СЪДЪРЖАНИЕ

ГЛАВА 1

Основни понятия, елементи и закони за електрическите вериги

1.1. Основни понятия

1. Електрическа верига - съвкупност от източници и консуматори на електромагнитна енергия, свързани помежду си така, че между тях да се извършва обмен на енергия.

2. Основните понятията, с които се описват процесите в електрическите вериги са:

1) **Ток** – насочено движение на електрически заредени частици под действие на електрическото поле. Интензитетът (силата) на тока представлява еквивалентния положителен електрически заряд, преминал през напречното сечение на проводника за единица време

$$i = \frac{dq}{dt},\ [A].$$

2) **Напрежение** – работата, която извършват силите на електрическото поле за пренасяне на единица положителен електричен заряд от една точка до друга

$$u = \frac{dA}{dq},\ [V].$$

Когато точката, към която се пренася зарядът е точка от безкрайността (точка с нулево енергийно състояние), то същата работа се нарича **потенциал.** Тогава напрежението между две точки от произволна електрическа верига (например *1* и *2*) може да се определи и като разлика между потенциалите на тези две точки

$$u_{12} = V_1 - V_2\ .$$

3) **Електродвижещо напрежение (е.д.н.)** – работата, която извършват силите на неелектрическо поле за пренасяне на единица положителен електричен заряд в посока обратна на силите на електрическото поле, или от точката с по-нисък потенциал към точката с по-висок потенциал. Е.д.н. е характеристика само на източниците, има същата физична природа и единица мярка като напрежението:

$$e = \frac{dA}{dq},\ [V].$$

4) **Електрическа енергия** – определя се чрез извършената от електрическото поле работа при протичане на електричен ток:

$$W = A = \int_0^A dA = \int_0^q udq = \int_0^t uidt,\ [J].$$

5) **Мощност** – работата, извършена от силите на електрическото поле за единица време:

$$p = \frac{dA}{dt} = u\frac{dq}{dt} = ui,\ [W].$$

1.2. Елементи на електрическите вериги

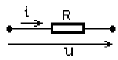
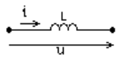
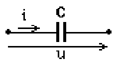
За улесняване на анализа на електрическите вериги реалните физически устройства, които са включени - източници, консуматори и други реални елементи - се представят чрез идеализирани елементи, отчитащи в чист вид процесите в тях. Идеализираните елементи в електрическите вериги се делят на две групи:

1. Пасивни (консуматори) – елементи, които запасяват електромагнитна енергия или я преобразуват в друг вид. Условните графични означения на пасивните елементи, както и основните изрази за тях, са дадени в Таблица1-1. Това са:

1) **Съпротивителен елемент** - отразява свойството на елементите да оказват противодействие при протичане на ток през тях и да преобразуват електрическата енергия в топлинна. Реалните съпротивителни елементи се наричат **резистори** и те освен **съпротивление** притежават индуктивност и капацитет;
2) **Индуктивен елемент** - отразява свойството на елементите да възбуждат магнитно поле и да запасяват магнитна енергия при протичане на електрически ток през тях. Реалните индуктивни елементи се наричат **бобини** и те освен **индуктивност** притежават съпротивление и капацитет;
3) **Капацитивен елемент -** отразява свойството на елементите да натрупват електрични заряди и да запасяват електрическа енергия при протичане на електрически ток през тях. Реалните капацитивни елементи се наричат **кондензатори** и те освен **капацитет**

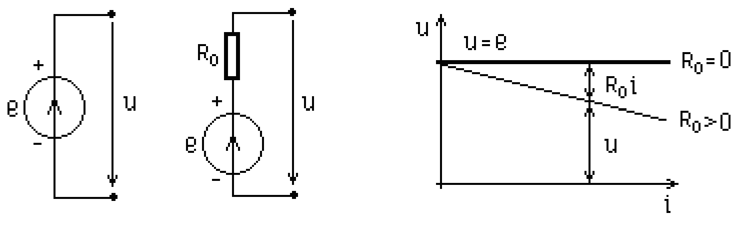
притежават съпротивление и индуктивност. На практика те са най-близки по свойства на своя идеален аналог.

Пасивни елементи Таблица1-1.

Елемент	Означение	Напрежение - ток	Мощност	Енергия	Параметър и мерна единица
Съпротиви-телен (резистор)		$u = Ri$	$P = \frac{u^2}{R} = Ri^2$	$W = R\int i^2 dt$ (топлинна)	Съпротивление $R = \frac{u}{i}, [\Omega]$ *ом*
Индуктивен (бобина)		$u = L\frac{di}{dt}$	$P = Li\frac{di}{dt}$	$W = \frac{Li^2}{2}$ (магнитна)	Индуктивност $L = \frac{\psi}{i}, [H]$ *хенри*
Капацитивен (кондензатор)		$u = \frac{1}{C}\int idt$	$P = Cu\frac{du}{dt}$	$W = \frac{Cu^2}{2}$ (електрическа)	Капацитет $C = \frac{q}{u}, [F]$ *фарад*

2. Активни (източници) – елементи, които преобразуват някакъв друг вид енергия в електромагнитна. Условните графични означения на активните елементи са показани на фиг.1.1 и фиг.1.2 Към тях спадат:

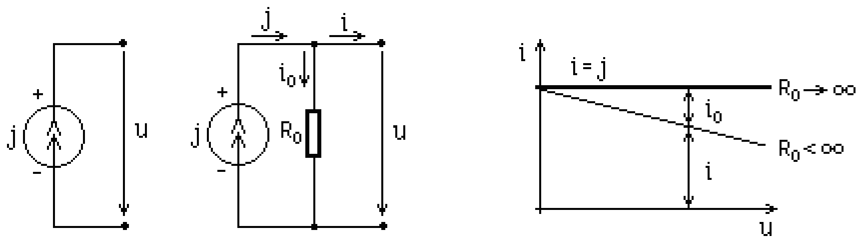
1) **Идеален източник на електродвижещо напрежение (е.д.н.)** - източник, напрежението на изводите на който не зависи от тока протичащ през него - фиг.1.1.а. Този източник е с вътрешно съпротивление нула ($R_0=0$) и притежава неограничена мощност. При реалните източници на напрежение с увеличаване на тока напрежението намалява, т.е. те имат вътрешно съпротивление различно от нула ($R_0>0$) и са с ограничена мощност - фиг.1.1.б. Зависимостите напрежение-ток (волт-амперни характеристики) на идеален и реален източник на е.д.н. са показана на фиг.1.1.в.



а) б) в)

фиг.1.1

2) **Идеален източник на електродвижещ ток (е.д.т.) -** източник, на който тока, протичащ през него, не зависи от напрежението на изводите му - фиг.1.2.а. Вътрешното съпротивление на този източник е безкрайно голямо ($R_0 \to \infty$) и подобно на идеалния източник на е.д.н. е с неограничена мощност. Реалните източници на ток имат много голямо вътрешно съпротивление, но по-малко от безкрайност ($R_0 < \infty$), и са с ограничена мощност - фиг.1.2.б. Волт-амперните характеристики на идеален и реален източник на е.д.т. са показана на фиг.1.2.в.



а) б) в)

фиг.1.2

1.3. Топологични понятия в електрическите вериги

Основните топологични понятия, които се използват за описание на електрическите вериги са:

1. **Схема** – графичното изображение на дадена електрическа верига с нейните елементи и връзки между тях.
2. **Клон** – съвкупност от последователно свързани елементи, през които протича един и същи ток.
3. **Възел** – точка от електрическа верига, в която се свързват повече от два или поне три клона.
4. **Контур** – затворен път от ел. верига, включващ един или няколко клона.
5. **Граф** – схемно изображение на електрическа верига, при което клоновете се изобразяват с линии.

1.4. Основни закони за електрическите вериги

1. Закони на Кирхоф

1) **Първи закон на Кирхоф** – отнася се за произволен възел (сечение) от електрическа верига и гласи: алгебричната сума от

клоновите токове за даден възел (дадено сечение) от ел. верига е равна на нула

$$\sum_{1}^{n} i_k = 0 .$$

Понеже става дума за алгебрична сума, то за положителни обикновено се приемат влизащите във възела токове, а излизащите - за отрицателни.

2) **Втори закон на Кирхоф** – отнася се за напреженията в произволен контур от електрическа верига и гласи: алгебричната сума от напреженията върху елементите за даден контур от електрическа верига е равна на нула:

$$\sum_{1}^{m} u_k = 0 .$$

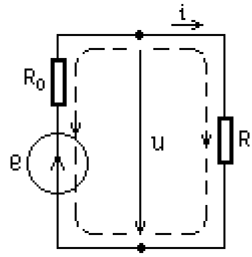
Предварително се избира условна (произволна) положителна посока за сумиране и ако напреженията на елементите и е.д.н. на източниците от контура съвпадат по посока с нея, то те се записват с положителен знак, а ако не съвпадат са със отрицателен знак. При този начин на записване на закона трябва да се има предвид, че положителната посока на напрежението на изводите на източниците на е.д.н. е с посока обратна на посоката на самото е.д.н. (фиг.1.1.а).

Друга често използвана формулировка на същия закон е: алгебричната сума от падовете на напрежения (напреженията върху пасивните елементи) за даден контур от електрическа верига е равна на алгебричната сума от електродвижещите напрежения за същия контур

$$\sum_{1}^{m} R_k i_k = \sum_{1}^{n} e_k .$$

2. Закон на Ом

Ако към реален източник на напрежение се свърже товарно съпротивление, се получава веригата от фиг.1.3.



фиг.1.3

За напрежението *u* от тази схема могат да се запишат следните изрази:

1) За дясната част на схемата, през товарното съпротивление -

$$u = Ri\ ,$$

известен още като **закон на Ом за част от електрическата верига**.

2) За лявата част на схемата, през източника -

$$u = e - R_o i\ ,$$

известен още като **обобщен закон на Ом** или **закон на Ом за цялата електрическа верига.**
Второто уравнение може да се запише и по отношение на е.д.н.

$$e = u + R_o i = u + \Delta u\ ,$$

където

$$\Delta u = R_o i\ ,$$

е падът на напрежение във вътрешното съпротивление на източника.

Обобщеният закон на Ом се явява като частен случай на Втори закон на Кирхоф.
От горните уравнения за тока в тази верига могат да се запишат изразите:

$$i = \frac{u}{R} \quad \text{и} \quad i = \frac{e-u}{R_o} = \frac{e}{R+R_o}\ .$$

1.5. Видове електрически вериги

1. В зависимист от това дали параметрите на елементите зависят от протичащите токове, от приложените напрежения на изводите им или от друг параметър електрическите вериги биват:
1) **Линейни -** електрически вериги, параметрите на елементите на които имат постоянни стойности или са константи;
2) **Нелинейни -** електрически вериги, параметрите на елементите на които зависят от протичащите токове или от напреженията на изводите им;
3) **Параметрични -** електрически вериги, параметрите на елементите на които зависят от някакъв параметър (време, температура и др.);
2. В зависимист от това дали параметрите на елементите зависят от тяхната дължина електрическите вериги се делят на :
1) **Вериги със съсредоточени параметри -** електрически вериги, параметрите на елементите на които не зависят от тяхната дължина;
2) **Вериги с разпределени параметри -** електрически вериги, параметрите на елементите на които са разпределени по дължина и не могат да се разглеждат като съсредоточени в една точка (дълги линии - електропроводи, съобщителни линии, кабелни мрежи и др.).

1.6. Режими на работа на електрически вериги

За електрическите вериги са характерни два типа режими:

1. Установен режим - режим, при който токовете и напреженията са достигнали установените (равновесни) стойности. Такъв режим е характерен за вериги без реактивни елементи (бобини и кондензатори) или за вериги, в които е минало достатъчно време от момента на включване, изключване или превключване на елементи от тях.

2. Преходен режим - режим, който възниква при първоначално включване на източници в електрически вериги, съдържащи реактивни елементи, или при внезапна промяна в конфигурацията на веригите, при което става изменение в енергийното състояние на реактивните елементи.

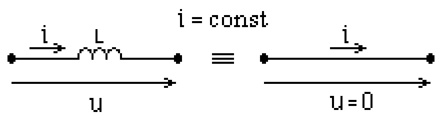
ГЛАВА 2

Електрически вериги за постоянен ток. Методи за анализ на електрически вериги

2.1. Поведение на пасивните елементи в установен постояннотоков режим

Във веригите за постоянен ток действат източници на постоянно напрежение и постоянен ток, при което в пасивните елементи протичат постоянни токове и на изводите им се установяват постоянни напрежения. При анализа на такива вериги в установен режим участват само съпротивителни елементи - резистори. Реактивните елементи - бобини и кондензатори - се заменят по следния начин:

1) Бобините се заменят с идеален проводник, както е показано на фиг.2.1



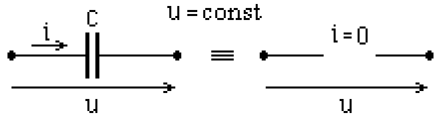
фиг.2.1

защото

$$u = L(\frac{di}{dt})_{i=const} = 0 \; .$$

При подаване на напрежение през тях протича ток и те запасяват магнитна енергия $W_L = \frac{Li^2}{2}$.

2) Кондензаторите прекъсват клоновете, в които са включени (фиг.2.2)



фиг.2.2

защото

$$i = C\left(\frac{du}{dt}\right)_{u=const} = 0 .$$

Ако между изводите на кондензаторите е подадено напрежение те запасяват електрическа енергия $W_C = \frac{Cu^2}{2}$.

