се работи с естествена координатна система, която има за начало подвижната точка M и осите и са насочени по тангентата, главната нормала и бинормалата към траекторията. Тангентата и главната нормала определят така наречената оскулачна равнина. Оскулачната равнина в точка M на дадена крива може да се дефинира още като гранично положение на равнината, минаваща през тангентата в точка M , и правата, успоредна на тангентата в точка M_1 , когато $\Delta t \rightarrow 0$, а точка $M_1 \rightarrow M$. Но в тази равнина лежи и векторът средно ускорение \vec{a}_{cp} .

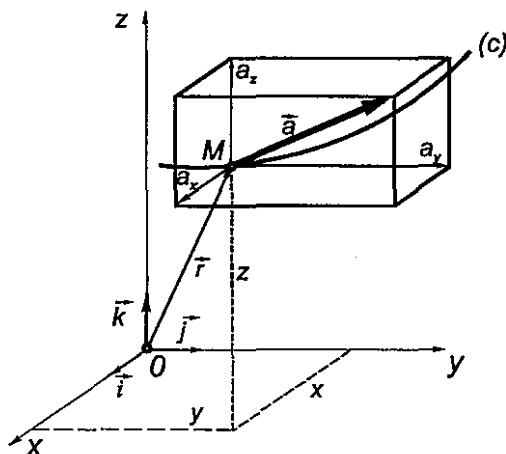
Следователно може да се обобщи, че ускорението на точката е вектор, лежащ в оскулачната равнина към точка M от траекторията (с), като посоката му е винаги към вдлъбнатата страна на кривата.

Ускорение на точка при координатна форма на закона на движение. Координатната форма на закона се представяваще от трите уравнения:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Векторите \vec{r} , \vec{V} , \vec{a} на движещата се точка M могат да се представят чрез проекциите си върху осите на координатната система /фиг.4.7/

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \vec{r} &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}; \\ \vec{V} &= V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}; \\ \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \end{aligned}$$



Фиг.4.7

Съгласно (4.19) ускорението може да се изрази още и като

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \end{aligned}$$

От приравняването на десните части на (4.20) и (4.21) се получава

$$(4.22) \quad a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}.$$

Следователно проекциите на ускорението на точка върху осите на неподвижна координатна система, се равняват на първите производни

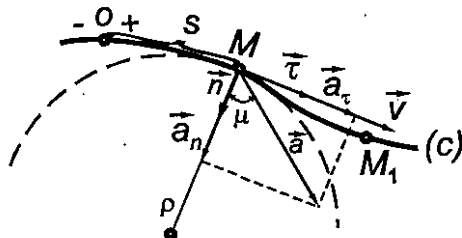
спрямо времето, на проекциите на нейната скорост върху тези оси, или на вторите производни на нейните координати.

Като се знаят a_x, a_y, a_z може да се намерят големината, направлението и посоката на вектора ускорение:

$$(4.23) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\overset{\cdot\cdot}{x}^2 + \overset{\cdot\cdot}{y}^2 + \overset{\cdot\cdot}{z}^2},$$

$$(4.24) \quad \cos(\vec{a}, \hat{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \hat{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \hat{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Ускорение на точка при естествена форма на закона на движение.
 Видяхме, че когато е известна траекторията (с) на точката М, закона на движение се задава в естествена форма и ускорението е вектор лежаш в оскулачната равнина. За равнинна траектория тази равнина се определя от взаимно перпендикулярните направления на тангентата и нормалата в дадена точка от траекторията. На /фиг.4.8/ са показани траекторията (с), положението на точката М, определено от криволинейната абсциса s , двете направления с единични вектори $\vec{\tau}$ и \vec{n} и радиуса на кривината на траекторията в точка М – ρ .



Фиг.4.8

Излизайки от формулите за скоростта в естествена форма (4.14), (4.15) и дефиницията за ускорение на точка (4.19), като се вземе под внимание (4.13) се получава

$$(4.25) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Може да се докаже, че във второто събираемо $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, където ρ е известно от диференциалната геометрия, че е радиусът на кривината в точката М.

Така се стига до извода, че ускорението е векторна сума от две компоненти

$$(4.26) \quad \vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{\vec{V}^2}{\rho} \vec{n}.$$

Първата компонента, насочена по тангентата, се нарича тангенциално ускорение

$$(4.27) \quad \vec{a}_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau}.$$

Тангенциалното ускорение характеризира изменението на скоростта по големина. Ако $V = const$, то $a_\tau = 0$. Когато векторите \vec{V} и \vec{a}_τ имат еднаква посока движението на точката е ускорително, когато посоките им са обратни движението е закъснително.

Втората компонента, насочена по главната нормала към вдлъбнатата страна на траекторията, се нарича нормално ускорение

$$(4.28) \quad \vec{a}_n = + \frac{\vec{V}^2}{\rho} \vec{n}.$$

Нормалното ускорение характеризира изменението на скоростта по направление. При праволинейно движение на точка $\rho = \infty$ ускорението $\vec{a}_n = 0$.

Ускорението \vec{a} няма компонента по бинормалата. Големината му е

$$(4.29) \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Направлението на \vec{a} се определя от

$$(4.30) \quad \operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg}(\vec{a}, \wedge n) = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

4.4 Частни случаи от движение на точка

Равномерно криволинейно движение. При това движение, скоростта

се изменя само по направление, т.е. $a_n \neq 0$, $a_\tau = 0$, $V = \frac{ds}{dt} = const$, т.е.

$ds = V dt$. След интегриране в определени граници $\int_{s_0}^s ds = \int_0^t V dt$ се получава

$$(4.31) \quad s = s_0 + Vt.$$

Равнопроменливо движение. Това е такова движение при което

$$a_r = \text{const.} \quad \text{Тъй като } a_r = \frac{dV}{dt} \text{ след отделяне на променливите и}$$

интегриране $\int_{V_0}^V dV = a_r \int_0^t dt$ се получава

$$(4.32) \quad V = V_0 + a_r t.$$

Като се има в предвид, че $V = \frac{ds}{dt}$ след отделяне на променливите и повторно интегриране $\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (V_0 + a_r t) dt$, се получава закона за равнопроменливо движение на точка в естествена форма

$$(4.33) \quad s = s_0 + V_0 t + \frac{a_r t^2}{2}.$$

При $a_r > 0$ движението е равноускорително, а при, $a_r < 0$ – равнозакъснително.

Хармонично движение. Хармонично се нарича праволинейно движение на точка, което се извършва по закона

$$(4.34) \quad x = A \sin(\omega t + \alpha).$$

В това уравнение A , ω и α са константи. Разстоянието x се мени от $+A$ до $-A$, когато $\sin(\omega t + \alpha)$ получава стойности от $+1$ до -1 . Величината A се нарича амплитуда на движението и представлява най-голямото отклонение на точка M от центъра на трептене O /фиг.4.9/. Константата α характеризира положението на точката M при $t = 0$ и се нарича начална фаза на движението, а $(\omega t + \alpha)$ фаза на движението. Най-малкият интервал от време T , за който точка M извършва едно пълно трептене /минава два последователни пътя през едно и също положение, в една и съща посока/ се нарича период на движението. Периодът на хармоничното движение може лесно да се намери, като се има в предвид определението за периодична функция в математиката. От равенството

$$\sin[\omega(t+T) + \alpha] = \sin(\omega t + \alpha)$$

следва, че е необходимо фазите да се различават с 2π т.е., $\omega T = 2\pi$, респ. $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

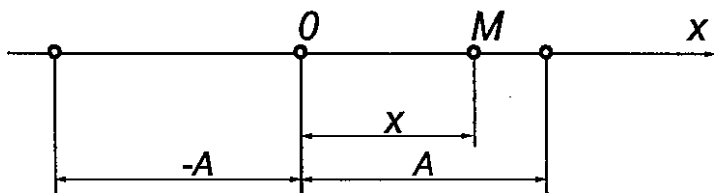
Величината $\omega = \frac{2\pi}{T}$ се нарича *кръгова честота*, а

$\nu = \frac{1}{T}$ *честота* или *фреквенция*.

Скоростта и ускорението на точката М се изменят също по хармоничен закон и са съответно

$$(4.35) \quad V = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \alpha);$$

$$(4.36) \quad a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x.$$



Фиг.4.9

Когато точка М се намира в центъра на трептене точка О ($x = 0$ и $\sin(\omega t + \alpha) = 0$), ускорението също е $\ddot{a} = 0$, а скоростта добива максималното си значение $A\omega$. В крайните положения /точки В и С/ скоростта се анулира, а ускорението по абсолютна стойност добива максималното си значение $A\omega^2$.

Примери

Пример 4.1. Точка се движи по закона $x = 5 \sin \pi t, y = 3 \cos \pi t$. Да се построи траекторията на точката.

Задачата може да се реши по един от двата начина описани в гл.4.1.

При първия, се задава редица стойности за времето $t = 1, 2, 3, \dots$ и се пресмятат съответните координати x и y на движещата се точка. Получената съвкупност от точки се представя графично. Свързващата ги плавна крива е траекторията на движещата се точка.

При втория от уравненията на закона за движение се изразяват тригонометричните функции на параметъра t , повдигат се на квадрат и се събират

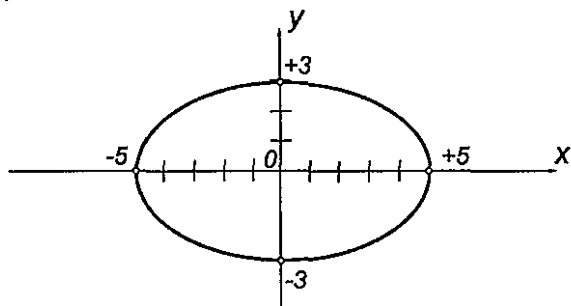
$$\sin \pi t = \frac{x}{5}, \quad \cos \pi t = \frac{y}{3},$$

$$\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}.$$

Получава се уравнение на елипса $1 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$, която лесно може да се построи /фиг.4.10/. За построяването са използвани характерните стойности

$$x=0 \rightarrow y = \sqrt{9} = \pm 3;$$

$$y=0 \rightarrow x = \sqrt{25} = \pm 5.$$



Фиг.4.10

Пример 4.2. Да се определи радиусът на кривината на траекторията на точка в момент от време $t = 1s$, ако точката се движи по закона $x = t^2 + 1$, $y = 3t - 2$.

Търсената величина влиза в уравнение (4.28) и ще я изразим от него $\rho = \frac{V^2}{a_n}$. Вижда се, че е необходимо да се пресметнат големините на скоростта и нормалното ускорение. От уравнения на закона за движение се получава

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 2t; V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 3; V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4t^2 + 9};$$

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = 2; a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = 0; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2.$$

От друга страна

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2}; a_n = \sqrt{a^2 - a_r^2}; a_r = \frac{dV}{dt} = \frac{8t}{2\sqrt{4t^2 + 9}};$$

$$a_n = \sqrt{4 - \frac{16t^2}{4t^2 + 9}}.$$

Окончателно за радиуса на кривината се получава

$$\rho = \frac{4t^2 + 9}{\sqrt{4 - \frac{16t^2}{4t^2 + 9}}}, \text{ а при } t = 1s \rightarrow \rho = 7,81 \text{ [m].}$$

5. Кинематика на тяло

5.1 Общо движение на тяло

Да се познава движението на едно тяло означава да се познава движението на всяка негова точка, което по същество е много трудна задача. Оказва се обаче, че ако се познава движението само на три точки от тялото, нележащи на една права, може да се определи движението на всяка негова точка, т.е. да се определи движението на тялото. И наистина, ако се закрепят неподвижно една точка от тялото, то може да се върти само около тази точка. Ако се закрепят неподвижно две точки от тялото, то може да се върти около правата, която ги свързва. Ако се закрепят и трета точка, нележаща на правата минаваща през първите две движението на тялото става невъзможно.

Нека с $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ се означат три точки от тялото разстоянието между които остава постоянно:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \overline{M_1M_2}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2; \\ \overline{M_1M_3}^2 &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2; \\ \overline{M_2M_3}^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2. \end{aligned}$$

Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка от тялото, разстоянията и до трите точки ще бъдат съответно

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \overline{MM_1}^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2; \\ \overline{MM_2}^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2; \\ \overline{MM_3}^2 &= (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2. \end{aligned}$$

От този запис се вижда, че координатите x, y, z на точка M могат да се определят като функции на деветте координати $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$.

Но от (5.1) се вижда, че кои да е три от деветте координати могат да се изразят чрез останалите шест. Тези шест независими координати /параметри/ се наричат *степенни на свобода*. Следователно движението на тялото може да се опише, ако се познават законите по които се променят във времето тези шест параметъра. Такова движение се нарича *общо движение на тяло*.

Всяко наложено ограничение намалява степените на свобода на тялото и следователно неговото движение става по-просто. Получават се

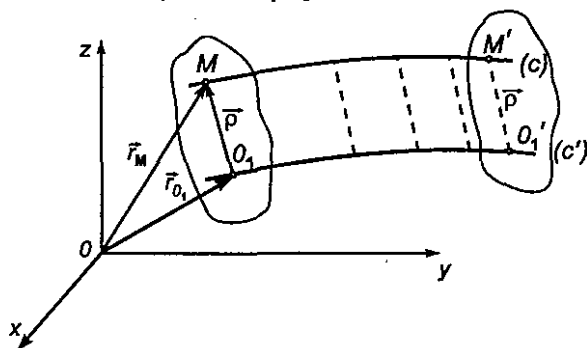
така наречените *частни движения на твърдо тяло*, които имат важно значение, тъй като се срещат много често в природата и техниката. По надолу се разглеждат някои от тях.

5.2 Транслационно движение на тяло

Едно тяло се движи транслационно /постъпателно/, ако всяка права, неизменно свързана с тялото остава успоредна сама на себе си.

Транслационно движение извършват например вагонетка, движеща се по праволинеен релсов път, педалите на велосипед, буталата в цилиндрите на двигателите с вътрешно горене и т.н.

Нека е известен радиус-вектора \vec{r}_{O_1} на една точка O_1 от тялото, радиус-векторът на коя да е друга точка M може да се изрази, ако се познава разстоянието между нея и O_1 /фиг.5.1/.



Фиг.5.1

$$(5.3) \quad \vec{r}_M = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}.$$

За всяко твърдо тяло векторът $\vec{\rho} = \overline{O_1M}$ е постоянен по големина, а при транслационното движение не се променя и по направление.

Уравнение (5.3) показва, че траекторията (с) на всяка точка от тялото е еднаква с траекторията (с') на избраната точка O_1 , тъй като може да се получи чрез успоредно преместване на траекторията (с'), което преместване е определено от векторът $\vec{\rho} = const.$

За да се определи скоростта на произволно избраната точка M , уравнение (5.3) се диференцира по времето

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Понеже $\bar{\rho} = const$ и $\frac{d\bar{\rho}}{dt} = 0$, то

$$(5.4) \quad \bar{V}_M = \bar{V}_{O_1}.$$

Следователно при транслационното движение скоростите на всички точки от тялото във всеки момент са равни.

Ако диференцираме последното уравнение се получава

$$(5.5) \quad \bar{a}_M = \bar{a}_{O_1},$$

следователно ускоренията на всички точки от тялото във всеки момент също са равни.

От казаното до тук следва, че транслационното движение на тяло е напълно определено, ако се познава движението само на една негова точка. Така въпросът се свежда до решаване на задача от кинематика на точка

5.3 Ротационно движение на тяло

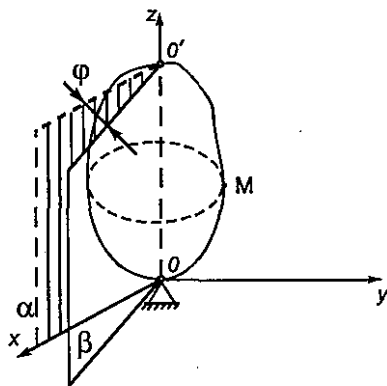
Едно тяло извършва ротационно движение, когато две точки от него /или неизменно свързани с него/ остават неподвижни по време на движението.

Двете неподвижни точки O и O' /фиг.5.2/ определят права, която се нарича ос на ротация /въртене/. Нека се прекарат през оста на ротация две равнини, първата – α е неподвижна, а втората – β неподвижно свързана с тялото.

Положението на тялото във всеки момент от времето се определя от ъгъла φ между двете равнини, т.е.

$$(5.6) \quad \varphi = \varphi(t).$$

Зависимостта (5.6) представлява законът на ротационното движение на тялото. За да бъде еднозначно определено положението на тялото е необходимо да се уточни и посоката на въртене. Ъгълът φ се приема за положителен когато, гледайки срещу оста на ротация, въртенето на



Фиг. 5.2

тялото, респективно на равнина β става в посока обратна на часовниковата стрелка.

Ако за интервал от време Δt ъгълът φ се изменя с $\Delta\varphi$, аналогично на понятието средна скорост може да се дефинира понятието средна ъглова скорост

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Ъгловата скорост на тялото в даден момент се определя от

$$(5.7) \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

т.е. ъгловата скорост е първа производна спрямо времето от ъгъла на въртене. Измерва се в rad/s , т.е. $[\text{s}^{-1}]$

Когато тялото се върти в посока обратна на въртенето на часовниковата стрелка $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, а при въртене по посока на часовниковата стрелка $\frac{d\varphi}{dt} < 0$.

В момента, когато $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ тялото сменя посоката си на въртене.

Ако за даден интервал от време Δt ъгловата скорост на тялото се изменя с $\Delta\omega$, аналогично на понятието средно ускорение може да се дефинира понятието средно ъглово ускорение

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Ъгловото ускорение на тялото в даден момент се определя от

$$(5.8) \quad \varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right) = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi},$$

т.е. ъгловото ускорение е първа производна спрямо времето на ъгловата скорост, или втора производна спрямо времето на ъгъла на завъртане на тялото.

Измерва се в rad/s^2 , $[\text{s}^{-2}]$.

Често ъгловата скорост се изразява чрез т.н. обороти за минута – n . Тъй като на един оборот съответствува ъгъл $2\pi.n$ от горното уравнение се получава връзката

$$(5.9) \quad \omega = \frac{2\pi.n}{60} = \frac{\pi.n}{30}.$$

Когато ъгловата скорост нараства, т.е. $\varepsilon > 0$ – движението е ускорително, а когато $\varepsilon < 0$ – движението е закъснително. Когато $\varepsilon = 0$, ъгловата скорост е $\omega = const.$ и тялото извършва равномерно ротационно движение. В този случай от уравнение (5.7) се получава $d\varphi = \omega dt$. След интегриране се получава законът на движение при равномерно въртене на тяло.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt ;$$

(5.10) $\varphi = \varphi_0 + \omega t .$

Когато $\varepsilon = const.$, ротационното движение се нарича равнопроменливо. То може да бъде равноускорително при $\varepsilon > 0$ или равнозакъснително при $\varepsilon < 0$.

От (5.8) $d\omega = \varepsilon dt$, след интегриране

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt$$

се получава ъгловата скорост

(5.11) $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t .$

От уравнение (5.7), като се отчете (5.11), се получава законът за равнопроменливо ротационно движение на тяло

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 \pm \varepsilon t) dt$$

или

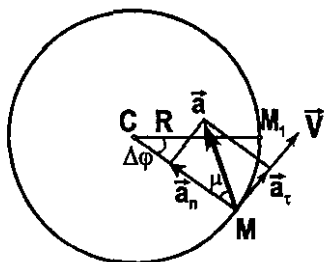
(5.12) $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} .$

В някой случаи е удобно ъгълът φ да се изрази с броя на пълните завъртания /обороти/ N , които е направило тялото. Тъй като $2\pi N = \varphi$, от горното уравнение се получава

(5.13) $2\pi N = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} .$

Скорости и ускорения на точките от тялото. От разгледаните величини $\varphi, \omega, \varepsilon$, които характеризират движението на тялото като цяло, може да се намерят скоростите и ускоренията на отделните точки от тялото.

Всяка произволна точка M от тялото, нележаща на оста на ротация /фиг.(5.2) описва окръжност в равнина перпендикулярна на оста на ротация. За удобство ще покажем отделно траекторията на точката M , отстояща на разстояние R от оста на ротация /фиг.5.3/.



Фиг.5.3

Ако за интервал от време Δt тялото се завърта на ъгъл $\Delta\varphi$, точка M се премества в положение M_1 , описвайки дъгата $\Delta S = R\Delta\varphi$. Ако се раздели тази връзка на Δt , т.е.

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

и се премине към граничен преход се получава

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta S}{\Delta t} \right) = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right) \quad \text{или} \quad \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}.$$

Като се има предвид, че $\frac{dS}{dt} = V$ е големината на скоростта на точката, а $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ е ъгловата скорост на тялото окончателно се получава

$$(5.14) \quad V = R\omega,$$

т.е. големината на скоростта на една точка от ротационно движещо се тяло е равна на произведението от ъгловата скорост на тялото и разстоянието от точката до оста на ротация.

Направлението на скоростта съвпада с допирателната към окръжността, описана от точката и е перпендикулярно на равнината, определена от точката и оста на ротация.

Посоката на скоростта се определя от посоката на въртене на тялото.

Големината на ускорението на точка M се получава, като се излезе от формулите за тангенциалното и нормално ускорения

$$(5.15) \quad a_t = \frac{dV}{dt} = R\varepsilon;$$

$$(5.16) \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = R\omega^2;$$

$$(5.17) \quad a = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Направлението на ускорението се определя с познатата формула

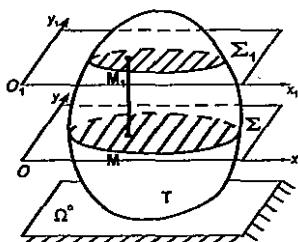
$$(5.18) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{a_{\tau}}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

5.4 Равнинно движение на тяло

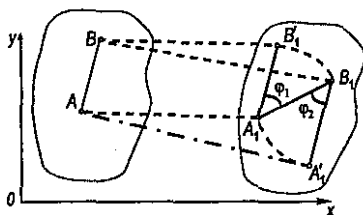
Тяло извършва равнинно движение, когато всички негови точки остават при движението си в равнини, успоредни на дадена неподвижна равнина Ω /фиг.5.4/.

Равнинното движение е широко разпространено. Такова движение извършват звената на повечето механизми в техниката.

Нека Σ представлява сечението на тялото с равнината Oxy . При движението на тялото се движи и сечението Σ , като винаги остава в равнината Oxy . Ако се издигне перпендикуляр MM_1 от точка M принадлежаща на равнината Σ към самата равнина, той ще се движи транслационно, защото винаги ще остава успореден на себе си. Това означава, че траекторията, скоростта и ускорението на точките от този перпендикуляр ще бъдат същите, като на точка M от сечението Σ . Следователно, ако се познава движението на всяка точка M от Σ ще се познава и движението на всички точки от тялото. Тогава, вместо да се разглежда движението на цялото тяло, може да се изучи само движението на равнината Oxy /фиг.5.5/. Положението на Σ спрямо Oxy е напълно определено, ако се познава положението на една отсечка, принадлежаща на Σ , например AB , поради което по-нататък се разглежда само нейното движение в равнината Oxy .



Фиг. 5.4



Фиг. 5.5

Закон на равнинното движение. Преместването на отсечката AB до положение A_1B_1 би могло да стане по два начина. При първия AB се мести транслационно до положение A_1B_1' , след което извършва ротация до ъгъл

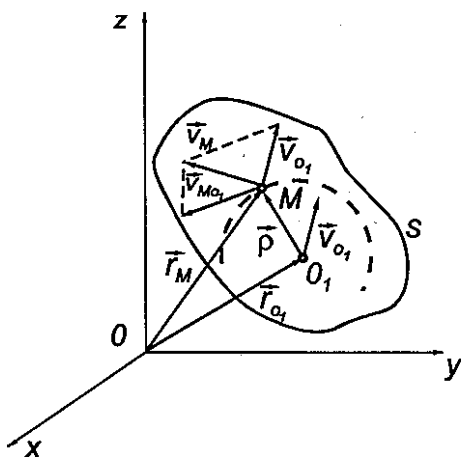
φ_1 около точка A_1 по посока на часовниковата стрелка, докато точка B_1' се слее с точка B_1 . При втория отсечката AB се мести транслационно до положение $A_1'B_1$, след което се извършва ротация на ъгъл φ_2 около полюса B_1 по посока на часовниковата стрелка, докато A_1' се слее с A_1 . Следователно равнинното движение е съставено от две движения-транслационно и ротационно. Ротационното движение и при двата начина е едно и също, тъй като $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ по посока и големина, въпреки че полюсите, около които се извършват ротациите са различни. Транслационното движение зависи от избора на полюса.

Ако за полюс се избере точката A с координати x_A и y_A , тъй като ротационното движение е определено от ъгъла на завъртане φ , движението на тялото може да се опише с трите уравнения

$$(5.19) \quad \begin{aligned} x_A &= f_1(t); \\ y_A &= f_2(t); \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned}$$

Първите две характеризират транслационната компонента на движението, а третото ротационната. Зависимостите (5.19) представляват закона за равнинното движение.

Скорости на точките от тялото. Нека за полюс на подвижното сечение Σ е избрана точка O_1 /фиг.5.6/. Положението на произволна точка M се определя от радиус-вектора \vec{r}_M .



Фиг.5.6

$$(5.20) \quad \vec{r}_M = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}.$$

Като се диференцира горното уравнение за скоростта на точка M се получава

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt},$$

където $\frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} = \vec{V}_{O_1}$ е скоростта на полюса O_1 .

Тъй като векторът $\vec{\rho}$ е постоянен по големина, а се променя по направление при завъртането на точка M около полюса, $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_{MO_1}$ представлява скоростта на ротационното движение на точката около ос, минаваща през полюса O_1 , т.е.

$$(5.21) \quad \vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{MO_1}.$$

Тъй като \vec{V}_{MO_1} е скорост при ротационно движение, може да се представи във вида $\vec{V}_{MO_1} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, където $\vec{\omega}$ е ъгловата скорост на подвижното сечение Σ . След заместване за скоростта на точка M се получава

$$(5.22) \quad \vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

По големината $V_{MO_1} = \omega \cdot \rho$, тъй като векторът $\vec{\omega}$ е перпендикулярен на вектора $\vec{\rho}$. По направление V_{MO_1} е перпендикулярен на $\vec{\rho}$, посоката му се определя от посоката на въртене на тялото.

Следователно, скоростта на коя да е точка M от равнинно движещо се тяло представлява векторна сума от скоростта на полюса O и скоростта на точката M от нейното въртеливо движение около полюса.

На фиг.5.6 е показано графичното определяне на \vec{V}_M , като за целта скоростта \vec{V}_{O_1} е пренесена в точка M .

При известен закон за равнинното движение, \vec{V}_{O_1} се намира от първите две уравнения на (5.19), а $\vec{\omega}$ чрез диференциране на третото уравнение.

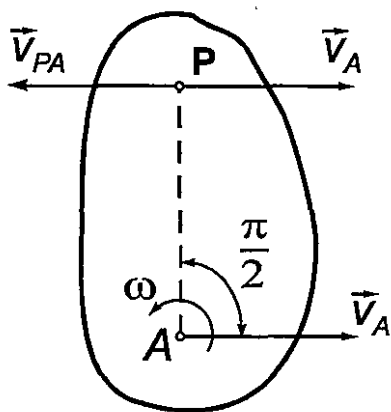
Моментен център на скоростта. Моментен център на скоростта се нарича онази точка от подвижното сечение Σ , чиято скорост в дадения момент е нула.

Може да се покаже, че ако $\omega \neq 0$ такава точка съществува и тя е единствена. На фиг.5.7 за полюс на подвижната равнина Σ е избрана точка A . Скоростта на полюса \vec{V}_A и ъгловата скорост $\vec{\omega}$ на Σ се приемат за известни. Издига се перпендикулярен от точка A към \vec{V}_A така, че \vec{V}_A да се

слива с него след завъртане на ъгъл $\pi/2$ в посока еднаква на завъртането на Σ . Върху така построения перпендикуляр се избира точка P , големината на която по отношение на полюса A е $V_{PA} = V_A$. Следователно точка P е моментен център на скоростта. Положението му можем да определим от

$$V_{PA} = \omega \overline{AP} = \vec{V}_A \rightarrow \overline{AP} = \vec{V}_A / \omega.$$

Твърдението, че е единствена, е очевидно, тъй като съществуването на втора такава би означавало Σ да е неподвижна. Единствено възможното движение, което може да извършва Σ когато една точка към нея $/t. P/$ е неподвижна е ротация около ос перпендикулярна на Σ и минаваща през т. P , затова още тя се нарича моментен център на ротация.



Фиг. 5.7

Моментният център на скоростта мени своето положение във всеки един момент, т.е. в различните моменти Σ ще се върти около различни оси, перпендикулярни на сечението Σ и минаващи през т. P .

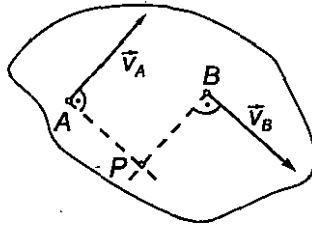
Ако за полюс се избере моментният център на скоростта, скоростта на произволна точка M от сечението Σ ще бъде $\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP}$, но тъй като $\vec{V}_P = 0$.

$$(5.23) \quad \vec{V}_M = \vec{V}_{MP}.$$

Следователно равнинното движение би могло да се разглежда като поредица от ротационни движения, които се извършват около оси минаващи през моментните центрове на ротация и перпендикулярни на равнината на движението.

Предвид голямото значение на м.ц.с., за намиране на скоростите на точки от тялото е важно да се покажат начините за определянето му в някой най-често срещани случаи.

Първи случай: Известни са направлението на скоростите на две точки A и B от подвижната равнина и тези направления не са успоредни помежду си /фиг.5.8/.



Фиг.5.8

Тъй като скоростите на всички точки от равнинно движещото се тяло са перпендикулярни на отсечките съединяващи ги с м.ц.с. следва, че той е пресечницата на перпендикулярите издигнати от точките A и B към направленията на скоростите \vec{v}_A и \vec{v}_B .

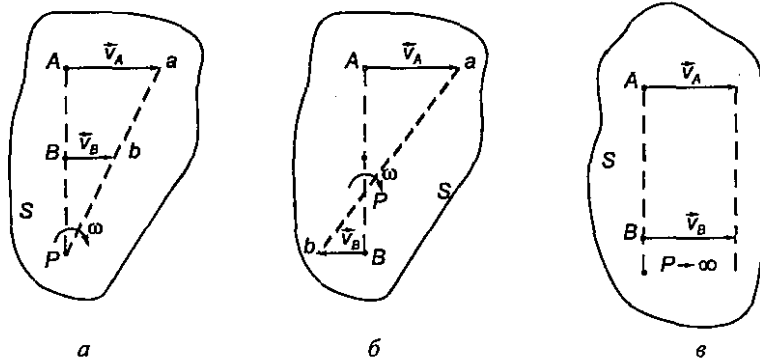
Големината им ще бъде $\vec{v}_A = \omega \overline{AP}$; $\vec{v}_B = \omega \overline{BP}$

или

$$(5.24) \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$$

т.е. големините на скоростите на две точки от подвижното сечение Σ се отнасят помежду си, както разстоянията им до м.ц.с.

Втори случай. Известно е общото направление на скоростите на две точки A и B и това направление е перпендикулярно на правата, която ги свързва. Известни са също и големините на скоростите \vec{v}_A и \vec{v}_B . На фиг.5.9.а и фиг.5.9.б е показано,



Фиг.5.9

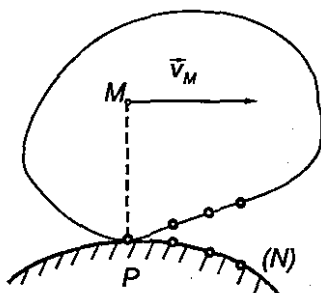
че м.ц.с. лежи на пресечницата на правата AB с правата av прекарана през върховете на векторите на скоростите на двете точки.

В случаите, когато $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ /фиг.5.9.в/ моментният център на скоростта е в безкрайност, тъй като правите AB и av са успоредни. Тогава

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{\infty} = \omega = 0,$$

т.е. тялото извършва моментно транслационно движение.

Трети случай. Когато сечението Σ се търкаля без плъзгане върху неподвижен контур /фиг.5.10/. В този случай моментният център на скоростта /т. P / съвпада с точката на допиране на двата контура. Действително, като точка от неподвижния контур скоростта на точка P е нула. Едновременно с това т. P е точка и от подвижното сечение Σ , което се търкаля без плъзгане, което означава, че скоростта на т. P като точка от неподвижния контур трябва да е равна на скоростта на т. P като точка принадлежаща на Σ . Следователно $V_P = 0$, т.е. точка P е м.ц.с.



Фиг. 5.10

Ускорение на точките от тялото. За намиране на ускорението на произволна точка M от подвижното сечение Σ се постъпва логично, като се диференцира двукратно зависимостта (5.20), т.е. като се диференцира спрямо времето уравнението за скоростта (5.22)

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{dV_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Тук $\frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} = \vec{a}_{O_1}$ е ускорението на полюса. Другите две събираеми са компонентите на ускорението от ротационното движение на Σ около оста минаваща през полюса, т.е.

$$(5.25) \quad \vec{a}_{MO_1} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Тук първото векторно произведение изразява тангенциалната компонента на ускорението от въртенето на точката М около полюса.

$$(5.26) \quad \vec{a}_{MO_1\tau} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}.$$

Направлението му е перпендикулярно на $\overline{MO_1}$, посоката му съвпада с посоката на \vec{V}_{MO_1} , при ускорително въртене и е обратна при закъснително.

Второто векторно произведение изразява нормалното ускорение

$$(5.27) \quad \vec{a}_{MO_1n} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{MO_1}.$$

Направлението му съвпада с направлението на $\overline{MO_1}$ и е насочено винаги към полюса O_1 .

Следователно

$$(5.28) \quad \vec{a}_M = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{MO_1\tau} + \vec{a}_{MO_1n} = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{MO_1},$$

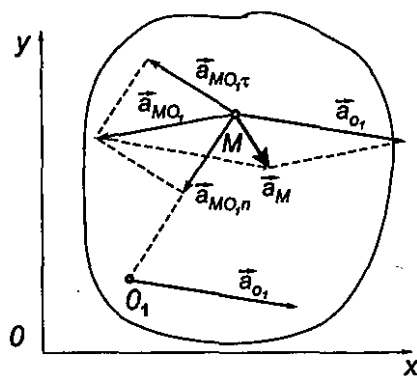
т.е. ускорението на произволна точка М от подвижното сечение представлява векторна сума от ускорението на полюса O_1 и ускорението на точката при завъртането на сечението Σ около ос минаваща през полюса.