Задачата за анализ на електрически вериги обикновено се състои в определяне на клонови токове и напрежения между отделни възлови точки при зададени стойности на параметрите на елементите от веригата. За тази цел се съставя система уравнения по някои от изброените по-горе закони, като предварително се задават посоки на токовете в отделните клонове. Ако получените стойности са с положителен знак, то избраната посока съвпада с действителната, ако са с отрицателен знак, избраната посока е обратна на действителната.

Изброените и илюстрирани с примери методи за анализ важат както за постояннотоковите вериги, така и за променливотоковите, които са разгледани по-нататък.

2.2. Анализ на електрически вериги чрез законите на Ом и Кирхоф. Мощност и енергия

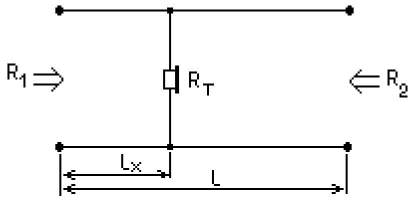
2.2.1. Елементарни вериги

<u>Решени примери и задачи</u>

2-1. За да определят дължината на кабел, свързали две от жилата му в края на късо, а от началото с омметър измерили съпротивление $R=3,5\Omega$. Каква е дължината на кабела, ако жилата са медни ($\rho_{Cu}=0,0175\ \Omega\ mm^2/m$) и имат сечение $s=10mm^2$?

Отг.: 1000m.

2-2. Към телефонна линия с дължина $l=1000m$ и сечение на проводниците $s=0,35mm^2$ е включена слушалка за подслушване (фиг.2.3). Да се определи съпротивлението на слушалката R_T и мястото на свързване, ако съпротивлението, измерено от началото на линията (при отворен край), е $R_1=224\Omega$, а от края (при отворено начало) е $R_2=276\Omega$, ($\rho_{Cu}=0{,}0175\ \Omega\ mm^2/m$).



фиг.2.3

Решение:

Съпротивлението на цялата линията е

$$R_л = 2\frac{\rho.l}{s} = 2\frac{0{,}0175.1000}{0{,}35} = 100\Omega\,,$$

а съпротивлението от началото на линията до мястото на включване

$$R_x = 2\frac{\rho.l_x}{s}\,.$$

От условието за измерените съпротивления може да се запише следната система:

$$\left|\begin{array}{l} R_1 = R_x + R_T \\ R_2 = (R_л - R_x) + R_T\,, \end{array}\right.$$

от която за съпротивлението на слушалката се получава

$$R_T = \frac{R_1 + R_2 - R_л}{2} = \frac{224 + 276 - 100}{2} = 200\Omega\,.$$

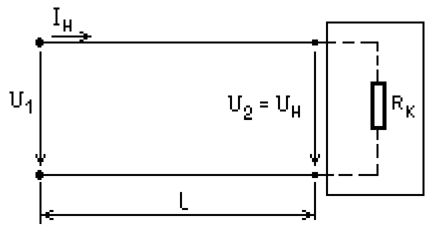
От първото уравнение

$$R_x = R_1 - R_T = 24\Omega\,,$$

откъдето за мястото на свързване от началото на линията се получава:

$$l_x = \frac{R_x.s}{2\rho} = \frac{24.0{,}35}{2.0{,}0175} = 240m\,.$$

2-3. Консуматор на електрическа енергия с номинално напрежение $U_H = 220V$ и номинален ток $I_H = 50A$ се захранва от източник на напрежение посредством двупроводна линия с дължина $l=100m$, изпълнена от медни проводници със сечение $s=10mm^2$ (фиг.2.4). Да се определи при какво напрежение в началото на линията се осигурява номинален режим на работа на консуматора и какъв е коефициентът на полезно действие на линията.



фиг.2.4

Решение:

При протичане на ток от съпротивлението на проводниците на линията се получава пад на напрежение, който по *закона на Ом* е

$$\Delta U = R_л I_н = 2\frac{\rho.l}{s} I_н = 2\frac{0{,}0175.100}{10} 50 = 0{,}35.50 = 17{,}5V .$$

Напрежението в началото на линията трябва да бъде такова, че да покрива пада на напрежение в линията ΔU, т.е. то е сума от напрежението на консуматора и пада в линията:

$$U_1 = U_2 + \Delta U = 220 + 17{,}5 = 237{,}5V .$$

Коефициентът на полезно действие (к.п.д.) на линията е отношение на мощностите в края и в началото на линията или, с други думи, на мощностите на консуматора и на източника:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_н}{U_1 I_н} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{220}{237{,}5} = 0{,}926 .$$

2-4. Да се определи за колко време електрически нагревател със съпротивление $R = 19{,}36\Omega$, включен към източник с напрежение $U = 220V$, ще загрее съд с $V = 20l$ вода от температура $\theta_1 = 15\,^{\circ}C$ до температура $\theta_2 = 100\,^{\circ}C$, ако специфичната топлоемкост на водата е $C_{H_2O} = 4180 \; [J/kg.°C]$ и коефициентът на полезно действие на нагревателя е $\eta = 0,8$.

Решение:

Ако масата на водата е $m \approx 20\,kg$, необходимата енергия Q за загряването на водата е

$$Q = C_{H_2O}(\theta_2 - \theta_1)m = 4180(100 - 15)20 = 7106.10^3 [J \equiv Ws].$$

От друга страна, електрическата енергия, отделена от нагревателя като топлинна е

$$W = Pt,$$

където

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{220^2}{19,36} = 2500W$$ е мощността на нагревателя.

Тогава от равенството

$$Q = \eta W = \eta Pt,$$

отчитайки загубите, времето, необходимо за загряване, ще бъде

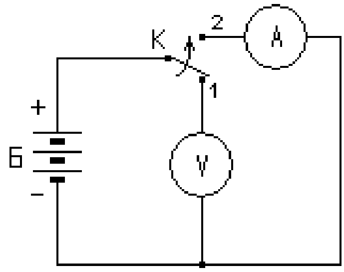
$$t = \frac{Q}{\eta P} = \frac{7106.10^3}{0,8.2500} = 3553s = 59\,min\,13s.$$

2-5. Да се изчисли електрически нагревател, с който за *1час* да се загряват *60l* вода от температура $\theta_1 = 15\,^\circ C$ до температура $\theta_2 = 60\,^\circ C$. Номиналното напрежение на нагревателя е $U = 220V$ и загубите се пренебрегват ($\eta = 1$).

Отг.: $P_{нагр}=3135W$; $R_{нагр}=15,44\Omega$; $I_{нагр}=14,25A$.

2-6. За определяне на параметрите на една акумулаторна батерия измерили напрежението на изводите на батерията при празен ход и тока на късо съединение - положения *1* и *2* на ключа *k* от фиг.2.5. Определете електродвижещото напрежение *e* и вътрешното съпротивление R_0 на батерията, ако показанията на уредите са

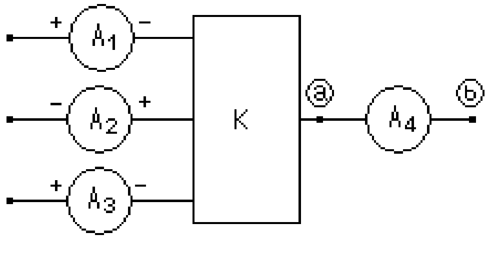
u_V=13,2V и i_A=6,6A и последните се приемат за идеални $(R_V \to \infty; R_A = 0)$.



фиг.2.5

Отг.: $e = u_{V(0)} = 13,2V$; $R_0 = \dfrac{e}{i_{A(kc)}} = 2\Omega$.

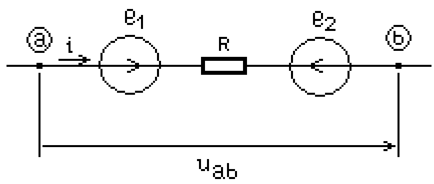
2-7. Да се определят показанието и полярността на включване на амперметъра A_4 от схемата на показаната на фиг.2.6 ел. верига, ако показанията на останалите амперметри са i_1=9A, i_2=15A, i_3=4A.



фиг.2.6

Отг.: i_4=2A; (+) към *b* и (–) към *a*.

2-8. Даден е клон от сложна електрическа верига с известни потенциали на точките в краищата на клона: V_a=120V, V_b=60V (фиг.2.7). Определете тока *i* през клона *a-b*, ако параметрите на елементите са e_1=150V, e_2=70V, R=20 Ω.



фиг.2.7

Решение:

По т.нар. *теорема за компенсацията* напрежението u_{ab} може да се разглежда като пад на напрежение или като напрежение на източник. Дадения клон заедно с напрежението u_{ab} образува затворен контур, за който може да се запише уравнение по *II закон на Кирхоф*, като напрежението u_{ab} се записва от страната на падовете. При положителна посока на сумиране по посока на часовниковата стрелка, уравнението ще бъде

$$Ri - u_{ab} = e_1 - e_2 ,$$

откъдето за тока се получава изразът

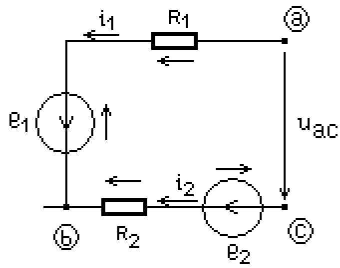
$$i = \frac{e_1 - e_2 + u_{ab}}{R} .$$

Понеже $u_{ab} = V_a - V_b$, за тока, изразен чрез потенциалите на възловите точки, се получава

$$i = \frac{V_a + e_1 - e_2 - V_b}{R} = 7A .$$

*Токът в даден клон на електрическа верига е равен на потенциала на точката, от която излиза, плюс или минус е.д.н. в клона (ако има такова е.д.н.), минус потенциала на точката, в която влиза, разделено на съпротивлението на клона.

2-9. Известни са параметрите и токовете на два съседни клона от сложна електрическа верига (фиг.2.8). Определете напрежението u_{ac} между точките *a* и *c*, ако е дадено $R_1=30\Omega$, $R_2=20\Omega$, $e_1=100V$, $e_2=200V$, $i_1=2A$, $i_2=8A$.



фиг.2.8

<u>Решение</u>:

Уравнението по *II закон на Кирхоф* за контура *a-c-b-a* е

$$u_{ac} + R_2 i_2 - R_1 i_1 = -e_1 + e_2 ,$$

откъдето за търсеното напрежение се намира

$$u_{ac} = R_1 i_1 - e_1 - R_2 i_2 + e_2 .$$

От полученият израз се вижда, че напрежението u_{ac} е сума от напреженията на елементите по пътя от т.*a* към т.*c*, чиито посоки са показани на схемата със стрелките до тях. След заместване в горния израз за стойността на напрежението се получава

$$u_{ac} = 30.2 - 100 - 20.8 + 200 = 0V .$$

*Забележете, че положителните посоки на напреженията на източниците са обратни на посоките на техните е.д.н.

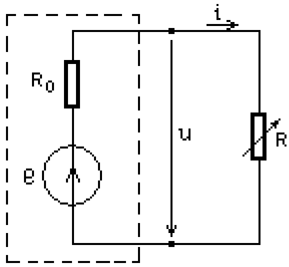
2-10. Определете напреженията u_{ab} между точките *a* и *b* и u_{cb} между точките *c* и *b* за веригата от зад. **2-9**. Направете проверка чрез израза $u_{ac} = u_{ab} + u_{bc} = 0$.

Отг.: $u_{ab} = u_{cb} = -40V$.

2-11. Консуматор с променливо съпротивление *R* ($0 \leq R < \infty$), е включен към източник с електродвижещо напрежение *e* и вътрешно съпротивление R_0 (фиг.2.9). Да се определи:

1) при каква стойност на съпротивлението *R* в него ще се отделя максимална мощност;

2) каква е стойността на тока, мощността и к.п.д. на източника в този случай.



фиг.2.9

Решение:

От *обобщеният закон на Ом*

$$e = R_0 i + u = R_0 i + Ri = (R_0 + R)i$$

и токът във веригата е

$$i = \frac{e}{R_0 + R}.$$

Мощността, която се отделя в консуматора е

$$P_K = ui = Ri^2 = \frac{Re^2}{(R_0 + R)^2}.$$

Първата производна на израза за мощността P_K по отношение на R е

$$\frac{dP_K}{dR} = e^2 \frac{(R_0 + R)^2 - 2(R_0 + R)R}{(R_0 + R)^4} = e^2 \frac{R_0 - R}{(R_0 + R)^3},$$ която се нулира при $R = R_0$.

Тогава

$$P_{K_{max}} = \frac{e^2}{4R_0} \quad \text{и} \quad i = \frac{e}{2R_0} = \frac{i_{kc}}{2},$$

където $i = i_{kc} = \dfrac{e}{R_0}$ се нарича ток на късо съединение (при $R=0$).

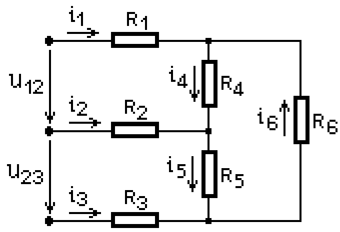
Коефициентът на полезно действие на източника е

$$\eta = \frac{P_K}{P_\Gamma} = \frac{ui}{ei} = \frac{e - R_0 i}{e} = 1 - \frac{R_0 i}{e} = 1 - \frac{R_0}{R_0 + R} = \frac{R}{R_0 + R}.$$

В този случай, наречен съгласувано натоварване,

$$R = R_0,\ P_K = P_{K_{max}} \text{ и } \eta = \frac{1}{2}.$$

2-12. Определете напреженията u_{12} и u_{23} от показаната на фиг.2.10 схема на електрическа верига, ако е дадено, че $R_1=3\Omega$, $R_2=6\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=2\Omega$, $R_5=7\Omega$, $R_6=16\Omega$ и са известни стойностите на клоновите токове: $i_4=2A$, $i_5=4A$, $i_6=-2A$.



фиг.2.10

Решение:

По *II закон на Кирхоф* за търсените напрежения се записват изразите:

$$u_{12} = R_1 i_1 + R_4 i_4 - R_2 i_2,$$
$$u_{23} = R_2 i_2 + R_5 i_5 - R_3 i_3.$$

При така избраните посоки на токовете по *I закон на Кирхоф* се намират

$$i_1 = i_4 - i_6 = 2 - (-2) = 4A,$$
$$i_2 = i_5 - i_4 = 4 - 2 = 2A,$$
$$i_3 = i_6 - i_5 = (-2) - 4 = -6A.$$

След заместване за търсените напрежения се получават стойностите:

$$u_{12} = 3.4 + 2.2 - 6.2 = 4V,$$
$$u_{23} = 6.2 + 7.4 - 4.(-6) = 64V.$$

2.2.2. Сложни вериги - анализ чрез законите на Кирхоф

Ако броят на клоновете в една ел. верига е *p*, а броят на възлите *q*, то броят на уравненията, с които веригата може да бъде анализирана, е равен на броя на клоновете *p*. От тях:

1) По *I закон на Кирхоф* се записват *(q–1)* линейно независими уравнения, като възлите за които се записват тези уравнения се избират произволно:

$$\sum_{1}^{n} i_k = 0 .$$

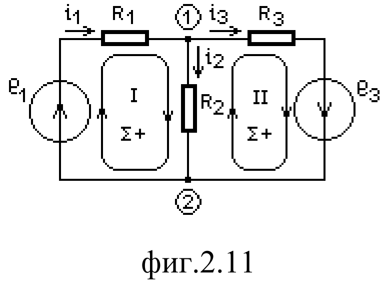
2) По *II закон на Кирхоф* се записват останалите уравнения, или *n=p–(q–1)*, като независимите контури и посоките за сумиране в тях се избират произволно:

$$\sum_{1}^{m} u_k = \sum_{1}^{n} e_k .$$

По този метод може да се анализира всяка една електрическа верига, но на практика метода се използва за анализ на вериги с най-много *3* клона, при което се получава система от *3* уравнения с *3* неизвестни, която лесно може да бъде решена. За по-сложни вериги се използват други методи, с помощта на които се намалява общия брой на уравненията.

<u>Решени примери и задачи</u>

2-13. Да се определят клоновите токове в показаната на фиг.2.11 схема на електрическа верига, ако параметрите на елементите са $e_1=100V$, $e_3=50V$, $R_1=5\Omega$, $R_2=15\Omega$, $R_3=10\Omega$.



фиг.2.11

Решение:

Дадената електрическа верига се състои от $p=3$ клона и $q=2$ възела. Неизвестните в нея са клоновите токове i_1 , i_2 и i_3 , на които се задават положителни посоки. В клоновете с източници на е.д.н. посоките на токовете се избират съпосочни с посоките на е.д.н. (при такава положителна посока мощността на източника е положителна), а в клоновете с пасивни елементи посоките са произволни.
По *I закон на Кирхоф* се записват

$$(q-1)=2-1=1бр.$$

линейно независими уравнения, например за възел *1*, като влизащите токове се приемат за положителни, а излизащите за отрицателни.
Останалите уравнения се записват по *II закон на Кирхоф*

$$p-(q-1)=3-1=2бр.,$$

като контурите и посоките за сумиране в тях се избират произволно, например контурите *I* и *II*, както е показано на схемата.
При така избраните възел и контури системата уравнения по законите на Кирхоф е следната:

$$\left| \begin{array}{l} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 = e_1 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 = e_3 \end{array} \right. \Rightarrow i_1 = i_2 + i_3 \ ,$$

$$\left| \begin{array}{l} R_1(i_2 + i_3) + R_2 i_2 = e_1 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 = e_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} (R_1 + R_2) i_2 + R_1 i_3 = e_1 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 = e_3 \end{array} \right. ,$$

или в числов вид

$$\left| \begin{array}{l} 20 i_2 + 5 i_3 = 100 \\ -15 i_2 + 10 i_3 = 50 \end{array} \right. ,$$

с решения

$$\left| \begin{array}{l} i_2 = 2{,}73A \\ i_3 = 9{,}09A \end{array} \right. \quad \text{и} \quad i_1 = 11{,}82A .$$

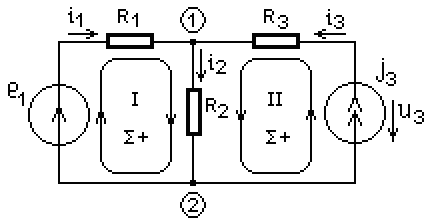
Проверка на получените резултати може да се направи чрез уравнението по *II закон на Кирхоф* за третия възможен контур във веригата:

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = e_1 + e_3$$

$$5.11,82 + 10.9,09 = 100 + 50$$

$$150 = 150\,.$$

2-14. Да се определят неизвестните токове и напрежения в показаната на фиг.2.12 ел. верига и да се направи проверка чрез баланса на мощностите, ако е дадено: $e_1=20V$, $j_3=2A$, $R_1=5\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=10\Omega$.



фиг.2.12

Решение:

Неизвестните в дадената верига са клоновите токове i_1 , i_2 и напрежението u_3 на източника на ток. Системата уравнения по законите на Кирхоф за дадената схема, включваща възел *1* и контурите *I* и *II* , е следната:

$$\left| \begin{array}{l} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 = e_1 \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 - u_3 = 0\,. \end{array} \right.$$

Понеже $i_3 = j_3 = 2A$, от първото уравнение изразяваме например i_1:

$$i_1 = i_2 - i_3 = i_2 - 2\,.$$

Заместваме във второто уравнение:

$$R_1(i_2 - i_3) + R_2 i_2 = e_1\,,$$

откъдето за i_2 се получава

$$i_2 = \frac{e_1 + R_1 i_3}{R_1 + R_2} = \frac{20 + 5.2}{10} = 3A\,.$$

След това определяме ток i_1:

$$i_1 = 3 - 2 = 1A.$$

За напрежението на източника се получава

$$u_3 = R_2 i_2 + R_3 i_3 = 5.3 + 10.2 = 35V.$$

Проверка: Баланс на мощностите означава да се намерят сумарната генерирана и сумарната консумирана мощности във веригата и да се сравнят: $\Sigma P_Г = \Sigma P_К = ?$

Сумарната генерираната мощност във веригата е сума от мощностите на източниците:

$$\Sigma P_Г = e_1 i_1 + u_3 j_3 = 20.1 + 35.2 = 90W.$$

Сумарната консумирана мощност във веригата е сума от мощностите на резисторите:

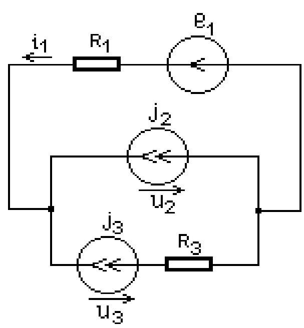
$$\Sigma P_К = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 = 5.1^2 + 5.3^2 + 10.2^2 = 90W,$$

Равенството е изпълнено:

$$\Sigma P_Г = \Sigma P_К = 90W,$$

което означава, че получените стойности за неизвестните токове и напрежения са верни.

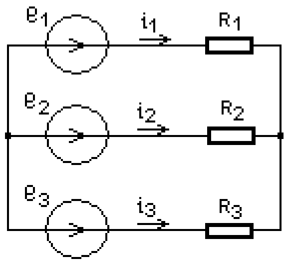
2-15. Да се определят неизвестните токове и напрежения в показаната на фиг.2.13 електрическа верига и да се направи проверка чрез баланса на мощностите, ако е дадено: $e_1=10V$, $j_2=1A$, $j_3=2A$, $R_1=10\Omega$, $R_3=15\Omega$.



фиг.2.13

Отг.: $i_1=-3A$; $u_2=40V$; $u_3=70V$.

2-16. Да се определят неизвестните клонови токове и да се направи баланс на мощностите в показаната на фиг.2.14 схема на ел. верига, ако е дадено: $e_1=80V$, $e_2=160V$, $e_3=80V$, $R_1=20\Omega$, $R_2=28\Omega$, $R_3=30\Omega$.

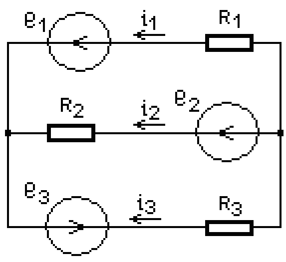


фиг.2.14

Отг.: $i_1=-1{,}2A$; $i_2=2A$; $i_3=-0{,}8A$;

$$\Sigma P_Г = \Sigma P_К = 160W .$$

2-17. Да се определят неизвестните клонови токове и е.д.н. e_3 в показаната на фиг.2.15 схема на електрическа верига, ако е дадено: $e_1=2V$, $e_2=4V$, $R_1=1\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=10\Omega$ и е известен токът $i_3=0{,}5A$. Да се направи баланс на мощностите.

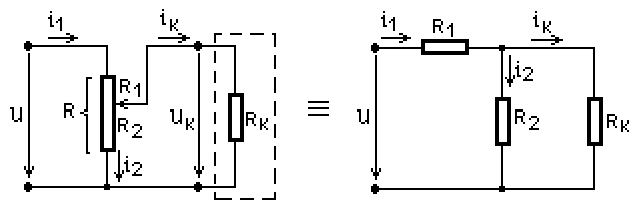


фиг.2.15

Отг.: $i_1=-0{,}75A$; $i_2=0{,}25A$; $e_3=-7{,}75V$;

$$\Sigma P_Г = \Sigma P_К = 3{,}375W .$$

2-18. Да се провери може ли посредством реостат със съпротивление $R=200\Omega$ и допустим ток $i_{доп}=2{,}5A$, свързан потенциометрично към източник с $u=220V$, да се захрани консуматор с номинално напрежение $u_к=150V$ и съпротивление $R_к=75\Omega$ - фиг.2.16.а. Ако не може, да се определи в какъв диапазон може да се регулира напрежението на консуматора, без реостатът да се претовари.



а) б)

фиг.2.16

<u>Решение</u>:

1) Реостатът представлява регулируемо съпротивление с плъзгач, положението на който определя стойността на съпротивлението. При потенциометрично свързване цялото съпротивление се свързва към източника, а товарът се свързва към част от него - както е показано на фиг.2.16.а. По този начин реостатът играе ролята на делител на напрежение. Задачата се свежда до намиране на най-голямата стойност на тока през реостата и сравняване на този ток с допустимия ток. Това е входният ток i_1, който протича през частта R_1 от реостата (която част също е неизвестна) - фиг.2.16.б.

По законите на Кирхоф веригата се описва със следната система уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} i_1 - i_2 = i_к = u_к/R_к = 2A \\ R_1 i_1 + u_к = u \\ R_2 i_2 = (R - R_1)(i_1 - i_к) = u_к . \end{array} \right.$$

От второто уравнение изразяваме

$$R_1 = \frac{u - u_к}{i_1} = \frac{70}{i_1} \ ,$$

и заместваме в третото:

$$(R - \frac{70}{i_1})(i_1 - i_к) = u_к \ ,$$

$$(200 - \frac{70}{i_1})(i_1 - 2) = 150 \, ,$$

$$10 i_1^2 - 31 i_1 + 7 = 0 \, .$$

Полученото квадратно уравнение по отношение на i_1 е с корени:

$$i_{1a} = 2,855A \Rightarrow R_{1a} = 24,52\Omega ,$$
$$i_{1б} = 0,245A \Rightarrow R_{1б} = 285,48\Omega .$$

Реално решение е само първото, защото второто е физически невъзможно ($R_{1б}>R$). Сравнявайки получената стойност с допустимия ток, се вижда, че тя е по-голяма ($i_{1a}>i_{доп}$). Превишаването на допустимия ток е свързано с прегряване и е нежелателно. Трябва да се използва реостат с допустим ток $i_{доп}>2,855$А, при условие че има същото съпротивление.

2) В какъв диапазон може да се регулира напрежението на консуматора $u_к$, без да се претовари реостатът?
От второто уравнение изразяваме

$$R_1 = \frac{u - u_к}{i_1} = \frac{220 - u_к}{2,5},$$

и заместваме в третото:

$$(200 - \frac{220 - u_к}{2,5})(2,5 - \frac{u_к}{75}) = u_к$$
$$(\frac{280 + u_к}{2,5})(\frac{187,5 - u_к}{75}) = u_к$$
$$u_к^{\,2} + 280u_к - 52500 = 0$$

Полученото квадратно уравнение по отношение на $u_к$ е с корени:

1) $u_{к1} = 128,5V$

при съотношение на реостата: $R_1 = 36,59\Omega$ и $R_2 = 163,41\Omega$;

2) $u_{к2} = -408,5V$ - физически невъзможно.

Следователно регулирането е възможно в граници $0 \le u_к \le 128,5V$.