За да се определи ускорението по горната формула е необходимо предварително да бъде фиксиран полюса O_1 и да се познаят ω и ε на Σ .

Големините на двете компоненти на \vec{a}_{MO_1} се определят от (5.15) и (5.16), т.е.

$$(5.29) \quad \vec{a}_{MO_1\tau} = \overline{MO_1} \varepsilon; \quad \vec{a}_{MO_1n} = \overline{MO_1} \omega^2.$$

На фиг.5.11 е показано графичното определяне на ускорението \vec{a}_M .



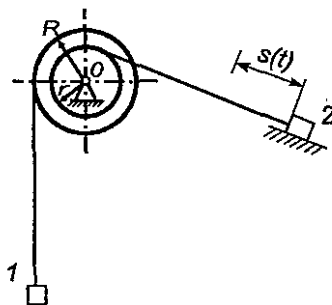
Фиг.5.11

Примери

Пример 5.1 Показаният на фиг.5.12 механизъм се състои от два неизменно свързани барабана с радиуси $r = 0,1 \text{ m}$ и $R = 0,3 \text{ m}$. Върху тях са навити неразтегливи, безтегловни въжета в чийто краищата са окачени товарите 1 и 2. Да се определи скоростта и ускорението на товара 1 след един пълен оборот на барабана, ако товара 2 се изкачва по закона $S = \frac{\pi^2}{20}$ и системата тръгва от състояние на покой.

Двата товара извършват транслационно движение. Скоростта и ускорението на товара 2 се получават, като се диференцира законът на движението му

$$V_2 = \frac{dS}{dt} = 0,1\pi t ; a_2 = \frac{d^2S}{dt^2} = 0,1\pi .$$



Фиг.5.12

Свързаните барабани извършват ротационно движение. Ъгловата скорост и ъгловото ускорение са съответно

$$\omega = \frac{V_2}{r} = \frac{0,1\pi}{0,1} = \pi ; \varepsilon = \frac{a_2}{r} = \frac{0,1\pi}{0,1} = \pi .$$

Като се отчете, че за един оборот $\varphi = 2\pi$ товарът 2 изминава път $S = \pi^2 / 20 = r2\pi$ следва, че времето необходимо за този оборот е $t = \sqrt{2 \cdot 0,1 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2s$. Тогава за скоростта и ускорението на товара 1 се получава съответно

$$V_1 = \omega R = \pi R = \pi \cdot 0,3 = 1,88 \text{ m/s} ;$$

$$a_1 = \varepsilon R = \pi R = \pi \cdot 0,3 = 0,94 \text{ m/s}^2 .$$

Пример 5.2. Корабен винт има ъглова скорост $\omega = 10\pi r/s$. След форсиране на двигателя ъгловото му ускорение нараства пропорционално на квадрата на времето и след четири секунди ъгловата му скорост става $\omega = 40\pi r/s$. Да се определят броя на завъртанията, които винта е направил за тези четири секунди.

Това е обратна задача от ротационно движение на тяло. Съгласно условието $\varepsilon \sim t^2$, т.е $\varepsilon = kt^2$, където k е константа на пропорционалност. Като се отчете, че $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = kt^2$, отделяйки променливите се решава диференциалното уравнение

$$\int d\omega = \int kt^2 dt \rightarrow \omega = \frac{kt^3}{3} + C_1.$$

Интеграционната константа C_1 се определя от началните условия при $t = t_0 = 0$, $\omega = \omega_0 = 10\pi r/s$, от където $10\pi = 0 + C_1$, т.е $C_1 = 10\pi$.

Следователно $\omega = \frac{kt^3}{3} + 10\pi$. Но $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, откъдето $d\varphi = (\frac{kt^3}{3} + 10\pi)dt$.

Решавайки по същия начин /чрез повторно интегриране/ последното уравнение се получава $\varphi = \frac{kt^4}{12} + 10\pi t + C_2$.

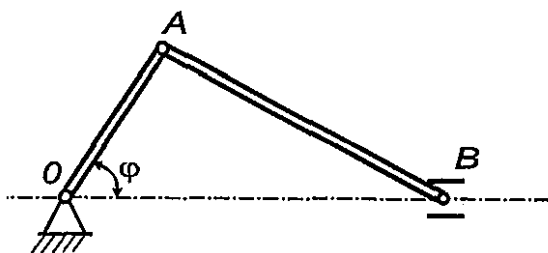
При начални условия $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, следва, че $C_2 = 0$. Така законът за движение приема вида $\varphi = \frac{kt^4}{12} + 10\pi t$.

Коефициентът на пропорционалност k се определя от условието, че при $t = 4s$, $\omega = 40\pi$, т.е $40\pi = \frac{k4^3}{3} + 10\pi \rightarrow k = \frac{(40\pi - 10\pi) \cdot 3}{64} = 1,4\pi$.

Ъгълът на завъртане на винта за време $t = 4s$ става

$$\varphi = \frac{1,4\pi 4^4}{12} + 10\pi \cdot 4 = 2\pi N, \text{ откъдето се определя } N = 34,9 \text{ завъртания.}$$

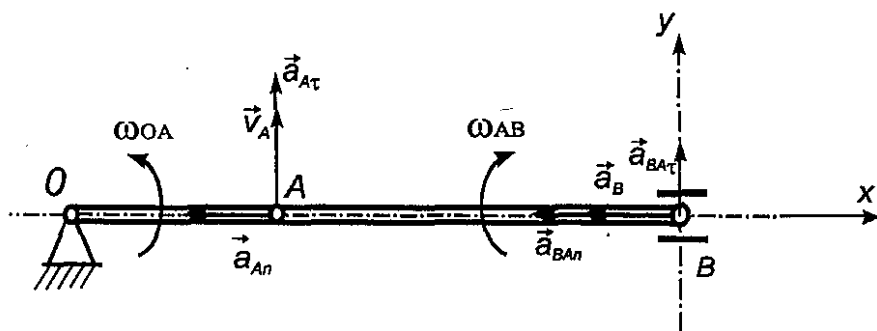
Пример 5.3. Коляното OA на показания коляно-мотовилков механизъм /фиг. 5.13/, започва движение по закона $\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$. Да се определят скоростта и ускорението на точките A и B и ъгловите скорости и ускорения на звената в момент когато $\varphi = 2\pi$, ако $OA = 0,1 m$, $AB = 0,5 m$.



Фиг.5.13

Механизмът се състои от две звена. Коляно OA което се движи ротационно и мотовилка AB която се движи равнинно. Показва се механизмът в момент $\varphi = 2\pi$ /фиг.5.14 / и се пресмята

времето за достигане на това положение, т.е. $\varphi = \frac{\pi t^2}{2} = 2\pi \rightarrow t = \sqrt{4} = 2s$.



Фиг.5.14

1. *Определяне на скоростите.* Скоростта на точка A , като точка от коляното OA , което се върти с ъглова скорост $\omega_{OA} = \frac{d\varphi}{dt} = \pi$ ще бъде

$$V_A = \omega_{OA} OA = \pi \cdot 2.0,1 = 0,2\pi \text{ m/s}.$$

Посоката на V_A е показана на фиг.5.14. След това т.А се разглежда като точка от мотовилката AB . В разглежданият момент от времето моментния център на скоростта на мотовилката AB съвпада с т.В, т.е. $V_B = 0$. Ъгловата скорост на мотовилката ще бъде $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{0,2\pi}{0,5} = 0,4\pi \text{ r/s}$.

2. *Определяне на ускоренията.* Ъгловото ускорение на коляното OA ще бъде $\varepsilon_{OA} = \frac{d\omega_{OA}}{dt} = \pi$.

Ускорението на точката А има две компоненти:

$$\text{нормална} \quad a_{An} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 0,1 \pi^2 t^2 = 0,4 \pi^2;$$

$$\text{тангенциална} \quad a_{At} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0,1 \pi.$$

Точката В се движи по правата OB и директрисата на нейното ускорение лежи на тази права. Съгласно (5.28) за разпределението на ускоренията може да се запише

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BA_n}.$$

За определяне на неизвестните горното векторно уравнение се проектира върху координатните оси x и y . От проекцията по ос x се определя ускорението на т. В.

$$-a_B = -a_{An} - a_{BA_n} \rightarrow a_B = 0,1 \pi^2 t^2 + (0,2 \pi)^2 \cdot 0,5 = 0,48 \pi^2.$$

От проекцията по ос y се определя ъгловото ускорение на звеното AB

$$0 = a_{At} - a_{BA\tau} = 0,1 \pi - \varepsilon_{AB} AB \rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{0,1 \pi}{0,5} = 0,2 \pi.$$

6. Динамика на материална точка

Динамиката е раздел от теоретичната механика, в който се изучава движението на материалните обекти като се вземат под внимание действащите върху тях сили.

Докато статиката се занимава с равновесието на силите, действащи върху материалните обекти, без да изучава движението им, а кинематиката изследва различните видове движения, без да се интересува от причините които ги пораждат, динамиката изучава движението в неговата цялост.

Според вида на материалните обекти, динамиката се дели на динамика на точка, динамика на тяло и динамика на система от точки.

В динамиката, както и в кинематиката се разграничават два основни типа задачи:

Първият тип, т.н. прави задачи са тези, при които е известно движението на обекта, а се търсят силите, които са причина за това движение;

Вторият тип, т.н. обратни задачи са тези, при които са известни силите, действащи върху обекта, а трябва да се определи движението, което той извършва.

6.1 Аксиоми на динамиката

Динамиката се изгражда върху три основни аксиоми, формулирани от Нютон.

Първа аксиома /закон за инерцията/. Всяка изолирана материална точка запазва състоянието си на покой или на равномерно праволинейно движение.

Материалната точка се нарича изолирана, когато не взаимодейства с други обекти. Тъй като мяра за това взаимодействие е силата, следва, че при изолирана точка силата $\vec{P} = 0$.

Свойството на точката да запазва състоянието си на покой или на равномерно праволинейно движение си нарича инерция. Праволинейното равномерно движение на точката е движение по инерция. Частен случай на това движение е покой. И в двата случая ускорението на точката $\vec{a} = 0$. Следователно първата аксиома може да се запише така

$$(6.1) \quad \vec{P} = 0; \vec{a} = 0$$

и е известна още като принцип на инерцията.

Втора аксиома /основен закон на динамиката/. Ускорението на една материална точка е пропорционално на приложената върху нея сила и има направлението и посоката на силата, т.е.

$$(6.2) \quad \vec{P} = m\vec{a}.$$

Коефициентът на пропорционалност е масата m . Следователно тя е мяра за инерцията на точката. В класическата /Нютонова/ механика масата се приема за постоянна величина, независеща от скоростта, ускорението и характера на действащата върху точката сила. Масата се определя чрез силата на теглото

$$(6.3) \quad G = mg,$$

където g е земното ускорение, което с достатъчна за инженерната практика точност се приема за $9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Тъй като почти всички теореми и изводи на динамиката се основават на тази аксиома, тя се нарича още основен закон на динамиката, а изразът (6.2) основно уравнение на динамиката.

Трета аксиома / закон за действието и противодействието/. Силите на взаимодействие между две материални точки са равни и противоположни, т.е.

$$(6.4) \quad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2.$$

Тази аксиома беше формулирана и използвана в статиката, но тук трябва да се отбележи, че тези сили не представляват уравнивесена система сили, защото са приложени върху различни материални точки. Така, че за разлика от първите две аксиоми, които се отнасят за дадена точка, третата може да се каже, че се отнася за система от точки.

6.2 Диференциални уравнения на динамика на материална точка

Диференциалните уравнения на динамиката могат да се запишат по три начина, в съответствие с трите форми на задаване на закона за движение, които бяха разгледани в раздела кинематика.

Диференциално уравнения за движение във векторна форма. Нека върху дадена материална точка с маса m действуват n на брой сили, равнодействащата на които е \vec{R} . Съгласно (4.19) като се диференцира

двукратно закона на движение се получава ускорението $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, което заместено в (6.2) представя векторната форма на диференциалното уравнение на динамиката.

$$(6.5) \quad m\bar{a} = m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k = \bar{R}.$$

Диференциални уравнения за движение в координатна форма. По аналогичен начин ката се излезе от координатната форма на задаване на закона за движение от (4.22) се определят проекциите на ускорението върху координатните оси $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ и се заместват в основното уравнение на динамиката (6.2), при което се получава

$$(6.6) \quad \begin{aligned} ma_x &= m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{kx} = R_x; \\ ma_y &= m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{ky} = R_y; \\ ma_z &= m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{kz} = R_z, \end{aligned}$$

т.е. получената форма представлява проектиран запис на (6.5).

Диференциални уравнения за движение в естествена форма. Ако (6.5) се проектира върху естествена координатна система с координатни оси тангента, нормала и бинормала като се отчете, че $a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2}$, $a_n = \frac{V^2}{\rho}$,

$a_b = 0$ се стига до изразите

$$(6.7) \quad \begin{aligned} ma_\tau &= m \frac{d^2S}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{k\tau} = R_\tau; \\ ma_n &= m \frac{V^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n P_{kn} = R_n; \\ 0 &= \sum_{k=1}^n P_{kb} = R_b, \end{aligned}$$

където R_τ , R_n , R_b са проекциите на равнодействащата върху трите оси.

6.3 Основни задачи на динамиката

Както беше отбелязано в началото на настоящия раздел, в динамиката се решават следните два типа основни задачи.

Прави задачи на динамиката. Известна е масата m и законът за движение на материалната точка. Неизвестна е силата /равнодействащата на силите/.

Тези задачи са сравнително леки, тъй като се свеждат до двукратно диференциране спрямо времето, на закона за движение. Например ако закона е зададен в координатна форма $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, след двукратното диференциране, от (6.6) се получават проекциите на равнодействащата R_x, R_y, R_z .

Големината и посоката на търсената сила се получават от

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$
$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\bar{R}, \bar{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

Аналогично се постъпва когато законът на движението е зададен в друга форма.

Обратни задачи на динамиката. Известни са масата m и силата \bar{R} , действащи върху материалната точка. Търси се законът на движение на точката.

Тези задачи са по трудни, тъй като решението им е свързано с двукратното интегриране на диференциалните уравнения на движението. Ако последните са дадени в координатната форма (6.6), при интегрирането на всяко едно от тях ще се получат по две интеграционни константи или общо шест на брой:

$$(6.8) \quad \begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned}$$

Като се диференцират горните изрази се получава:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned}$$

За определянето на интеграционните константи $C_1 + C_6$ се използват началните условия на движението. Начални условия са – положението и скоростта на точката в момент $t_0 = 0$. След заместване на началните условия в (6.8) и (6.9) се

получава следната система уравнения :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\
 y_0 &= y_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\
 z_0 &= z_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\
 \dot{x}_0 &= \dot{x}_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\
 \dot{y}_0 &= \dot{y}_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\
 \dot{z}_0 &= \dot{z}_0(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

Определените от тази система интеграционни константи се заместват в (6.8) и се получава търсения закон за движение на материалната точка.

Аналогично се решава обратната задача, когато диференциалните уравнения са в естествена форма.

6.4 Общи теореми на динамиката на материална точка

Широк клас задачи могат да се решат с т. нар. общи теореми на динамиката, които в сравнение с основното уравнение на динамиката значително улесняват решението. Например при обратна задача, ако търсената характеристика не налага задължително намирането на закона за движение, прилагането на по-трудната процедура на двукратно интегриране не винаги е оправдано.

6.4.1 Теорема за изменение на количеството на движение на материална точка.

Количество на движение на материална точка се нарича векторната величина

$$\bar{q} = m \cdot \vec{V}.
 \tag{6.11}$$

По направление и посока \vec{q} съвпада със скоростта /фиг.6.1/, а по големина се отличава от нея със скаларния множител m – маса на материалната точка.

Измерението на количеството на движение е $kg.m.s^{-1}$.

Теоремата гласи, че *производната спрямо времето на количеството на движение на материална точка е равна на действащата върху точката сила*, т.е.

$$(6.12) \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{P}.$$

Доказателството е просто

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{P}.$$

Като се отделят променливите, теоремата се представя в диференциална форма

$$(6.13) \quad d\vec{q} = \vec{P}dt = d\vec{I},$$

където $d\vec{I}$ се нарича елементарен импулс на силата \vec{P} .

След интегриране

$$\int_{\vec{q}_0}^{\vec{q}} d\vec{q} = \int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}} d(m\vec{V}) = \int_0^t \vec{P}.dt = \int_{\vec{I}_0}^{\vec{I}} d\vec{I}$$

се получава интегралната форма на теоремата във векторен запис

$$(6.14) \quad m(\vec{V} - \vec{V}_0) = \int_0^t \vec{P}.dt.$$

Ако се проектира този израз върху осите на декартова координатна система, следва скаларния запис на интегралната форма на теоремата, който е по-удобен за работа. Когато силата не е функция на времето, а е постоянна по големина, посока и направление се получава:

$$(6.15) \quad \begin{aligned} m(V_x - V_{0x}) &= P_x.t; \\ m(V_y - V_{0y}) &= P_y.t; \\ m(V_z - V_{0z}) &= P_z.t. \end{aligned}$$

От (6.12) следва, че ако $\vec{P} = 0$, количеството на движение на точката остава постоянно по големина, направление и посока, т.е.

$$(6.16.a) \quad \vec{q} = m\vec{V} = const.$$

С това равенство се изразява т. нар. *закон за съхранение на количеството на движение на материална точка*.

Когато само някоя от проекциите на силата е равна на нула, например $P_x = 0$, следва, че

$$(6.16.6) \quad q_x = m\dot{V}_x = \text{const}.$$

Този израз представлява законът за запазване на проекцията на количеството на движение на материална точка.

6.4.2 Теорема за изменение на кинетичния момент на материална точка

Кинетичен момент на материална точка спрямо дадена точка O , се нарича момента на количеството на движение на точката спрямо точка O , т.е.

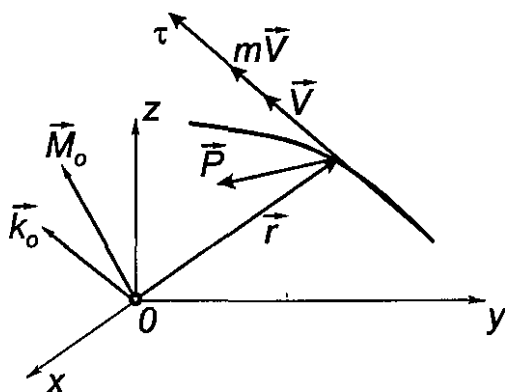
$$(6.17) \quad \vec{k}_o = \vec{M}_o(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}.$$

Дефиниционното уравнение (6.17) е аналогично на (2.1) за момент на сила спрямо точка

$$\vec{M}_o(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}.$$

Приложната точка на \vec{k}_o е точка O , а направлението му е перпендикулярно на равнината определена от векторите \vec{r} и \vec{V} /фиг.7.1/.

Измерението на кинетичния момент е $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.



Фиг.6.1

Теоремата гласи, че производната по времето на кинетичния момент на материална точка спрямо точка O , е равна на момента на силата, действаща на материалната точка, спрямо същата точка O , т.е.

$$\frac{d\vec{k}_o}{dt} = \vec{M}_o(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}.$$

Доказателство

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}_o}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = m \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}) = m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} + m(\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt}) = \\ &= m(\vec{V} \times \vec{V}) + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{M}_o(\vec{P}). \end{aligned}$$

Векторното произведение $(\vec{V} \times \vec{V})$ в този израз е равно на 0.

Проекциите на (6.17) върху координатните оси са

$$(6.19) \quad \frac{dk_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z.$$

И тук аналогично на първата теорема от (6.17) при $\vec{M}_o(\vec{P}) = 0$, следва, че кинетичния момент

$$(6.20) \quad \vec{k}_o = \vec{r} \times m\vec{V} = \text{const.}$$

Това е закона за запазване на кинетичния момент спрямо дадена точка O .

Ако $\vec{P} \neq 0$, за да бъде $\vec{M}_o = 0$, точката O трябва да лежи върху директрисата на силата. Такава сила се нарича *централна*. Например централна е силата с която слънцето привлича земята и нейният момент е нула.

Ако в (6.19) някоя от проекциите на момента, например $M_x = 0$, то

$$(6.21) \quad k_x = \text{const.}$$

Това условие представлява законът за запазване на проекцията на кинетичния момент.

6.4.3. Теорема за изменение на кинетичната енергия на материална точка

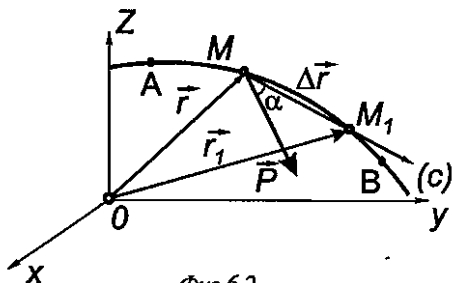
Във връзка с представянето на теоремата, се разглеждат някои предварителни понятия.

Елементарна работа на сила.

Нека M и M_1 са две безкрайно близки положения от движението на точка M под действието на силата \vec{P} /фиг.6.2/.

Елементарното преместване на точката се представя с векторната разлика

$$d\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}.$$



Фиг.6.2

Елементарна работа на силата \vec{P} се нарича скаларното произведение

$$(6.22) \quad dA = \vec{P} \cdot d\vec{r} = P dr \cos \alpha,$$

т.е. работата е скаларна величина. Ако вектора \vec{P} е перпендикулярен на $d\vec{r}$ следва, че $dA = 0$.

Измерението на работата е $N.m$ или J /джаул/.

Ако се проектира (6.22) върху осите на декартовата координатна система $Oxyz$ и се означат проекциите на елементарното преместване $d\vec{r}$ с dx, dy, dz , елементарната работа се представя

$$(6.23) \quad dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz.$$

Аналогично при проектиране върху осите на естествена координатна система се получава

$$(6.24) \quad dA = P_r dS,$$

където P_r е проекцията на силата върху тангентата.

Уравненията (6.22), (6.23) и (6.24) отговарят съответно на трите форми на задаване на закона за движение – векторна, координатна и естествена.

Пълна /тотална/ работа е тази, която извършва силата за едно крайно преместване, например от точка A до B /фиг.6.2/. Тъй като пълната работа е сума от елементарните работи, за да се определи, трябва да се интегрират уравненията за елементарната работа в съответните форми. Криволинейният интеграл /ако съществува такъв/ представлява пълната работа.

$$(6.25) \quad A = \int_A^B dA = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_A^B P_x dx + P_y dy + P_z dz = \int_A^B P_r dS.$$

Мощност се нарича величината, която определя извършената работа за единица време

$$(6.26) \quad N = \frac{dA}{dt} = \vec{P} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{V},$$

т.е. мощността се равнява на скаларното произведение на векторите сила и скорост.

Следователно

$$(6.27) \quad N = P_x V_x + P_y V_y + P_z V_z.$$

Единица за измерване на мощност е ват: $1.W = 1 \frac{J}{s}$; $1.kW = 10^3 W$; $1.MW = 10^6 W$;

От (6.26) се вижда, че работата може да се измерва още и в следните единици – $W.s$ /ватсекунда/, $W.h$ /ватчас/, $kW.h$ /киловатчас/.

Кинетична енергия на материална точка се нарича скаларната величина – полупроизведение на масата и втората степен на скоростта

$$(6.28) \quad e = \frac{m \cdot \vec{V}^2}{2} = \frac{m}{2} V^2.$$

Теорема за изменение на кинетичната енергия. Може да се докаже следната теорема за кинетичната енергия на материална точка: *диференциалът на кинетичната енергия е равен на елементарната работа на действащата върху материалната точка сила, т.е.*

$$(6.29) \quad de = dA.$$

Излиза се от основното уравнение на динамиката, като се умножават скаларно с \vec{V} двете му страни, т.е

$$m \cdot \vec{a} \vec{V} = m \cdot \vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{V} \quad \text{или} \quad m \cdot \vec{V} d\vec{V} = \vec{P} \cdot \vec{V} dt.$$

След вкарване на скоростта под знака на диференциал отляво и отчитане отдясно, че $\vec{V} dt = d\vec{r}$ се получава

$$m \cdot d \frac{\vec{V}^2}{2} = \vec{P} \cdot d\vec{r} \quad \text{или} \quad dm \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = de = dA,$$

с което теоремата е доказана. Ако се интегрира последният израз, т.е.

$$\int_{V_A}^{V_B} d \frac{mV^2}{2} = \int_A^B dA$$

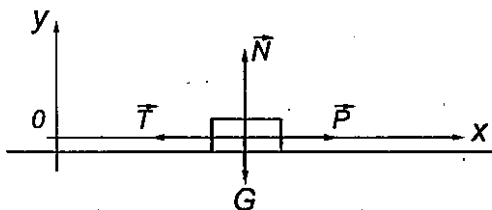
се получава *интегралната форма на теоремата*

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A,$$

т.е. *промяната на кинетичната енергия е равна на пълната /тотална/ работа извършена от силата за преместването на материалната точка от положение A до положение B.*

Примери

Пример 6.1. Тяло с маса m , тръгва от покой и се движи по хоризонтална права /фиг.6.3/ под действието на сила $P = kt$, насочена по посока на движението / k – положителна константа /. Да се определи законът за движение на тялото, ако коефициентът на триене е μ .



Фиг.6.3

Това е типична обратна задача на динамика на точка. Решението протича в следната последователност. Избира се координатна система така, че оста x да съвпада с правата на движението. Изобразява се точката в произволен момент на движението. Внимателно се поставят силите действащи върху точката, като освен активните сили P и $G = m \cdot g$, се поставят и реакциите – нормален натиск $N = G$ и сила на триене, насочена обратно на посоката на движение $T = \mu \cdot N$.

Съставя се диференциалното уравнение по оста на движение – Ox

$$m \ddot{x} = P - T$$

или
$$\ddot{x} = \frac{k \cdot t}{m} - \mu \cdot g$$

След интегриране се получава

$$\dot{x} = V = \frac{k \cdot t^2}{2m} - \mu \cdot g \cdot t + C_1$$

Интеграционната константа се определя от началното условие – момент $t = 0$, когато $V(0) = V_0 = 0$. След заместване в горното уравнение на променливите – време и скорост с началните стойности се получава, че $C_1 = 0$, т.е

$$\dot{x} = V = \frac{k \cdot t^2}{2m} - \mu \cdot g \cdot t$$

След повторно интегриране на горния израз се получава

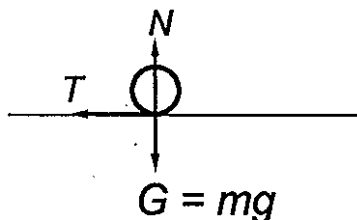
$$x = \frac{k \cdot t^3}{6m} - \mu \cdot g \cdot \frac{t^2}{2} + C_2$$

Аналогично от началното условие $t = 0$ и $x(0) = 0$ следва, че константата C_2 също е равна на нула, при което окончателно за закона на движение се получава

$$x = \frac{k \cdot t^3}{6m} - \mu \cdot g \cdot \frac{t^2}{2}$$

Пример 6.2. Да се определи числената стойност на коефициента на триене на колелата на автомобил, ако след включване на спирачките при скорост 72 km/h по прав хоризонтален участък, той спира след 6 s /фиг.6.4/.

В тази задача очевидно не е необходимо да се търси закона на движение. В случая, тъй като времето е дадено в явен вид може да се използва директно теоремата за количество на движение на точка, което опростява много нейното решение. На фиг.6.4 са показани силите възникващи върху колелата при задействане на спирачките.



Фиг.6.4

Началната скорост на автомобила е $V_0 = 72 \text{ km/h}$ или $V_0 = 20 \text{ m/s}$, а крайната при спиране е равна на нула. Прилага се теоремата

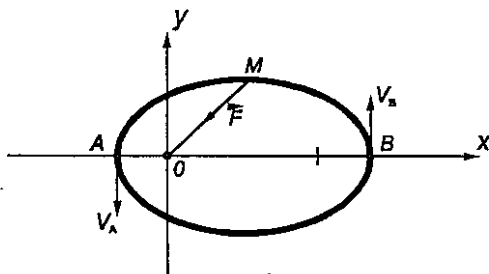
$$mV - mV_0 = \int_0^t P_x t,$$

т.е.

$$-m \cdot 20 = -\mu \cdot m \cdot g \cdot 6,$$

откъдето намираме, че $\mu = \frac{20}{6 \cdot g} \approx 0.33$.

Пример 6.3. Изкуствен спътник се движи по елиптична орбита в един от фокусите на която е Земята и се намира под действието на силата на земната гравитация \vec{F} /фиг.6.5/. Да се определи скоростта на спътника в момент, когато се намира в най-отдалечената от Земята точка B , ако скоростта му в най-близката до Земята точка A е $V_A = 9 \text{ km/s}$, $OA = 4000 \text{ km}$, $OB = 4800 \text{ km}$.



Фиг.6.5

Силата \vec{F} спрямо Земята т.О е централна /дирек-

трисата и пресича т.О/ и следователно спрямо оста Oz перпендикулярна на равнината Oxy няма момент. От теоремата за изменение на кинетичния момент се получава, че

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x = 0, \text{ т.е. } k_x = \text{const}.$$

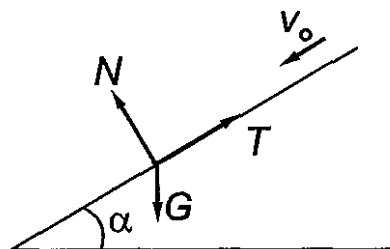
Горното равенство изразява закона за запазване на проекцията на кинетичния момент върху оста Oz , от където следва, че

$$m.V_A.OA = m.V_B.OB,$$

т.е

$$9.4000 = V_B . 4800 \rightarrow V_B = 7,5 \text{ km/s}.$$

Пример 6.4. Скиор се спуска по права с ъгъл на наклона $\alpha = 30^\circ$ и начална скорост 4 m/s /фиг.6.6/. Да се определи скоростта на скиора след изминаване на разстояние $S = 100 \text{ m}$, ако коефициента на триене между скиите и снега е $\mu = 0,27$.



Фиг.6.6

В случая е дадено изминатото разстояние и задачата може да се реши с теоремата за кинетичната енергия на точка. Най удачно е да се избере оста x по наклона. Показват се силите действащи на точката и се прилага теоремата за промяна на кинетичната енергия на точка

$$\frac{mV_x^2}{2} - \frac{mV_{0x}^2}{2} = A = P_x S.$$

Известна е началната скорост $V_{0x} = V_A$, търси се скоростта $V_x = V_B$. Проекцията на резултантната сила върху оста x ще бъде

$$P_x = mg \sin \alpha - T = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

След заместване в теоремата се получава

$$\frac{V_x^2}{2} - 8 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) . 100,$$

$$V_x = \sqrt{200g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + 16} \approx 23,2 \text{ m/s}.$$

7. Динамика на механична система

7.1 Основни понятия. Масови характеристики

Механична система се нарича съвкупност от материални точки, при които движението на една от тях зависи от движението на останалите. Например слънчевата система, където движението на всяка планета от нея е обусловено от движението на останалите планети.

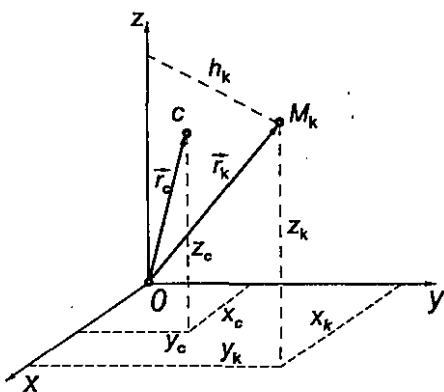
Върху материалните точки на механичната система действуват два вида сили – вътрешни и външни.

Вътрешни сили са силите на взаимодействие между отделните точки на системата. От третата аксиома на динамиката следва, че тези сили две по две са равни по големина, имат общо направление и противоположни посоки, т.е. главният им вектор, а от там и главният им момент спрямо дадена точка или ос са равни на нула. Това обаче не означава, че системата е в равновесие, тъй като силите са приложени върху различни точки.

Външни сили са силите на взаимодействие на точките от една система с точките, принадлежащи на друга система. Например в слънчевата система, вътрешни сили са силите на взаимодействие между отделните планети вътре в системата, а външни сили са силите на взаимодействие между планетите и звездите.

Наред с действащите върху точките сили, движението на механичната система зависи още и от т.нар. масови характеристики. Освен споменатата до сега *пълна /totalна/ маса* на системата, тук се разглеждат още три масови характеристики.

Масов център представлява по-широко понятие на центъра на тежестта. Като математичен запис се покрива с него, но се отнася за механична система, където разстоянията между съставните части /материални точки или тела/ на системата се променят при движението. За твърдо тяло, тези разстояния са неизменни и двете понятия се покриват.



Фиг. 7.1

Масов инерционен момент характеризира разпределението на масите в системата. Може да се дефинира спрямо геометрична точка, ос и равнина. Тук ще се спрем само на така наречените осови масови инерционни моменти /фиг.7.1/.

Ако разстоянието на коя да е точка от системата до оста Oz се обозначи с h_k , под масов инерционен момент J_z спрямо оста z се разбира изрза

$$(7.1) \quad J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2,$$

където m_k е масата на точката M_k . Като се отчете, че $h_k^2 = x_k^2 + y_k^2$ се получава

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Аналогично се дефинират инерционните моменти спрямо другите оси

$$(7.2) \quad J_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad J_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2).$$

Както се вижда от горните уравнения, така дефинираният инерционен момент е винаги положителна величина и има измерение $kg.m^2$.

За материално тяло, ако се счита, че е съставено от $n \rightarrow \infty$ точки инерционният момент се дава с

$$(7.3) \quad J_x = \int (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int (x^2 + z^2) dm; \quad J_z = \int (x^2 + y^2) dm.$$

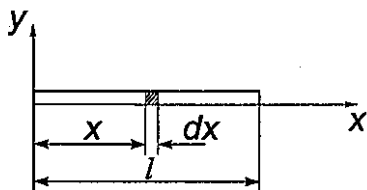
На базата на (7.3) в техническите справочници са дадени емпирични формули за инерционните моменти на тела с най-често срещани геометрични форми. По долу е показано получаването на тези формули за два случая.