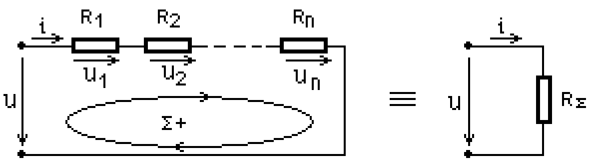
2.3. Анализ на електрически вериги чрез еквивалентно преобразуване

2.3.1. Еквивалентно преобразуване на пасивни участъци от електрическите вериги. Входни съпротивления

Този метод за анализ се използва тогава, когато веригата е съставена от един активен елемент (източник) и множество пасивни елементи. Същността на метода е опростяване на веригата до получаване на верига с един пасивен елемент, наречен еквивалентен, който представлява входното съпротивление на електрическата верига. Замяната на няколко пасивни елемента с един е еквивалентна тогава, когато за останалата част от верига промяна не настъпва.

1. Последователно свързване на резистори

На фиг.2.17.а е показана схема на електрическа верига от n на брой последователно свързани резистори (токът през тях е един и същи), които могат да бъдат заменени с един еквивалентен резистор (фиг.2.17.б.).



а) б)

фиг.2.17

По *II закон на Кирхоф* за входните напрежения от двете схеми могат да се запишат изразите:

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = R_1 i + R_2 i + \ldots + R_n i = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n)i$$

и

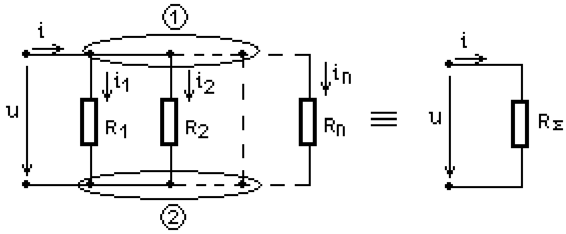
$$u = R_{\Sigma} i\,,$$

откъдето за съпротивлението на еквивалентния резистор се получава, че е сума от съпротивленията на отделните елементи:

$$R_{\Sigma} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{1}^{n} R_k\,.$$

2. Паралелно свързване на резистори

На фиг.2.18.а е показана схема на ел. верига от *n* на брой паралелно свързани резистори (напрежението за всеки от тях е едно и също), които могат да бъдат заменени с един еквивалентен резистор (фиг.2.18.б).



а) б)

фиг.2.18

По *I закон на Кирхоф* изразите за входните токове от двете схеми са:

$$i = i_1 + i_2 + ... + i_n = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + ... + \frac{u}{R_n} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n})u \quad \text{и}$$

$$i = \frac{1}{R_\Sigma} u ,$$

откъдето за реципрочната стойност на съпротивлението на еквивалентния резистор се получава, че е сума от реципрочните стойности на съпротивленията на отделните елементи:

$$\frac{1}{R_\Sigma} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} = \sum_1^n \frac{1}{R_k} ,$$

или

$$G_\Sigma = G_1 + G_2 + ... + G_n = \sum_1^n G_k \ .$$

Ако $R_1 = R_2 = ... = R_n = R$, то $R_\Sigma = \frac{R}{n}$.

При два паралелно свързани резистора, случай често срещан на практика, еквивалентният резистор е със стойност

$$R_\Sigma = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Понеже

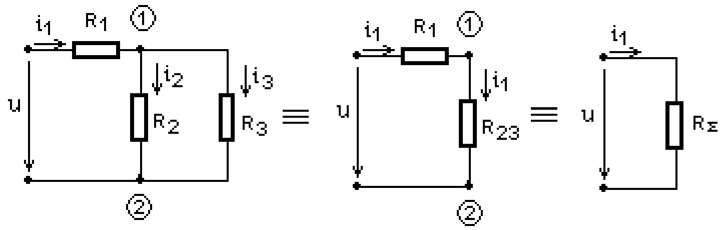
$$u = R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_\Sigma i \,,$$

за токовете в двата паралелни клона се получават изразите:

$$i_1 = i\frac{R_2}{R_1 + R_2}\,, \quad i_2 = i\frac{R_1}{R_1 + R_2}\,.$$

3. Смесено свързване на резистори

Под просто смесено свързване на резистори се разбира свързване, при което имаме два паралелно свързани резистора и последователно на тях още един, както е показано на схемата на фиг.2.19.а.



а) б) в)

фиг.2.19

Тогава еквивалентното съпротивление на веригата е:

$$R_\Sigma = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2 + R_3}\,.$$

Токовете в отделните клонове са:

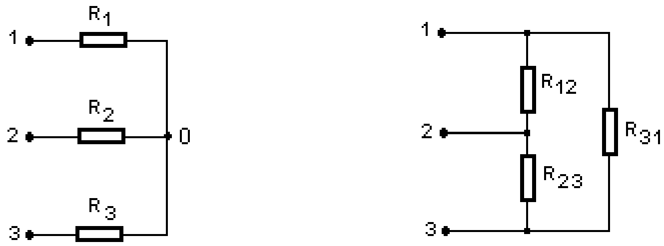
$$i_1 = \frac{u}{R_\Sigma} = \frac{u(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}\,,$$

$$i_2 = i_1\frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{uR_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}\,,$$

$$i_3 = i_1\frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{uR_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}\,.$$

4. Свързване “звезда” и “триъгълник”.

На фиг.2.20.а, б са показани схемите на резистори, свързани ”звезда” и ”триъгълник”.



а) ⅄ - звезда　　　　б) △ - триъгълник

фиг.2.20

За да бъде замяната еквивалентна, трябва да са изпълнени следните равенства:

1) От звезда в триъгълник:

⅄ $R_1R_2R_3$ / △ $R_{12}R_{23}R_{31}$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}$$

2) От триъгълник в звезда:

△ $R_{12}R_{23}R_{31}$ / ⅄ $R_1R_2R_3$

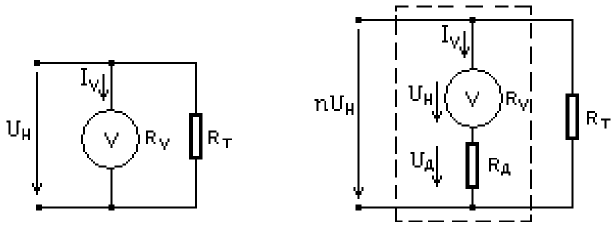
$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Решени примери и задачи

2-19. Да се определи какво допълнително съпротивление $R_Д$ трябва да се свърже към волтметър с обхват U_H и вътрешно съпротивление R_V така, че с уреда да бъде измерено n пъти по-голямо напрежение ($n>1$).



а) б)

фиг.2.21

<u>Решение</u>:

За да бъде измерено nU_H напрежение, то разликата от U_H , т.е напрежението $(n–1)U_H$ трябва да се подаде “извън” волтметъра. За тази цел допълнителното съпротивление $R_Д$ се свързва последователно на волтметъра така, че стойността на тока през него да не се променя - фиг.2.21.а и б.

От израза за тока през волтметъра I_V за двете схеми

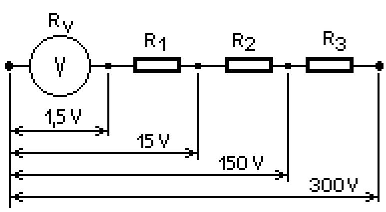
$$I_V = \frac{U_H}{R_V} = \frac{nU_H}{R_V + R_Д}$$

се намира стойността на допълнителното съпротивление

$$R_Д = (n-1)R_V \, .$$

Неизвестното напрежение се получава, като отчетеното показание на волтметъра се умножи с *n*.

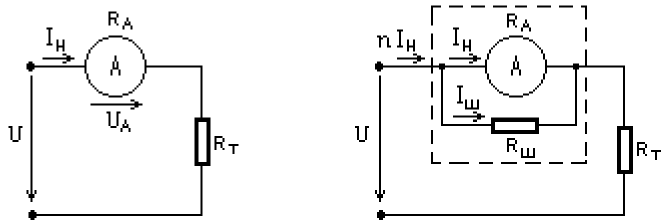
2-20. Даден е волтметър с номинален обхват $U_H=1{,}5V$ и вътрешно съпротивление $R_V=3000\Omega$. Да се определят стойностите на отделните допълнителни съпротивления които трябва да се включат така, че с волтметъра да се измерват до: *15V*, *150V* и *300V* - фиг.2.22.



фиг.2.22

Отг.: $R_1=27k\Omega$; $R_2=270k\Omega$; $R_3=300k\Omega$.

2-21. Да се определи какво допълнително съпротивление трябва да се свърже към амперметър с обхват I_H и вътрешно съпротивление R_A така, че с уреда да бъде измерен n пъти по-голям ток ($n>1$). Пресметнете съпротивлението, ако $I_H=50mA$, $R_A=10\Omega$ и $n=100$.



а) б)

фиг.2.23

Решение:

За да бъде измерен nI_H ток, то разликата от I_H, т.е токът $(n-1)I_H$ трябва да протече "извън" амперметъра. За тази цел допълнителното съпротивление се свързва паралелно на амперметъра и се нарича шунтово съпротивление - $R_Ш$.

От израза за напрежението на изводите на амперметъра U_A за двете схеми от фиг.2.23

$$U_A = R_A I_H = \frac{R_A R_Ш}{R_A + R_Ш} nI_H$$

се намира

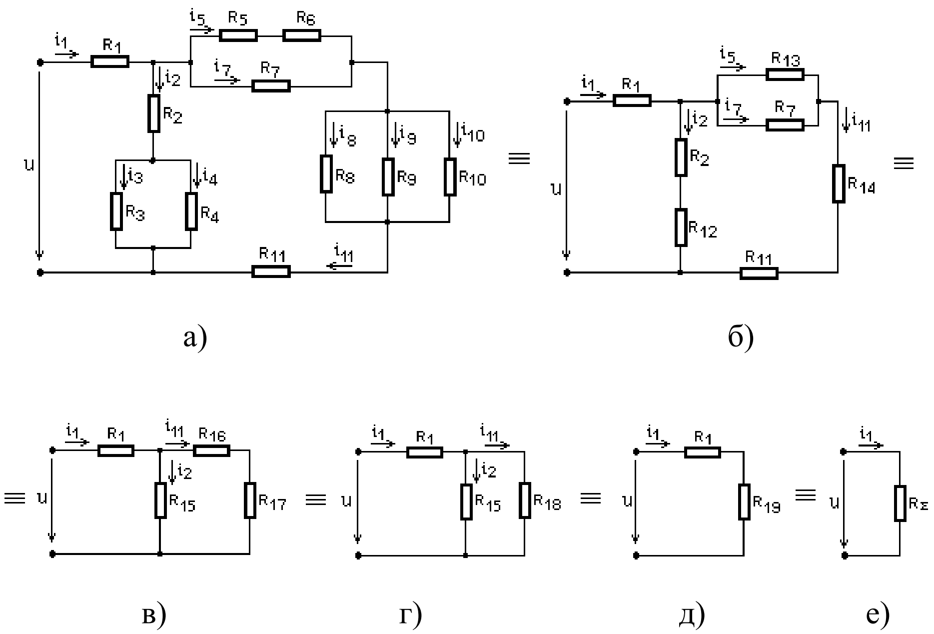
$$R_Ш = \frac{R_A}{(n-1)}.$$

Неизвестният ток се получава, като показанието на амперметъра се умножи с n.

За $n=100$, при което се разширява обхватът на уреда до $I_H=5A$, шунтовото съпротивление е със стойност

$$R_Ш = 0{,}101\Omega .$$

2-22. Да се определят токовете и напреженията върху резисторите в показаната на фиг.2.24.а сложна електрическа верига, ако за стойностите на елементите е дадено: $u=100V$, $R_1=8\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=R_4=4\Omega$, $R_5=R_6=1\Omega$, $R_7=2\Omega$, $R_8=R_9=R_{10}=3\Omega$, $R_{11}=2\Omega$.



фиг.2.24

<u>Решение</u>:

Първоначално се задават посоките на токовете в отделните елементи. След това схемата се опростява чрез еквивалентно преобразуване по следния начин:

1) За веригата от фиг.2.24.б

$$R_{12} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 2\Omega\,,\;\; R_{13} = R_5 + R_6 = 2\Omega\,,\;\; R_{14} = \frac{1}{\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} + \frac{1}{R_{10}}} = 1\Omega\,.$$

2) За веригата от фиг.2.24.в

$$R_{15} = R_2 + R_{12} = 4\Omega\,,\;\; R_{16} = \frac{R_{13} R_7}{R_{13} + R_7} = 1\Omega\,,\;\; R_{17} = R_{14} + R_{11} = 3\Omega\,.$$

3) $R_{18} = R_{16} + R_{17} = 4\Omega$ - фиг.2.24.г.

4) $R_{19} = \dfrac{R_{15}R_{18}}{R_{15}+R_{18}} = 2\Omega$ - фиг.2.24.д.

5) $R_{\Sigma} = R_1 + R_{19} = 10\Omega$ - фиг.2.24.е.

Определянето на токовете става по обратния ред - от еквивалентната схема към дадената:

1) $i_1 = \dfrac{u}{R_{\Sigma}} = 10A$ - по *закона на Ом* и $u_1 = R_1 i_1 = 80V$.

2) $i_2 = i_1 \dfrac{R_{15}}{R_{15}+R_{18}} = 5A$ - i_1 е общ за R_{15} и R_{18}, $u_2 = R_2 i_2 = 10V$,

$i_{11} = i_1 - i_2 = 5A$ - по *I закон на Кирхоф*, $u_{11} = R_{11} i_{11} = 10V$.