1. *Прав хомогенен прът* /фиг.7.2/. От линейната плътност на пръта $\rho_l = \frac{dm}{dx} = const.$, като се изрази елементарната маса и се замести в (7.3) се получава

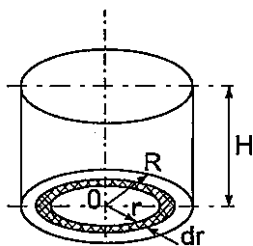
$$J_y = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho_l dx = \int_0^l x^2 \rho_l dx = \frac{1}{3} \rho_l l^3.$$

От друга страна, ако в израза за линейната плътност се отделят променливите и се интегрира, за цялата маса на пръта следва $M = \rho_l l$. След заместване в горния израз за инерционния момент на пръта спрямо оста Oy се получава

$$(7.4) \quad J_y = \frac{1}{3} M l^2.$$



Фиг.7.2



Фиг.7.3

2. *Хомогенен кръгъл цилиндър.* На фиг.7.3 е показан цилиндъра с височина H и отделения в него елементарен цилиндър с радиус r , дебелина dr и обем $dV = 2\pi r H dr$. От обемната плътност $\rho_v = \frac{dm}{dV}$ следва, че масата на елементарния цилиндър е $dm = 2\pi r H \rho_v dr$. Тогава за инерционния момент спрямо оста Oz на цилиндъра се получава

$$(7.5) \quad J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_V r^2 dm = 2\pi \rho_v H \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}.$$

Масов инерционен радиус е третата геометрична характеристика, която се използва в динамиката. Дефинира се с отношението

$$(7.6) \quad i_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}}.$$

и има измерение m . Тук M е тоталната маса на механичната система или масата на тялото.

7.2 Диференциални уравнения на динамиката на механична система

Ако дадена материална точка принадлежи на механична система тя си взаимодейства с останалите точки от системата. Равнодействащата на вътрешните сили на взаимодействие, приложена върху k -тата точка е означена с \vec{P}_k^* . Равнодействащата на външните сили, действащи върху същата точка с \vec{P}_k .

Тогава диференциалното уравнение за движение на тази точка съгласно основното уравнение на динамиката приема вида

$$(7.7) \quad m_k \bar{a}_k = \bar{P}_k + \bar{P}_k^*.$$

Диференциалните уравнения за движение в скаларна форма се получават след проектиране на (7.7) върху осите на декартова координатна система

$$(7.8) \quad \begin{aligned} m_k \bar{a}_{kx} &= \bar{P}_{kx} + \bar{P}_{kx}^*; \\ m_k \bar{a}_{ky} &= \bar{P}_{ky} + \bar{P}_{ky}^*; \\ m_k \bar{a}_{kz} &= \bar{P}_{kz} + \bar{P}_{kz}^*. \end{aligned}$$

За механичната система като цяло, уравненията от вида (7.7) са n на брой / колкото са точките които я изграждат/, а уравненията от вида (7.8) съответно $3n$ на брой.

Задачите – права и обратна са свързани съответно с диференциране и интегриране, което особено във втория случай води до големи затруднения. Съществуват обаче широк кръг задачи при които не е необходимо да се познава движението на всяка една точка от системата. В много технически задачи се изучава движението на механичната система като цяло. В този случай особено полезни са т.н. общи теореми на динамиката. Те се получават след преработка на диференциалните уравнения за движение на системата.

7.3 Общи теореми на динамиката на механична система

1. Теорема за изменение на количеството на движение на механична система. *Производната спрямо времето на количеството на движение на механична система, е равна на главния вектор на външните сили, действащи върху нея.*

$$(7.9) \quad \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}.$$

Доказателството е леко и при трите теореми става по аналогичен начин. Записва се теоремата за количеството на движение за k -тата точка от механичната система

$$\frac{d\bar{q}_k}{dt} = \frac{dm_k \bar{V}_k}{dt} = \bar{P}_k + \bar{P}_k^*$$

и се сумира се за всичките n на брой точки на системата

$$\sum_{k=1}^n \frac{dm_k \bar{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k + \sum_{k=1}^n \bar{P}_k^*.$$

След преработка за сумата отляво се получава

$$\sum_{k=1}^n \frac{dm_k \vec{V}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \frac{d\vec{Q}}{dt},$$

където $\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k$ е количеството на движение на цялата система.

Сумите отдясно са:

$$\sum_{k=1}^n \vec{P}_k = \vec{R} \text{ е главен вектор на външните сили;}$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{P}_k^* = \vec{R}^* = 0 \text{ е главен вектор на вътрешните сили, който съгласно}$$

третата аксиома на динамиката /за действие и противодействие/, е равен на нула.

След проектиране на (7.9) върху осите на декартова координатна система се получава диференциалната форма на теоремата в скаларен запис

$$(7.10) \quad \frac{dQ_x}{dt} = R_x; \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y; \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z.$$

Ако се отделят променливите в (7.9) $d\vec{Q} = \vec{R}dt$ и се интегрира се получава интегралната форма на теоремата

$$\int_{Q_0}^{\vec{Q}} d\vec{Q} = \int_0^t \vec{R}dt = \int_0^t \sum_{k=1}^n \vec{P}_k dt = \sum_{k=1}^n \int_0^t \vec{P}_k dt$$

или

$$(7.11) \quad \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{I}_k,$$

т.е. промяната на количеството на движение за краен интервал от време е равна на сумата от импулсите на външните сили, действащи върху системата.

Тази форма на теоремата може също да се запише в скаларен вид

$$(7.12) \quad \begin{aligned} Q_x - Q_{0x} &= \int_0^t R_x dt = \sum_{k=1}^n I_{kx}; \\ Q_y - Q_{0y} &= \int_0^t R_y dt = \sum_{k=1}^n I_{ky}; \\ Q_z - Q_{0z} &= \int_0^t R_z dt = \sum_{k=1}^n I_{kz}. \end{aligned}$$

Когато главният вектор на външните сили е равен на нула $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k = 0$ от (7.9) следва, че

$$(7.13) \quad \bar{Q} = \text{const.}$$

Това равенство се нарича закон за запазване на количеството на движение на механичната система.

Когато някоя от проекциите на главният вектор на външните сили е равна на нула, напр. $R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0$ следва, че

$$(7.14) \quad Q_x = \text{const.}$$

Аналогично (7.14) се нарича закон за запазване проекцията на количеството на движение на системата.

Теоремата може да се представи и в друга форма, като се излезе от израза за масовия център

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_c.$$

След диференциране се получава

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = M \frac{d\bar{r}_c}{dt}, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = M \bar{v}_c.$$

Но в това уравнение от лявата страна стои количеството на движение на цялата система, т.е.

$$(7.15) \quad \bar{Q} = M \bar{v}_c.$$

След повторно диференциране се получава

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \bar{R}$$

или

$$(7.16) \quad M \bar{a}_c = \bar{R}.$$

Последното уравнение по своята структура е аналогично на основното уравнение на динамиката (7.2). То описва движението на масовия център на механичната система и се нарича теорема за движение на масовия център. Съгласно тази теорема, масовият център се движи като материална точка с маса, равна на масата на системата под действието на главния вектор на външните за системата сили.

Скаларната форма на (7.16) се получава след проектиране върху координатните оси

$$(7.17) \quad M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{kx}; \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{ky}; \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{kz}.$$

Върху движението на масовия център влияят само външните сили. Когато главния вектор на тези сили $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k = 0$ от (7.16) следва, че

$$\vec{a}_c = 0,$$

или

$$(7.18) \quad \vec{V}_c = \text{const.}$$

Горното равенство означава, че масовия център е в покой, или се движи праволинейно и равномерно и се нарича *закон за запазване движението на масовия център*.

Когато някоя от проекциите на главния вектор е нула, напр.

$$R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \text{ от (7.17) следва аналогично}$$

$$(7.19) \quad V_{cx} = \text{const.},$$

т.е. *закон за запазване проекцията на скоростта на масовия център*.

Приложение на теоремата към динамика на транслационно движение на тяло. В раздела кинематика беше установено, че при транслационно движение на тяло всички точки имат еднакви ускорения, т.е. ускорението на произволна точка от тялото е равна на ускорението на масовия му център $\vec{a}_k = \vec{a}_c$. Следователно уравнението (7.16) ще бъде уравнение за движение на всяка точка от тялото и диференциалните уравнения за движение на произволна точка от тялото ще бъдат идентични с (7.17), т.е.

$$(7.20) \quad M \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{kx}; \quad M \frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{ky}; \quad M \frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^n P_{kz}.$$

Тези уравнения се наричат *диференциални уравнения за транслационно движение на тяло* и се покриват с (6.6), които са за движение на материална точка. Следователно транслационното движение на тялото може да се разглежда като движение на точка с маса равна на масата на тялото, като върху точката са приложени действащите върху тялото сили.

2. Теорема за изменение на кинетичния момент на механична система. *Производната спрямо времето на кинетичния момент на механична система е равна на главния момент на външните за системата сили*

$$(7.21) \quad \frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{M}_o.$$

Записва се теоремата за една произволна точка от системата

$$\frac{d\vec{k}_{ok}}{dt} = \vec{r}_k \times \vec{P}_k + \vec{r}_k \times \vec{P}_k^* = \vec{M}_{ok} + \vec{M}_{ok}^*.$$

Сумира се за всичките n точки на системата

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\vec{k}_{ok}}{dt} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{P}_k) + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{P}_k^*) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ok} + \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ok}^*$$

Заменя се последователността на сумирането и диференцирането

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{k}_{ok} = \vec{M}_o + \vec{M}_o^*$$

и като се отчете, че

$$\sum_{k=1}^n \vec{k}_{ok} = \vec{K}_o \text{ е кинетичния момент на системата;}$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_{ok}^* = \vec{M}_o^* = 0 = \vec{M}_o^* = 0 \text{ е главния момент на вътрешните сили се}$$

получава теоремата (7.20).

Проекциите на (7.21) върху осите на декартова координатна система са

$$(7.22) \quad \frac{dK_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z.$$

Когато главния момент на външните сили $\vec{M}_o = 0$ от (7.21) следва, че

$$(7.23) \quad \vec{K}_o = \text{const.}$$

Това е т.н. закон за запазване кинетичния момент на механична система.

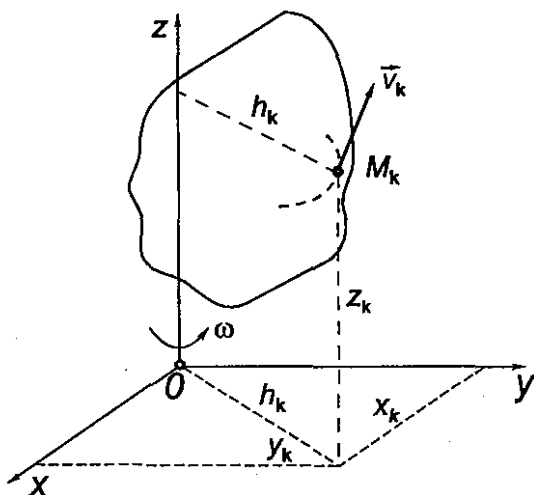
Когато проекцията на главния момент на външните сили е нула, например $M_x = 0$, от (7.22) следва

$$(7.24) \quad K_x = \text{const.},$$

т.е. закон за запазване проекцията на кинетичния момент на механична система.

Приложение на теоремата за кинетичния момент към тяло, което извършва ротационно движение около неподвижна ос. Тялото се разглежда като съвкупност от точки M_k с маса m_k , отстоящи от оста на ротация Oz на разстояние h_k /фиг.7.4/. Всяка от тези точки описва окръжност и има скорост $V_k = \omega h_k$, където ω е ъгловата скорост на

тялото. Количеството на движение на M_k е $q_k = m_k \cdot V_k = m_k \omega h_k$, а кинетичният ѝ момент $k_{z_k} = m_k \omega h_k^2$. Тогава кинетичният момент на цялото тяло спрямо оста Oz ще бъде $K_z = \sum_{k=1}^n k_{z_k} = \omega \sum_{k=1}^n m_k h_k^2$, където сумата $\sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = J_z$ е инерционният момент на тялото спрямо същата ос, т.е.



Фиг. 7.4

$$(7.25) \quad K_z = \omega J_z.$$

С използване на третото уравнение от (7.22) се получава

$$\frac{dK_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$

т.е.

$$(7.26) \quad \varepsilon = \frac{M_z}{J_z}.$$

От последното уравнение се вижда, че ъгловото ускорение на тялото е обратно пропорционално на инерционния момент спрямо оста на ротация. Следователно J_z е мяра за инертност на тялото при ротацията му около оста.

Когато $K_z = \text{const.}$, от уравнение (7.25) следва

$$(7.27) \quad \omega J_z = \text{const.}$$

Това равенство се илюстрира с т.н. платформа на Жуковски – хоризонтална кръгла плоча, която може да се върти около ос минаваща през центъра ѝ перпендикулярно на равнината на плочата. Нека върху

плочата стои човек с разперени встрани ръце. Ако се обозначи с J_{z1} инерционния момент на плочата и човека и се завърти платформата с някаква ъглова скорост ω_1 , след прибиране на ръцете към тялото платформата ще увеличи скоростта си на ω_2 . Причина за това е по-малкият инерционен момент на платформата и човека с прибрани ръце J_{z2} . От израз (7.27) следва $\omega_1 J_{z1} = \omega_2 J_{z2}$ и тъй като $J_{z1} > J_{z2}$, то $\omega_2 > \omega_1$. По аналогичен начин се обясняват пируетите при фигурното пързаляне.

3. Теорема за изменението на кинетичната енергия на механична система и тяло. Диференциалът на кинетичната енергия на механична система е равен на сумата от елементарните работи на действащите върху системата вътрешни и външни сили

$$(7.28) \quad dE = \sum_{k=1}^n dA_k + \sum_{k=1}^n dA_k^*.$$

Доказателството става по аналогичен начин. Изразява се теоремата (6.29) за произволна точка от системата

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = de_k = dA_k + dA_k^*.$$

Сумира се за цялата механична система

$$\sum_{k=1}^n de_k = d \sum_{k=1}^n e_k = dE = \sum_{k=1}^n dA_k + \sum_{k=1}^n dA_k^*.$$

Тук $\sum_{k=1}^n e_k = E$ е кинетичната енергия на цялата механична система.

Уравнение (7.28) изразява теоремата за кинетичната енергия в диференциална форма.

Ако се интегрира в граници, съответстващи на някакво начално положение, при което системата има кинетична енергия E_0 и крайно, при което кинетичната енергия е E_1 , се получава интегралната форма на теоремата

$$E - E_0 = \sum_{k=1}^n \int_0^1 dA_k + \sum_{k=1}^n \int_0^1 dA_k^* \quad \text{или}$$

$$(7.29) \quad E - E_0 = \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^n A_k^*,$$

т.е. промяната на кинетичната енергия е равна на сумата от тоталните работи на всички външни и вътрешни сили, приложени върху системата.

За разлика от предишните две теореми в тази теорема елементарната работа на вътрешните сили в общия случай е отлична от нула, тъй като

материалните точки в системата могат да се движат една спрямо друга, например когато системата е някакъв газ или флуид.

Когато механичната система е неизменяема /материалните точки не се движат една спрямо друга/ или представлява твърдо тяло, работата на вътрешните сили е равна на нула, т.е. теоремата добива вида

$$(7.30) \quad E - E_0 = \sum_{k=1}^n A_k .$$

Кинетична енергия на тяло при транслационно, ротационно и равнинно движение. При решаване на задачи с помощта на горната теорема се налага да се знае кинетичната енергия на дадено тяло. За целта се разглеждат най-често срещаните в техниката движения – транслационно, ротационно и равнинно.

Транслационно движение. Тъй като всички точки от тялото имат еднакви скорости,

$$E = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2} M V^2 .$$

Най-често горната формула се представя чрез скоростта на масовия център V_c , т.е.

$$(7.31) \quad E = \frac{1}{2} M V_c^2 .$$

Ротационно движение. Ако тялото извършва ротация около неподвижна ос Oz /фиг.7.4/ с ъглова скорост ω , скоростта на коя да е точка M_k , отстояща на разстояние h_k от оста на ротация, е $V_k = \omega h_k$. Тогава

$$E = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 .$$

В горният израз съгласно (7.1) $\sum m_k h_k^2 = J_z$, т.е.

$$(7.32) \quad E = \frac{\omega^2}{2} J_z .$$

Равнинно движение. В раздела кинематика беше установено, че равнинното движение може да се разложи на транслационно движение /с полюс на транслация например масовия център C / и ротационно движение около ос минаваща през т. C .

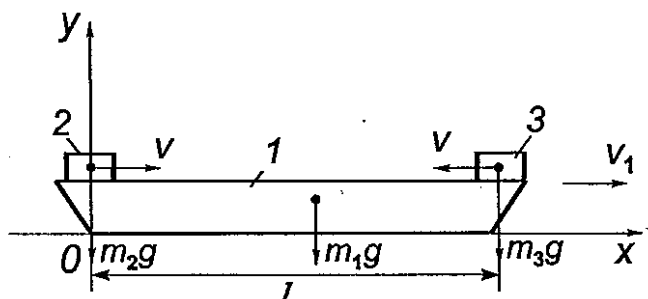
За кинетичната енергия на тялото в този случай се получава

$$(7.33) \quad E = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{\omega^2}{2} J_c ,$$

където J_c е инерционният момент на тялото спрямо ос, минаваща през масовия център т. C и перпендикулярна на равнината на движение.

Примери

Пример 7.1. В двата края на понтон с дължина $l = 40 \text{ m}$ и маса $m_1 = 12000 \text{ kg}$ се намират две платформи с маси $m_2 = 100 \text{ kg}$ и $m_3 = 900 \text{ kg}$ /фиг.7.5/. В определен момент, когато понтонът е в състояние на покой, платформите започват движение една срещу друга с постоянна скорост $V = 0,8 \text{ m/s}$, като разменят местата си. Като се пренебрегне съпротивлението на водата, да се определи скоростта с която ще се задвижи понтона.



Фиг.7.5

В случая системата се състои от три тела – понтон и две подвижни платформи. Външните сили, действащи върху системата са теглата на трите тела. Тъй като те са вертикални, проекциите им върху оста Ox са нули и следователно съгласно уравнение (7.14) $Q_{x0} = Q_x = \text{const}$. Тук с Q_{x0} е означено количеството на движение на системата в началния момент, когато тя е в покой и следователно $Q_{x0} = 0$. Когато започне движението на платформите

$$Q_x = m_2(V + V_1) + m_1V_1 + m_3(V_1 - V).$$

Приравняват се съгласно (7.14)

$$0 = m_2(V + V_1) + m_1V_1 + m_3(V_1 - V)$$

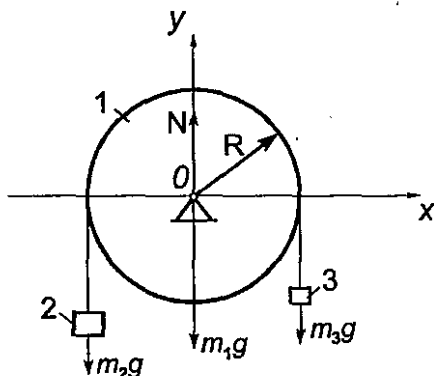
и се решава уравнението спрямо V_1

$$V_1 = \frac{m_3 - m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot V = \frac{900 - 100}{13000} \cdot 0,8 = 0,049 \text{ m/s}.$$

Пример 7.2. В двата края на въже навито около хомогенен цилиндър с радиус $R = 0,2 \text{ m}$ и маса $m_1 = 30 \text{ kg}$ са окачени товари с маси, съответно $m_2 = 80 \text{ kg}$ и $m_3 = 10 \text{ kg}$ /фиг.7.6/. Като се пренебрегне триенето в лагерите

на цилиндъра и масата на въжето, да се пресметне ъгловото ускорение което ще получи цилиндъра при задвижването на системата под действието на силите на тежестта.

Механичната система се състои от три тела. Външните сили, действащи върху нея са теглата на телата и реакцията на оста на цилиндъра N . За решаването на задачата се прилага теоремата за кинетичния момент (7.21), респ. (7.22). Кинетичният момент на



Фиг. 7.6

системата е равен на сумата от кинетичните моменти на телата които я съставят $K_z = K_{z1} + K_{z2} + K_{z3}$. Кинетичният момент на цилиндъра който извършва ротационно движение, съгласно уравнение (7.25) е $K_{z1} = \omega J_z$,

където съгласно (7.5) $J_z = \frac{m_1 R^2}{2}$ или $K_z = \omega \frac{m_1 R^2}{2}$. Кинетичните моменти на другите две тела са съответно $K_{z2} = m_2 V_2 R$ и $K_{z3} = m_3 V_3 R$. Като се има предвид, че $V_2 = V_3 = \omega R$, за кинетичният момент на цялата система се

получава $K_z = \omega \frac{R^2}{2} (m_1 + 2m_2 + 2m_3)$. От друга страна сумата от моментите на външните сили спрямо оста Oz , минаваща през т. O и перпендикулярна на чертежа, ще бъде $M_z = m_2 g R - m_3 g R$. След прилагане на теоремата се получава

$$\frac{R^2}{2} (m_1 + 2m_2 + 2m_3) \frac{d\omega}{dt} = (m_2 - m_3) g R$$

или

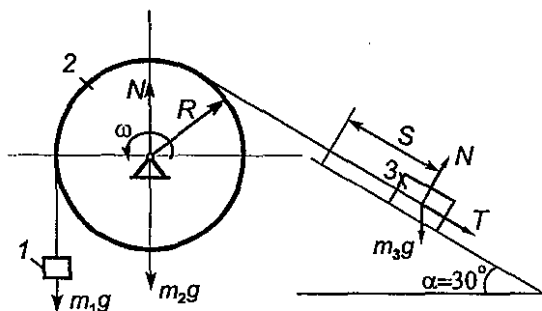
$$\varepsilon = \frac{2(80 - 10) \cdot 9.81}{0,2(30 + 160 + 20)} = 32,7 \text{ rad/s}.$$

Пример 7.3. Механична система започва движение от състояние на покой под действието на силите на тежестта /фиг.7.7/. Като се пренебрегне триенето в лагерите на барабана и масата на въжето прието за неразтегливо, да се определи скоростта на тялото 3 в момента, когато е изминало

разстояние $S = 2m$, ако коефициента на триене е $\mu = 0,15$, радиуса на барабана е $R = 0,6 m$ и масите на телата са $m_1 = 80 kg, m_2 = m_3 = 10 kg$.

Използува се теоремата за кинетичната енергия - уравнение (7.29). Тъй като в началният момент системата е в покой $/E_0 = 0/$, кинетичната енергия на цялата система ще бъде равна на сумата от работите на външните сили приложени върху нея

$$E = \sum_{k=1}^n A_k.$$



Фиг.7.7

Кинетичната енергия на системата е сума от кинетичните енергии на отделните тела, които я съставят.

$$E = E_1 + E_2 + E_3.$$

Телата 1 и 3 извършват транслационно движение с еднаква скорост $/V_1 = V_3 = V/$ и кинетичните им енергии са съответно $E_1 = \frac{m_1 V^2}{2}$ и $E_3 = \frac{m_3 V^2}{2}$.

Тялото 2 извършва ротационно движение $E_2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$, където $J_z = \frac{m_2 R^2}{2}$, $\omega = \frac{V}{R}$, или $E_2 = \frac{m_2 V^2}{4}$.

Кинетичната енергия на системата е

$$E = (m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3) \frac{V^2}{2}.$$

Намира се сумата от работата на всички външни сили

$$\sum_{k=1}^n A_k = A_1 + A_2 + A_3,$$

където: $A_1 = m_1 g S$; $A_2 = 0$; $A_3 = -m_3 g S (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, т.е

$$\sum_{k=1}^n A_k = [m_1 - m_3 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)] g S .$$

Прилага се теоремата $(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3) \frac{V^2}{2} = [m_1 - m_3 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)] g S$ и се изразява търсената скорост

$$V = \sqrt{\frac{2[80 - 10(\frac{1}{2} - 0,15 \frac{\sqrt{3}}{2})] \cdot 9,81 \cdot 2}{(80 + 5 + 10)}} = 5,61 \text{ m/s} .$$

8. Въведение в механиката на деформируемото тяло

Съпротивление на материалите е наука, изучаваща реалното деформируемо тяло. За разлика от теоретичната механика, която се занимава с т.н. идеално твърдо тяло, в съпротивление на материалите обект на изследване са най-общите закономерности, отнасящи се до здравината и деформируемостта на материалите от които са изработени конструкционните елементи.

Здравината изразява способността на телата да издържат без разрушаване приложеното върху тях натоварване.

Деформируемостта е свойството на реалните тела да променят формата и размерите си при това натоварване.

Многообразието от материали, геометрични форми и натоварване на конструкционните елементи води до изключителна сложност на задачите от механика на деформируемото тяло. Точното описание на механичното поведение, дори и в най-елементарните случаи води до сериозни математически затруднения. Това налага приемането на редица опростяващи предпоставки /схематизации/, при които действителния обект се заменя с теоретичен модел, отразяващ само най-важните и значими фактори за механичното поведение.

В съпротивление на материалите тази схематизация се прави по отношение на три главни направления – свойства на материала, геометрична форма и натоварване на реалния обект.

8.1 Схематизация на свойствата на материала

Изгражда се върху четири основни хипотези.

Хипотеза за идеална еластичност. Тази хипотеза е основна, върху нея се изгражда математическата теория на еластичността. Според нея телата са еластични, т.е. след премахване на причините за тяхното деформиране, те напълно възстановяват първоначалната си форма и размери. Това твърдение е в сила при напрежения, непревишаващи т.н. границата на еластичност, която е важна характеристика за всеки материал.

Хипотеза за хомогенност /еднородност/. Приема се, че материалът е хомогенен, т.е. има едни и същи свойства във всяка точка от тялото.

Хипотеза за непрекъснатост. Съгласно тази хипотеза материалът е непрекъснато разпределен в целия обем на тялото без наличие на каквито и да е празнини. Това дава възможност да се прилагат методите на математическия анализ, като се приема, че използваните функции са непрекъснати в целия обем на тялото.

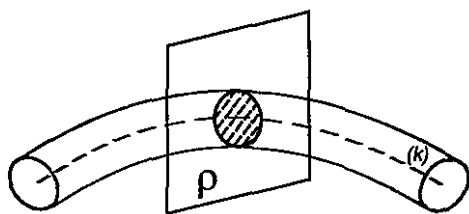
Хипотеза за изотропност. Приема се, че материалът има едни и същи свойства по всички направления, прекарани през дадена точка в тялото. Когато не е изпълнено това условие материалът се нарича анизотропен. Когато материалът има еднакви свойства по направления, успоредни на осите на правоъгълна координатна система, се нарича ортотропен. Повечето лети метали и сплави се считат за изотропни. Ортотропни са валцованите метали, дървото, стъклопластите и др.

8.2 Схематизация на формата на конструктивните елементи

Голямото разнообразие от геометрични форми на конструкционните елементи в съпротивление на материалите, се заменя от три основни форми – гредови елемент, черупка и масивно тяло. Тази класификация се основава на съотношението между трите им главни измерения.

Гредови елемент е тяло, на което единият размер /дължината/ е многократно по-голям от другите два. Такъв елемент се получава при движението на равнинна фигура, когато нейният център на тежестта описва произволна пространствена крива, а самата равнинна фигура остава перпендикулярна на кривата във всяка нейна точка /фиг.8.1/.

Кривата се нарича ос на гредовия елемент, а фигурата напречно сечение. Напречното сечение може да бъде с постоянни или променливи размери. Гредовите елементи могат да бъдат праволинейни или криволинейни, пространствени и равнинни. Вида на оста и напречното сечение определят изчислителната схема на гредовия елемент.



Фиг.8.1

Поради факта, че голям брой конструктивни елементи се схематизират до гредови елементи, може да се въведе допълнително подразделение в зависимост от начина на натоварване. Гредовият елемент се нарича:

Прът, когато е натоварен със сили, действащи по оста му;

Греда, когато е натоварен със сили, склучващи ъгъл с оста му;

Вал, когато елементът е с кръгло напречно сечение и е натоварен на усукване;

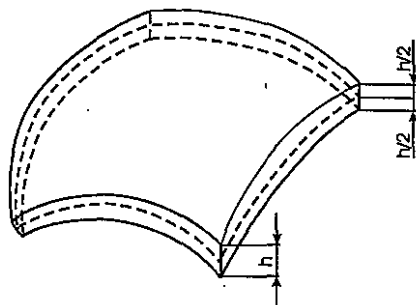
Колона, когато е разположен вертикално и натоварен на натиск с осова сила;

Рамка, когато имаме система от няколко греди.

Черупка е тяло, на което един от характерните размери /дебелината h / е много по-малък от другите два /фиг.8.2/. Повърхнината, която разполовява черупката се нарича средна повърхнина. Когато средната повърхнина е равнинна имаме частен случай на черупка – *плоча /пластина/*.

Като черупки се схематизират голяма част от покривните конструкции, дъгови язовирни стени, корпуси на резервоари за съхраняване на газове или течности и др.

Масивно тяло. Това е тяло, на което трите основни размера са от един порядък /съизмерими/. Тук могат да бъдат отнесени фундаменти на сгради, машинни фундаменти, метални блокове и др.



Фиг. 8.2

8.3 Схематизация на натоварването

Натоварването на обектите се осъществява от външни сили и моменти, които се дължат на взаимодействието на разглежданото тяло с другите тела. Външните сили се класифицират по два главни признака-начин на прилагане върху обекта и начин на действие във времето.

1. Според начина на прилагане външните сили биват:

Обемно разпределени сили. Това са сили, които действуват във всяка точка от обема на тялото. Такива сили са гравитационните, магнитните и др. Характеризират се с интензитет /гъстота/

$$g = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V},$$

който има дименсия $[N/m^3]$;

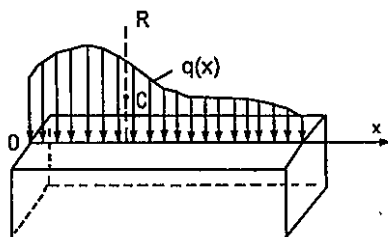
Повърхностно разпределени сили са тези сили, които действуват във всяка точка на дадена повърхнина от тялото. Такова е разпределението на силите върху стените на цилиндрите при работа на двигателите с вътрешно горене. Характеризират се с интензитет

$$q = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F},$$

имащ дименсия $[N/m^2]$;

Линейно разпределени сили са такива сили, които действуват във всяка точка на дадена линия. Те също се характеризират с интензитета си

$$q = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta l},$$



Фиг.8.3

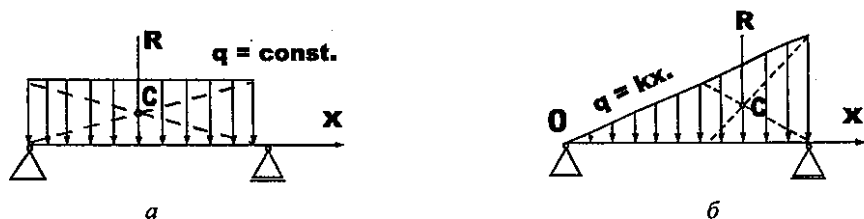
който има дименсия $[N/m]$ и в общия случай е функция от вида $q = q(x)$ /фиг.8.3/.

Равнодействащата \bar{R} на линейно разпределения товар е равна на площта на диаграмата, затворена между кривата и оста Ox . Приложната точка на \bar{R} е центъра на тежестта на тази площ – точка C .

Частен случай на линейно разпределен товар е равномерно линейно разпределен товар, когато $q = const.$ /фиг.8.4а/, или триъгълников линейно разпределен товар, когато $q = kx$ /фиг.8.4б/. В тези случаи

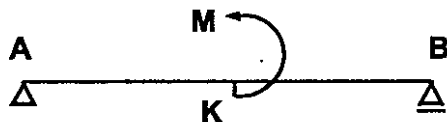
големината на равнодействащата \bar{R} е равна, съответно на лицата на правоъгълника или триъгълника;

Съсредоточена сила, когато областта в която е приложена силата е толкова малка, че може да се приеме, че силата действа върху една точка. Единицата за съсредоточена сила е $[N]$. В действителност съсредоточената сила реално не съществува. Тя е резултат от схематизацията на реалното натоварване, което винаги е разпределен товар, а съсредоточената сила е неговата равнодействаща, с която го заменяме. Такава замяна е много полезна, тъй като води до съществено опростяване на задачите;



Фиг.8.4

Съсредоточен момент е понятие въведено аналогично на съсредоточената сила. На фиг.8.5 е показан съсредоточеният момент M , действащ в сечението k на тялото. Неговата дименсия е $[N.m]$.



Фиг.8.5

2. Според начина на действието си външните сили биват:

Статични сили, които нарастват бавно от нула до крайната си стойност по линеен закон и не предизвикват ускорения в частиците на тялото, върху което действуват, или ускоренията са пренебрежимо малки;

Динамични сили, които променят бързо големината или посоката си и предизвикват значителни ускорения в частиците на тялото върху което действуват. Когато силите се прилагат мигновено с цялата си стойност се получава т.н. ударно натоварване.

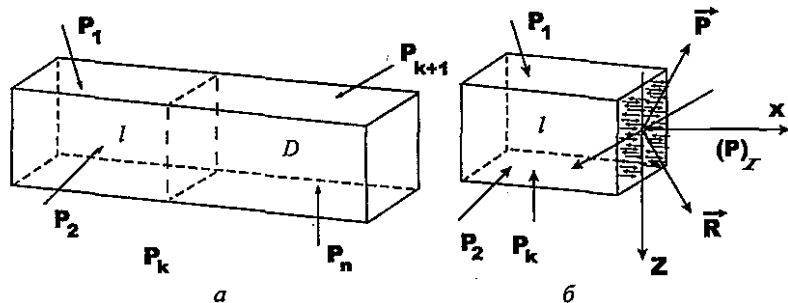
9. Разрезни усилия в гредови елементи

9.1 Метод на сечението. Вътрешни сили. Разрезни усилия

Разглежда се произволно по форма и размер тяло, върху което не действуват никакви външни сили. Тялото се разрязва мислено с равнинно сечение така, че да се получат две части, които условно по-нататък се бележат - лява l и дясна D . В мястото на сечението се установява, че в разделените една от друга частици действуват междумолекулни сили, обуславящи целостта на тялото. Тези сили се изучават във физиката и не представляват интерес за Съпротивление на материалите.

Ако върху същото тяло се приложи произволна уравновесена външна система сили, между частиците в мястото на сечението се появят допълнителни междумолекулни сили. Те са резултат от приложените външни сили и е прието да се наричат разрезни или вътрешни сили. Именно те са обект на изучаване в Съпротивление на материалите. В сравнение с тях междумолекулните сили в ненатоварено състояние са пренебрежимо малки и по-нататък не се взимат под внимание.

На фиг.9.1а е показано натовареното със системата външни сили тяло и са означени – мисленото равнинно сечение и условно получените лява и дясна части. На фиг.9.1б е показана лявата от тях, като действието на премахнатата дясна част е заменено със системата вътрешни сили $(P)_l$, действаща върху лявата част. Съгласно принципа на действие и противодействие е очевидно, че вътрешните сили от системата $(P)_D$, действаща върху дясната част ще имат еднакви големини и направления, но противоположни посоки със съответните вътрешни сили от лявата част, т.е. двете части ще бъдат статично еквивалентни. По тази причина винаги се разглежда тази от тях, която е по-просто натоварена.



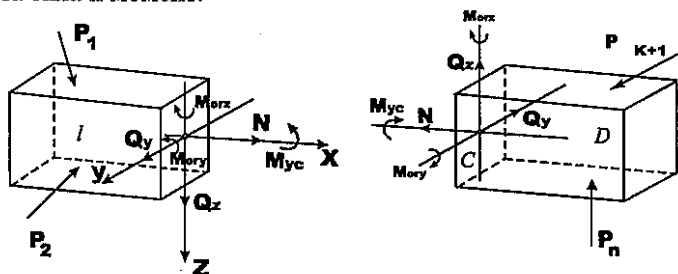
Фиг.9.1

Тъй като неизвестните вътрешни сили са неограничен брой, а условията за равновесие на тяло са шест, задачата за тяхното намиране се оказва статично неопределена.

Възможно е обаче, вместо да се търсят вътрешните сили във всяка частица от мисленото сечение, да се реши по-проста задача.

От статиката е известно, че произволна система сили може да се редуцира до динама, състояща се от главна сила \vec{R} и главен момент \vec{M} , приложени в случая в центъра на тежестта на напречното сечение.

На фиг.9.2 са показани проекциите на $\vec{R}(N, Q_y, Q_z)$ и на $\vec{M}(M_{yc}, M_{ozy}, M_{ozz})$ върху осите на дясно ориентирана координатна система. Прието е тези шест компоненти да се наричат разрезни усилия, като се приема, че понятието "усилие" представлява обобщение на понятията сила и момент.



Фиг.9.2

Компонентата на главната сила – N се нарича нормално усилие, а компонентите Q_y и Q_z се наричат тангенциални усилия, съответно по осите y и z .

Компонентите на главния момент се наричат съответно; M_{yc} – усукващ /около ос x / момент, а M_{ozy} и M_{ozz} – огъващи /съответно около осите y и z / моменти.

Задачата за тяхното намиране е вече статично определена. Те се намират от шестте условия за равновесие на статиката

$$\begin{aligned}
 (9.1) \quad & N + \sum P_{kx} = 0; & M_{yc} + \sum M_{kx} &= 0; \\
 & Q_y + \sum P_{ky} = 0; & M_{ozy} + \sum M_{ky} &= 0; \\
 & Q_z + \sum P_{kz} = 0; & M_{ozz} + \sum M_{kz} &= 0.
 \end{aligned}$$

При натоварване с равнинна система сили, например в равнината Oxz в сечението действуват най-много три разрезни усилия N , Q_z и M_{ozy} . Така горните условия (9.1) се редуцират до три

$$(9.2) \quad \begin{aligned} N + \sum P_{kx} &= 0; \\ Q_y + \sum P_{ky} &= 0; \\ M_{oz} + \sum M_{ky} &= 0. \end{aligned}$$

В този случай осовите индекси на разрезните усилия може да не се изписват / N , Q , M /.

Както се вижда, при прилагане на описания метод формата на напречното сечение не оказва влияние, поради което вместо цялата греда, може да се чертае само нейната осова линия, която се приема за ос x на дясно ориентираната координатна система.

9.2 Разрезни усилия в прави греди. Диаграми на разрезните усилия

Определянето на разрезните усилия с помощта на описания в предишната точка метод се извършва в следната последователност.

1. В левият край на гредата се фиксира началото на дясно ориентирана правоъгълна декартова координатна система така, че ос x да съвпада с оста на гредата, ос y да бъде перпендикулярна на чертожната равнина с посока от равнината към наблюдателя, а ос z да бъде насочена надолу. Това се прави за еднаквост на решението с изведените от теорията зависимости, иначе, решението не зависи от избора на координатната система.

2. Определят се опорните реакции с известните методи на статиката.

3. Гредата се разделя на участъци. Във всеки участък разрезните усилия трябва да остават едни и същи, непроменящи вида си функции на x . Границите на тези участъци се обуславят от разположението и вида на натоварването на гредата.

4. Последователно в границите на всеки участък се прави произволен разрез. Премахва се по-сложно натоварената от двете получени части на гредата и се разглежда равновесието под действието на външните сили и разрезните усилия на по-просто натоварената част, като се прилагат условията (9.1).

5. За прегледност получените функции на разрезните усилия, за всеки участък се представят графично, като се избира подходящ мащаб. Тези графични изображения се наричат диаграми на разрезните усилия /ДРУ/.

Нека илюстрираме тази последователност с няколко примера за определяне на разрезните усилия.

Пример 9.1. Да се определят диаграмите на разрезните усилия за показаната на фиг.9.3.а греда, ако: $P_1 = 3000 \text{ N}$, $P_2 = 4000 \text{ N}$, $M = 2000 \text{ N.m}$, $a = c = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$.

Решение: Следва се указания ред на работа.

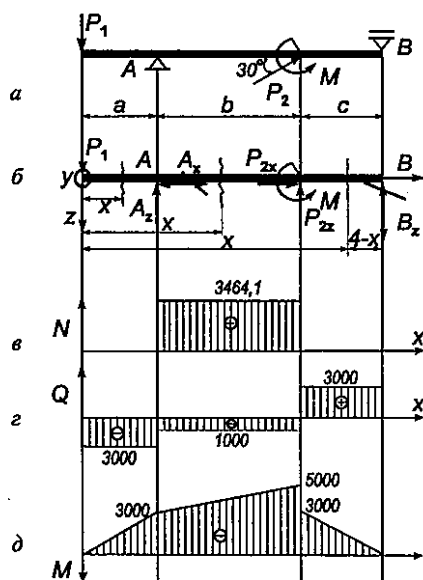
1. Фиксира се координатната система /фиг.9.3.б/. Силите в общо положение се заменят с техните компоненти по координатните оси

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 30^\circ = 4000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3464,1 \text{ N};$$

$$P_{2z} = P_2 \cdot \sin 30^\circ = 4000 \cdot \frac{1}{2} = 2000 \text{ N}.$$

2. Определят се опорните реакции.

В ставно неподвижната опора A , се поставят възможните опорни реакции A_x и A_z , а в ставно подвижната опора B , реакцията B_z . От условията за равновесие се определят трите компоненти на реакциите.



Фиг. 9.3

$$\sum P_{kx} = 0; \quad A_x + P_{2x} = 0, \quad A_x = -P_{2x} = -3464,1 \text{ N};$$

$$\sum P_{kz} = 0; \quad P_1 - A_z - P_{2z} - B_z = 0, \quad A_z + B_z = P_1 - P_{2z} = 1000;$$

$$\sum M_{KA} = 0; \quad P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + M + B_2(b + c) = 0,$$

$$B_2 = -3000 \text{ N};$$

$$\sum M_{KB} = 0; \quad P_1(a + b + c) - A_2(b + c) + M - P_2 \cdot c = 0,$$

$$A_2 \cdot 3 = 12000 + 2000 - 2000, A_2 = 4000 \text{ N}.$$

Проверката на изчислените стойности за опорните реакции може да стане от проекционното уравнение по оста z .

$$A_2 + B_2 = 1000;$$

$$4000 + (-3000) = 1000.$$

Отрицателните знаци пред стойностите на реакциите A_x и B_x означават, че предварително избраните посоки на тези реакции са обратни на действителните. Това налага смяна на посоките /зачеркват се погрешно избраните посоки и се поставят действителните/.

Така $A_x = 3464,1 \text{ N}$ е с посока обратна на положителната посока на оста x , а $B_z = 3000 \text{ N}$ има посока еднаква с оста z .

3. Разделя се гредата на участъци с граници :

I участък, от приложната точка на силата P_1 до опората A ;

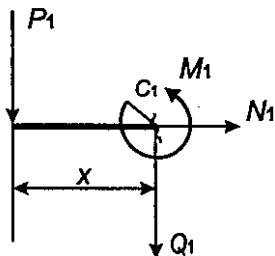
II участък, от опората A до приложната точка на силата P_2 и момента M ;

III участък, от приложната точка на P_2 и M до опора B .

4. Определят се разрезните усилия чрез изложения "метод на сечението".

За I участък мислено се срязва гредата на произволно разстояние x от левия край при условие $0 \leq x \leq 1m$. От получените две части на гредата, се взема лявата, която е по-просто натоварена и за прегледност се чертае отделно /виж фиг.9.4/. В центъра на тежестта на сечението /т.С₁/ се прилагат разрезните усилия в указаните за лявата част посоки и се прилагат уравненията за равновесие (9.2).

За удобство във всеки участък към разрезните усилия може да се поставят индексите на участъка с арабски цифри.



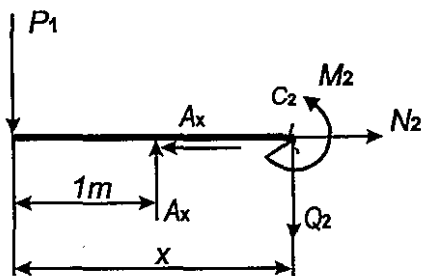
Фиг. 9.4

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 0; \\
 Q_1 + P_1 &= 0, & Q_1 &= -3000 \text{ N}; \\
 M_1 + P_{1x} &= 0, & M_1 &= -P_{1x}.
 \end{aligned}$$

От горните условия следва, че нормалното усилие в този участък е нула, а тангенциалното остава постоянна величина и диаграмата му е права линия успоредна на оста x . Огъващото усилие е линейна функция на x . Графиката е наклонена права по отношение на ос x и за нейното построяване са необходими най-малко 2 точки. За тяхното получаване се дават две различни стойности на x в уравнението на огъващия момент. Тези стойности са в границите на участъка и са обикновено граничните стойности на x

$$\begin{aligned}
 \text{Така при } x &= 0, & M &= 0. \\
 &x = 1, & M &= -3000 \text{ N.m.}
 \end{aligned}$$

II участък $1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$ /фиг. 9.5/



Фиг. 9.5

$$\begin{aligned}
 N_2 - A_x &= 0, & N_2 &= A_x = 3464,1 \text{ N}; \\
 Q_2 - A_x + P_1 &= 0, & Q_2 &= -1000 \text{ N}; \\
 M_2 - A_x(x-1) + P_{1x} &= 0, \\
 M_2 &= A_x(x-1) - P_{1x}.
 \end{aligned}$$

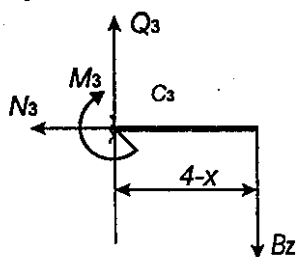
$$\begin{aligned}
 \text{При } x &= 1, & M_2 &= -3000 \text{ N.m} \\
 &x = 3, & M_2 &= -5000 \text{ N.m.}
 \end{aligned}$$

III участък $3 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$

След срязването се разглежда дясната част от гредата като по-просто натоварена /фиг. 9.6/

$$\begin{aligned}
 N_3 &= 0; \\
 Q_3 - B_x &= 0, & Q_3 &= -3000 \text{ N}; \\
 M_3 + B_x(4-x) &= 0, \\
 M_3 &= -B_x(4-x).
 \end{aligned}$$

При $x = 3, M_3 = -3000 \text{ N}$.
 $x = 4, M_3 = 0$.



Фиг. 9.6

5. Построяват се диаграмите на разрезните усилия. За целта се прекарват вертикалните линии означаващи границите на участъците. Прието е в диаграмите на N и Q положителните стойности на усилията да се нанасят над оста Ox , а отрицателните под тази ос. В диаграмите на огъващия момент положителните стойности се нанасят под оста Ox , а отрицателните над нея. Диаграмите се чертаят в подходящ мащаб и задължително се означават стойностите /диаграмата се котира/.

В I и III участък нормалното усилие е нула. Във II участък то е постоянна величина 3464,1 N и графиката на N е успоредна на оста Ox . Защрихова се с тънки вертикални линии площта заградена от графиката на N и оста Ox (фиг.9.3.в).

По аналогичен начин се строят и другите диаграми /фиг.9.3.г и фиг.9.3.д/.

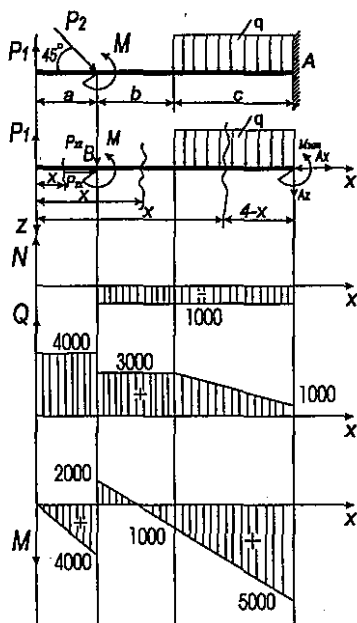
Пример 9.2 Да се определят диаграмите на разрезните усилия за показаната на фиг.9.7 гредата, ако $P_1 = 4000 \text{ N}$, $q = 1000 \text{ N/m}$, $M = 6000 \text{ N.m}$, $a = b = 1 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $P_2 = 1412,2 \text{ N}$.

1. Решение

В случая гредата е натоварена с две съсредоточени сили P_1 и P_2 , момент M и равномерно разпределен товар с интензитет q . При пресмятане на опорните реакции равномерно разпределеният товар се заменя с равнодействащата сила с големина $q.c$ /площта на диаграмата между $q(x)$ и ос Ox / и приложна точка $c/2$ /абцисата на центъра на тежестта на тази площ/.

Наклонената сила P_2 се разлага на компоненти – фиг.9.7.6

$$P_{2x} = P_{2z} = P_2 \cdot \cos 45^\circ = 1412,2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1000 \text{ N}$$



Фиг.9.7

2. В конзолната опора A са възможни компоненти на реакцията по осите x и z и запъващия момент около оста $y - M_A$. Прилагайки условията за равновесие се получава:

$$\begin{aligned}
 P_{2x} + A_x &= 0, & A_x &= -1000 \text{ N}; \\
 -P_1 + P_{2z} + q \cdot c + A_z &= 0, & A_z &= 1000 \text{ N}; \\
 -P_1(a + b + c) + P_{2z}(b + c) + M + q \cdot c \cdot \frac{c}{2} + M_A &= 0, \\
 -M_A &= 5000 \text{ N.m.}
 \end{aligned}$$

В случая проверката на реакциите може да се извърши от моментовото уравнение спрямо коя да е точка от гредата, различна от точката A например точката B

$$\begin{aligned}
 \sum M_{kB} = 0 \quad -P_1 \cdot a + M - q \cdot c \left(b + \frac{c}{2}\right) + M_A - A_z \cdot (b + c) &= 0, \\
 4000 + 6000 - 4000 + 5000 - 3000 &= 0.
 \end{aligned}$$

Отрицателният знак на A_x налага смяна на предварително избраната посока.

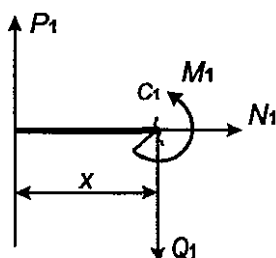
3. Разделя се гредата на участъци:

- I участък $0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m};$
- II участък $1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m};$
- III участък $2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}.$

Върху целия трети участък действа равномерно разпределеният товар.

4. Във всеки участък се прави сечение на произволно разстояние x и се разглежда равновесието на по-просто натоварената част от гредата

I участък $0 \leq x \leq 1\text{m}$.



Фиг.9.8

$$N_1 = 0;$$

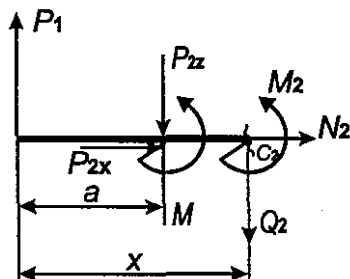
$$Q_1 - P_1 = 0, \quad Q_1 = 4000 \text{ N};$$

$$M_1 - P_1 x = 0, \quad M_1 = 4000 x.$$

При $x = 0, M_1 = 0$.

$x = 1, M_1 = 4000 \text{ N.m}$.

II участък $1\text{m} \leq x \leq 2\text{m}$.



Фиг.9.9

$$N_2 + P_{2x} = 0, \quad N_2 = -1000 \text{ N};$$

$$Q_2 + P_{2z} - P_1 = 0, \quad Q_2 = 3000 \text{ N};$$

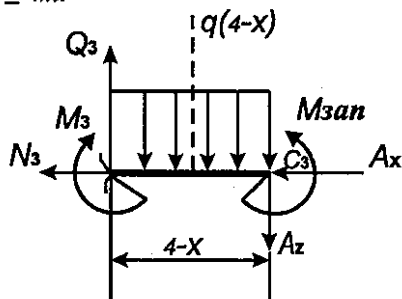
$$M_2 + M + P_2 z(x - a) - P_1 x = 0,$$

$$M_2 = -1000(x - 1) + 4000x - 6000.$$

При $x = 1, M_2 = -2000 \text{ N.m}$.

$x = 2, M_2 = 1000 \text{ N.m}$.

III участък $2m \leq x \leq 4m$.



Фиг.9.10

$$\begin{aligned} N_3 + A_x &= 0, & N_3 &= -1000 \text{ N}; \\ Q_3 - q(4-x) - A_z &= 0, \\ Q_3 &= 1000(4-x) + 1000. \end{aligned}$$

При $x = 2$, $Q_3 = 3000 \text{ N}$.

$x = 4$, $Q_3 = 1000 \text{ N}$.

$$M_3 + q(4-x)\left(\frac{4-x}{2}\right) + A_z(4-x) - M_a = 0,$$

$$M_3 = -1000 \frac{(4-x)}{2} 2 - 1000(4-x) + 5000.$$

Полученото уравнение за N_3 е от втора степен спрямо x , от което се вижда, че графиката е парабола. При случаите в които за същия участък графиката на тангенциалното усилие $|Q_{3(x)}|$ не пресича оста x , параболата може да се построи по двете гранични стойности за M_3 .

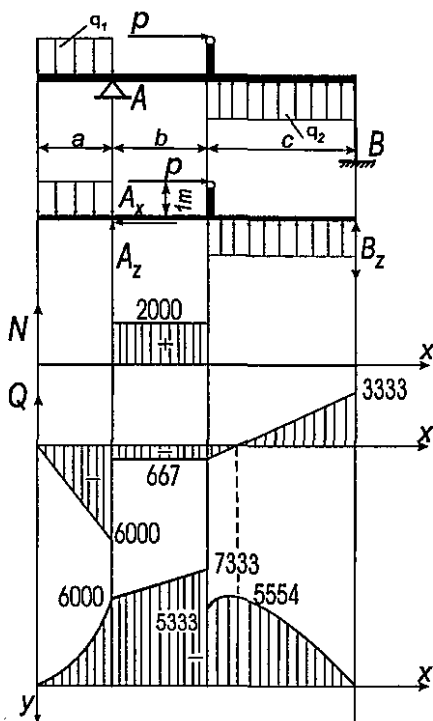
При $x = 2$, $M_3 = 1000 \text{ N.m}$.

$x = 4$, $M_3 = 5000 \text{ N.m}$.

Нейната изпъкналост е винаги по посока на силите от равномерно разпределения товар.

5. По указания начин се построяват диаграмите на разрезните усилия /фиг.9.7.в, г, д/.

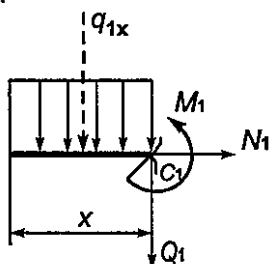
Пример 9.3 Да се определят диаграмите на разрезните усилия за показаната на фиг.9.11а греда, ако $P = 2000 \text{ N}$, $q_1 = 3000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $q_2 = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $a = b = 2\text{m}$, $c = 4\text{m}$.



Фиг.9.11

Решение: Работи се по указаната вече последователност. За опорните реакции се получава: $A_x = 2000 \text{ N}$; $A_z = 5333 \text{ N}$; $B_z = 3333 \text{ N}$.

I участък $0 \leq x \leq 2\text{m}$.



Фиг.9.12

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 0; \\
 Q_1 + q_1 x &= 0, \\
 Q_1 &= -3000 \cdot x.
 \end{aligned}$$

При $x = 0, Q_1 = 0.$

$x = 2, Q = -6000 \text{ N}.$

$$M_1 + q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0, M_1 = -3000 \cdot \frac{x^2}{2}.$$

При $x = 0, M_1 = 0.$

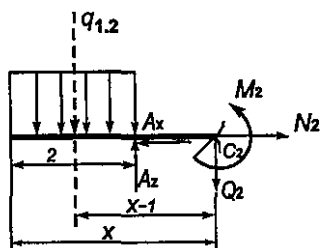
$x = 2, M_1 = -6000 \text{ N.m}.$

II участък $2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}.$

$N_2 - A_x = 0, N_2 = 2000 \text{ N};$

$Q_2 - A_z + q \cdot 2 = 0,$

$Q_2 = -667 \text{ N};$



Фиг.9.13

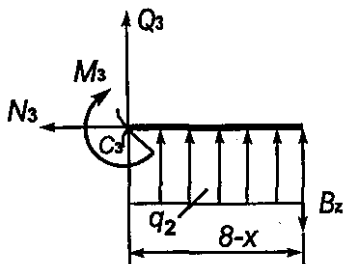
$$M_2 - A_z(x-2) + q_1 \cdot 2(x-1) = 0,$$

$$M_2 = 5333(x-2) - 6000(x-1).$$

$x = 2, M_2 = -6000 \text{ N.m}.$

$x = 4, M_2 = -7333 \text{ N.m}.$

III участък $4 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m}.$



Фиг.9.14

$N_3 = 0;$

$$Q_3 + q_2(8-x) - B_z = 0,$$

$$Q_3 = -1000(8-x) + 3333.$$

При $x = 4$, $Q_3 = -667$ N;

$x = 8$, $Q_3 = 3333$ N.

$$M_3 - q_2(8-x)\left(\frac{8-x}{2}\right) + B_z(8-x) = 0,$$

$$M_3 = 1000 \frac{(8-x)^2}{2} - 3333(8-x).$$

При $x = 4$, $M_3 \approx -5333$ N.m;

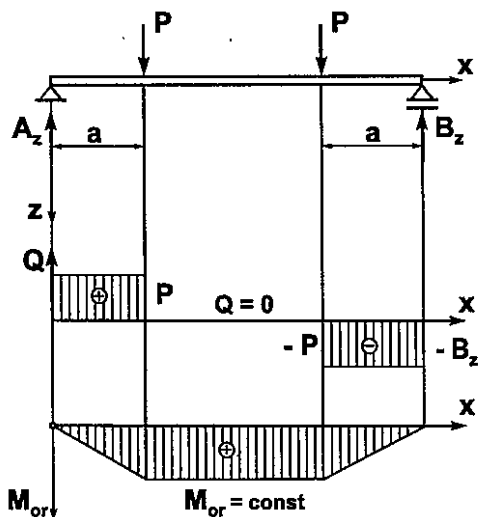
$x = 8$, $M_3 = 0$.

При изчертаване на диаграмите се вижда, че в трети участък наклонената линия $Q(x)$ пресича оста x . В такива случаи е необходимо да се изчисли разстоянието от левия край на гредата до точката на пресичане.

От $Q_3 = 0 = -1000(8-x) + 3333$ се определя, че $x = 4,66$ m. С това разстояние се изчислява екстремната стойност на параболата.

$$\text{При } x = 4,66 \text{ m, } M_3 = 1000 \frac{(8-4,66)^2}{2} - 3333(8-4,66) = -5554 \text{ N.m.}$$

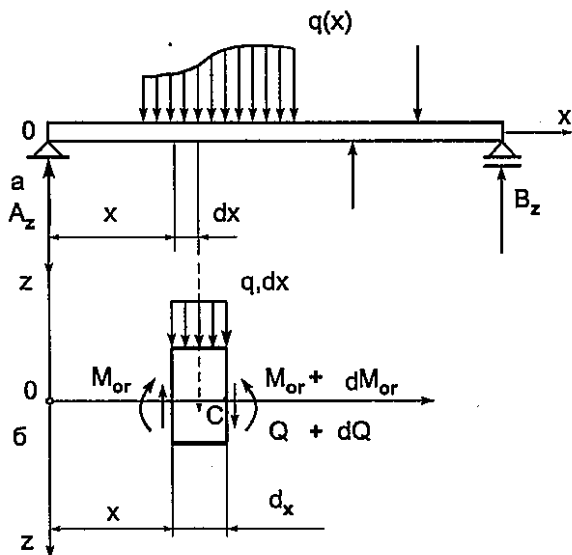
Пример 9.4. Чрез метода на разрезните усилия проверете верността на диаграмите на показаната на фиг.9.15 греда



Фиг.9.15

9.3 Диференциални зависимости между интензитета на натоварване, тангенциалното усилие и огъващия момент

Между интензитета на разпределения товар q , тангенциалното усилие Q и огъващия момент M_{oz} съществува аналитична връзка. За да се изведат зависимостите изразяващи тази връзка, се разглежда гредата, натоварена със съсредоточени сили и разпределен товар, лежащи в равнината Oxy /фиг.9.16a/.



Фиг.9.16

Нека, чрез две безкрайно близки сечения, съответно на разстояние x и $x + dx$ от левия край на гредата, се извади сегмент от участък в който има разпределен товар /фиг.9.16б/. Тъй като гредата е била в равновесие, отделеният сегмент под действието на останалите върху него външни сили и разрезните усилия в двете му сечения също ще бъде в равновесие. Поради безкрайно малката дължина на сегмента $/dx/$ може да се приеме, че разпределеният товар, действащ върху него е равномерно разпределен, което дава основание да се замести с резултантната си $- qdx$. Ако се означат с Q и M_{oz} разрезните усилия в лявото сечение, в дясното ще действуват съответно $Q + dQ$ и $M_{oz} + dM_{oz}$. Разликата на разрезните усилия в двете сечения на сегмента се дължи на външните сили действащи върху него.

От условието за равновесие

$$\Sigma P_{kz} = 0 = Q + dQ + qdx - Q$$

се получава

$$(9.3) \quad \frac{dQ}{dx} = -q.$$

От моментовото условие за равновесие спрямо центъра на тежестта на дясното сечение – точка C

$$\Sigma M_{kO} = 0 = M_{oz} + dM_{oz} + qdx \frac{dx}{2} - Qdx - M_{oz}$$

се получава

$$(9.4) \quad \frac{dM_{oz}}{dx} = Q,$$

тъй като членът $qdx \frac{dx}{2}$ се пренебрегва като безкрайно малка величина

от по-висок порядък.

Ако се диференцира спрямо x уравнение (9.4) и се вземе под внимание уравнение (9.3) се получава

$$(9.5) \quad \frac{d^2 M_{oz}}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q$$

Така получените изрази (9.3), (9.4) и (9.5) представляват търсените диференциални зависимости. Те дават възможност да се направят важни изводи /тълкувания/, които са много полезни за бърза проверка и правилно определяне на разрезните усилия и техните диаграми.

За илюстрация на тези възможности, ще използваме диаграмите от решените досега примери.

От уравнение (9.3) може да се направят следните изводи:

1. В участък от гредата, където няма разпределен товар / $q = 0$ / следва, че $Q = const.$ Диаграмата е права линия, успоредна на оста x / фиг.9.3 – всички участъци; фиг.9.7 – I и II участъци; фиг.9.11 – II участък/.

2. В участък от гредата, където интензитета на разпределения товар е $q = const. > 0$ /стрелките на товара са насочени по ос z /, поради отрицателната връзка между Q и q /знака минус във формулата/, следва, че Q е линейна намаляваща функция /фиг.9.7 – III участък; фиг.9.11 – I участък/.

3. Обратно в участък от гредата, където $q = const. < 0$, следва, че Q е линейна растяща функция /фиг.9.11 – III участък/.

Изводите от уравнение (9.4) са аналогични:

4. В участък от гредата, където тангенциалните усилия $/Q = 0/$ следва, че $M = const$. Диаграмата е права линия успоредна на оста x /фиг.9.16 – II участък/.

Ако $Q = 0$ за отделни сечения от даден участък, то в тези сечения функцията на момента M има екстремум. При това, ако Q се нулира, движейки се от ляво на дясно като преминава от $+Q$ към $-Q$, имаме максимум и обратно от $-Q$ към $+Q$, имаме минимум /фиг.9.11 – екстремното сечение в III участък/.

5. В участък от гредата, където тангенциалното усилие е $Q = const. > 0$ /диаграмата на тангенциалното усилие е разположена над оста x /, поради положителната връзка между Q и M /знак плюс във формулата/, следва, че M е линейна растяща функция /фиг.9.3 – III участък; фиг.9.7 – I и II участъци; фиг.9.16 – I участък/.

6. Обратно в участък от гредата, където тангенциалното усилие е $Q = const. < 0$ /диаграмата на тангенциалното усилие е разположена под оста x /, следва, че M е линейна намаляваща функция /фиг.9.3 – I и II участък; фиг.9.11 – II участък; фиг.9.16 – III участък/.

7. В участък от гредата, където тангенциалното усилие е линейна функция на x / $Q = Q(x)$ /, следва, че M е квадратна функция /фиг.9.7 – III участък; фиг.9.11 – I и III участък/.

8. От уравнение (9.5) следва, че при $q > 0$ /фиг.9.7 – III у-к; фиг.9.11 – I у-к/ кривата на огъващия момент ще бъде вдлъбната / подобно формата, която би приела гредата под действието на товара/, а при $q < 0$ /фиг.9.11 – III у-к/ кривата е изпъкнала.

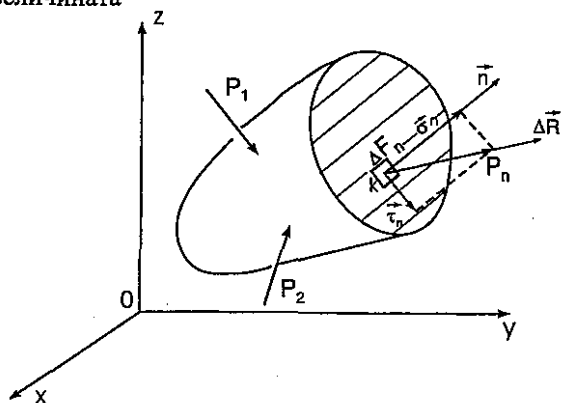
9. Наличието на съсредоточена сила P води до скок в Q -диаграмата, като абсолютната стойност на скока е равна на големината на силата. Посоката на скока е по посока на силата /вижда се на всички фигури в сеченията, където действуват съсредоточени сили/.

10. Наличието на съсредоточен момент M води до скок в M -диаграмата, като абсолютната стойност на скока е равна на големината на момента. Посоката на скока е по посока на момента /фиг.9.7 – десен край на гредата/.

9.4 Напрежение

Разрезните усилия не дават информация за вида и характера на вътрешните сили в отделните точки от сечението. Това налага въвеждането на понятие, което да характеризира интензитета на вътрешните сили.

Нека около произволна точка K от сечението F , на натоварено тяло /фиг.9.17/, се разгледа елементарната площадка ΔF_n с нормала n . Поради безкрайно малкия размер на площадката се приема, че вътрешните сили приложени върху нея са равномерно разпределени и се редуцират спрямо точката K само до главен вектор $\Delta \vec{R}$, главният момент е равен на нула. Тогава интензитетът на тези равномерно разпределени сили ще се определя от величината



Фиг.9.17

$$(9.6) \quad \vec{p}_n = \lim_{\Delta F_n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta F_n} \right) = \frac{d\vec{R}}{dF_n},$$

наречена пълно напрежение в т. K от площадка с нормала n .

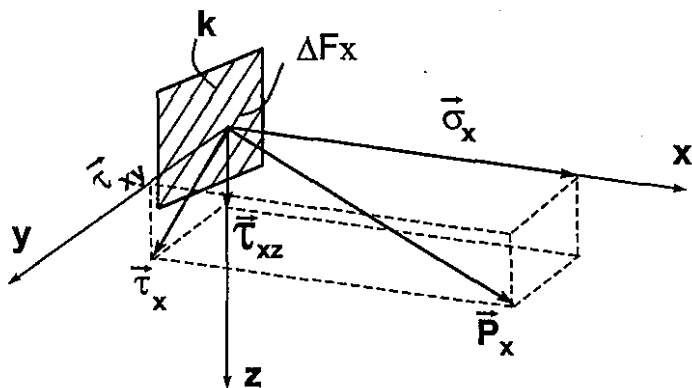
Измерва се в паскали – $[Pa]$.

Вместо с вектора пълно напрежение по-удобно се работи с компонентите му върху нормалата и самата площадка, наречени съответно нормално напрежение σ_n и тангенциално напрежение τ_n .