3) $i_3 = i_2 \dfrac{R_4}{R_3+R_4} = 2{,}5A$, $u_3 = R_3 i_3 = 10V$,

$i_4 = i_2 - i_4 = 2{,}5A$, $u_4 = u_3 = R_4 i_4 = 10V$,

$i_5 = i_6 = i_{11} \dfrac{R_7}{R_7+R_{13}} = 2{,}5A$ - i_{11} е общ за R_{13} и R_7;

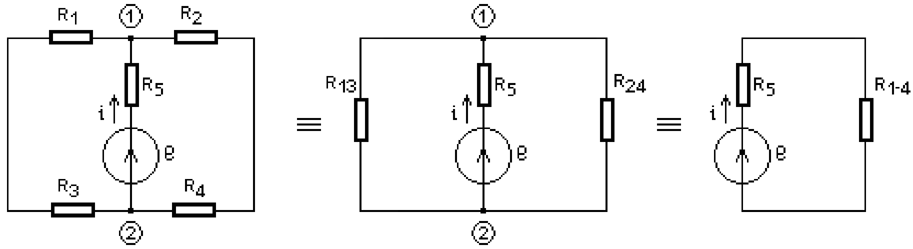
$u_5 = R_5 i_5 = 2{,}5V$, $u_6 = R_6 i_6 = 2{,}5V$.

4) $i_8 = i_9 = i_{10} = \dfrac{i_{11}}{3} = 1{,}667A$ - i_{11} е общ за R_8, R_9 и R_{10},

$u_8 = u_9 = u_{10} = R_8 i_8 = 2{,}5V$.

2-23. Да се определят входното съпротивление и входният ток за електрическата верига от фиг.2.25.а, ако съпротивленията на отделните резистори са еднакви и R_k=R.

Упътване: Дадената схема е еквивалентна на схемите от фиг.2.25.б и фиг.2.25.в.

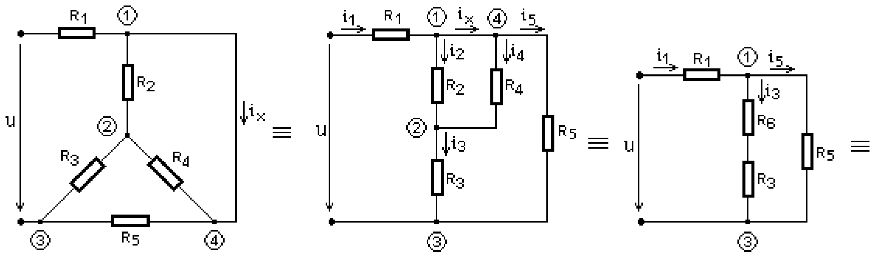


а) б) в)

фиг.2.25

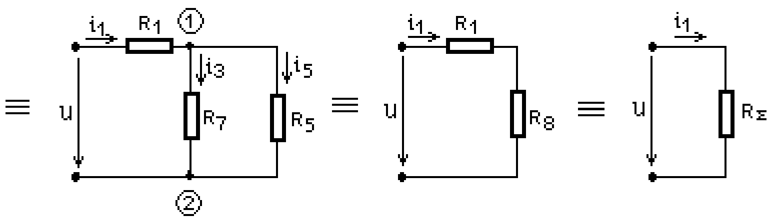
$$Отг.:\ R_{\Sigma} = 2R\ ;\ i = \frac{e}{2R}\ .$$

2-24. Да се определят входното съпротивление и токът i_X в идеалния проводник на показаната на фиг.2.26.а електрическа верига, ако резисторите в схемата са еднакви: R_k=R .



а) б) в)

фиг.2.26



г) д) е)

фиг.2.26

Решение:

I начин: Чрез еквивалентно преобразуване на последователно и паралелно свързани резистори.

Същата схема може да се представи и по друг начин, показан на фиг.2.26.б, откъдето лесно се вижда, че R_2 и R_4 са свързани паралелно. Тогава:

1) $R_6 = \dfrac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \dfrac{R}{2}$; 2) $R_7 = R_6 + R_3 = \dfrac{3R}{2}$; 3) $R_8 = \dfrac{R_5 R_7}{R_5 + R_7} = \dfrac{3R}{5}$;

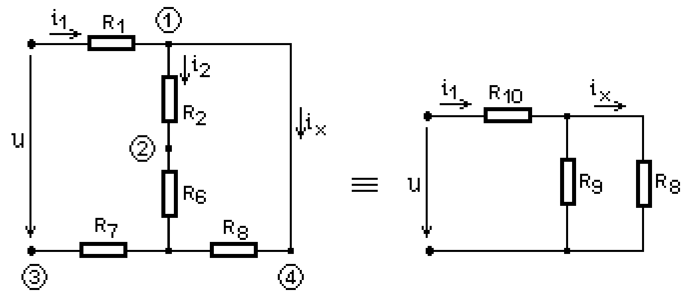
4) $R_\Sigma = R_1 + R_8 = \dfrac{8R}{5}$;

5) $i_1 = \dfrac{u}{R_\Sigma} = \dfrac{5u}{8R}$; 6) $i_3 = i_1 \dfrac{R_5}{R_5 + R_7} = \dfrac{u}{4R}$; 7) $i_2 = i_3 \dfrac{R_4}{R_2 + R_4} = \dfrac{u}{8R}$;

8) $i_X = i_1 - i_2 = \dfrac{u}{2R}$.

II начин: Чрез еквивалентно преобразуване звезда/триъгълник.

1) Преобразуваме триъгълника $\triangle R_3R_4R_5$ от дадената схема в еквивалентна звезда $\perp R_6R_7R_8$ (фиг.2.26.ж) със стойности на съпротивленията:



ж) з)

фиг.2.26

$$R_6 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{R}{3};$$

$$R_7 = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{R}{3}; \quad R_8 = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{R}{3}.$$

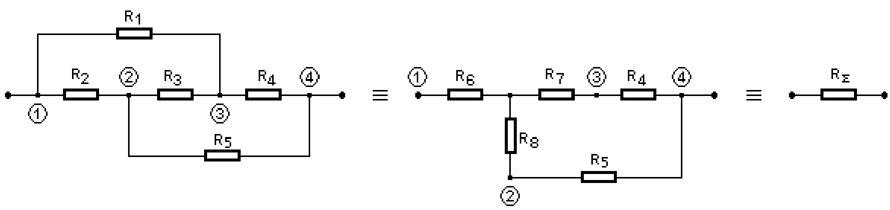
2) Двойките R_1-R_7 и R_2-R_6 са свързани последователно и се преобразуват в R_9 и R_{10}

$$R_9 = R_2 + R_6 = \frac{4R}{3},\; R_{10} = R_1 + R_7 = \frac{4R}{3} \quad \text{- фиг.2.26.з.}$$

3) Тогава токът i_X може да се определи от изразите за просто смесено свързване:

$$i_X = \frac{uR_9}{R_8R_9 + R_9R_{10} + R_8R_{10}} = \frac{u}{2R}.$$

2-25. Да се определи входното съпротивление в показаната на фиг.2.27.а електрическа верига, ако съпротивленията на отделните резистори са еднакви: R_k=R .



а) б) в)

фиг.2.27

Решение:

1) Триъгълника $\triangle R_1R_2R_3$ от дадената схема се преобразува в еквивалентна звезда $\curlywedge R_6R_7R_8$, както е показано на фиг.2.27.б*:

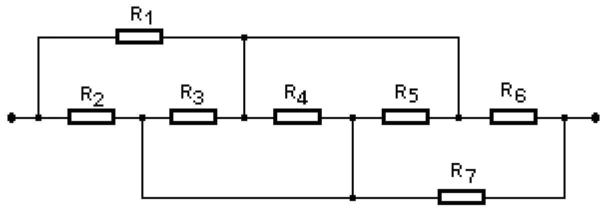
$$R_6 = R_7 = R_8 = \frac{R}{3}.$$

2) Двойките R_7-R_4 и R_8-R_5 са свързани паралелно помежду си и последователно на R_6:

$$R_\Sigma = R_6 + \frac{(R_4 + R_7)(R_5 + R_8)}{(R_4 + R_7) + (R_5 + R_8)} = \frac{R}{3} + \frac{2R}{3} = R \quad \text{- фиг.2.27.в.}$$

*Съществуват и други варианти за преобразуване, в това число и от звезда в триъгълник.

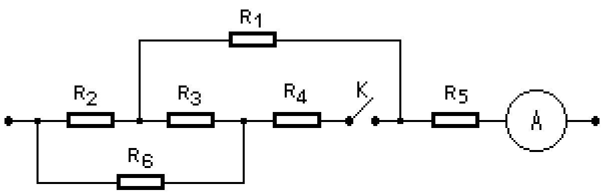
2-26. Да се определи входното съпротивление на двуполюсника (фиг.2.28), ако $R_k=R$.



фиг.2.28

Отг.: $R_{\Sigma} = R$.

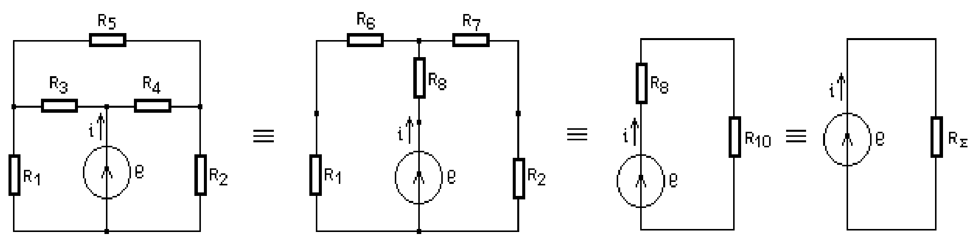
2-27. Преди затварянето на ключ *K* във веригата на фиг.2.29 амперметърът има показание $i_A=12A$. Какво ще бъде показанието му след затваряне на ключа ако съпротивленията са еднакви $R_k=R$?



фиг.2.29

Отг.: $i_A=16A$.

2-28. Да се определят входното съпротивление и входният ток на дадената на фиг.2.30.а верига ако е дадено, че $R_k=R$.



а) б) в) г)

фиг.2.30

<u>*Решение*</u>:

1) Преобразуваме $\triangle R_3R_4R_5$ от дадената схема в еквивалентна звезда $\curlywedge$ $R_6R_7R_8$ - фиг.2.30.б:

$$R_6 = R_7 = R_8 = \frac{R}{3}.$$

2) Двойките R_1,R_6 и R_2,R_7 са свързани паралелно помежду си и са еквивалентни на R_{10}:

$$R_{10} = \frac{(R_1 + R_6)(R_2 + R_7)}{(R_1 + R_6) + (R_2 + R_7)} = \frac{2R}{3} \text{ - фиг.2.30.в.}$$

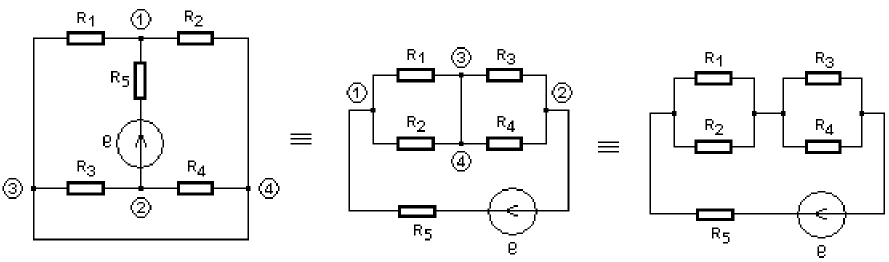
3) Входното съпротивление е

$$R_\Sigma = R_8 + R_{10} = \frac{R}{3} + \frac{2R}{3} = R \text{ - фиг.2.30.г.}$$

4) Входният ток е

$$i = \frac{e}{R_\Sigma} = \frac{e}{R}.$$

2-29. Да се определи тока през източника на показаната на фиг.2.31.а електрическа верига, ако $R_k=R$.



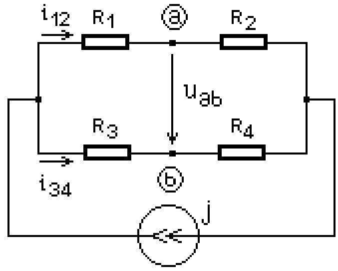
а) б) в)

фиг.2.31

Упътване: Дадената схема е еквивалентна на схемите от фиг.2.31.б и фиг.2.31.в.

$$Отг.: \; i = \frac{e}{R_\Sigma} = \frac{e}{2R}$$

2-30. Да се определи напрежението u_{ab} в показаната на фиг.2.32 верига, ако е дадено: $j=10A$, $R_1=R_4=50\Omega$ и $R_2=R_3=100\Omega$.



фиг.2.32

<u>Решение</u>:

Напрежението u_{ab} се определя от *II закон на Кирхоф* по един от възможните контури от т. *a* към т. *b*:

$$u_{ab} = -R_1 i_{12} + R_3 i_{34} = R_2 i_{12} - R_4 i_{34}.$$

Резисторите R_1 и R_2, както и R_3 , R_4 са свързани последователно и в тях текат едни и същи токове, съответно i_{12} и i_{34}. Стойностите на тези токове са:

$$i_{12} = j\frac{(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)} = 10\frac{150}{300} = 5A$$

и

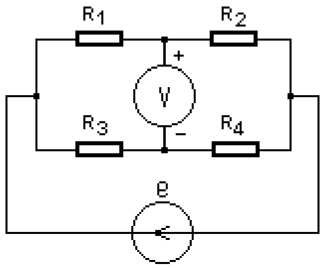
$$i_{34} = j - i_{12} = 10 - 5 = 5A.$$

За напрежението u_{ab} се получава

$$u_{ab} = 100.5 - 50.5 = 250V .$$

Такова би било и показанието на идеален волтметър, включен между възли *a* и *b*, с полярност ”+” към т. *a* и ”–” към т. *b*.