В случаите, когато нормалата на площадката съвпада с една от координатните оси /например ос Ox /, е удобно тангенциалното напрежение да се представи с две компоненти, съответно τ_{xy} и τ_{xz} /фиг.9.18/. Първият от индексите показва ориентацията на площадката, че е разположена

перпендикулярно на ос x , а вторият оста по която е насочена съответната компонента. Тогава

$$(9.7) \quad \tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2},$$



Фиг.9.18

а пълното напрежение

$$(9.8) \quad p_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2},$$

където

$$\sigma_x = \lim_{\Delta F_x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta N}{\Delta F_x} \right) = \frac{dN}{dF_x};$$

$$(9.9) \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta F_x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q_y}{\Delta F_x} \right) = \frac{dQ_y}{dF_x};$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta F_x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q_z}{\Delta F_x} \right) = \frac{dQ_z}{dF_x}.$$

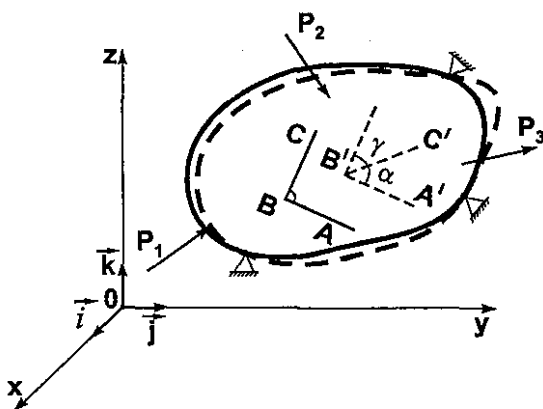
От всичко казано до тук си вижда, че напреженията се изменят не само при промяна на координатите на точката, а и при промяна на ориентацията в пространството, на площадката прекарана през точка К. През дадена точка могат да се прекарат неограничен брой такива площадки, върху които напреженията ще бъдат различни. Съвкупността от всички тези напрежения определя напрегнатото състояние в разглежданата точка от тялото.

9.5 Преместване и деформация

В резултат на външното натоварване всяко тяло променя формата и размерите си. На фиг.9.19 е показано тяло върху което преди натоварване са избрани точките A, B и C така, че ъгълът при върха на т. B да бъде прав. След натоварване с A', B' и C' са означени съответните им положения при новополучената форма на тялото. Векторите $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ се наричат линейно преместване съответно на точката A, B и C по направлението $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$. Прието е те да се изразяват чрез проекциите си върху координатните оси на избрана координатна система, например

$$\overline{AA'} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

където u, v, w са проекциите на линейното преместване на точката A , съответно върху осите x, y, z .



Фиг.9.19

Промяната на формата води до промяна в направлението на дадена права от тялото. Ъгълът на завъртане на правата се нарича ъглово преместване. То може също да се представи като вектор със съответните си проекции върху координатните оси.

За да се характеризира интензитетът на изменението на линейните или ъгловите премествания, се въвежда понятието деформация. Ако дължината на отсечките е съответно $AB = l_0, A'B' = l$, разликата

$$(9.10) \quad \Delta l = l - l_0$$

се нарича абсолютна линейна деформация и има измерение $[m]$.

Отношението

$$(9.11) \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

се нарича относителна линейна деформация и е безразмерна величина.

Подобно на понятието напрежение в дадена точка си въвежда и понятието деформация в точка. Границата на отношението

$$(9.12) \quad \lim_{l_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right) = \varepsilon_{AB}$$

представява относителната линейна надлъжна деформация в т.А по направлението \overrightarrow{AB} . Обикновено се използват деформациите по направлението на трите координатни оси, като се означават с $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Промяната на правия ъгъл ABC до ъгъл $A'B'C' = \alpha$, т.е.

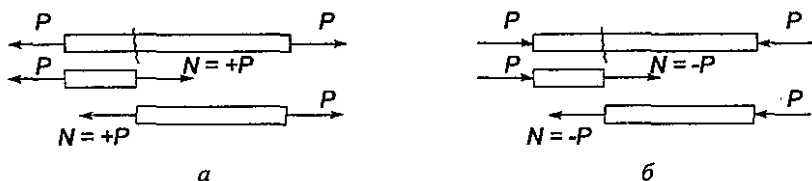
$$(9.10) \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

се нарича относителна ъглова деформация или ъгъл на плъзгането.

Съвкупността от въведените линейни и ъгови деформации по различните направления и равнини прекарани през дадена точка, определят деформираното състояние в околността на тази точка.

10. Елементи, подложени на опън и натиск

Даден конструктивен елемент е подложен на опън или на натиск, ако в него има нормално усилие N .



Фиг.10.1

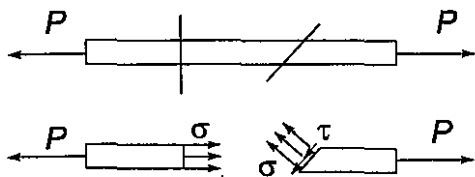
Когато единственото разрезно усилие различно от нула е нормалното, а всички останали са равни на нула, елементът е подложен на чист опън или чист натиск.

Разликата между опъна и натиска се определя от знака на разрезното усилие. При опън (фиг. 10.1а), то е положително, а при натиск (фиг.10.1б) е отрицателно.

Конструктивен елемент в който възниква само нормално усилие, се нарича прът.

10.1 Напрежения при опън и натиск

При опън и натиск в напречните на оста на пръта сечения възникват само нормални напрежения, а в сеченията под наклон – нормални и тангенциални напрежения (фиг.10.2).



Фиг.10.2

Според дефиницията за нормално напрежение, нормалното усилие в напречното сечение представлява равнодействащата на елементарните вътрешни сили

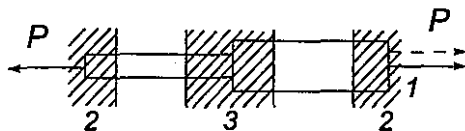
$$(10.1) \quad \sigma = \frac{dN}{dF} \rightarrow dN = \sigma dF$$

Нормалното напрежение при опън и натиск се смята за равномерно разпределено по цялото напречно сечение на пръта $\sigma = \text{const}$, ако са изпълнени следните три предпоставки :

1. Директрисите на външните сили да съвпадат с оста на пръта, т.е да съществува центричен опън или натиск;
2. Разглежданото напречно сечение да бъде на достатъчно разстояние от местата в които са приложени външните сили;
3. Близо до разглежданото сечение да няма рязка промяна във формата и размерите на напречното сечение.

Последните две предпоставки са свързани с концентрацията на напреженията.

На фиг.10.3 са показани изискванията на тези три предпоставки. Заштриховани са участъците, които трябва да бъдат елиминирани.



Фиг.10.3

При условие, че и трите предпоставки са изпълнени, т. е. $\sigma = \text{const}$, при интегрирането на израза (10.1) се получава

$$N = \int dN = \int_{(F)} \sigma dF = \sigma \int_{(F)} dF = \sigma F,$$

т.е

$$(10.2) \quad \sigma = \frac{N}{F},$$

където F е лицето на напречното сечение на пръта.

10.2 Деформации при опън и натиск

Нека дължината на пръта преди натоварването му е l_0 , след натоварването на опън тя нараства и става l . Това нарастване представлява неговата абсолютна надлъжна линейна деформация при опън (фиг.10.4а) и се определя от

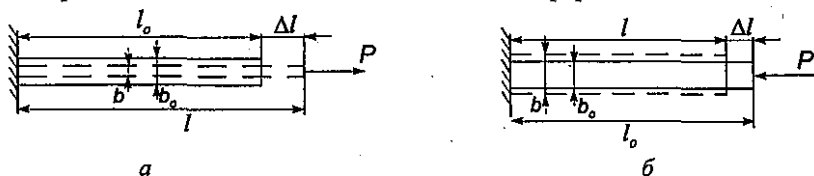
$$(10.3) \quad \Delta l = l - l_0.$$

Ако прътът е натиснат, дължината му l след натоварването е по-малка от първоначалната му дължина и Δl има отрицателна стойност – скъсяване (фиг.10.4б).

Отношението

$$(10.4) \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

се нарича относителната надлъжна линейна деформация.



Фиг.10.4

При натоварване на опън /натиск/ се променя не само надлъжният размер на пръта, но и напречните му размери. Ако напречният размер на пръта преди натоварването е b_0 , а след това е станал b , абсолютната му линейна напречна деформация е

$$(10.5) \quad \Delta b = b - b_0,$$

а относителната линейна напречна деформация

$$(10.6) \quad \varepsilon = \frac{\Delta b}{b_0} = \frac{b - b_0}{b_0}.$$

Както се вижда от фиг. 10.4, знаците на тези деформации са противоположни на знаците на съответните надлъжни деформации.

Отношението на относителните линейни деформации по абсолютна стойност

$$(10.7) \quad \mu = \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right|$$

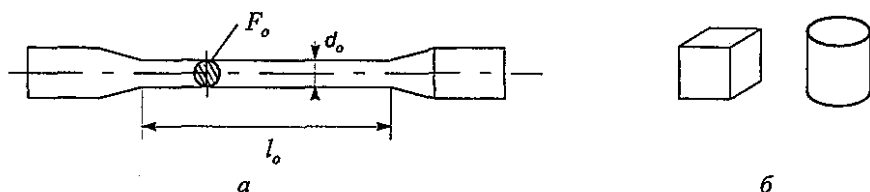
зависи от материала на пръта и следователно μ е материална константа. Нарича се коефициент на Поасон. От (10.7) следва връзката

$$(10.8) \quad \bar{\varepsilon} = -\mu \varepsilon.$$

За различните материали коефициентът на Поасон се мени в границите от 0,25 до 0,5.

10.3. Изпитване на материалите на опън и натиск

Между разгледаните дотук страни, статичната – свързана с намирането на разрезните усилия и напрежения в пръта и геометричната – свързана с деформирането му съществува физична връзка. Тази връзка е третата физична страна на проблема за определяне характеристиките на натоварено тяло. Тя се установява по опитен път. За целта се провеждат изпитания на специални образци /фиг.10.5/, чиито размери се определят от стандартите и зависят както от вида на материала, така и от формата му.



фиг.10.5

На фиг.10.5а е показан цилиндричен образец за изпитване на опън, а на фиг.10.5б – образци за изпитване на натиск. В двата края на образца, предназначен за изпитване на опън, има удебеления, които служат за захващането му в специални челюсти на изпитвателната машина. Те са необходими, за да не става разрушаването близо до мястото на прилагането на външните сили, тъй като там се получава концентрация на напреженията. Работните размери на образца са l_0 и d_0 , а F_0 е площта на напречното му сечение в работната част. Дължината l_0 е базата, върху която се отчитат деформациите – първоначалната дължина.

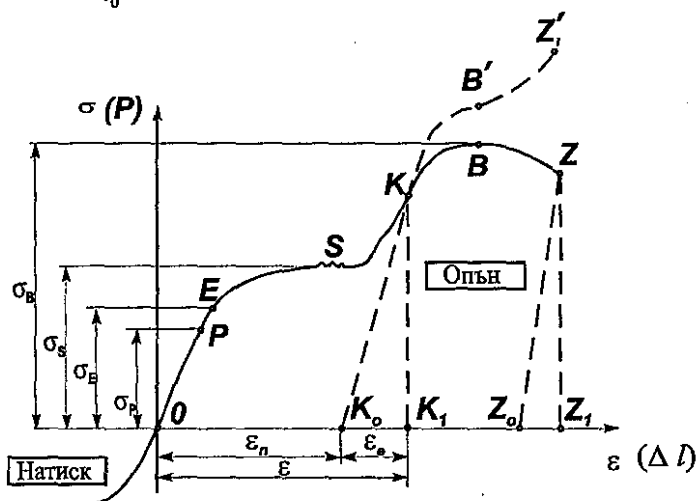
Горната челюст на машината е неподвижна, а долната се движи в процеса на натоварване. Задвижването става, по хидравличен път или чрез двигателни винтове. Уред наречен динамометър показва във всеки момент на процеса силата приложена върху образца, а деформацията се измерва посредством друг уред, наречен екстензометър. Записващо устройство чертае диаграмата "сила-абсолютна линейна деформация" $P = f(\Delta l) /$.

Характерна диаграма за образец от стомана, е показана на фиг. 10.6. Напрежението в образца условно се пресмята спрямо първоначалното лице на напречното му сечение F_0

$$(10.9) \quad \sigma = \frac{P}{F_0},$$

а относителната надлъжна линейна деформация – спрямо първоначалната работна дължина l_0

$$(10.10) \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$



Фиг.10.6

Диаграмите $P = f(\Delta l)$ и $\sigma = f(\varepsilon)$ съвпадат, като се различават само по мащаб. Процесът на изпитание минава през различни етапи.

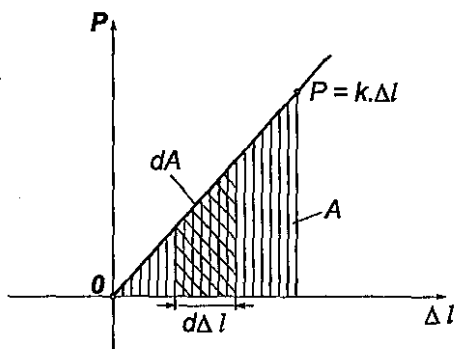
От точка O до точка P на диаграмата зависимостта $\sigma = f(\varepsilon)$ е линейна, т.е. удължението е пропорционално на напрежението и се изразява с т.н. закон на Хук

$$(10.11) \quad \sigma = E \varepsilon,$$

където E е материална константа и се нарича модул на линейната деформация (модул на еластичност, модул на Юнг). Определя се от наклона на правата OP в диаграмата и се измерва в паскали (Pa).

Уравнение (10.11) е в сила до точка P , на която отговаря напрежението σ_p , наречено напрежение на границата на пропорционалност.

Ако в зоната до точка E обра-



Фиг.10.7

зецът се разтовари, той възвръща първоначалните си размери, т.е. деформацията и напрежението отново стават нула. Следователно до точка E деформациите са еластични. Напрежението σ_e се нарича напрежение на границата на еластичност.

При някои материали точка P е над точка E , а при други двете точки се сливат. Като се вземат под внимание (10.9) и (10.10) и се заместят в закона на Хук (10.11), се получава

$$\Delta l = \frac{Pl_0}{EF_0}$$

където l_0 , F_0 и E са константи.

В линейната област на зависимостта на силата от абсолютната линейна деформация образецът може да се оприличи на пружина с линейна характеристика /фиг.10.7/

$$P = k\Delta l = \frac{EF_0}{l_0} \Delta l,$$

където k е т.нар. еластична константа.

Деформационната работа, извършена при натоварването на образца до границата на пропорционалност, се превръща в потенциална енергия на деформирането, която може да се използва отново за извършване на работа.

Елементарната деформационна работа е равна на потенциалната енергия на деформацията, която се натрупва при натоварване на образца

$$dA = P d(\Delta l) = k \Delta l d(\Delta l).$$

Пълната работа е

$$(10.12) \quad A = \int dA = k \int_0^{\Delta l} \Delta l d(\Delta l) = \frac{k}{2} \Delta l^2 = \frac{P\Delta l}{2}.$$

Тя се пресмята посредством площта в диаграмата $P = f(\Delta l)$.

Специфичната деформационна работа представлява отношението на работата извършена от силата към първоначалния обем на работната част на образца $V_0 = F_0 l_0$

$$(10.13) \quad u = \frac{A}{V_0} = \frac{P\Delta l}{2F_0 l_0} = \frac{\varepsilon \sigma}{2}.$$

До границата на пропорционалност, където е в сила законът на Хук, за специфичната деформационна работа /специфичната потенциална енергия на еластичната деформация/ се получава:

$$(10.14) \quad u = \frac{\sigma E}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E \varepsilon^2}{2}$$

След границата на еластичност /т. E / следва зона, в която стрелката на динамометъра се колебае около определена стойност на силата, а образецът значително се удължава, без да нараства силата. Тази зона от диаграмата се нарича област на провлачане, а напрежението σ_3 , което отговаря на точка S – напрежение на границата на провлачане. В тази зона температурата на образца значително нараства, тъй като част от работата, вложена за деформиране, се трансформира в топлинна енергия.

По нататък образецът привидно възвръща способността си да се съпротивлява на натоварването и напрежението отново расте, макар и по-слабо, докато стигне най-високата точка B . Напрежението σ_B , се нарича напрежение на границата на разрушаване или якост на опън. След точка B материалът губи якостта си и престава да се съпротивлява, т.е. настъпва край на процеса на съпротивляването на материала.

В действителност образецът не се разрушава в точка B , а в точка Z . Това се дължи на факта, че максималната сила, която издържа образецът, действително отговаря на точка B , но кривата на истинското напрежение /прекъснатата линия на фиг. 10.6/ след областта S започва чувствително да се различава от кривата, която чертае записващото устройство на машината.

Истинското напрежение се различава от израза (10.9). Причината е, че първоначалното лице на напречното сечение не се запазва постоянно и особено след точка S чувствително намалява. Така в работната част на образца се получава едно местно стесняване, наречено шийка, където лицето на напречното сечение става по-малко от F_0 . Истинското напрежение е

$$(10.15) \quad \sigma_u = \frac{P}{F}$$

където F е минималното лице на напречното сечение на образца.

Така по отношение на истинското напрежение, разрушаването става в точка Z' която е над точка B' .

Ако в областта между S и B , например в точка K , образецът се разтовари, писецът на записващото устройство не се връща в изходната точка O , а се движи по правата KK_0 , която е почти успоредна на OP . Ако пълната деформация в точка K е $\varepsilon = OK_1$ при разтоварването изчезва само еластичната деформация ε_e , а деформацията $\varepsilon_n = OK_0$ остава необратима и се нарича остатъчна или пластична деформация.

Ако след разтоварването до точка K_0 образецът отново се натовари, пиесецът на записващото устройство на машината се движи по линията K_0KBZ .

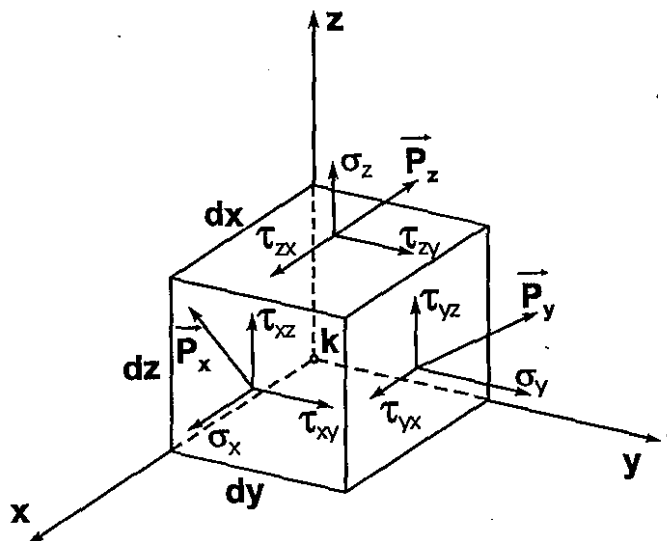
След разрушаването (точка Z) част от общата деформация също изчезва, а остава деформацията, която отговаря на OZ_0 .

При изпитване на натиск, диаграмата е подобна на тази при опън, но е в областта на отрицателните стойности на σ и ϵ /фиг 10.6/.

11. Теория на напрегнатото състояние

11.1 Напрегнато състояние в околността на точка

Нека в околността на точка K от конструктивен елемент мислено се отдели елементарен правоъгълен паралелепипед /фиг.11.1/. Върху стените му с нормали координатните оси ще действуват пълните напрежения \vec{p}_x , \vec{p}_y , \vec{p}_z . След разлагане на всяко от тези напрежения, се получават девет компоненти на напреженията. На фигурата са показани само тези от тях, действувачи върху видимите страни.



Фиг.11.1

Индексите на нормалните напрежения и първите индекси на тангенциалните напрежения съответствуват на индекса на нормалата към площадката /в случая координатните оси/. Вторите индекси на тангенциалните напрежения съответствуват на координатните оси, на които са успоредни тези напрежения. Поради малките размери на паралелепипеда се приема, че такива напрежения действуват и на другите три успоредни стени, макар че те се различават с диференциал.

Съвкупността от напрежения върху стените на елементарния паралелепипед може да се запише във вид на следната матрица

$$(11.1) \quad T_H = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Тази величина, определена от девет компоненти, се нарича *тензор на напрежението* (тензор от втори ранг). В теорията на еластичността се доказва, че тангенциалните напрежения с разменящи се индекси са равни, т.е.

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned}$$

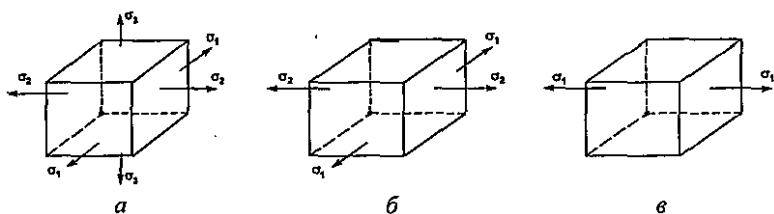
Горните зависимости представляват т.н. *Закон за реципрочност на тангенциалните напрежения*. От него се вижда симетрията на матрицата спрямо главния диагонал. Следователно тензорът на напрежението в дадена точка има шест независими компоненти: три нормални напрежения $/\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z/$ и три тангенциални напрежения $/\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}/$. При промяна на ориентацията на елементарния паралелепипед всички компоненти на тензора на напрежението се променят. В теорията на еластичността се доказва, че винаги може да се намери такава ориентация, при която върху стените на паралелепипеда да действуват само нормални напрежения. Тези нормални напрежения се наричат главни и се означават със $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, площадките, върху които действуват се наричат *главни площадки*, а тензорът на напрежението се нарича *главен тензор* и добива вида:

$$(11.3) \quad T_H = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix}.$$

Така напрегнатото състояние в дадена точка се изразява чрез съвкупността на трите главни нормални напрежения. Променяйки ориентацията на паралелепипеда, ще се променят и напреженията действащи върху стените му, но тяхната съвкупност ще представлява винаги едно и също напрегнато състояние, определено от трите главни нормални напрежения.

Приема се най-голямото по алгебрична стойност главно нормално напрежение да бъде σ_1 , следващото σ_2 , а най-малкото σ_3 , т.е.

$$(11.4) \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



Фиг.11.2

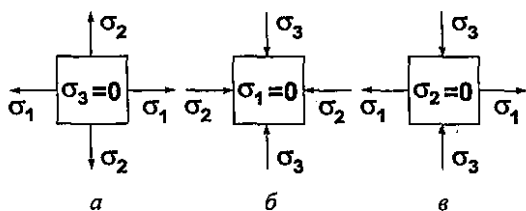
Когато напрегнатото състояние в дадена точка се характеризира с три главни нормални напрежения, различни от нула, то се нарича тримерно /обемно/ – фиг.11.2а.

Ако едно от главните нормални напрежения е нула /фиг.11.2б/ напрегнатото състояние е двумерно /равнинно/.

При едномерното /линейното/ напрегнато състояние две от главните нормални напрежения са равни на нули /фиг.11.2в/.

11.2 Двумерно (равнинно) напрегнато състояние

Погледнат срещу свободна от напрежение площадка, елементарния правоъгълен паралелепипед се проектира като равнинен контур /квадрат/ – фиг.11.3. Вариантите на двумерно напрегнато състояние са двумерен опън, когато $\sigma_3 = 0$ /фиг.11.3а/, двумерен натиск, когато $\sigma_1 = 0$ /фиг. 11.3б/ и смесено двумерно напрегнато състояние $\sigma_2 = 0$ /фиг. 11.3в/.



Фиг.11.3

Задачите биват 2 основни типа :

– права задача при която са известни главните нормални напрежения, а се търсят напреженията в произволни площадки, перпендикулярни на площадките, свободни от напрежения;

– обратна задача – известни са напреженията, в две взаимноперпендикулярни площадки. Търсят се главните напрежения и положението на главните площадки.

Тези задачи могат да бъдат решени аналитично и графично.

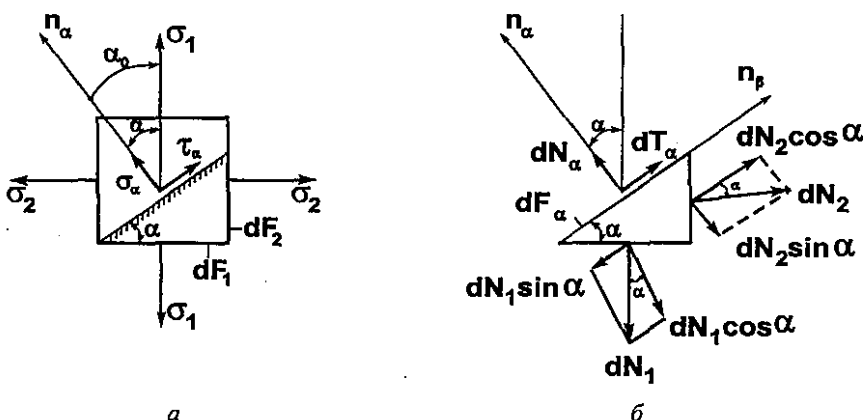
I. Аналитично решение

Права задача.

Дадени са главните напрежения – например σ_1 и σ_2 /двумерен опън/. Търсят се напреженията в площадка с нормала n_α , сключваща ъгъл α с направлението на по-голямото от двете главни нормални напрежения /фиг.11.4а/.

За решаването на задачата се прилага метода на разреза. На фиг. 11.4б е показана частта получена след разреза и елементарните сили, съответстващи на главните нормални напрежения и напреженията σ_α и τ_α . Тъй като елементарния паралелепипед е в равновесие, то и показаната част от паралелепипеда, ще бъде също в равновесие.

Нека лицето на наклонената стена, на получената след разреза част от паралелепипеда е с големина dF_α /фиг. 11.4б/. Тогаво лицата на стените върху които действуват σ_1 и σ_2 могат да се изразят чрез dF_α



Фиг. 11.4

$$(11.5) \quad \begin{aligned} dF_1 &= dF_\alpha \cos \alpha; \\ dF_2 &= dF_\alpha \sin \alpha. \end{aligned}$$

Съсредоточените сили, действувачи върху стените на разглежданата част от паралелепипеда ще бъдат:

$$\begin{aligned}
 dN_1 &= \sigma_1 dF_1 = \sigma_1 dF_\alpha \cos \alpha \\
 dN_2 &= \sigma_2 dF_2 = \sigma_2 dF_\alpha \sin \alpha \\
 dN_\alpha &= \sigma_\alpha dF_\alpha \\
 dT_\alpha &= \tau_\alpha dF_\alpha
 \end{aligned}
 \tag{11.6}$$

От условията за равновесие се получават проекционните уравнения върху нормалите n_α и n_β

$$\begin{aligned}
 \sum P_{kn_\alpha} &= dN_\alpha - dN_1 \cos \alpha - dN_2 \sin \alpha = 0; \\
 \sum P_{kn_\beta} &= dT_\alpha - dN_1 \sin \alpha + dN_2 \cos \alpha = 0.
 \end{aligned}
 \tag{11.7}$$

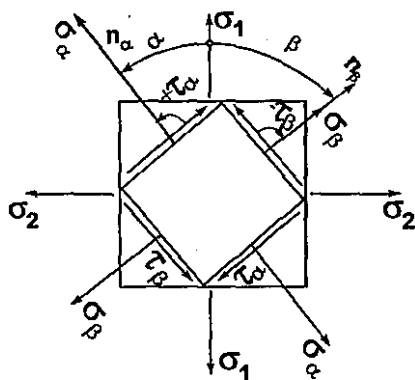
При заместване на (11.5) и (11.6) в (11.7) се получават изразите за напреженията в наклонената площадка.

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\
 \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha
 \end{aligned}
 \tag{11.8}$$

При едномерно напрегнато състояние / $\sigma_2 = 0$ / се получава

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha; \\
 \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{11.9}$$

В тези формули се спазват следните основно приети правила за знаците на α , σ_α , τ_α , показани на фиг. 11.5, където завъртяното положение на главните площадки е показано като вписан контур в контура на главните площадки.



Фиг. 11.5

Ъгълът α е положителен, когато нормалата на изследваното сечение е завъртяна спрямо по-голямото от двете главни нормални напрежения в посока обратна на въртенето на часовниковата стрелка. Нормалното напрежение σ_α е положително, когато посоката му съвпада с посоката на нормалата към площадката. Тангенциалното напрежение се приема за положително, когато след завъртане на ъгъл $\pi/2$ в посока обратна на часовниковата стрелка се слива с направлението и посоката на

нормалата към площадката в която действа.

Напреженията в площадка с нормала n_β , перпендикулярна на n_α /фиг.11.5/ се извеждат от зависимост (11.8).

Като се въведе връзката

$$\beta = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

се получава

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \\ (11.10) \quad \tau_\beta &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

От сравняването на горния израз с (11.8) следва, че $\tau_\beta = -\tau_\alpha$. При събиране на изразите за σ_α и σ_β се получава

$$(11.11) \quad \sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2,$$

т.е. сумата от нормалните напрежения в две взаимноперпендикулярни площадки е инвариантна величина, която не зависи от ориентацията на площадките.

От израза за τ_α се вижда, че максималното тангенциално напрежение

$$(11.12) \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

ще действа в площадките наклонени под ъгъл $\alpha = \frac{\pi}{4}$, спрямо главните площадки.

Получените формули могат да се прилагат и за останалите случаи на двумерно напрегнато състояние, като се обобщят чрез въвеждане на означенията σ_{\max} и σ_{\min} , съответно за по-голямото и по-малкото главно нормално напрежение различни от 0. Тогава

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_{\max} \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{\min} \sin^2 \alpha; \\ (11.13) \quad \sigma_\beta &= \sigma_{\max} \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_{\min} \cos^2 \alpha; \\ \tau_\alpha &= -\tau_\beta = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Обратна задача.

Известни са напреженията в две взаимноперпендикулярни площадки $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ и σ_β, τ_β / $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ /. Търсят се главните нормални напрежения и ориентацията на главните площадки /фиг.11.6/. С други думи, ако се направи сравнение с фиг.11.5, известни са напреженията действащи върху вписания контур, а се търсят тези на външния контур.

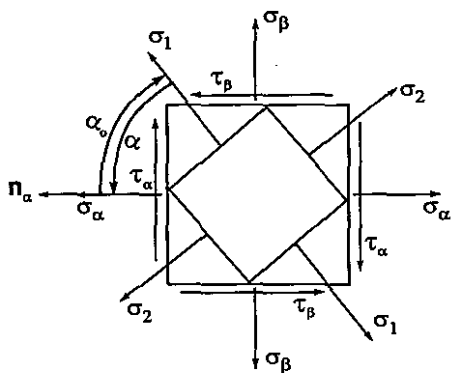
Прието е дадените (изходни) напрежения и площадки да се чертаят като външен контур, а търсените такива като вписан.

Ориентацията на главните площадки се определя от ъгъл $\alpha_0 = -\alpha$. Това е ъгъла на който е завъртяна нормалата на главната площадка, в която действа по-голямото от двете главни нормални напрежения, спрямо нормалата n_α .

За решението на обратната задача се излиза от уравнения (11.13), като в тях се замества α с $(-\alpha_0)$. При събиране и изваждане на изразите за σ_α и σ_β се получава

$$(11.14) \quad \sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_{\max} + \sigma_{\min};$$

$$(11.15) \quad \sigma_\alpha - \sigma_\beta = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \cos 2\alpha_0.$$



Фиг. 11.6

Като се вземе предвид, че

$$(11.16) \quad -2\tau_\alpha = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \sin 2\alpha_0$$

и се повдигнат на квадрат (11.15) и (11.16), след събиране се получава

$$(11.17) \quad \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}.$$

При събирането и изваждането на (11.14) и (11.17) се получава

$$(11.18) \quad \sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right],$$

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right].$$

При разделянето на (11.16) с (11.15) се получава

$$(11.19) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}.$$

Зависимостта за τ_{\max} при двумерно напрегнато състояние се получава от (11.12) и (11.18)

$$(11.20) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2}.$$

II. Графично решение

Разгледаните два типа задачи от двумерно напрегнато състояние могат да бъдат решени и графично. Този метод е даден от Мор.

За аргументация на метода се излиза от зависимостите (11.13) които се привеждат във вида

$$(11.21) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} + \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \cos 2\alpha; \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Като се изключи параметърът α , се получава уравнението на геометричното място на точки, изразяващи в координатна система $\sigma - \tau$ напрежението в коя да е наклонена площадка

$$(11.22) \quad \left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right)^2.$$

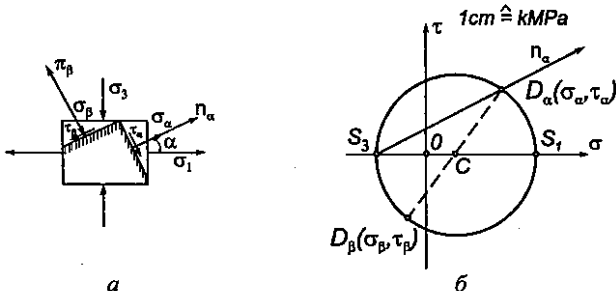
Горното уравнение изобразява окръжност с център С, координати $\left(\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, 0 \right)$ и радиус $\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$, наречена окръжност на напреженията (окръжност на Мор).

Права задача.

Дадени са главните нормални напрежения σ_{\max} и σ_{\min} /в случая на фиг.11.7 са дадени $\sigma_{\max} = \sigma_1$ и $\sigma_{\min} = \sigma_3$ /. Търсят се напреженията в

площадка, чиято нормала сключва ъгъл α с σ_{\max} и напреженията в площадка β , перпендикулярна на α .

Избира се мащаб на напреженията /см \Leftrightarrow МПа/,



Фиг. 11.7

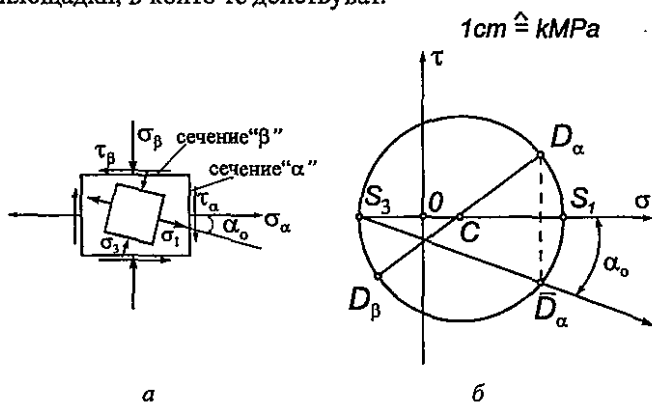
след което в координатната система $\sigma \sim \tau$ /фиг.11.7б/ се построяват точките $S_1(\sigma_{\max}, 0)$ и $S_3(\sigma_{\min}, 0)$. Намира се средата на отсечката $\overline{S_1 S_3}$ – точка C , която представлява център на окръжността, описана през точките S_1 и S_3 .

От точка S_3 , се построява лъч, съдържащ ъгъл α с оста σ на координатната система. При това, ако $\alpha > 0$, лъчът е завъртян спрямо оста σ в посока, обратна на въртенето на часовниковата стрелка /фиг.11.7б/, а ако $\alpha < 0$, лъчът с начало точката S_3 е завъртян спрямо оста σ в посока на въртенето на часовниковата стрелка. Пресечната точка D_α на лъча и окръжността, има за координати напреженията в площадката α . Построявайки диаметъра през точка D_α и точка C , намираме точка D_β , която има за координати напреженията в площадката β .

Така намерените напрежения $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ и σ_β, τ_β в съответствие с техните знаци се нанасят в площадките на фиг. 11.7а.

Обратна задача.

Дадени са напреженията в две взаимно перпендикулярни площадки – $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$, действащи в площадка α и напреженията σ_β, τ_β действащи в площадка β . Търсят се главните нормални напрежения и положението на главните площадки, в които те действуват.



Фиг.11.8

След избиране на подходящ мащаб на напреженията в координатната система $\sigma \sim \tau$ /фиг. 11.8/ се построяват точките $D_\alpha(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ и $D_\beta(\sigma_\beta, \tau_\beta)$. Пресечната точка на правата $\overline{D_\alpha D_\beta}$ с оста σ е центърът C на окръжността, описана през точките D_α и D_β . Абсцисата на точка S_1 /най-дясната точка на Морвата окръжност/ представлява главното нормално напрежение σ_{\max} /в

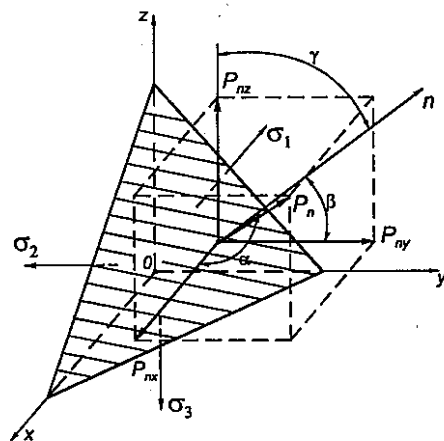
случая на фиг.11.8б $\sigma_{\max} = \sigma_1$, а абсцисата на най-лявата точка S_3 представлява главното нормално напрежение σ_{\min} /в случая на фиг. 11.8б $\sigma_{\min} = \sigma_3$. Съединяват се точка S_3 с точка \bar{D}_α /огледален образ на D_α спрямо оста σ' и се получава ъгъла α_0 , на който е завъртяна нормалата на главната площадка, в която действа σ_{\max} , спрямо нормалата на площадката α .

На фиг. 11.8а е показано положението на главните площадки спрямо първоначално зададените площадки α и β .

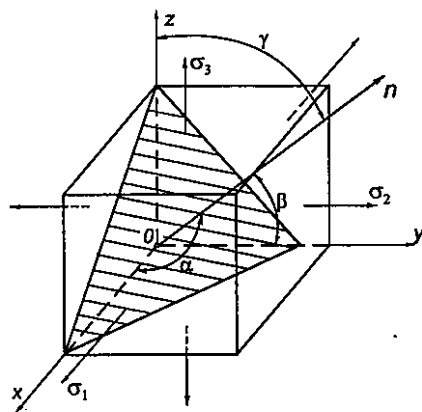
11.3 Тримерно напрегнато състояние

На фиг.11.9 е показан елементарен паралелепипед в тримерно напрегнато състояние. По аналогия на двумерно напрегнато състояние се поставя задачата за намиране напреженията в произволно сечение, чиято нормала n сключва с направлението на главните нормални напрежения σ_1 , σ_2 и σ_3 , съответно ъглите α , β и γ .

Разглежда се равновесието на безкрайно малкия тетраедър, образуван от трите главни площадки и произволно наклонената площадка. Действащото по наклонената площадка пълно напрежение p_n се разлага по направлението на координатните оси на компонентите p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} /фиг. 11. 10/. Ако лицето на наклонената стена на тетраедъра е равно на dF_n , лицата на стените, съвпадащи с главните площадки, ще бъдат съответно $dF_n \cos \alpha$, $dF_n \cos \beta$ и $dF_n \cos \gamma$.



Фиг.11.9



Фиг.11.10

Уравненията за равновесие на елементарния тетраедър са сумите от проекциите на действащите сили по трите координатни оси

$$(11.23) \quad \begin{aligned} \sum P_{kx} &= P_{nx} dF_n - \sigma_1 dF_n \cos \alpha = 0; \\ \sum P_{ky} &= P_{ny} dF_n - \sigma_2 dF_n \cos \beta = 0; \\ \sum P_{kz} &= P_{nz} dF_n - \sigma_3 dF_n \cos \gamma = 0. \end{aligned}$$

От уравненията (11.23) се получава

$$P_{nx} = \sigma_1 \cos \alpha; \quad P_{ny} = \sigma_2 \cos \beta; \quad P_{nz} = \sigma_3 \cos \gamma$$

или

$$(11.24) \quad P_n = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma}.$$

Като се проектират компонентите на пълното напрежение \vec{p}_n върху нормалата n , се намира нормалното напрежение в изследваната наклонена площадка

$$(11.25) \quad \sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma.$$

Тангенциалното напрежение в наклонената площадка се определя по формулата:

$$(11.26) \quad \tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - \sigma_n^2}.$$

Важно значение имат напреженията в площадките, еднакво наклонени по отношение на главните оси $\alpha = \beta = \gamma = \omega$. Напреженията в такива площадки се наричат октаедрични, тъй като в околността на дадена точка осемте площадки, които са равно наклонени към трите главни оси, образуват правилен осмостенник, наречен октаедър. В този случай, тъй като

$$\cos^2 \omega + \cos^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$$

следва, че

$$3 \cos^2 \omega = 1, \text{ т.е. } \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

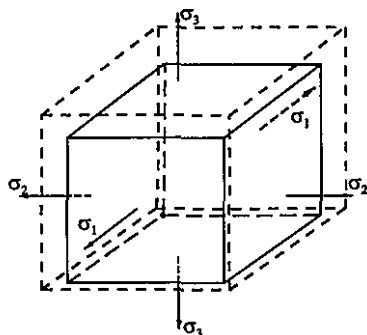
Тогава от (11.25) и (11.26) за октаедричните напрежения се получава

$$(11.27) \quad \begin{aligned} \sigma_{окт} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{cp}; \\ \tau_{окт} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

Октаедричното нормално напрежение се нарича още средно напрежение в дадена точка и при тримерно напрегнато състояние има разработен графичен метод за определяне на напреженията в произволна площадка.

11.4 Деформации при тримерно напрегнато състояние

На фиг.11.11 е даден правоъгълен паралелепипед, върху стените на който действуват главните напрежения σ_1 , σ_2 и σ_3 . По направления на тези напрежения възникват главни относителни деформации ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 . Техните стойности се определят чрез принципа на суперпозицията.



Фиг.11.11

Така например в резултат на действието само на напрежението σ_1 относителните надлъжна и напречни деформации на ръбовете на правоъгълния паралелепипед ще бъдат :

$$I \quad \epsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \epsilon_{21} = -\mu \frac{\sigma_1}{E}; \quad \epsilon_{31} = -\mu \frac{\sigma_1}{E}.$$

Първият индекс показва направлението на относителната деформация, а вторият съпада с индекса на главното напрежение, което я предизвиква.

Аналогично при независимото действие на напреженията σ_2 и σ_3 се получава

$$II \quad \epsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_{32} = -\mu \frac{\sigma_2}{E};$$

$$III \quad \epsilon_{13} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}; \quad \epsilon_{23} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}; \quad \epsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E}.$$

Като се приложи принципа на суперпозицията за главните относителни деформации, предизвикани от едновременното действие на трите главни напрежения се получава

$$(11.28) \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_{11} + \epsilon_{12} + \epsilon_{13}; \\ \epsilon_2 &= \epsilon_{21} + \epsilon_{22} + \epsilon_{23}; \\ \epsilon_3 &= \epsilon_{31} + \epsilon_{32} + \epsilon_{33}; \end{aligned}$$

При заместване на изразите I, II и III, уравненията (11.28) приемат вида

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\
 (11.29) \quad \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\
 \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)];
 \end{aligned}$$

В случаите, когато стените на елементарния паралелепипед не съвпадат с главните площадки, уравненията (11.29) приемат осови индекси

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\
 (11.30) \quad \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];
 \end{aligned}$$

Изразите (11.29) и (11.30) се наричат обобщен закон на Хук.

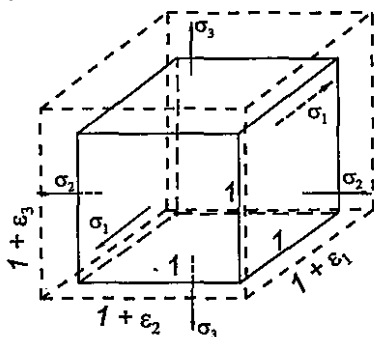
Освен относителните линейни деформации, представлява интерес и тъй наречената относителна обемна деформация ε_v .

Ако се разгледа куб с дължина на ръба равна на единица, след деформирането дължините на ръбовете на куба стават $1 + \varepsilon_1$; $1 + \varepsilon_2$; $1 + \varepsilon_3$ /фиг.11.12/. Първоначалният обем на куба е $V_0 = 1$, а след деформирането става

$$V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3).$$

Относителната обемна деформация ще бъде

$$(11.31) \quad \varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$



Фиг.11.12

Пренебрегвайки безкрайно малките величини от втори порядък, се получава

$$(11.32) \quad \varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Замествайки в (11.32) уравненията (11.29), изразяващи обобщения закон на Хук, се получава относителната обемна деформация, изразена чрез главните напрежения

$$(11.33) \quad \varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Ако се използва уравнението за средното напрежение в дадена точка (11.27), се получава

$$(11.34) \quad \varepsilon_v = \frac{(1-2\mu)}{E} \sigma.$$

В това уравнение реципрочната стойност на отношението пред σ се нарича модул на обемна деформация и представлява важна техническа константа за всеки материал.

$$(11.35) \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

Експериментално се потвърждава, че независимо от вида на напрегнатото състояние коефициента на Поасон е $\mu \leq 0,5$.

12. Геометрични характеристики на равнинни фигури

Напречното сечение на дадено тяло представлява равнинна фигура. Нейната форма и размери силно влияе върху якостните и деформационни свойства на тялото. Това налага да се разгледат някои чисто геометрични величини, които характеризират това сечение.

Най-простата геометрична характеристика е лицето F на равнинната фигура.

За нуждите на съпротивление на материалите обаче се налага да се разгледат и други характеристики.

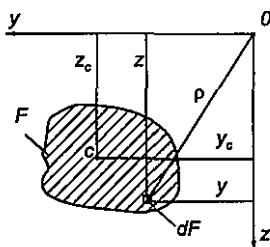
12.1 Статичен момент

Ако в равнината на фигура с лице F се вземе елементарно лице dF с координати y и z /фиг.12.1/ произведението zdF , съответно ydF се нарича елементарен статичен момент спрямо оста Oy , съответно оста Oz .

Изразите

$$(12.1) \quad \begin{aligned} S_y &= \int_{(F)} zdF; \\ S_z &= \int_{(F)} ydF, \end{aligned}$$

представяват статичните моменти на цялата фигура, спрямо тези оси.



Фиг.12.1

Като се отчете, че координатите на центъра на тежестта на фигурата се дават с изразите

$$(12.2) \quad y_c = \frac{\int_{(F)} ydF}{F}; \quad z_c = \frac{\int_{(F)} zdF}{F},$$

от сравнението на (12.1) и (12.2) следва, че

$$(12.3) \quad S_y = z_c F; \quad S_z = y_c F.$$

От тези зависимости се вижда, че статичните моменти спрямо оси, минаващи през центъра на тежестта са равни на нула. Такива оси се наричат *централни*.

При пресмятането на статичните моменти на сложни равнинни фигури, по подобие на задачите свързани с намирането на центъра на тежестта, може да се използва методът за разделяне на прости фигури. За сечение, съставено от n на брой прости фигури се получава

$$(12.4) \quad \begin{aligned} S_y &= F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 \dots = \sum_{k=1}^n F_k z_k; \\ S_z &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 \dots = \sum_{k=1}^n F_k y_k. \end{aligned}$$

12.2 Инерционни моменти

Подобно на статичните моменти се дефинира понятието осов инерционен момент

$$(12.5) \quad J_y = \int_{(F)} z^2 dF; \quad J_z = \int_{(F)} y^2 dF.$$

Когато в горните уравнения вместо квадрата на съответното разстояние до дадената ос, се вземе квадрата от разстоянието на елемента dF до полюса O /фиг. 12.1/, се получава т.н. полярен инерционен момент

$$(12.6) \quad J_0 = \int_{(F)} \rho^2 dF.$$

Този момент може да се дефинира спрямо всяка произволна точка /полюс/. В случая, когато точката O съвпада с началото на координатната система, т.е. $\rho^2 = y^2 + z^2$, се получава връзката

$$(12.7) \quad J_0 = J_y + J_z.$$

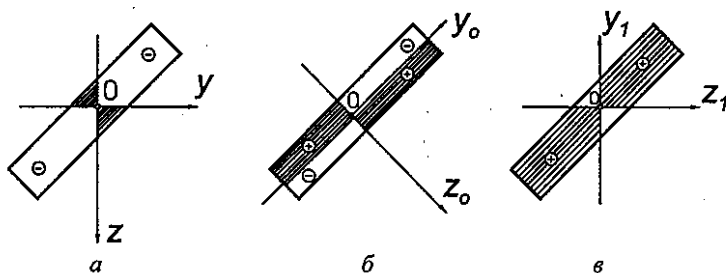
Когато инерционният момент се дефинира едновременно спрямо две оси се нарича *центробежен момент*

$$(12.8) \quad J_{yz} = \int_{(F)} yz dF.$$

Измеренията на тези моменти са m^4 .

Осовите и полярният инерционни моменти са винаги положителни величини, а центробежният момент в зависимост от разположението на фигурата спрямо осите може да бъде положителен, нула или отрицателен.

Например центробежният момент на правоъгълника спрямо осите y и z на фиг. 12.2а е отрицателен, а спрямо осите Oy_1z_1 на фиг.12.2в е положителен, тъй като в първият случай преобладаващи в правоъгълника са отрицателните произведения $yz.dF$, а във вторият положителните $yz.dFz$.



Фиг.12.2

Нека фиг. 12.2в е получена чрез завъртане на координатната система Oy_1z_1 от фиг. 12.2а около точка O , в посока, обратна на движението на часовниковата стрелка, до положението Oy_1z_1 . Първоначално отрицателния центробежен момент /фиг. 12.2а/, се превръща в положителен /фиг. 12.2в/. Следователно при промяна на знака си той минава през дадено положение на координатната система като получава стойност нула. Не е трудно да се прецени, че това положение съответствува на осите Oy_0z_0 /фиг. 12.2б/, тъй като тук положителните и отрицателните събираеми се изравняват.

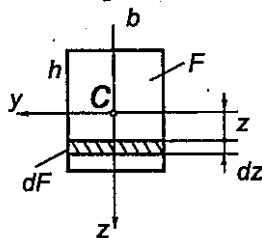
Осите y_0 и z_0 , спрямо които центробежният момент се анулира, се наричат *главни инерционни оси*. Такова изравняване ще бъде винаги изпълнено, когато поне една от осите, спрямо които е дефиниран центробежният момент, е ос на симетрия на сечението.

Ако главните инерционни оси минават през центъра на тежестта на фигурата, те се наричат *главни централни инерционни оси*.

12.3 Инерционни моменти на някои прости фигури

Правоъгълник и квадрат /фиг. 12.3/. За пресмятане на осовите инерционни моменти спрямо централните оси y и z , се ограничава елементарното лице $dF = bdz$. Съгласно уравнение (12.5)

$$J_y = \int_{(F)} z^2 dF = J_y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz$$



Фиг. 12.3

След пресмятане на интеграла се получава

$$(12.9) \quad J_y = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично за инерционния момент спрямо оста z се получава

$$(12.10) \quad J_z = \frac{hb^3}{12}.$$

В частния случай за квадрат със страна a

$$(12.11) \quad J_y = J_z = \frac{a^4}{12}.$$

Кръг /фиг. 12.4/. В случая за елементарното лице dF се взема заштрихованата ивица с лице $dF = 2\rho d\rho$. След заместване в (12.6) за полярния инерционен момент се получава

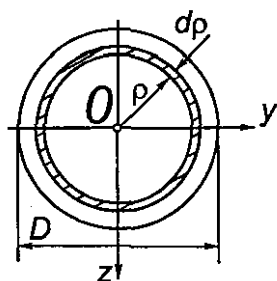
$$J_0 = 2 \int_{\rho=0}^{\rho=\frac{D}{2}} \rho^2 \pi \rho d\rho,$$

откъдето след пресмятане на интеграла се получава

$$(12.12) \quad J_0 = \frac{\pi D^4}{32}.$$

От връзката (12.7) като се отчете симетрията на фигурата, т.е $J_y = J_z$, за осовия инерционен момент се получава

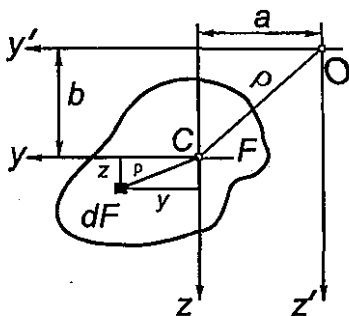
$$(12.13) \quad J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64}.$$



Фиг.12.4

12.4 Зависимост между инерционните моменти спрямо успоредни оси

Когато са известни инерционните моменти на фигурата спрямо централните оси J_y , J_z и J_{yz} , инерционните моменти спрямо успоредните им оси $J_{y'}$, $J_{z'}$ и $J_{y'z'}$ /фиг. 12.5/ могат да се намерят с помощта на теоремите на Щайнер.



Фиг. 12.5

Леко се доказва, че инерционният момент на фигурата спрямо дадена ос се равнява на инерционният ѝ момент спрямо успоредна на нея централна ос плюс произведението от лицето и квадрата от разстоянието между двете оси.

Съгласно дефиниционните зависимости (12.5)

$$J_{y'} = \int_{(F)} (b+z)^2 dF \quad \text{и} \quad J_{z'} = \int_{(F)} (a+y)^2 dF$$

или

$$(12.14) \quad J_y = b^2 \int_{(F)} dF + \int_{(F)} z^2 dF + 2b \int_{(F)} z dF,$$

а за другата ос

$$(12.15) \quad J_z = a^2 \int_{(F)} dF + \int_{(F)} y^2 dF + 2a \int_{(F)} y dF,$$

Вторият член в дясната част на (12.14) е централният инерционен момент J_y , а третият член $\int_{(F)} z dF = 0$, тъй като това е статичният момент

спрямо централната ос y . За съответните членове в (12.15) аналогията е пълна от където следва, че инерционните моменти спрямо успоредни оси се представят със зависимостите

$$(12.16) \quad J_y = J_y + b^2 F \quad \text{и} \quad J_z = J_z + a^2 F.$$

По същия начин за центробежните моменти може да се докаже

$$(12.17) \quad J_{y'z'} = J_{yz} + abF;$$

$$(12.18) \quad J_0 = J_c + \rho^2 F.$$

12.5 Инерционни моменти на сложни фигури

Инерционният момент на една сложна фигура, като се излезе от свойството на определения интеграл, е равен на сбора от инерционните моменти на образуващите я прости фигури

$$(12.19) \quad J_y = \int_{(F)} z^2 dF = \int_{(F_1)} z^2 dF + \int_{(F_2)} z^2 dF + \dots + \int_{(F_n)} z^2 dF = \\ J_{1,y} + J_{2,y} + \dots + J_{n,y},$$

където $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$.

Аналогично за центробежния момент

$$(12.20) \quad J_{yz} = J_{1,yz} + J_{2,yz} + \dots + J_{n,yz},$$

където отделните събираеми в дясната част са центробежните моменти на простите фигури.

Следователно, пресмятането на инерционният момент на сложна фигура, може да стане, чрез разделяне на прости фигури, на които лесно се намират инерционните моменти и сумиране на тези инерционни моменти.

Когато сложното сечение е съставено от стандартни профили, се използват справочници в които се дават необходимите данни за тези профили.

12.6 Инерционен радиус

От теоремата за средната стойност на определен интеграл инерционния момент може да се представи във вида

$$(12.21) \quad J_y = \int_{(F)} z^2 dF = i_y^2 \int_{(F)} dF = i_y^2 F.$$

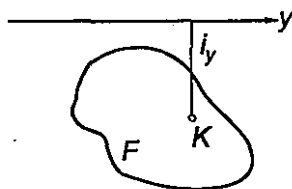
Тук величината с дименсия метър /m/

$$(12.22) \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}},$$

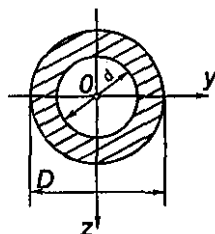
се нарича осов инерционен радиус. По същият начин се дефинира и понятието полярен инерционен радиус

$$(12.23) \quad i_0 = \sqrt{\frac{J_0}{F}}.$$

Инерционният радиус i_y има просто геометрично тълкуване (фиг. 12.6). Ако си представим, че цялото лице F на сечението е "съсредоточено" в една точка (например K), тогава разстоянието от тази точка до оста y ще бъде инерционният радиус на сечението i_y .



Фиг. 12.6



Фиг. 12.7

12.7 Съпротивителни моменти

Съпротивителните моменти могат да бъдат осови и полярни.

Осовият съпротивителен момент W се дефинира като отношение на осовия инерционен момент и разстоянието от оста до най-отдалечената точка на сечението:

$$(12.24) \quad W_y = \frac{J_y}{|z_{\max}|}; \quad W_z = \frac{J_z}{|y_{\max}|}.$$

Полярният съпротивителен момент представлява отношение на полярния инерционен момент и разстоянието от полюса до най-отдалечените точки на сечението. Той има практически смисъл само за кръгло сечение.

$$(12.25) \quad W_0 = \frac{J_0}{R}.$$

Дименсите на съпротивителните моменти са m^3 .

По долу са пресметнати съпротивителните моменти на някои прости фигури.

а. Правоъгълник /фиг. 12.3/

$$(12.26) \quad W_y = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_z = \frac{hb^2}{6},$$

б. Кръг /фиг. 12.4/

$$(12.27) \quad W_y = W_z = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}; \quad (12.28) \quad W_0 = \frac{\frac{\pi D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

в. Тръбно сечение /фиг. 12.7/ :

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$$

или

$$(12.29) \quad J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4).$$

За полярният инерционен момент по аналогичен начин се получава:

$$(12.30) \quad J_0 = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad \text{където } \alpha = \frac{d}{D}.$$

За съпротивителния момент от $y_{\max} = z_{\max} = \rho_{\max} = \frac{D}{2}$, се получава

$$(12.31) \quad W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4);$$

$$(12.32) \quad W_0 = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

13. Специално огъване на прави греди

Когато в даден конструктивен елемент възникнат огъващи моменти, той е натоварен на огъване. Различават се следните видове огъване :

1. Чисто огъване, когато огъващият момент е единственото разрезно усилие различно от нула, а всички останали са равни на нула;

2. Напречно огъване, когато освен огъващият момент и тангенциалното усилие е различно от нула;

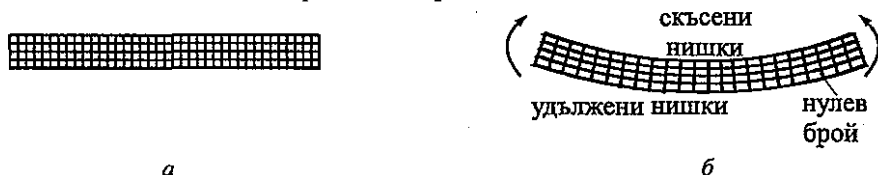
3. Специално огъване, когато гредата има поне една равнина на симетрия и тя е равнината в която действуват силите перпендикулярни на оста на гредата;

4. Общо огъване, когато силите са перпендикулярни на оста на гредата, но или лежат в различни равнини, или са наклонени спрямо равнината на симетрия на гредата.

От казаното до тук следва, че за да има огъване е необходимо нормалното усилие и усукващия момент да са равни на нула. При различните комбинации на останалите четири разрезни усилия се получават различните видове огъване. Първите три вида огъване могат да се видят на фиг.13.2.

13.1 Разпределение и големина на нормалните напрежения при чисто специално огъване

Главният проблем, при разглеждане на явлението огъване, е да се определи законът, по който се разпределят напреженията в произволно сечение на гредата и тяхната големината във всяка точка на гредата. Опитно се установява, че напреженията, които се появяват в напречните сечения на гредата при чисто огъване, са перпендикулярни на равнинните на сеченията, т.е. те са нормални напрежения.



Фиг.13.1

Ако всички надлъжни нишки на гредата преди деформирането са били еднакво дълги /фиг. 13.1а/, след деформирането само един слой от нишки, макар и изкривен, остава с непроменена дължина /т.нар. неутрален или нулев слой/, докато всички останали нишки или се удължават, или се скъсяват.

Така поставеният проблем за намиране закона на разпределението и големината на нормалните напрежения при огъване е една статично неопределена задача.

Решаването на всяка такава задача се основава на съвместното разглеждане на трите страни на проблема – статичната, физичната и геометричната. Въз връзка с това се приемат следните предпоставки, изразяващи съответно:

Първа предпоставка – статичната страна на проблема. Гредата да има поне една равнина на симетрия, например xOz /фиг.13.2/, и тя да е равнина на натоварването. Да има поне един участък, в който единственото разрезно усилие, различно от нула, да е огъващият момент M_{oy} ;

Втора предпоставка – физичната страна на проблема. Материалът на гредата да е хомогенен, изотропен и да се подчинява на закона на Хук;

Третата предпоставка – геометричната страна на проблема. Две безкрайно близки напречни сечения на гредата, които са били равнинни и успоредни преди натоварването, остават равнинни, но сключват ъгъл помежду си $d\theta$. Тази предпоставка е известна под наименованието хипотеза за равнинните сечения или хипотеза на Бернули.

За решаването на задачата трите страни на проблема се разглеждат в обратен ред.

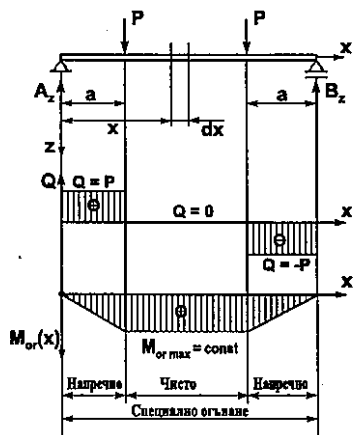
Геометрична страна. Нека от гредата показана на фиг. 13.2 се извади безкрайно малък елемент с дължина dx и се покаже в недеформирано и деформирано състояние /фиг. 13.3/. Дължината dx на неутралния слой ще бъде

$$(13.1) \quad dx = \rho d\theta .$$

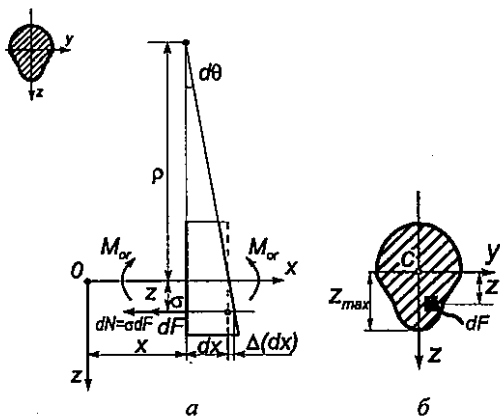
Удължението на нишката, намираща се на апликата z , ще бъде.

$$(13.2) \quad \Delta(dx) = z d\theta .$$

Като се раздели израз (13.2) на (13.1) и се отчете, че $\Delta(dx)/dx$ е относителната надлъжна линейна деформация на нишката, се получава уравнението, изразяващо геометричната страна на проблема



Фиг. 13.2



Фиг.13.3

$$(13.3) \quad \varepsilon = \frac{z}{\rho}$$

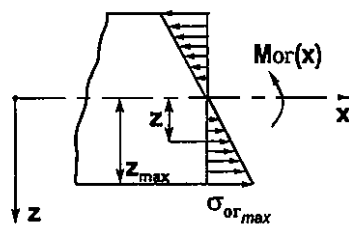
Физична страна. Съгласно законът на Хук

$$(13.4) \quad \sigma = E \varepsilon$$

Като се замести в тази връзка уравнение (13.3), се получава търсения закон за разпределението на нормалните напрежения / фиг. 13.4 /

$$(13.5) \quad \sigma = E \varepsilon = \frac{E}{\rho} z$$

При $z = 0$ няма напрежения и деформации (неутрален слой), при $z > 0$ има положителни нормални напрежения (опън), а при $z < 0$ – отрицателни нормални напрежения (натиск).



Фиг.13.4

Статична страна. Тази страна на проблема дава две уравнения.

Първото уравнение изразява условието за равновесие по ос x . Тъй като по условие нормалното усилие в сечението е нула, като се използва израза за елементарното нормално усилие $dN = \sigma \cdot dF$ и връзката (13.5), се получава

$$(13.6) \quad N = \int_{(F)} \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_{(F)} z dF = \frac{E}{\rho} S_y = 0,$$

където $\frac{E}{\rho} \neq 0$ /в противен случай гредата няма да бъде деформирана/.

Тогава остава възможността в (13.6) статичният момент $S_y = \int_{(F)} z dF$ да

бъде равен на нула. Така се установява, че оста Oy , която характеризира неутралния слой на гредата, минава през центъра на тежестта на напречното ѝ сечение.

Второто уравнение на статиката е моментовото уравнение. Като се има предвид, че елементарното нормално усилие dN , спрямо оста Oy създава елементарния огъващ момент в сечението $dM_{or} = z dN$, се получава

$$(13.7) \quad M_{or} = \int dM_{or} = \int z dN = \int_{(F)} z \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_{(F)} z^2 dF = \frac{E}{\rho} J_y.$$

Това уравнение се представя във вида

$$(13.8) \quad \frac{E}{\rho} = \frac{M_{or}}{J_y},$$

където J_y и M_{or} са известни.

Като се замести дясната страна на горното равенство в уравнение (13.5) се определят нормалните напрежения при чисто специално огъване, т.е.

$$\sigma = \frac{M_{or}}{J_y} z.$$

Тъй като изводите за чисто специално огъване с достатъчна за инженерната практика точност важат и за напречно специално огъване, горната формула може да се напише във вида :

$$(13.9) \quad \sigma_{or}(x, z) = \frac{M_{or}(x)}{J_y} z.$$

В това уравнение $M_{or}(x)$ и z се вземат с техните знаци. Вижда се, че нормалното напрежение не зависи от координатата y , т.е. във всички точки с еднакви z независимо от y , нормалните напрежение от огъването са еднакви /вж. фиг.13.4/.

Ако в (13.9) се замести абсолютната максимална стойност на z , т.е. $|z_{\max}|$ се получава

$$(13.10) \quad \sigma_{\sigma_{\max}}(x) = \frac{M_{or}(x)}{J_y} |z_{\max}| = \frac{|M_{or}(x)|}{W_y}$$

Във формула (13.10) е използван съпротивителният момент W_y на напречното сечение на гредата, а огъващият момент е взет по абсолютна стойност. На фиг.13.4 са показани напреженията според (13.9) и (13.10).

Най-голямото напрежение за цялата греда, което определя застрашените точки, следва от израза (13.10) и фиг. 13.2

$$(13.11) \quad \sigma_{\sigma_{\max}} = \frac{|M_{or_{\max}}|}{W_y} \leq [\sigma]$$

Формула (13.11) се използва за определянето на W_y , като се представя във вида

$$(13.12) \quad W_y \geq \frac{|M_{or_{\max}}|}{[\sigma]}$$

При променливо по дължина на гредата напречно сечение, инерционният и съпротивителният момент са също различни, в различните сечения, т.е

$$(13.13) \quad \sigma_{or} = \left[\frac{|M_{or_{\max}}(x)|}{W_y(x)} \right]_{\max} \leq [\sigma]$$

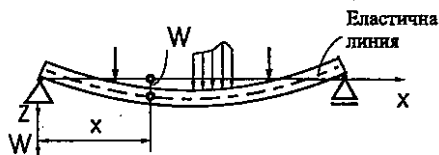
13.2 Деформации при огъване.

Диференциално уравнение на еластичната линия

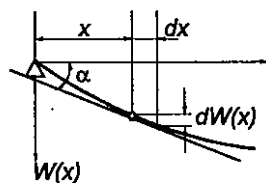
При прави греди геометричното място на центровете на тежестта на напречните сечения на гредата в недеформирано състояние е права линия /оста на гредата/.

При чисто и при напречно специално огъване геометричното място на центровете на тежестта на напречните сечения на гредата в деформирано състояние е равнинна крива, която се нарича еластична линия. Изобщо еластичната линия е деформираната ос на гредата при огъване.

Деформацията е вторият важен проблем при огъването на греда. Определя се от разстоянието между центровете на тежестта на недеформираното и деформираното напречно сечение /с абсиса x по дължина на гредата/. Означава се с w /фиг.14.5/ и се нарича провисване на гредата в даденото сечение.



Фиг. 13.5

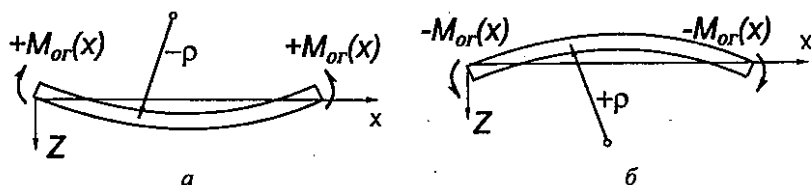


Фиг. 13.6

Определянето на уравнението на еластичната линия означава, да се намери функцията на провисването от x , т.е. $w = w(x)$. За цялата еластичната линия може да се определи, като се знае радиусът на кривината и във всяка точка по дължина на гредата. Той се намира чрез зависимост (13.8), която може да се напише във вида

$$(13.14) \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{M_{or}(x)}{EJ_y}$$

Отрицателният знак в (13.14) се обяснява с това, че когато M_{or} е положителен, ρ е отрицателен и обратно /фиг. 13.7/. Уравнението (13.14) се нарича уравнение на еластичната линия. За практическо ползване то не е удобно



Фиг. 13.7

От математиката е известно, че кривината $\frac{1}{\rho}$ може да се представи

$$\text{чрез връзката} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Като се вземе пред вид, че наклонът на еластичната линия /фиг. 13.6/

$$\frac{dw}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

е много малък, в това уравнение стойността на dw/dx може да се пренебрегне като събираемо с единицата. Така се получава

$$(13.15) \quad \frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 w(x)}{dx^2}.$$

Чрез сравняване на (13.14) и (13.15) се намира

$$(13.16) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_{or}(x)}{EJ_y},$$

което се нарича диференциално уравнение на еластичната линия.