2-31. Определете стойността на е.д.н. на източника *e* (фиг.2.33), ако показанието на волтметъра е $U_V=90V$ и параметрите на елементите са $R_1=30\Omega$, $R_2=120\Omega$ и $R_3=R_4=60\Omega$. Волтметърът е идеален ($R_V \to\infty$).

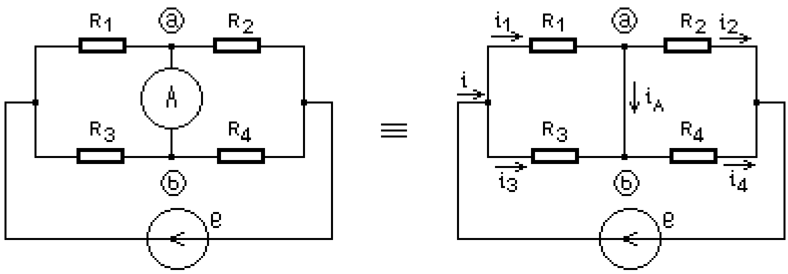


фиг.2.33

Отг.: e=300V.

2-32. Дадената схема на фиг.2.34.а е Уитстонов мост, който се използва за измерване на съпротивления. Ако е дадено, че $e=18V$, $R_1=3\Omega$, $R_2=12\Omega$, $R_3=R_3=6\Omega$, да се определи:

1. Показанието и полярността на включване на амперметъра, ако уредът се приеме за идеален;
2. Условието за равновесие на моста.



а) б)

фиг.2.34

<u>Решение</u>:

1. Идеалният амперметър има вътрешно съпротивление нула $(R_A \to 0)$ и се заменя с проводник, както е показано на фиг.2.34.б. При така избрани посоки на токовете в отделните клонове, по *I закон на Кирхоф*, токът през амперметъра е:

$$i_A = i_1 - i_2 .$$

За да се определи показанието на уреда, последователно се намира:

1) Входното съпротивление на ел. верига

$$R_{\Sigma} = R_{13} + R_{24} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 2 + 4 = 6\Omega \,.$$

2) Входния ток

$$i = \frac{e}{R_{\Sigma}} = 3A \,.$$

3) Токовете

$$i_1 = i\frac{R_3}{R_1 + R_3} = 3\frac{6}{9} = 2A \quad \text{и} \quad i_2 = i\frac{R_4}{R_2 + R_4} = 3\frac{6}{18} = 1A \,.$$

4) Токът през амперметъра

$$i_A = 2 - 1 = 1A \,.$$

За да се отклонява стрелката на уреда в правилна посока, тока през него трябва да протича от извод ”+” към извод ”–”, т.е. свързването трябва да бъде ”+” към т. *a* и ”–” към т. *b*.

2. Мостът е в равновесие, когато през амперметъра не протича ток, т.е.

$$i_A = 0 \,.$$

Това е възможно при изпълнено равенство

$$i_1 = i_2 \,.$$

След приравняване на изведените по-горе изрази за токовете се получава и аналитичният израз, при който мостът е в равновесие:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \,.$$

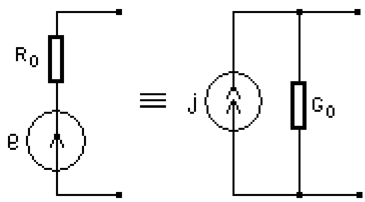
2-33. Да се определи стойността на съпротивлението R_1 от схемата на фиг.2.34.а, ако мостът е в равновесие и стойностите на останалите съпротивления са $R_2=150\Omega$, $R_3=60\Omega$, $R_4=100\Omega$.

Отг.: $R_1=90\Omega$.

2.3.2. Еквивалентно преобразуване на паралелни активни клонове

1. Еквивалентна замяна на източник на напрежение с източник на ток и обратно

Източник на напрежение с е.д.н. e и вътрешно съпротивление R_0 може да бъде заменен с източник на ток с е.д.т. j и вътрешна проводимост G_0, и обратно - фиг.2.35,



а) б)

фиг.2.35

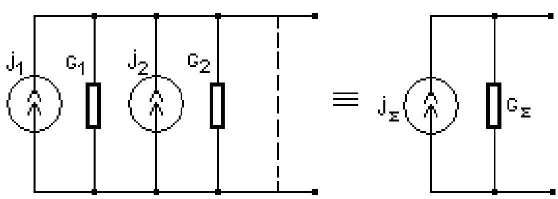
ако са изпълнени следните равенства:

$$j = \frac{e}{R_0},\ G_0 = \frac{1}{R_0};$$

$$e = \frac{j}{G_0},\ R_0 = \frac{1}{G_0}.$$

2. Еквивалентна замяна на паралелно свързани източници на ток.

Няколко паралелно свързани източника на ток могат да се заменят с един еквивалентен източник на ток – фиг.2.36, или на напрежение,



а) б)

фиг.2.36

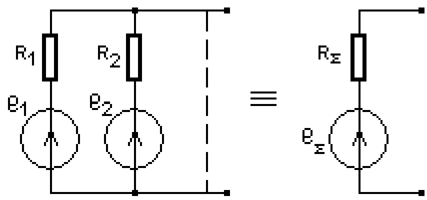
ако са изпълнени равенствата:

$$j_\Sigma = \Sigma \pm j_k,\ G_\Sigma = \Sigma G_k;$$

$$e_\Sigma = \frac{\Sigma \pm j_k}{\Sigma G_k},\ R_\Sigma = \frac{1}{\Sigma G_k}.$$

3. Еквивалентна замяна на паралелно свързани източници на напрежение

Няколко паралелно свързани източника на напрежение могат да се заменят с един еквивалентен източник на напрежение - фиг.2.37,



а) б)

фиг.2.37

ако са изпълнени следните равенствата:

$$e_\Sigma = \frac{\Sigma \pm \dfrac{e_k}{R_k}}{\Sigma \dfrac{1}{R_k}},$$

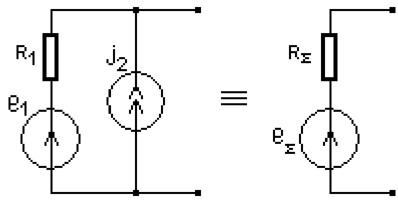
$$R_\Sigma = \frac{1}{\Sigma \dfrac{1}{R_k}}.$$

За случая на два паралелно свързани източници на е.д.н.:

$$e_\Sigma = e_{12} = \frac{\dfrac{e_1}{R_1} + \dfrac{e_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{R_1 + R_2}, \qquad R_\Sigma = R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

4. Еквивалентна замяна на смесени паралелни активни клонове.

Паралелно свързани източник на напрежение с е.д.н. e_1 и вътрешно съпротивление R_1 и източник на ток с е.д.т. j може да бъде заменен с еквивалентен източник на напрежение – фиг.2.38,



а) б)

фиг.2.38

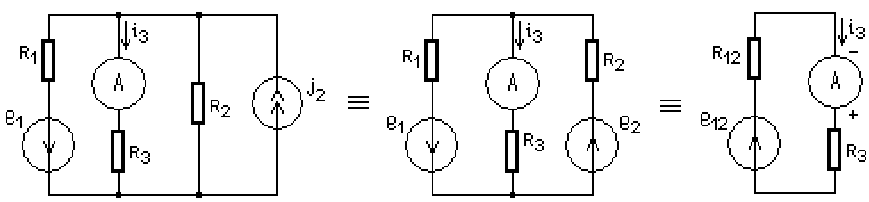
при изпълнени следните равенства:

$$e_{\Sigma} = e_1 \pm R_1 j_2 ,\ R_{\Sigma} = R_1 ,$$

като знакът ”–” се отнася за източник на ток с обратна посока.

<u>Решени примери и задачи</u>

2-34. Определете показанието и полярността на включване на амперметъра в ел. верига на фиг.2.39.а, ако стойностите на елементите във веригата са $e_1=30V, j_2=7,5A, R_1=2\Omega, R_2=8\Omega, R_3=1,4\Omega$.



а) б) в)

фиг.2.39

<u>Решение</u>:

Преобразуваме източника на ток j_2 и паралелно свързаното на него съпротивление R_2 в еквивалентен източник на напрежение с вътрешно съпротивление R_2 и е.д.н. e_2:

$$e_2 = j_2 R_2 = 7{,}5.8 = 60V$$ - 2.39.б.

В получената верига клоновете *1* и *2* са паралелно свързани активни клонове с източници на напрежение, което позволява да бъдат преобразувани в един еквивалентен - фиг.2.39.в -

$$e_{12} = \frac{-e_1 R_2 + e_2 R_1}{R_1 + R_2} = -12V ,$$

като за положителната посока на е.д.н. на еквивалентния източник е избрана посоката на e_2.
Вътрешното съпротивление на еквивалентния източник е

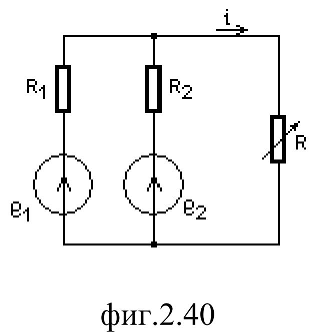
$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2.8}{10} = 1{,}6\Omega .$$

От последната схема, по закона на Ом, за стойността на тока през амперметъра се получава

$$i_3 = \frac{e_{12}}{R_{12} + R_3} = -4A .$$

Действителната посока на тока през амперметъра е обратна на избраната, при което правилната полярност на свързване на амперметъра е означената на схемата.

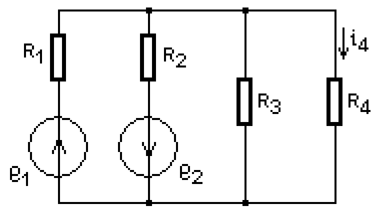
2-35. Два паралелно свързани източника на напрежение захранват консуматор с променливо съпротивление R (фиг.2.40). Определете при каква стойност на това съпротивление в него ще се отделя максимална мощност и стойността на тази мощност, ако $e_1=150V$, $e_2=130V$, $R_1=3\Omega$, $R_2=2\Omega$.



фиг.2.40

Отг.: R=1,2Ω; P=3967,5W.

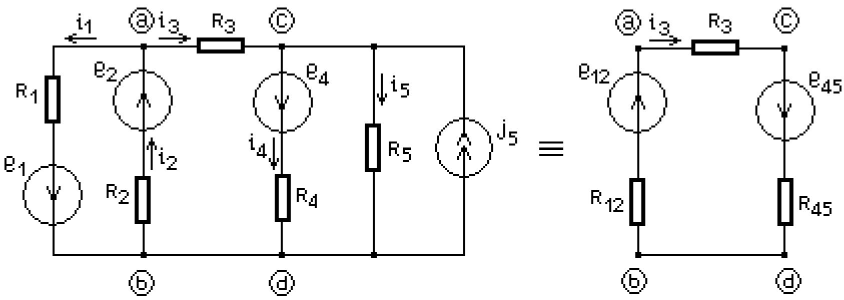
2-36. Като преобразувате паралелните клонове *1*, *2* и *3* от дадената на фиг.2.41 електрическа верига в един еквивалентен, определете тока i_4 в клон *4,* ако за стойностите на елементите е дадено: $e_1=180V$, $e_2=50V$, $R_1=4\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=20\Omega$, $R_4=23,75\Omega$.



фиг.2.41

Отг.: $i_4=1A$.

2-37. Определете клоновите токове в електрическата верига дадена на фиг.2.42.а, ако елементите на веригата имат следните стойности: $e_1=32V$, $e_2=48V$, $e_4=6V$, $j_5=1,5A$, $R_1=R_2=8\Omega$, $R_3=2\Omega$, $R_4=R_5=4\Omega$. За проверка да се направи баланс на мощностите.



а) б)

фиг.2.42

<u>Решение</u>:

Преобразуваме източника на ток j_5 и съпротивлението R_5 в еквивалентен източник на напрежение e_5 с посока, посоката на j_5 и стойност

$$e_5 = j_5 R_5 = 1{,}5.4 = 6V\ ,$$

и вътрешно съпротивление R_5.