Уравнение се пише за всеки участък от гредата поотделно, тъй като законът на изменението на M_{or} е различен за различните участъци. При интегрирането му за всеки участък се получават по две интеграционни константи, които се определят от граничните условия в двата края на участъка.

Прякото използване на диференциалното уравнение на еластичната линия е трудоемко и се прави, когато гредата има един или най-много два участъка.

Примери

Пример 13.1. За представената на фиг.13.8 греда от материал с допустимо нормално напрежение $[\sigma] = 80 \frac{MN}{m^2}$ е необходимо :

- да се построят диаграмите на разрезните усилия;
- да се намери по големина и знак нормалното напрежение в точка K на напречното сечение I-I;
- да се определят максималното положително и отрицателно нормално напрежения и местата, в които действуват.

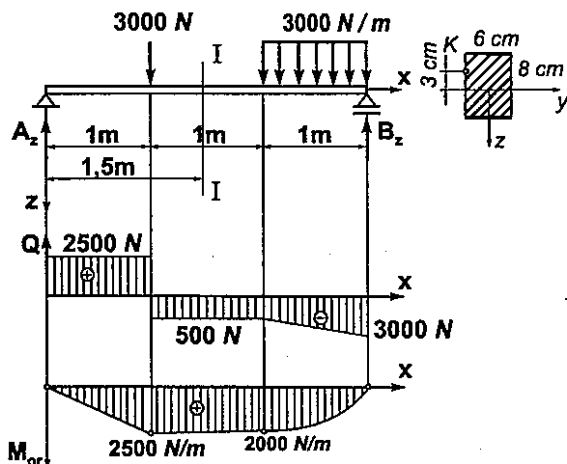
Решение. Опорните реакции са $A_z = 2500 \text{ N}$ и $B_z = 3500 \text{ N}$, насочени нагоре. Диаграмите на разрезните усилия са представени на фиг.13.8. Намирането на реакциите и диаграмите не се дава, тъй като се предполага, че то е усвоено от предишните раздели.

Нормалното напрежение в точка K на сечение I-I се намира по формула (13.9), за което са необходими M_{ozl} , J_y и z_k .

Уравнението на огъващия момент за втория участък е

$$M_{ozl}(x) = 2500 x - 3000 (x - 1),$$

от което за $x = 1,5 \text{ m}$ се получава $M_{ozl} = 2250 \text{ Nm}$.



Фиг. 13.8

Инерционният момент е

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{6.8^3}{12} = 256 \text{ cm}^4 = 2,56 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Апликатата на точка K е $z = -3 \text{ cm} = -3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Нормалното напрежение в точка K е

$$\sigma_{orK} = \frac{225000}{256}(-3) = -2640 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = -26,4 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}.$$

Отрицателният знак на нормалното напрежение показва, че в тази точка има натиск. Максималните напрежения се определят по формула (13.11). Поради това, че напречното сечение на гредата има две оси на симетрия, напреженията в крайните ръбове са еднакви по абсолютна стойност.

Максималният огъващ момент е в сечението на 1 m от левия край на гредата:

$$M_{ог\max} = 2500 \text{ Nm}.$$

Съпротивителният момент е

$$W_y = \frac{bh^3}{6} = \frac{6.8^3}{6} = 64 \text{ cm}^3 = 64 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

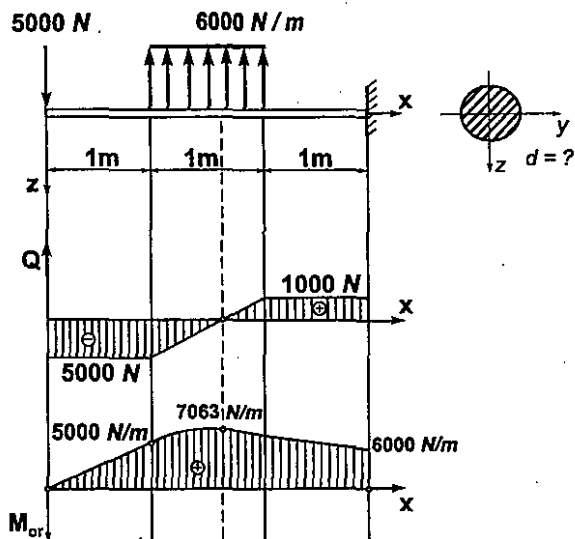
Получава се

$$\sigma_{or\max} = \pm \frac{25 \cdot 10^4}{64} = \pm 3910 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = \pm 39,1 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}.$$

Тъй като максималният огъващ момент е положителен, това означава, че всички точки от долния ръб на застрашеното сечение, което е на 1 m от

левия край на гредата, са натоварени на опън, а всички точки от горния ръб – на натиск с числени стойности, които отговарят на максималното нормално напрежение.

Пример 13.2. За показаната на фиг.13.9 греда да се построят диаграмите на разрезните усилия и оразмери напречното сечение, което има показаната форма, ако $[\sigma] = 50 \frac{MN}{m^2}$.



Фиг.13.9

Решение: За начертаване диаграмите на разрезните усилия не са необходими опорните реакции. Самите диаграми са представени на фиг.13.9. Вижда се, че във втори участък има сечение, в което $Q = 0$ и в което според диференциалните зависимости действа максималният огъващ момент.

За да се оразмери гредата, се използва формулата (13.12). Необходим е максималният огъващ момент. Той се оказва, че е в сечение от втори участък.

Уравнението на тангенциалното усилие за втори участък е

$$Q = -5000 + 6000(x - 1).$$

Като се приравни към нула, се определя абсцисата на сечението, в което действа търсеният огъващ момент. Получава се $x = 1,83 \text{ m}$.

Уравнението на огъващия момент за втория участък е

$$M_{or} = -5000x + 3000(x-1)^2.$$

Като се замести $x = 1,83 \text{ m}$, се получава $M_{orMAX} = -7063 \text{ Nm}$.

Необходимият съпротивителен момент на сечението е

$$W_y \geq \frac{7,063 \cdot 10^5}{5000} = 141,26 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Тъй като съпротивителният момент на кръгло сечение се дава с формулата

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = 141,26 \cdot 10^{-6}$$

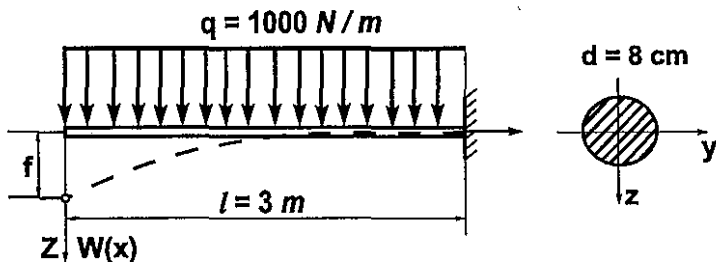
се получава, че необходимият размер е

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 141,26 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 11,28 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Приема се $d = 11,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Проверката показва, че с така приетия размер максималното нормално напрежение за гредата е $\sigma_{orMAX} = 47,32 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} < [\sigma]$.

Пример 13.3. Да се намерят уравнението на еластичната линия и провисването в края на гредата, показана на фиг.13.10, ако модулът на линейните деформации е $E = 0,26 \cdot 10^6 \text{ МПа}$.



Фиг. 13.10

За представената на фиг. 13.10 греда, която има само един участък, при граници $0 \leq x \leq l = 3 \text{ m}$, огъващият момент се определя от:

$$M_{or}(x) = -\frac{q}{2}x^2 = -500x^2 [\text{N.m}].$$

Инерционният момент е

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{(\pi \cdot 10^{-2})^4}{64} = 200 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4.$$

Диференциалното уравнение на еластичната линия е

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{M_{or}(x)}{E \cdot J_y} = \frac{q}{2E \cdot J_y} x^2$$

Първото интегриране дава

$$\frac{dw}{dx} = \frac{q}{6E \cdot J_y} x^3 + C_1.$$

Понеже dw/dx е наклонът на еластичната линия, може да се използва граничното условие : при $x = l$, наклон $\frac{dw}{dx} = 0$, тъй като гредата там е запъната. Така се получава :

$$C_1 = -\frac{q}{6E \cdot J_y} l^3,$$

т.е

$$\frac{dw}{dx} = \frac{q}{6E \cdot J_y} (x^3 - l^3).$$

Второто интегриране дава

$$w = \frac{w}{24 \cdot E \cdot J_y} x^4 = \frac{ql^3}{6E \cdot J_y} x + C^2.$$

Втората константа се определя от граничното условие, че провисването в левия край на гредата е нула, т.е при $x = l$, $w = 0$,

$$C_2 = \frac{ql^4}{8E \cdot J_y}.$$

Следователно уравнението на еластичната линия е:

$$w = \frac{qx^4}{24 \cdot E \cdot J_y} - \frac{ql^3}{6E \cdot J_y} x + \frac{ql^4}{8E \cdot J_y}.$$

Максималното провисване на гредата е в левия край при $x = 0$ и на фиг.13.10 е обозначено с f . От последното уравнение се получава

$$f = w_{(0)} = \frac{ql^4}{8EJ_y} = \frac{1000 \cdot 10^{-6} \cdot 3^4}{8 \cdot 0,25 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-8}} = 2,02 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

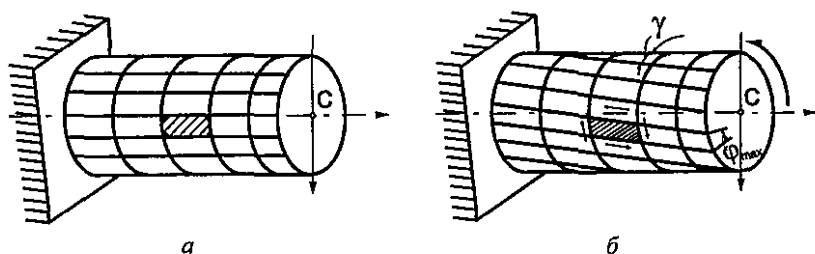
14. Усукване

Когато при натоварване в даден конструктивен елемент възникват усукващи моменти се казва, че е натоварен на усукване. Ако усукващият момент е единственото разрезно усилие, различно от нула, и конструктивният елемент има кръгово плътно или пръстеновидно напречно сечение, усукването се нарича чисто. Конструктивен елемент, натоварен на усукване, се нарича вал. Ако напречното сечение не е кръгово възникват нормални напрежения, при което се получава т.нар. стеснено усукване, което тук не се разглежда.

14.1 Разпределение и големина на тангенциалните напрежения при чисто усукване на вал с кръгло сечение

По опитен път се установява, че напреженията, които се получават при натоварване на кръгъл вал на усукване, лежат в равнините на напречните сечения на вала, т.е. това са тангенциални напрежения.

На фиг.14.1 са показани резултатите от експеримент на усукване на вал с кръгово напречно сечение. Ако върху повърхнината на вала, преди натоварване се нанесе ортогонална мрежа /фиг.14.1а/, след натоварване /фиг.14.1б/ се установява, че окръжностите запазват вида си, докато правите линии се превръщат във винтови линии. Правоъгълните преди натоварването елементи /един от тях е заштрихован/ се преобразуват в успоредници.



Фиг. 14.1

Главният проблем при усукването, е намирането на големината и разпределението на напреженията в напречното сечение.

Подобно на огъването поставеният проблем е статично неопределима задача, за чието решаване се разглеждат отново трите страни - статичната, физичната и геометричната, при съответните предпоставки:

1. *Статична страна* – конструктивният елемент, натоварен на усукване, е цилиндрично тяло с кръгло пълно или пръстеновидно напречно сечение и единственото разрезно усилие, различно от нула е усукващият момент;

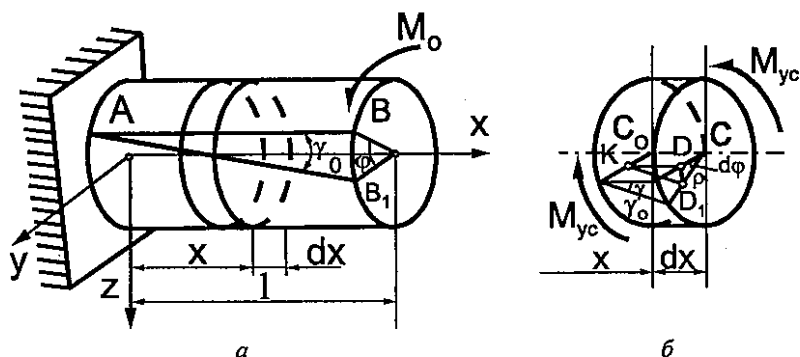
2. *Физична страна* – материалът на пръта е хомогенен, изотропен и се подчинява на закона на Хук за тангенциалните напрежения $\tau = G \cdot \gamma$;

3. *Геометрична страна* – в процеса на деформирането всички успоредни напречни сечения остават равнинни, не се преместват по дължината на вала, а само се завъртат едно спрямо друго, без да променят първоначалната си форма, така, че всяка радиална права от сечението преди деформирането остава права и след деформирането.

Трите страни се разглеждат поотделно в обратен ред.

Геометрична страна.

На фиг.14.2а е показан вал, запънат в левия си край, натоварен на усукване с момент M_0 . Една радиална права след деформиране се завърта на ъгъл ϕ , а една образуваща AB става винтова линия AB_1 . Между AB и AB_1 се сключва ъгълът γ_0 . Разглежда се елементарен участък от вала с дължина dx /фиг.14.2б/. Образуващата по една вътрешна цилиндрична повърхнина KD на разстояние $\rho = CD$ от центъра, сключва с положението след деформиране KD_1 ъгъл γ , който е по-малък от γ_0 , а радиалната права, която отговаря на нея – същия ъгъл $d\phi$.



Фиг.14.2

За дъгата $DD_1 = ds$ от кръговия сектор CDD_1 , следва връзката

$$(14.1) \quad ds = \rho d\varphi.$$

Аналогично от триъгълника KDD_1

$$(14.2) \quad ds = \gamma dx.$$

Приравнявайки десните страни на (14.1) и (14.2) за относителната деформация се получава израза

$$(14.3) \quad \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho \theta,$$

който отразява геометричната страна на проблема, където

$$(14.4) \quad \theta = \frac{d\varphi}{dx}$$

е относителният ъгъл на усукване.

Физична страна.

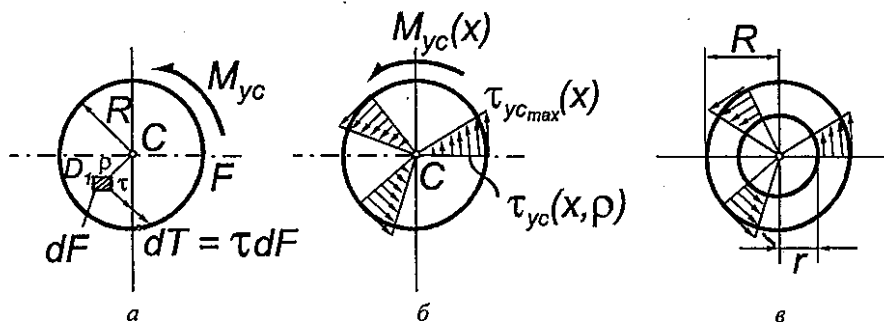
Представя се от закона на Хук за тангенциалните напрежения

$$(14.5) \quad \tau = G\gamma$$

Като се вземе под внимание, че $G = \text{const}$ и се обединят двете разгледани страни /замества се (14.3) в (14.5)/ се получава

$$(14.6) \quad \tau = G\rho\theta.$$

Това уравнение изразява закона за разпределението на тангенциалните напрежения /фиг. 14.36 и фиг. 14.3в/. При $\rho = 0$ няма напрежения и деформации, а при $\rho = R$ напреженията и деформациите са максимални. Тангенциалните напрежения са перпендикулярни на радиуса и във всички точки на еднакво разстояние от центъра C са еднакви.



Фиг. 14.3

Статична страна

Елементарната тангенциална сила в сечението /фиг.14.3а/, е

$$dT = \tau \cdot dF.$$

и се дължи на тангенциалното напрежение τ , което действа върху елементарната площ dF от лицето на напречното сечение F . Елементарният усукващ момент на тази сила е

$$dM_{yc} = \rho dT,$$

За пълният усукващ момент, действащ в сечението се получава

$$M_{yc} = \int dM_{yc} = \int \rho dT = \int \rho \tau dF = G\theta \int \rho^2 dF = G\theta J_c.$$

където $J_c = \int \rho^2 dF$ представлява полярният инерционен момент.

Окончателно се получава връзката

$$(14.7) \quad G\theta = \frac{M_{yc}}{J_c}.$$

След заместване на (14.7) в уравнение (14.6) се получава търсеният израз за тангенциалните напрежения при чисто усукване

$$(14.8) \quad \tau(x, \rho) = \frac{M_{yc}(x)}{J_c} \rho.$$

Знакът на тангенциалното напрежение при усукване е условен /без физ.смисъл/.

Големината на максималното тангенциално напрежение $\tau_{yc\max}$ в дадено напречно сечение се получава като във формула (14.8) се замества максималната стойност на текущия радиус /фиг. 14.3а/

$$(14.9) \quad \tau_{yc\max} = \frac{M_{yc}(x)}{J_c} R = \frac{M_{yc}(x)}{W_c}.$$

На фиг. 14.3б са означени напреженията според формули (14.8) и (14.9), а на фиг. 14.3в – разпределението на напреженията в елемент с пръстеновидно напречно сечение.

Максимално напрежение за целия вал, което определя застрашените точки се отнася за застрашеното сечение, в което действа максималният усукващ момент $M_{yc\max}$

$$(14.10) \quad \tau_{yc\max} = \frac{|M_{yc\max}|}{W_c} \leq [\tau]$$

Оразмеряването на валове подложени на чисто усукване може да се извърши по два начина:

- Якостно, когато като критерий за оразмеряване се приеме допустимото напрежение;
- Деформационно, когато като критерий за оразмеряване се приеме граничната деформативност.

Якостното оразмеряване се извършва по формула (14.10), при което тя се представя във вида

$$(14.11) \quad W_c \geq \frac{|M_{yc \max}|}{[\tau]}$$

При променливо по дължината на вала напречно сечение, съпротивителният момент също е променлив, т.е. $W_c(x)$. Тогава формула (14.11) добива вида

$$(14.12) \quad \tau_{yc \max} = \left[\frac{|M_{yc}(x)|}{W_c(x)} \right] = [\tau].$$

14.2 Деформации при усукване на вал с кръгло напречно сечение

От уравнения (14.4) и (14.7), чрез относителният ъгъл на усукване се изразява връзката

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{yc}}{GJ_c}$$

показваща ъгъла на който се завъртат едно спрямо друго две безкрайно близки напречни сечения от елемент с дължина dx .

За пълният ъгъл на усукване между двете крайни сечения на вала се получава

$$\varphi = \frac{1}{GJ_c} \int_0^l M_{yc}(x) dx.$$

Когато $M_{yc} = const.$ по цялата дължина на вала (фиг.14.3/) се получава

$$(14.13) \quad \varphi = \frac{M_{yc} l}{GJ_c}.$$

Когато сеченията по дължината на пръта са променливи, φ се представя с израза

$$(14.14) \quad \varphi = \frac{1}{G} \int_0^l \frac{M_{yc}(x)}{J_c(x)} dx.$$

Деформационното оразмеряване се извършва по условието

$$(14.15) \quad J_c \geq \frac{|M_{yc \max}|}{G[\theta]}.$$

Задачите от усукване са прави и обратни. При първите се търсят напреженията и деформациите във вала. При обратните валът се оразмерява.

Често в задачите са известни предаваната от вала мощност N , ъгловата скорост ω или оборотите на вала. Между тях и въртящият момент M_e , съществува зависимостта

$$(14.16) \quad M_e = \frac{N}{\omega}.$$

Примери

Пример 14.1. Върху стоманен вал, показан на фиг.14.4. са приложени въртящите моменти $M_1 = 8000 \text{ Nm}$, $M_2 = 6000 \text{ Nm}$ и $M_3 = 4000 \text{ Nm}$. Да се определят:

- диаграмата на усукващите моменти;
- диаграмата на изменението на ъглите на завъртане на напречните сечения по дължина на вала;
- тангенциалните напрежения по контурните точки на сеченията;
- завъртането на сечение B спрямо сечение C .

Дължините на участъците и размерите на напречните сечения са показани на фиг.14.4.а. Модулът за стомана е $G = 8 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$.

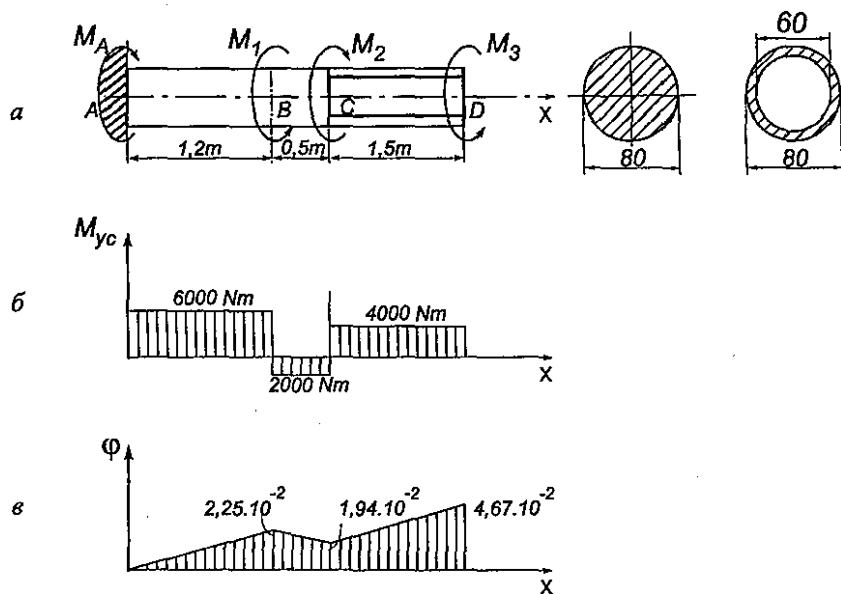
Решение

а. Диаграма на усукващите моменти. От условията за равновесие се определя опорният момент M_A :

$$\sum M_{kx} = M_A - M_1 + M_2 - M_3 = 0,$$

откъдето

$$M_A = 6000 \text{ Nm}.$$



Фиг.14.4

По метода на сеченията се определят усукващите моменти в трите участъка на пръта:

$$\text{участък } AB: \sum M_{kx} = -M_A + M_{yc1} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{yc1} = 6000 \text{ Nm};$$

$$\text{участък } BC: \sum M_{kx} = -M_A + M_{yc1} + M_{yc2} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{yc2} = -2000 \text{ Nm};$$

$$\text{участък } CD: \sum M_{kx} = -M_3 + M_{yc3} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{yc3} = 4000 \text{ Nm}.$$

Диаграмата на M_{yc} е показана на фиг.14.4.б.

б. Диаграмата на ъглите на завъртане на сеченията по външен вид не се различава от диаграмата на линейните премествания при чист опън /натиск/.

Построяването на диаграмата започва от неподвижното сечение, за което $\varphi_A = 0$. Завъртането на всяко сечение зависи от усукването на онази част на вала, която се намира между него и неподвижното сечение.

За сечение B

$$\varphi_B = \frac{6000 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^{10} \frac{\pi}{32} 0,084} = 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ rad.}$$

За сечение C

$$\varphi_C = \frac{6000 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^{10} \frac{\pi}{32} 0,084} + \frac{-2000 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \frac{\pi}{32} 0,084} = 1,94 \cdot 10^{-2} \text{ rad.}$$

За сечение D

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{6000 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \frac{\pi}{32} \cdot 0,084 [1 - 0,75^4]} = 4,67 \cdot 10^{-2} \text{ rad.}$$

Диаграмата е показана на фиг.14.4.в.

в. За тангенциалните напрежения по контурните точки на сеченията се получава:

За участъка AB

$$\tau_{\max} = \frac{6000}{100 \cdot 10^{-6}} = 600 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2};$$

За участъка BC

$$\tau_{\max} = \frac{-2000}{100 \cdot 10^{-6}} = -200 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2};$$

За участъка CD

$$\tau_{\max} = \frac{4000}{68,5 \cdot 10^{-6}} = 584 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2};$$

където съпротивителните моменти в участъците AB и BC са

$$W_c = \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{16} 8^3 \approx 100 \text{ cm}^3,$$

а в участъка CD

$$W_c = \frac{\pi}{16} d^3 (1 - \alpha^4) = \frac{\pi}{16} 8^3 (1 - 0,75^4) \approx 68,5 \text{ cm}^3.$$

г. Завъртането на сечение B спрямо сечение C е равно на ъгъла на усукването на участъка BC :

$$\varphi_{BC} = \frac{-2000 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \frac{\pi}{32} \cdot 0,084} = -3,13 \cdot 10^{-2} \text{ rad.}$$

Пример 14.2. Да се оразмери якостно и деформационно стоманен вал, който прави 200 въртения в минута и носи четири ремъчни колела. На водещото колело 2 се предава мощност 60 kW, разпределена на колелата 1, 3 и 4 съответно 20, 10 и 30 kW. Дадени са още $\tau_{\text{доп}} = 200 \cdot 10^5 \text{ (N/m}^2\text{)}$, $\theta_{\text{доп}} = 0,25 \text{ (}^\circ\text{/m)}$, $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}$. След оразмеряване да се определят главните нормални напрежения в застрашените точки. /фиг.14.5/.

Решение:

1. Въртящи моменти

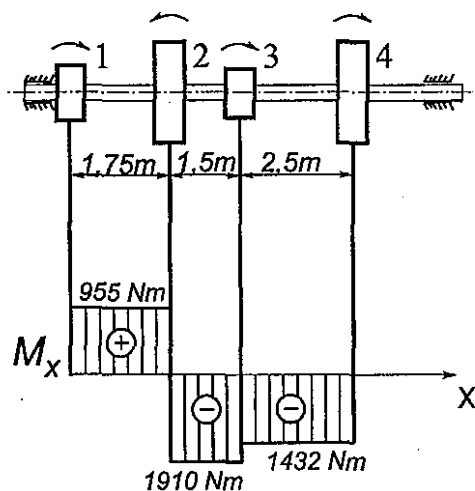
Определя се ъгловата скорост на вала:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi}{30} \cdot 200 = 20,93 \text{ s}^{-1}.$$

Въртящите моменти, които действуват в равнините на ремъчните колела се определят по формула (14.16):

$$M_1 = \frac{20 \cdot 1000}{20,93} = 955 \text{ (Nm)}; \quad M_2 = \frac{60 \cdot 1000}{20,93} = 2865 \text{ (Nm)};$$

$$M_3 = \frac{10 \cdot 1000}{20,93} = 478 \text{ (Nm)}; \quad M_4 = \frac{30 \cdot 1000}{20,93} = 1432 \text{ (Nm)}.$$



Фиг.14.5

2. Разрезни усилия и диаграми

От действието на въртящите моменти в напречните сечения на вала се пораждат само усукващи моменти, които се определят по метода на разреза. За отделните участъци се получава:

$$\text{I участък} \quad \sum M_{\text{кр}} = M_{\text{yc}}^{\text{I}} - M_1 = 0 \quad \rightarrow \quad M_{\text{yc}}^{\text{I}} = 955 \text{ (Nm)};$$

$$\text{II участък} \quad \sum M_{\text{кр}} = M_{\text{yc}}^{\text{II}} - M_1 + M_2 = 0 \quad \rightarrow \quad M_{\text{yc}}^{\text{II}} = -1910 \text{ (Nm)};$$

$$\text{III участък} \quad \sum M_{\text{кр}} = M_{\text{yc}}^{\text{III}} - M_1 + M_2 - M_3 = 0 \quad \rightarrow \quad M_{\text{yc}}^{\text{III}} = -1432 \text{ (Nm)}.$$

Диаграмата на усукващите моменти е показана на фиг.14.5.

3. Якостно и деформационно оразмеряване

Оразмеряването се извършва за максималния по абсолютна стойност усукващ момент

$$M_{yc \max} = 1910 \text{ (Nm)}.$$

Използват се формули (14.11) и (14.15)

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1910}{\pi \cdot 200 \cdot 10^5}} \approx 7,87 \cdot 10^{-2} \text{ m};$$

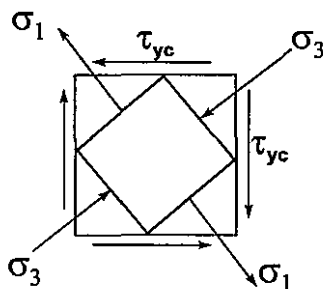
$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1910}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,25 \frac{\pi}{180}}} \approx 8,64 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Диаметърът на вала се приема по стандарта, т.е. $d = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

4. Главни нормални напрежения

Най-застрашени са точките от контура на напречното сечение във втори участък, където действа $\max M_{yc}$. Напрегнатото състояние в околността на една от тези точки е показано на фиг.14.6.

Главните нормални напрежения в случая са :



Фиг.14.6

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \pm \tau_{yc} = \pm \frac{M_{yc}}{W_{yc}}; \quad \sigma_2 = 0$$

или

$$\sigma_1 = 133,6 \cdot 10^5 \text{ (N/m}^2\text{)}; \quad \sigma_3 = -133,6 \cdot 10^5 \text{ (N/m}^2\text{)},$$

където

$$W_{yc} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot (9 \cdot 10^{-2})^3}{16} = 143 \cdot 10^6 m^3;$$

$$\tau_{yc} = \pm \frac{1910 \cdot 10^{+6}}{143} = 133,6 \cdot 10^5 (N / m^2).$$

Направленията на главните нормални напрежения са показани на фиг.14.6.

15. Сложно съпротивление

Когато върху даден конструктивен елемент действа съвкупност от сили и моменти, които предизвикват едновременно действие на опън, натиск, огъване, срязване и усукване или по-проста комбинация от тях, се получава сложно съпротивление. Това е едно от най-често срещаните натоварвания в практиката.

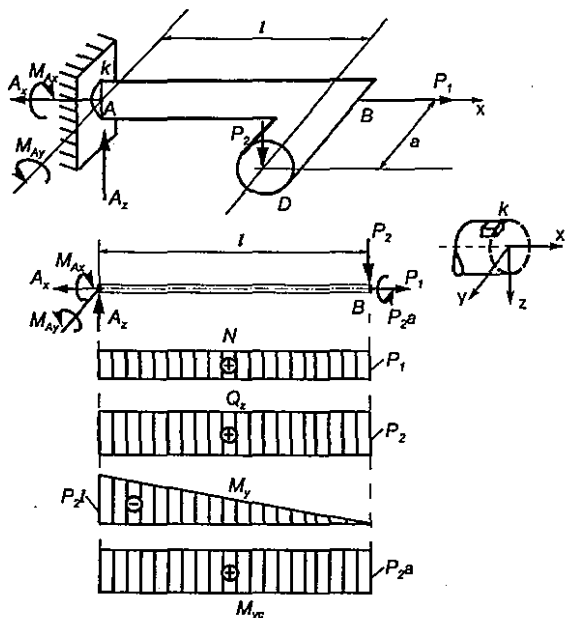
В Съпротивление на материалите в такива случаи се използва т.н. принцип на суперпозицията, според който едновременното действие на няколко вида натоварвания върху един елемент, може да се разглежда като сбор от отделните прости натоварвания.

15.1 Съвместно действие на опън /натиск/, огъване и усукване. Намиране на застрашените точки

Съвместното действие на опън /натиск/, огъване и усукване представлява едно от най-сложните натоварвания на конструктивните елементи. По този начин са натоварени повечето валове в техниката. ♣

За изучаването на това натоварване се разглежда гредата показана на фиг.15.1. Под гредата е показана редуцията на системата сили и са построени диаграмите на разрезните усилия.

Опорните реакции са $A_x = P_1$, $A_z = P_2$, $M_{Ax} = P_2 \cdot a$, $M_{Ay} = P_2 \cdot l$. Силата $P_x = P_1$ предизвиква опън, силата $P_z = P_2$ срязване и



Фиг.15.1

огъване, моментът $M_x = P_2 \cdot a$ усукване.

В предишните глави се видя, че нормалното усилие / $N - x$ диаграмата/ и огъващият момент / $M_{oz} - x$ диаграмата/ предизвикват нормални напрежения, а тангенциалното усилие / $Q - x$ диаграмата/ и усукващият момент / $M_{yc} - x$ диаграмата/ предизвикват тангенциални напрежения. Тангенциалните напрежения от разрезното усилие Q , т.е. тези на срязването, обикновено са много по-малки от тези при усукването и се пренебрегват. Тяхното отчитане се налага само в специални случаи, когато усилието на срязване в конструктивния елемент е доминиращо.

Застрашеното сечение на гредата, обикновено е сечението в което разрезните усилия имат максимални стойности. От диаграмите на фиг.15.1 се вижда, че това е сечението на запъване на гредата, тъй като в него огъващият момент има максимална стойност, а останалите разрезни усилия са постоянни по цялата дължина на гредата.

Застрашената точка от това сечение се намира чрез споменатия по-горе принцип на суперпозицията. За тази цел последователно от стойностите на разрезните усилия в диаграмите се пресмята и графично се показва разпределението на напреженията в застрашеното сечение.

За опъна от $N - x$ диаграмата се пресмята нормалното напрежение

$$(15.1) \quad \sigma_{on} = \frac{N}{F},$$

където: $N = P_x = P_1$ е нормалното усилие в сечението;

$F = \frac{\pi d^2}{4}$ е лицето на напречното сечение на гредата. Диаграмата на

разпределение на нормалното опъново напрежение е показана на фиг.15.2а.