В получената верига клоновете *1* и *2* между точките *a* и *b*, както *4* и *5* между *c* и *d*, са паралелно свързани активни клонове, които се преобразуват в еквивалентни източници на напрежение (фиг.2.41.б) с параметри:

$$e_{12} = \frac{-e_1R_2 + e_2R_1}{R_1 + R_2} = 8V \ , \ R_{12} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 4\Omega$$

и

$$e_{45} = \frac{e_4R_5 - e_5R_4}{R_4 + R_5} = 0V \ , \ R_{45} = \frac{R_4R_5}{R_4 + R_5} = 2\Omega \ .$$

От еквивалентната схема по *II закон на Кирхоф* за тока i_3 се получава

$$i_3 = \frac{e_{12} + e_{45}}{R_3 + R_{12} + R_{45}} = 1A \ .$$

Определянето на останалите клонови токове става чрез напреженията u_{ab} и u_{cd} в краищата на клоновете:

$$u_{ab} = e_{12} - i_3R_{12} = 8 - 1.4 = 4V$$

и

$$u_{cd} = -e_{45} + i_3R_{45} = 0 + 1.2 = 2V \ .$$

Тогава за клоновите токове се получават следните стойности:

$$i_1 = \frac{e_1 + u_{ab}}{R_1} = \frac{32 + 4}{8} = 4{,}5A \ ;$$

$$i_2 = \frac{e_2 - u_{ab}}{R_2} = \frac{48 - 4}{8} = 5{,}5A \ ;$$

$$i_4 = \frac{e_4 + u_{cd}}{R_4} = \frac{6 + 2}{4} = 2A \ ;$$

$$i_5 = \frac{u_{cd}}{R_5} = \frac{2}{4} = 0{,}5A \ .$$

Генерирана мощност от източниците е

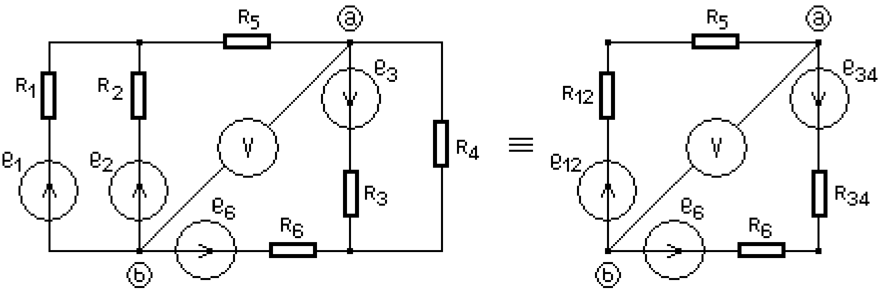
$$\Sigma P_{\Gamma} = e_1i_1 + e_2i_2 + e_4i_4 + u_5j_5 = 32.4{,}5 + 48.5{,}5 + 6.2 + 2.1{,}5 = 423W \ .$$

Консумирана мощност от пасивните елементи е

$$\Sigma P_K = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 + R_5 i_5^2 =$$
$$= 8.4{,}5^2 + 8.5{,}5^2 + 2.1^2 + 4.2^2 + 4.0{,}5^2 = 423W\ .$$

Равенството на мощностите е изпълнено, което доказва верността на получените резултати.

2-38. Определете показанието и полярността на включване на волтметъра в ел. верига показана на фиг.2.43.а, ако стойностите на елементите са: $e_1=160V$, $e_2=100V$, $e_3=120V$, $e_6=160V$, $R_1=6\Omega$, $R_2=14\Omega$, $R_3=12\Omega$, $R_4=8\Omega$, $R_5=4\Omega$, $R_6=2\Omega$.



а) б)

фиг.2.43

Упътване: Дадената схема е еквивалентна на схемата от фиг.2.43.б.

Отг.: $u_{ab}=125{,}6V$.

2.4. Метод на контурните токове

Ако вместо действителните клонови токове в сложна електрическа верига се въведат фиктивни, контурни токове, които протичат в независимите контури, то броят на уравненията, с които може да се анализира една веригата се намалява до броя на независимите контури

$$n=p-(q-1),$$

където p е броят на клоновете, а q броят на възлите във веригата. Достатъчно е да се запишат уравненията по *II закон на Кирхоф*, но с контурните токове. Изборът на независимите контури е произволен.
Общият вид на системата уравнения по метода на контурните токове е следният:

$$R_{pp}i_{pp} + \Sigma \pm R_{pq}i_{qq} = e_{pp},$$

където

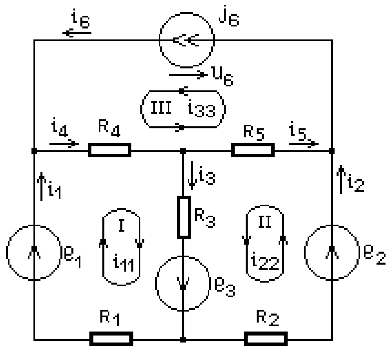
- R_{pp} е собствено контурно съпротивление на контур p, равно на сумата от съпротивленията на всички клонове, участващи в контура;
- R_{pq} - взаимно контурно съпротивление, равно на сумата от съпротивленията на всички клонове, участващи едновременно в контурите p и q; $R_{pq} = R_{qp}$;
- e_{pp} - контурно е.д.н., равно на алгебричната сума от е.д.н. на източниците в контур p. Членовете в тази сума са с положителен знак, ако посоките на съответните източници на е.д.н. съвпадат с посоката на сумиране за контура, и с отрицателен знак ако са обратно насочени;
- i_{pp} и i_{qq} - контурни токове в контури p и q.

Собствените падове на напрежение $R_{pp}i_{pp}$ са винаги с положителен знак, докато знакът на взаимните падове на напрежение $\pm R_{pq}i_{qq}$ е положителен, ако посоките на контурните токове в даден взаимен клон са еднакви, и отрицателен, ако посоките са различни.
Клоновите токове се намират като алгебрична сума от контурните, протичащи през съответния клон. При наличие на източници на ток е по-удобно независимите контури да се изберат така, че клоновете с тези източниците да участват само в един контур. Тогава контурните токове за тези контури са известни и не е необходимо да се записват

уравнения за тях. Определянето на напреженията на източниците на ток става след намиране на клоновите токове.

Решени примери и задачи

2-39. Определете клоновите токове в показаната на фиг.2.44 схема на ел. верига по метода на контурните токове, ако елементите на веригата имат следните стойности: $e_1=55V$, $e_2=25V$, $e_3=30V$, $j_6=5A$, $R_1=10\Omega$, $R_2=8\Omega$, $R_3=7\Omega$, $R_4=8\Omega$, $R_5=5\Omega$. За проверка на получените резултати направете баланс на мощностите.



фиг.2.44

Решение:

Веригата има *6* клона и *4* възела. Броят на независимите контури е:

$$n=p-(q-1)=6-(4-1)=6-3=3бр.$$

Избират се контурите и посоките на контурните токове в тях. Понеже в клона *6* е включен източник на ток, избираме контурите така, че този клон да бъде включен само в един контур. Нека контур *I* включва клонове *1, 4* и *3*, контур *II – 2, 5* и *3*, и контур *III – 4, 5* и *6*. Тогава контурният ток i_{33} ще бъде известен и за контур *III* уравнение не се записва.

В съответствие с избраните контури и посоки на токовете в тях, системата уравнения по *II закон на Кирхоф*, записана с контурните токове е следната:

$$\left| \begin{array}{l} (R_1 + R_4 + R_3)i_{11} + R_3 i_{22} + R_4 i_{33} = e_1 + e_3 \\ R_3 i_{11} + (R_2 + R_5 + R_3)i_{22} - R_5 i_{33} = e_2 + e_3 \\ i_{33} = j_6 = 5A. \end{array} \right.$$

След заместване на стойностите на елементите се получава системата

$$\left| \begin{array}{l} 25i_{11} + 7i_{22} = 45 \\ 7i_{11} + 20i_{22} = 80 \end{array} \right. \quad \text{с решения} \quad \left| \begin{array}{l} i_{11} = 0{,}754A \\ i_{22} = 3{,}736A. \end{array} \right.$$

Клоновите токове се определят като алгебрична сума от контурните както следва:

$$i_1 = i_{11} = 0{,}754A;$$
$$i_2 = i_{22} = 3{,}736A;$$
$$i_3 = i_{11} + i_{22} = 4{,}49A;$$
$$i_4 = i_{11} + i_{33} = 5{,}754A;$$
$$i_5 = -i_{22} + i_{33} = 1{,}264A.$$

Последното неизвестно в тази верига е напрежението u_6 на изводите на източника на ток. Определя се от уравнението по *II закон на Кирхоф* за *III* контур, записано с клоновите токове:

$$u_6 = R_4 i_4 + R_5 i_5 = 52{,}352V.$$

Сумарната генерирана мощност във веригата е сума от мощностите на източниците:

$$\begin{aligned} \Sigma P_Г &= e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 + u_6 j_6 = \\ &= 41{,}47 + 93{,}4 + 134{,}7 + 261{,}76 = 531{,}33W \end{aligned}.$$

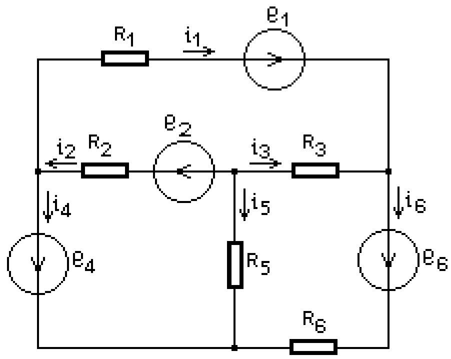
Сумарната консумирана мощност във веригата е сума от мощностите на резисторите:

$$\Sigma P_К = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 + R_5 i_5^2 = 531{,}32W.$$

Разликата, която се получава между генерираната и консумираната мощност е от закръгленията. Относителната грешка, която се допуска при баланса на мощностите, не трябва да надвишава $0{,}25\%$. В случая тя е:

$$\beta,\% = \left|\frac{\Sigma P_К - \Sigma P_Г}{\Sigma P_Г}\right| 100 = \left|\frac{531,32 - 531,33}{531,33}\right| 100 = 0,0019\% < 0,25\%\ .$$

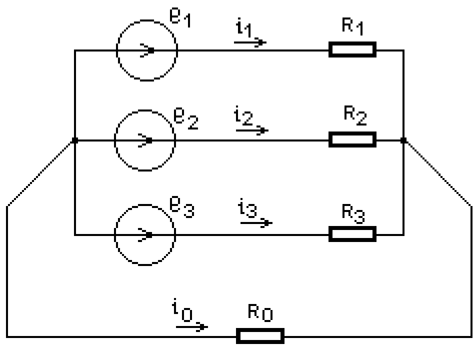
2-40. Да се определят клоновите токове по метода на контурните токове и да се направи баланс на мощностите в ел. верига на фиг.2.45, ако стойностите на елементите са: $e_1=e_2=2V$, $e_4=18V$, $e_6=24V$, $R_1=R_6=2\Omega$, $R_2=4\Omega$, $R_3=R_5=3\Omega$.



фиг.2.45

Отг.: $i_1=1A$; $i_2=2A$; $i_3=2A$; $i_4=1A$; $i_5=-4A$; $i_6=3A$; $\Sigma P_Г = \Sigma P_К = 96W$.

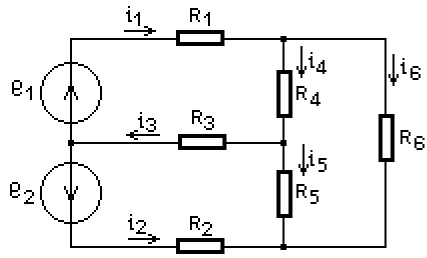
2-41. Да се определят клоновите токове и да се направи баланс на мощностите в ел. верига от фиг.2.46, ако е дадено: $e_1=e_2=e_3=100V$, $R_1=10\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=5\Omega$, $R_0=1\Omega$.



фиг.2.46

Отг.: $i_1=5,56A$; $i_2=27,78A$; $i_3=11,11A$; $i_0=-44,45A$; $\Sigma P_Г = \Sigma P_К = 4445W$.

2-42. Определете клоновите токове и направете баланс на мощностите в електрическата верига, показана на фиг.2.47, ако: $e_1=24V$, $e_2=48V$, $R_1=2\Omega$, $R_2=4\Omega$, $R_3=6\Omega$, $R_4=8\Omega$, $R_5=6\Omega$, $R_6=10\Omega$.

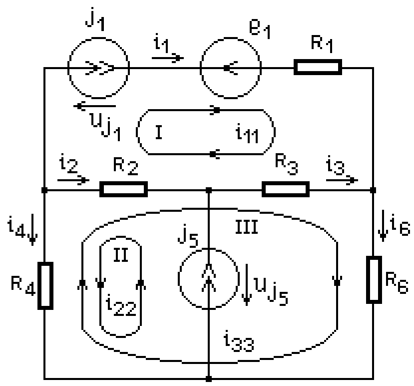


фиг.2.47

Отг.: $i_1=-0{,}278A$; $i_2=3{,}464A$; $i_3=3{,}186A$; $i_4=0{,}681A$;

$i_5=-2{,}505A$; $i_6=-0{,}959A$; $\Sigma P_Г = \Sigma P_К = 159{,}6W$.

2-43. Да се направи баланс на мощностите за веригата от фиг.2.48, ако е дадено, че $e_1=10V$, $j_1=3A$, $j_5=5A$, $R_1=10\Omega$, $R_2=20\Omega$, $R_3=30\Omega$, $R_4=40\Omega$, $R_6=60\Omega$.