За огъването от $M_{oz} - x$ диаграмата се пресмята нормалното напрежение

$$(15.2) \quad \sigma_{oz \max} = \frac{M_{oz \max}}{J_y} z = \pm \frac{|M_{oz \max}|}{W_y},$$

където: $M_{oz \max} = P_2 \cdot a$ е огъващото усилие в сечението;

$W_y = \frac{\pi d^3}{32}$ е съпротивителният момент на напречното сечение.

Диаграмата на разпределение на нормалното напрежение от огъване е показана на фиг.15.2б.

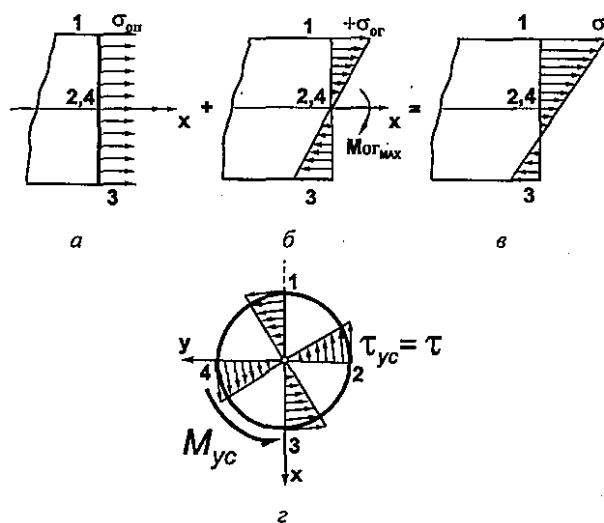
За усукването от $M_{yc} - x$ диаграмата се пресмята тангенциалното напрежение

$$(15.3) \quad \tau_{yc} = \frac{M_{yc}}{J_c} \rho = \frac{|M_{yc}|}{W_c},$$

където: $M_{yc} = P_2 \cdot a$ е усукващото усилие в сечението;

$W_c = \frac{\pi d^3}{16}$ е полярният съпротивителен момент. Диаграмата на

разпределение на тангенциалното напрежение от усукване е показана на фиг.15.2г.



Фиг.15.2

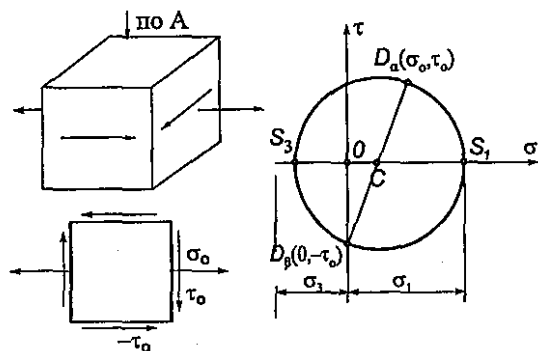
От графичното изображение на напреженията се вижда, че в най-горната част на сечението в мястото на запъване е застрашената точка 1, тъй като в нея за разглеждания случай максималните нормални напрежения от огъването са еднопосочни с тези от опъна. В тази точка за резултантното нормално напрежение σ се получава /фиг.15.2в/

$$(15.4) \quad \sigma = \sigma_{on} + \sigma_{oz \max} = \frac{N}{F} + \frac{|M_{oz \max}|}{W_y}.$$

В същата точка действа и максималното тангенциално напрежение от усукването, което се приема за резултантно

$$(15.5) \quad \tau = \tau_{yc} = \frac{|M_{yc}|}{W_c}.$$

На фиг.15.1 е показана застрашената точка $K \equiv 1$ и в нейната околност е изрязан елементарен правоъгълен паралелепипед, а на фиг.15.3 са показани напреженията, действащи върху него, показана е проекцията на този паралелепипед /поглед по А/ и е начертана окръжността на Мор за напрегнатото състояние в него.



Фиг.15.3

При сложна съпротива оразмеряването на гредата най-често се извършва по трета или четвърта теория за гранично напрегнато състояние

$$(15.6) \quad \sigma_{ekB}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$(15.7) \quad \sigma_{ekB}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

При липса на опън /натиск/ за кръгло напречно сечение тези формули добиват вида

$$(15.8) \quad \sigma_{ekB}^{III} = \frac{1}{W_y} \sqrt{M_{ог\max}^2 + M_{yc}^2} \leq [\sigma];$$

$$(15.9) \quad \sigma_{ekB}^{IV} = \frac{1}{W_y} \sqrt{M_{ог\max}^2 + \frac{3}{4}M_{yc}^2} \leq [\sigma].$$

В случаите, в които се налага да се отчетат тангенциалните напрежения на срязване /от Q диаграмата/ се прилага формулата на Журавски

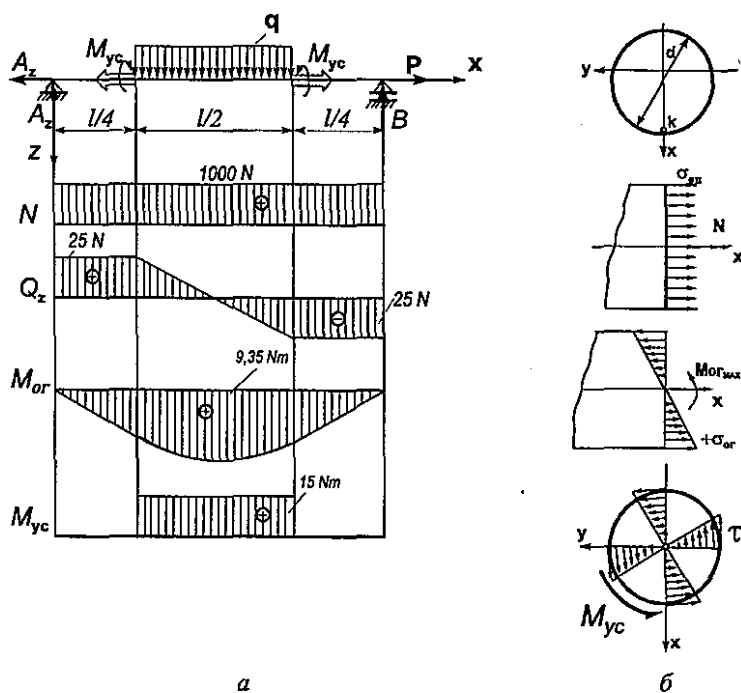
$$(15.10) \quad \tau_{cp} = 1,33 \frac{Q}{F}.$$

Тогав резултантното тангенциално напрежение в дадена точка, съгласно закона на суперпозицията ще бъде $\tau = \tau_{yc} + \tau_{cp}$.

Примери

Пример 15.1 За показаната на фиг.15.4 гредка при размери $l = 1 \text{ m}$, $d = 0,04 \text{ m}$ и натоварване $P_1 = 1000 \text{ N}$, $q = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $M_x = 15 \text{ N.m}$ да се определят:

- Диаграмите на разрезните усилия;
- Разпределението на напреженията в застрашеното сечение на гредата,
- Главните нормални напрежения в точка К от застрашеното сечение.



Фиг15.4

От условията за равновесие се пресмятат опорните реакции

$$\sum P_{kx} = -A_x + P = 0 \rightarrow A_x = P = 1000 \text{ N};$$

$$\sum P_{kz} = A_z - q \frac{l}{2} + B = 0;$$

$$\sum M_{ky} = A_z \frac{l}{2} - B \frac{l}{2} = 0 \rightarrow A_z = B.$$

От второто уравнение се получава

$$2A_z - q \frac{l}{2} = 0 \rightarrow A_z = \frac{ql}{4} = 25N = B.$$

Диаграмите на разрезните усилия са начертани с помощта на диференциалните зависимости. Екстремумът в моментовата диаграма на огъване е пресметнат с метода на разреза, като е разгледана лявата част

$$-A_z \frac{l}{2} + q \frac{l}{4} \frac{l}{8} + M_{ог\max} = 0$$

или
$$M_{ог\max} = A_z \frac{l}{2} + q \frac{l^2}{32} = 9,35N.m.$$

Разпределението на напреженията в средното сечение е показано на 15.46

$$\sigma_{он} = \frac{N}{F} = \frac{1000.4}{\pi d^2} = 0,8MN/m^2;$$

$$\sigma_{ог\max} = \frac{|M_{ог\max}|}{W_y} = \frac{9,35.32}{\pi . d^3} = 1,46 MN/m^2;$$

$$\tau = \tau_{ус} = \frac{|M_{ус}|}{W_c} = \frac{15.16}{\pi . 0,04^3} = 1,18 MN/m^2.$$

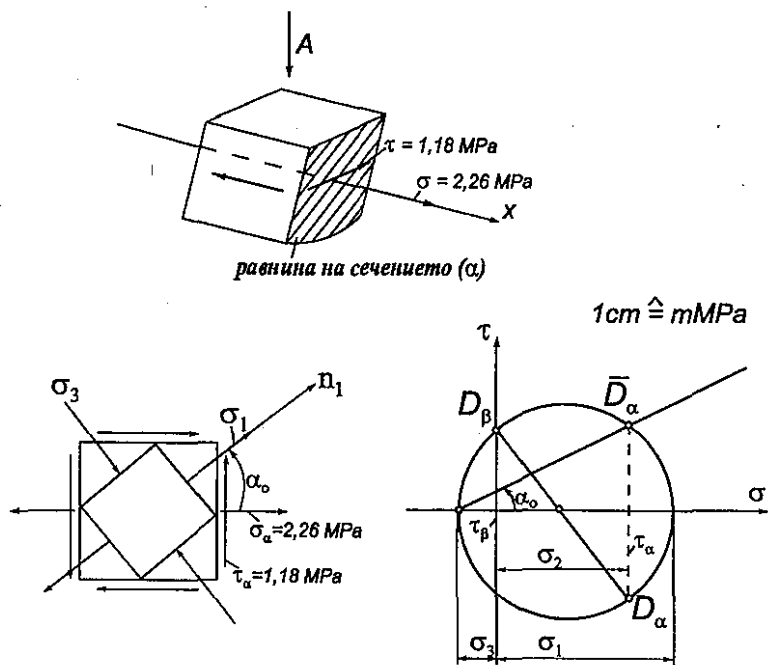
Резултантното нормално напрежение в точка K се получава

$$\sigma = 1,46 + 0,8 = 2,26MN/m^2.$$

Следователно напрегнатото състояние в точка K има вида показан на фиг.15.5 и е двумерно.

С окръжност на Мор е решена обратна задача за намиране на главните напрежения σ_1 и σ_3 . От чертежа е отчетено $\sigma_1 = -0,8MPa$, $\sigma_3 = 3MPa$.

Положението на главните площадки е определено от ъгъл α_0 .

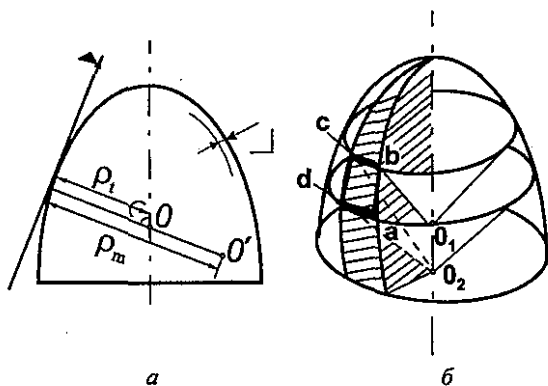


Фиг.15.5

16. Тънкостенни осовосиметрични съдове под вътрешно налягане

В глава 8, тяло ограничено от две повърхнини, разстоянието между които е малко в сравнение с останалите му размери беше наречено черупка. В тази глава се разглеждат съдове, които се схематизират като осовосиметрични тънкостенни черупки, т.е. околната им повърхнина е част от ротационна повърхнина (фиг. 16.1 а) Повечето от разпространените в химическата и металургична промишленост съдове са именно с такава форма (сфера, цилиндър, конус). Характерно за тях е, че са подложени на равномерно разпределено по вътрешната им повърхност налягане от течности, газове, насипни материали. Такива съдове са резервоари, котли, магистрални тръбопроводи, реактори, силози и пр.

При изучаване на напреженията и деформациите в тях, поради малката дебелина – δ на стените им се приема, че нормалните напрежения в тях са равномерно разпределени т.е. липсват огъващи моменти. Теорията, изградена на това допускане, се нарича безмоментна теория на черупките. Обикновено се приема, че тя може да бъде приложена при черупки, за които $\frac{\delta}{R} \leq \frac{1}{20}$ (R е по-малкият от двата радиуса на главните кривини).



Фиг. 16.1

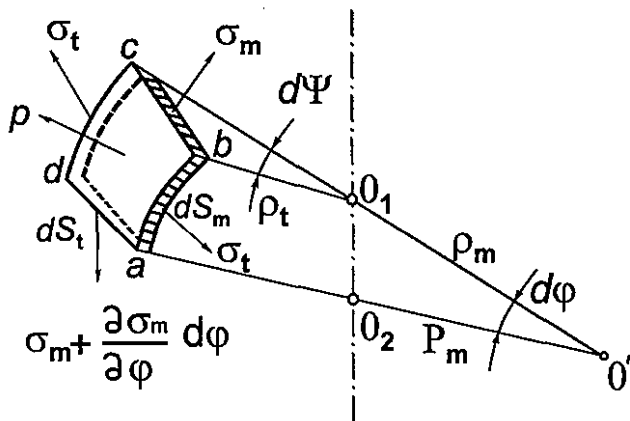
16.1 Уравнение на Лаплас за тънкостенни осовосиметрични съдове

С помощта на безмоментната теория на черупките се определят напреженията в стените на тънкостенен съд подложен на равномерно вътрешно налягане p . За тази цел [фиг.16.1,б/], посредством две

меридианни и две ротационни конусни повърхнини от съда се изрязва един безкрайно малък елемент $abcd$. Меридианните равнини минават през оста на симетрия, а върховете на конусните повърхнини – точките O_1 и O_2 , лежат на тази ос. С ρ_m и ρ_t са означени радиусите на кривината на меридиана и паралела върху така наречената средна повърхнина, която дели дебелината на черупката на равни части.

На фиг. 16.2 елементът $abcd$ е показан отделно. От фигурата се вижда, че меридианните сечения са с лице – δds_m , а окръжностните с лице – δds_t .

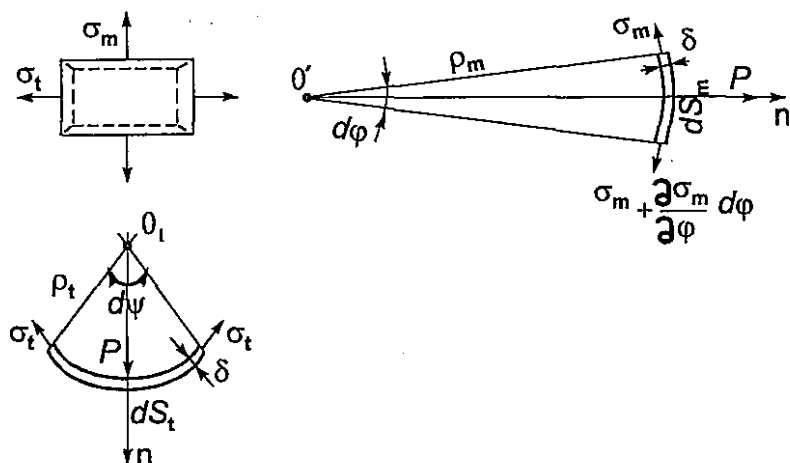
Тъй като всяка меридианна равнина дели съда и действащите върху него сили на две симетрични части, в меридианните сечения липсват тангенциални усилия. Тогава в меридианните сечения няма да има тангенциални напрежения, а въз основа на теоремата за реципрочност такива напрежения ще липсват и в перпендикулярните окръжностни сечения. Следователно напреженията в меридианните и окръжностни сечения са главни нормални напрежения. Напреженията σ_m , действащи в сеченията bc и ad , се наричат меридианни и имат направленията по допирателните към меридиана. Напреженията σ_t , действащи в сеченията ab и cd , се наричат окръжностни и имат направленията по допирателните към паралела.



Фиг. 16.2

По направление на нормалата към елемента $abcd$ действа още едно – трето главно нормално напрежение, изменящо се от p върху вътрешната повърхнина на елемента до нула върху външната повърхнина. Това напрежение при тънкостенните съдове се пренебрегва, тъй като е

незначително в сравнение със σ_m и σ_t . Така напрегнатото състояние на елемента, изрязан от тънкостенен съд, се приема двумерно (фиг.16.2).



Фиг. 16.3

За определяне на главните напрежения σ_m и σ_t се разглежда равновесие на елемента /фиг.16.3/. От проекционното уравнение по нормалата към повърхността му се получава

$$(16.1) \quad \Sigma Pkn = 0 = pds_t ds_m - 2\sigma_t \delta ds_m \frac{d\psi}{2} - \sigma_m \delta ds_t \sin \frac{d\varphi}{2}$$

$$\left(\sigma_m + \frac{\partial \sigma_m}{\partial \varphi} d\varphi \right) \delta ds_t \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Имайки предвид, че за малки ъгли

$$(16.2) \quad \sin \frac{d\psi}{2} = \frac{d\psi}{2}; \quad \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2},$$

чрез дъгите

$$(16.3) \quad ds_t = \rho_t d\psi \rightarrow d\psi = \frac{ds_t}{\rho_t};$$

$$ds_m = \rho_m d\varphi \rightarrow d\varphi = \frac{ds_m}{\rho_m},$$

за половинките на ъглите се получават изразите

$$(16.4) \quad \frac{d\psi}{2} = \frac{ds_t}{2\rho_t}; \quad \frac{d\varphi}{2} = \frac{ds_m}{2\rho_m}.$$

Като се замести (16.4) в (16.1) и се пренебрегнат безкрайно малките от по-висок порядък се получава

$$(16.5) \quad p\rho_i\rho_m d\varphi d\Psi - \sigma_i\delta\rho_m d\varphi d\Psi - \sigma_m\delta\rho_i d\varphi d\Psi = 0.$$

Ако се раздели (16.5) на $\delta\rho_i\rho_m d\varphi d\Psi$ се стига до израза

$$(16.6) \quad \frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_i}{\rho_i} = \frac{p}{\delta}.$$

Израза (16.6) е известен като уравнение на Лаплас. В него участвуват двете неизвестни главни напрежения σ_m и σ_i . За намирането им е необходима още една зависимост. За тази цел черупката се разрязва на две части, посредством сечение, нормално на ос z . Сечението минава през точката, около която е отделен безкрайно малкият елемент (фиг. 16.4).

От условието за равновесие по оста z се получава

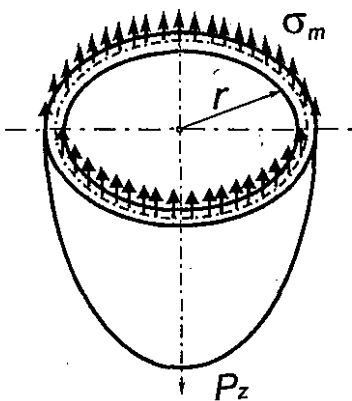
$$\sum_{k=1}^n P_{kz} = 0 = P_z - \sigma_m 2\pi r \delta \cos \varphi,$$

където P_z е осовата равнодействаща на външните сили, φ е ъгълът, който сключва главното нормално напрежение σ_m с оста z , а r е радиусът на средната окръжност в равнина, перпендикулярна на оста z .

От горното проекционно уравнение за меридианното напрежение се получава

$$(16.7) \quad \sigma_m = \frac{P_z}{2\pi r \delta \cos \varphi}.$$

Намирането на осовата равнодействаща за два от най-често срещаните случаи става по следния начин:



Фиг. 16.4

Случай на равномерно разпределено нормално налягане с интензитет $p = const.$ Силата, действаща върху произволен елемент с лице dF' от повърхнината на отсечената част от съда, ще бъде $p dF'$, а нейната проекция върху оста z ще бъде $dP_z = p dF' \cos \beta$, където β е ъгълът между нормалата към лицето dF' и оста z /фиг. 16.5/.

Така осовата сила P_z , действаща върху отсечената част на съда, приема вида

$$P_z = \int_{(F')} dP_z = p \int_{(F')} \cos \beta dF',$$

където F' е повърхнината на отсечената част от съда.

Като се има в предвид, че $\cos \beta dF' = dF$, окончателно за осовата сила се получава

$$(16.8) \quad P_z = p \int_{(F)} dF = pF,$$

където F е проекцията на повърхнината на отсечената част от съда върху равнина, перпендикулярна на оста z .

Случай на налягане вследствие на тежка течност (фиг.16.6).

Съгласно закона на Паскал налягането, действащо върху елемента dF' , ще бъде

$$p = g\rho z = \gamma z,$$

където γ е обемното тегло на течността, а ρ е нейната плътност.

Тогава елементарната осова сила ще бъде

$$dP_z = p dF = \gamma z dF,$$

където $z dF$ е обемът, разположен над елемента dF' , а обемът в отсечената част от съда ще бъде

$$V = \int_{(F)} z dF.$$

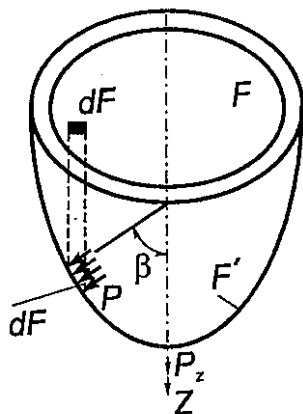
За хомогенна течност осовата равнодействаща добива вида

$$(16.9) \quad P_z = \gamma \int_{(F)} z dF = Q$$

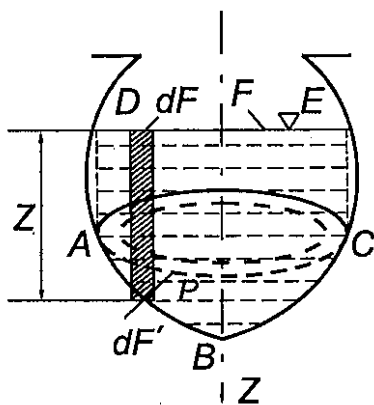
и както се вижда от горният израз представлява теглото на течността, намираща се в обема, разположен над повърхнината на отсечената част от съда.

Когато течността в съда е под налягане p_0 , се получава

$$(16.10) \quad P_z = p_0 F + Q.$$



Фиг. 16.5



Фиг.16.6

Получените формули съответствуват на случая, когато опората на съда е над изследваното сечение. В противен случай като компонента на осовата равнодействаща се включва и опорната реакция.

С помощта на тези формули основани на безмоментната теория на черупките се извършва лесно пресмятането на различни по форма и натоварване осовосиметрични тънкостенни съдове.

16.2 Някои частни случаи на тънкостенни осовосиметрични съдове

Сферичен съд под действие на равномерно вътрешно налягане.

Поради пълната симетрия на сферичния съд следва, че

$$\rho_m = \rho_t = R = \frac{D}{2};$$

$$\sigma_m = \sigma_t = \sigma,$$

където R и D са съответно радиусът и диаметърът на съда.

Следователно при сферичен съд уравнението на Лаплас е напълно достатъчно за намиране на напреженията в съда. От (16.6) следва непосредствено

$$(16.11) \quad \sigma = \frac{pD}{4\delta}.$$

Цилиндричен съд под действие на равномерно вътрешно налягане.

При цилиндричен съд $\rho_m = \infty$, а $\rho_t = \frac{D}{2}$, където D е диаметърът на съда. От (16.6) за окръжностното напрежение се получава

$$(16.12) \quad \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}.$$

За осовата сила която се стреми да разкъса цилиндричния съд от (16.8) следва $P_z = p \frac{\pi D^2}{4}$.

След заместване на P_z в (16.7) и отчитане, че в случая $\varphi = 0$, за меридианните напрежения се получава

$$(16.13) \quad \sigma_m = \frac{pD}{4\delta}.$$

От (16.12) и (16.13) се вижда, че окръжностните напрежения са два пъти по-големи от меридианните.

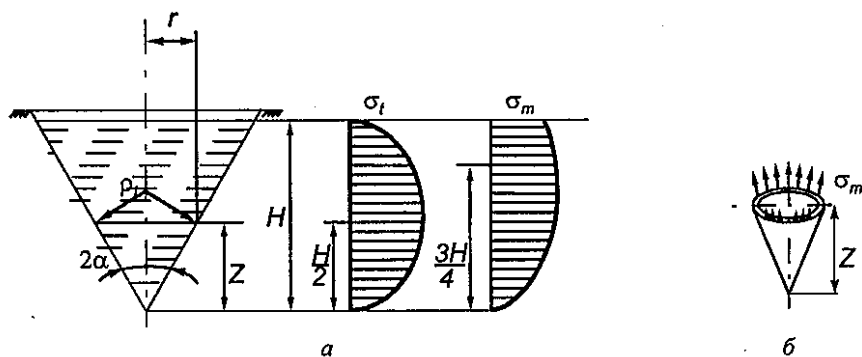
Конусен съд, съдържащ течност.

На фиг. 16.7а е показан конусен съд, закрепен в горния си край и запълнен от върха на конуса до нивото H с течност, имаща специфично тегло γ . Ъгълът при върха на конуса е 2α , меридианния радиус $\rho_m = \infty$, а за окръжностния на разстояние z се получава

$$\rho_t = \frac{z \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Налягането на течността на разстояние z ще бъде

$$p = \rho g(H - z) = \gamma(H - z),$$



Фиг.16.7

Като се замести в уравнението на Лаплас (16.6) за окръжностното напрежение се получава

$$(16.14) \quad \sigma_t = \frac{\gamma(H - z) \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha}.$$

На фиг.16.7а е показана диаграмата на разпределение на σ_t в зависимост от z . Както се вижда напрежението е нула при $z = 0$ и при $z = H$. При $z = H/2$ от (16.14) се получава максималната стойност

$$(16.15) \quad \max \sigma_t = \frac{\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \delta \cos \alpha}.$$

Осовата сила P_z /фиг.16.7 б/, може да се намери от уравнение (16.9)

$$P_z = Q = \gamma \left[\pi r^2 (H - z) + \frac{1}{3} \pi r^2 z \right].$$

Като се отчете връзката $r = z \operatorname{tg} \alpha$ се получава

$$(16.16) \quad P_z = \gamma \pi z^2 \left(H - \frac{2}{3} z \right) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

След заместване $\varphi = \alpha$, $r = z \operatorname{tg} \alpha$ и P_z с израза (16.16) от (16.7) се намира меридианното напрежение

$$(16.17) \quad \sigma_m = \frac{\gamma z \left(H - \frac{2}{3} z \right) \operatorname{tg} \alpha}{2 \delta \cos \alpha}.$$

Меридианното напрежение също се изменя по параболичен закон. От фиг.16.7.а. се вижда, че при $z = 0$, $\sigma_m = 0$, а при $z = \frac{3}{4} H$ се получава максималната стойност

$$(16.18) \quad \max \sigma_m = \frac{3}{16} \frac{\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha}.$$

Примери

Пример 16.1 Цилиндричен съд с радиус $R = 1 \text{ m}$ съдържа флуид под налягане $p = 9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ с плътност $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$. Да се оразмери съда по трета и четвърта якостни теории, ако е с височина 5 m и $\sigma_{\text{доп}} = 50 \text{ MN/m}^2$.

Решение: Окръжностното напрежение от налягането намираме по формула (16.12)

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta} = \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 1}{\sigma}.$$

Окръжностното напрежения от теглото намираме по формула (16.14)

$$\sigma_t = \rho g (H - z) \frac{R}{\delta} = 1600 \cdot 10 (5 - 2) \frac{1}{\delta}.$$

Очевидно $\sigma_{t, \max}$ е при $z = 0$:

$$\sigma_{t, \max} = 1600 \cdot 10 \cdot 5 \frac{1}{\delta} = \frac{8 \cdot 10^4}{\delta}.$$

Като се използва принципа на суперпозицията и се съберат еднопосочните нормални напрежения по формули (16.12) и (16.14) се

получават окръжностните напрежения в следствие едновременното действие на налягането и теглото:

$$\sigma_t = \frac{9 \cdot 10^4}{\delta} + \frac{8 \cdot 10^4}{\delta} = \frac{17 \cdot 10^4}{\delta} \text{ N/m}^2.$$

Аналогично за σ_m по формули (16.13) се получава

$$\sigma_m = \frac{pR}{2\delta} + \rho \cdot g(H-z) \frac{R}{2\delta} = \frac{8,5 \cdot 10^4}{\delta} \text{ N/m}^2.$$

Оразмеряване:

По III якостна теория $\sigma_{\text{екв.}} = \sigma_1 - \sigma_3$, тогава

$$\sigma_{\text{екв.}} = \sigma_t - 0 = \frac{17 \cdot 10^4}{\delta} \text{ N/m}^2 = \frac{0,17}{\delta} \text{ MN/m}^2.$$

По IV якостна теория

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв.}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} = \\ &= \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_m^2 - \sigma_t \cdot \sigma_m} = \sqrt{\sigma_t^2 + \frac{\sigma_t^2}{4} - \frac{\sigma_t^2}{2}} = \\ &= \frac{\sigma_t}{2} \sqrt{3} = \frac{0,1472}{\delta} \text{ MN/m}^2. \end{aligned}$$

Тъй като σ_t е два пъти по-малко от σ_m , тогава по формулата за оразмеряване при сложно напрегнато състояние

$$\sigma_{\text{екв.}} = \sigma_{\text{доп.}}$$

се получава за двете теории съответно

$$\frac{0,17}{\delta} = 50 \text{ MN/m}^2; \quad \frac{0,1472}{\delta} = 50 \text{ MN/m}^2$$

или $\delta = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$; $\delta = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Очевидно IV теория дава малко по-малка дебелина на стената.

Проверка за тънкостенност

$$\frac{3,4 \cdot 10^{-3}}{1} \leq \frac{1}{20} = 0,05 = 50 \cdot 10^{-3}.$$

Очевидно горното неравенство ще бъде изпълнено и за $\delta = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, следователно и по двете теории съда е тънкостенен и формулите с които е работено са коректни.

Литература

1. Попов, К., Д. Панчовски. Техническа механика. С., Техника, 1979.
2. Попова, М., Д. Панчовски. Приложна механика. С., Техника, 1993.
3. Писарев, А., Ц. Парасков, С. Бъчваров. Курс по теоретична механика. Ч. I и II. С., Техника, 1986.
4. Кисьов, И., Съпротивление на материалите. С., Техника, 1978.
5. Тарг, С., Краткий курс теоретической механики. М., ФМЛ, 1963.
6. Феодосьев, В., Сопротивление материалов. М., Высшая школа. 1974.
7. Писаренко, Г. и др., Сопротивление материалов. Киев, ГИТЛ, УССР, 1963.
8. Попов, К., Съпротивление на материалите. I ч., МКНП, С., 1998.
9. Ковалев, Н., Прикладная механика. М., Высшая школа, 1982.

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Основни понятия и аксиоми на статиката. Конкурентна система сили	3
1.1 Основни понятия и дефиниции	3
1.2 Аксиоми на статиката	4
1.3 Конкурентна система сили	8
1.4 Условия за равновесие на конкурентна система сили	10
2. Момент на сила спрямо точка и спрямо ос. Двоица сили	12
2.1 Момент на сила спрямо точка	12
2.2 Момент на сила спрямо ос	13
2.3 Двоица сили	14
3. Редукция на произволна система сили. Условия за равновесие	16
3.1 Редукция на произволна система сили	16
3.2 Условия за равновесие на произволна система сили	17
4. Кинематика на материална точка	20
4.1 Закон за движение. Траектория	20
4.2 Скорост на точка	23
4.3 Ускорение на точка	26
4.4 Частни случаи от движение на точка	30
5. Кинематика на тяло	35
5.1 Общо движение на тяло	35
5.2 Транслационно движение на тяло	36
5.3 Ротационно движение на тяло	37
5.4 Равнинно движение на тяло	41
6. Динамика на материална точка	52
6.1 Аксиоми на динамиката	52
6.2 Диференциални уравнения на динамика на материална точка	53
6.3 Основни задачи на динамиката	55
6.4 Общи теореми на динамиката на материална точка	56
7. Динамика на механична система	65
7.1 Основни понятия. Масови характеристики	65
7.2 Диференциални уравнения на динамиката на механична система	67
7.3 Общи теореми на динамиката на механична система	68
8. Въведение в механиката на деформируемото тяло	80
8.1 Схематизация на свойствата на материала	80
8.2 Схематизация на формата на конструктивните елементи	81
8.3 Схематизация на натоварването	82

9. Разрезни усилия в гредови елементи	85
9.1 Метод на сечението. Вътрешни сили. Разрезни усилия	85
9.2 Разрезни усилия в прави греди. Диаграми на разрезните усилия	87
9.3 Диференциални зависимости между интензитета на натоварване, тангенциалното усилие и огъващия момент	98
9.4 Напрежение	101
9.5 Преместване и деформация	103
10. Елементи, подложени на опън и натиск	105
10.1 Напрежения при опън и натиск	105
10.2 Деформации при опън и натиск	106
10.3. Изпитване на материалите на опън и натиск	108
11. Теория на напрегнатото състояние	113
11.1 Напрегнато състояние в околността на точка	113
11.2 Двумерно (равнинно) напрегнато състояние	115
11.3 Тримерно напрегнато състояние	122
11.4 Деформации при тримерно напрегнато състояние	124
12. Геометрични характеристики на равнинни фигури	127
12.1 Статичен момент	127
12.2 Инерционни моменти	128
12.3 Инерционни моменти на някои прости фигури	129
12.4 Зависимост между инерционните моменти спрямо успоредни оси	131
12.5 Инерционни моменти на сложни фигури	132
12.6 Инерционен радиус	133
12.7 Съпротивителни моменти	133
13. Специално огъване на прави греди	136
13.1 Разпределение и големина на нормалните напрежения при чисто специално огъване	136
13.2 Деформации при огъване. Диференциално уравнение на еластичната линия	140
14. Усукване	147
14.1 Разпределение и големина на тангенциалните напрежения при чисто усукване на вал с кръгло сечение	147
14.2 Деформации при усукване на вал с кръгло напречно сечение	151
15. Сложно съпротивление	158
15.1 Съвместно действие на опън /натиск/, огъване и усукване. Намиране на застрашените точки	158
16. Тънкостенни осовосиметрични съдове под вътрешно налягане	165
16.1 Уравнение на Лаплас за тънкостенни осовосиметрични съдове	165
16.2 Някои частни случаи на тънкостенни осовосиметрични съдове	170
Литература	174