фиг.2.48

<u>*Решение*</u>:

За баланса на мощностите е необходимо да бъдат намерени клоновите токове и напреженията на източниците на ток. Броят на независимите контури е

$$n=p-(q-1)=6-(4-1)=6-3=3бр.$$

Веригата съдържа два източника на ток и контурите се избират така, че всеки един от тях да участва в един-единствен контур. Така два от контурните токове са известни:

$$i_{11} = j_1 = 3A \text{ и } i_{22} = j_5 = 5A$$

и е достатъчно да се запише уравнение само за *III*-ти контур

$$(R_2 + R_3 + R_6 + R_4)i_{33} - (R_2 + R_3)i_{11} - (R_2 + R_4)i_{22} = 0,$$

с решение

$$i_{33} = 3A.$$

За клоновите токове се получават следните стойности:

$$i_1 = i_{11} = 3A;$$
$$i_2 = i_{33} - i_{11} - i_{22} = -5A;$$
$$i_3 = i_{33} - i_{11} = 0;$$
$$i_4 = i_{22} - i_{33} = 2A;$$
$$i_6 = i_{33} = 3A.$$

Напреженията на източниците на ток u_{j1} и u_{j5} се определят от уравненията по *II закон на Кирхоф* за *I* и *II* контур:

$$u_{j_1} = R_1 i_1 - R_3 i_3 - R_2 i_2 - e_1 = 140V;$$

$$u_{j_5} = R_3 i_3 + R_6 i_6 = 180V.$$

Сумарната генерирана мощност във веригата е

$$\Sigma P_Г = -e_1 i_1 + u_{j1} j_1 + u_{j5} j_5 = -30 + 420 + 900 = 1290W.$$

Сумарната консумирана мощност във веригата е

$$\Sigma P_К = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 + R_6 i_6^2 =$$
$$= 90 + 500 + 0 + 160 + 540 = 1290W.$$

2.5. Метод на възловите потенциали

Ако клоновите токове в сложна ел. верига се изразят чрез потенциалите на възловите точки между които протичат, то броят на уравненията с които може да се анализира веригата се свежда до броя на независимите възли: *(q–1)*. Достатъчно е да се запишат уравненията по *I закон на Кирхоф*, в които неизвестни са потенциалите на възловите точки. На възела, за който не се записва уравнение се задава потенциал нула *(V=0)*.
Общият вид на системата уравнения по метода на възловите потенциали е следният:

$$G_{pp}V_p - \Sigma G_{pq}V_q = i_{(p)},$$

където

- G_{pp} е собствена възлова проводимост, равна на сумата от проводимостите на всички клонове, свързани във възела *p*;

- G_{pq} - взаимна възлова проводимост, равна на сумата от проводимостите на всички клонове, свързващи директно възли *p* и *q*. Изпълнено е $G_{pq} = G_{qp}$;

- V_p и V_q са потенциалите на възли *p* и *q*;

- $i_{(p)} = \Sigma \pm G_{pq}e_{pq} + \Sigma \pm j_{pq}$ - "ток на възела *p*", обусловен от източниците, свързани в този възел. Членовете от тези суми са с положителен знак, ако посоките на съответните източници са насочени към възела, и с отрицателен, ако са обратно насочени.

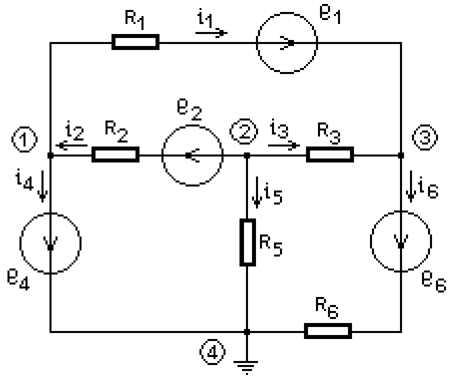
Определянето на клоновите токове става след намиране на потенциалите на възловите точки чрез обобщения закон на Ом:

$$i_{pq} = \frac{V_p \pm e_{pq} - V_q}{R_{pq}}.$$

Ако във веригата има клон с идеален източник на е.д.н. задължително се занулява единият от двата възела, между които е свързан този източник, при което потенциалът на другия възел става известен и за него уравнение не се записва.

Решени примери и задачи

2-44. Да се определят клоновите токове по метода на възловите потенциали за електрическата веригата от фиг.2.49 и да се направи проверка чрез баланса на мощностите, ако елементите имат следните стойности: $e_1=e_2=2V,\ e_4=18V,\ e_6=24V,\ R_1=R_6=2\Omega,\ R_2=4\Omega,\ R_3=R_5=3\Omega$.



фиг.2.49

Решение:

Броят на линейно независимите възли в дадената верига е

$$(q-1)=(4-1)=3бр.$$

Понеже в клон *4* е включен само идеалният източник на е.д.н. e_4, задължително се занулява единия от двата възела, между които е свързан този източник, например $V_4=0$, при което потенциалът на другия възел става известен:

$$V_1=V_4-e_4=-e_4=-18V\ .$$

Неизвестни остават потенциалите V_2 и V_3, и системата уравнения по отношение на тях ще изглежда така:

$$\left|\begin{aligned} &(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5})V_2-\frac{1}{R_3}V_3=-\frac{e_2}{R_2}+\frac{1}{R_2}V_1 \\ &-\frac{1}{R_3}V_2+(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6})V_3=\frac{e_1}{R_1}-\frac{e_6}{R_6}+\frac{1}{R_1}V_1\ . \end{aligned}\right.$$

След заместване със стойностите на елементите системата добива вида:

$$\begin{vmatrix} 0{,}916V_2 - 0{,}333V_3 = -5 \\ -0{,}333V_2 + 1{,}333V_3 = -20\,, \end{vmatrix}$$

с решения

$$\begin{vmatrix} V_2 = -12V \\ V_3 = -18V\,. \end{vmatrix}$$

По *обобщения закон на Ом* за клоновите токове се получават стойностите:

$$i_1 = \frac{V_1 + e_1 - V_3}{R_1} = 1A\,;$$

$$i_2 = \frac{V_2 + e_2 - V_1}{R_2} = 2A\,;$$

$$i_3 = \frac{V_2 - V_3}{R_3} = 2A\,;$$

$$i_5 = \frac{V_2 - V_4}{R_5} = -4A\,;$$

$$i_6 = \frac{V_3 + e_6 - V_4}{R_6} = 3A\,.$$

Токът в клон *4* с идеален източник на е.д.н. се намира по *I закон на Кирхоф* за един от двата възела, между които протича:

$$i_4 = i_2 - i_1 = -i_5 - i_6 = 1A\,.$$

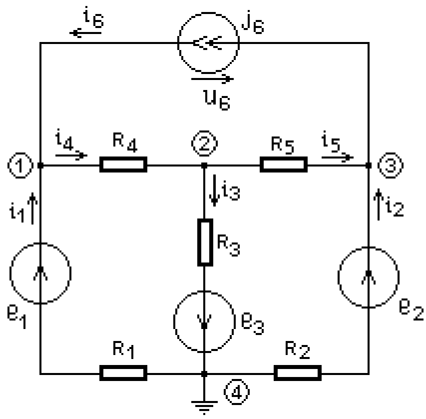
Сумата от мощностите на източниците във веригата е

$$\Sigma P_Г = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_4 i_4 + e_6 i_6 = 2 + 4 + 18 + 72 = 96W\,.$$

Сумата от мощностите на консуматорите във веригата е

$$\Sigma P_К = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_5 i_5^2 + R_6 i_6^2 =$$
$$= 2 + 16 + 12 + 48 + 18 = 96W\,.$$

2-45. Определете неизвестните токове и напрежения на показаната на фиг.2.50 схема на електрическа верига по метода на възловите потенциали, ако е дадено: $e_1=55V$, $e_2=25V$, $e_3=30V$, $j_6=5A$, $R_1=10\Omega$, $R_2=8\Omega$, $R_3=7\Omega$, $R_4=8\Omega$, $R_5=5\Omega$.



фиг.2.50

<u>*Решение*</u>:

Броят на възлите q в дадената верига е 4, при което могат да се запишат

$$(q-1)=(4-1)=3бр.$$

линейно независими уравнения по *I закон на Кирхоф*.
Нека неизвестни са потенциалите на възли 1, 2 и 3, съответно V_1, V_2, и V_3. На потенциалът на възел 4, за който не записваме уравнение, задаваме стойност 0, т.е.

$$V_4=0.$$

Тогава системата уравнения за веригата по метода на възловите потенциали ще бъде:

$$\left|\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{\infty}\right)V_1-\frac{1}{R_4}V_2-\frac{1}{\infty}V_3=\frac{e_1}{R_1}+j_6 \\
-\frac{1}{R_4}V_1+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)V_2-\frac{1}{R_5}V_3=-\frac{e_3}{R_3} \\
-\frac{1}{\infty}V_1-\frac{1}{R_5}V_2+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{\infty}\right)V_3=\frac{e_2}{R_2}-j_6 \\
V_4=0.
\end{array}\right.$$

След заместване се получава

$$\left|\begin{array}{l} 0{,}225V_1 - 0{,}125V_2 = 10{,}5 \\ -0{,}125V_1 + 0{,}468V_2 - 0{,}2V_3 = -4{,}286 \\ \qquad\qquad -0{,}2V_2 + 0{,}325V_3 = -1{,}875\,, \end{array}\right.$$

с решения

$$\left|\begin{array}{l} V_1 = 47{,}46V \\ V_2 = 1{,}43V \\ V_3 = -4{,}89V\,. \end{array}\right.$$

За клоновите токове се получават следните стойности:

$$i_1 = \frac{V_4 + e_1 - V_1}{R_1} = 0{,}754A\,;$$

$$i_2 = \frac{V_4 + e_2 - V_3}{R_2} = 3{,}736A\,;$$

$$i_3 = \frac{V_2 + e_3 - V_4}{R_3} = 4{,}49A\,;$$

$$i_4 = \frac{V_1 - V_2}{R_4} = 5{,}754A\,;$$

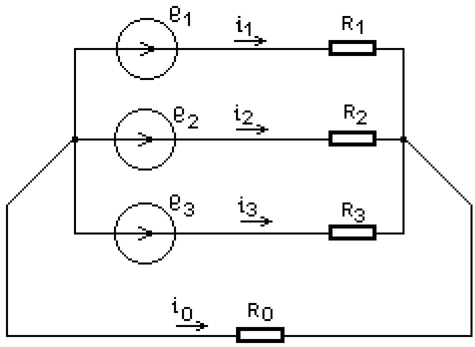
$$i_5 = \frac{V_2 - V_3}{R_5} = 1{,}264A\,.$$

Напрежението на източника на ток, изразено чрез потенциалите на възлите, между които е включен е

$$u_6 = V_1 - V_3 = 52{,}35V\,.$$

*За сравнение виж резултатите от зад. **2-39.**

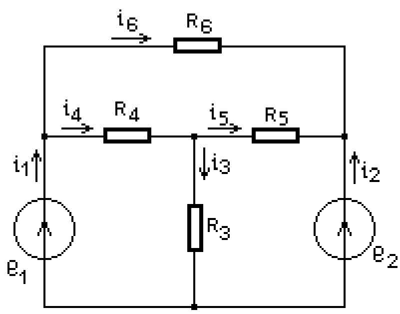
2-46. Като използвате метода на възловите потенциали, определете клоновите токове в електрическата веригата от фиг.2.51, ако за стойностите на елементите е дадено: $e_1=e_2=e_3=100V,\ R_1=10\Omega,\ R_2=2\Omega,\ R_3=5\Omega,\ R_0=1\Omega$.



фиг.2.51

Отг.: i_1=5,56A; i_2=27,78A; i_3=11,11A; i_0=–44,45A.

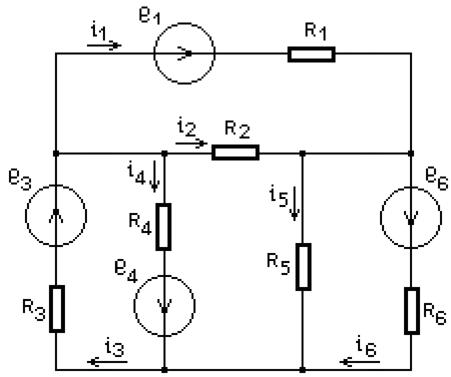
2-47. Да се определят клоновите токове в електрическата верига от фиг.2.52, ако за елементите е дадено: $e_1=30V$, $e_2=20V$, $R_3=20\Omega$, $R_4=30\Omega$, $R_5=20\Omega$, $R_6=8\Omega$.



фиг.2.52

Отг.: i_1=1,75A; i_2=–1A; i_3=0,75A; i_4=0,5A; i_5=–0,25A; i_6=1,25A.

2-48. Определете токовете в клоновете от показаната на фиг.2.53 електрическа верига, ако е дадено: $e_1=15V$, $e_3=5V$, $e_4=100V$, $e_6=28V$, $R_1=15\Omega$, $R_2=7{,}5\Omega$, $R_3=15\Omega$, $R_4=3\Omega$, $R_5=20\Omega$, $R_6=4\Omega$.



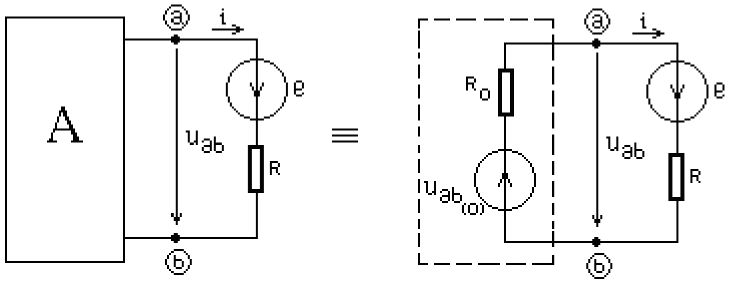
фиг.2.53

Отг.: $i_1=-1A$; $i_2=-4A$; $i_3=5A$; $i_4=10A$; $i_5=-2A$; $i_6=-3A$.

2.6. Теореми на Тевенен и Нортън

1. Теорема на Тевенен

Според *теоремата на Тевенен* всеки активен двуполюсник (електрическа верига, съдържаща източници и разглеждана по отношение на два нейни извода) може да се представи като реален източник на напрежение с е.д.н., равно на напрежението на празен ход на двуполюсника $u_{ab(0)}$ и вътрешно съпротивление R_0, равно на входното му съпротивление по отношение на разглежданите изводи (фиг.2.54.а и б).



а) б)

фиг.2.54

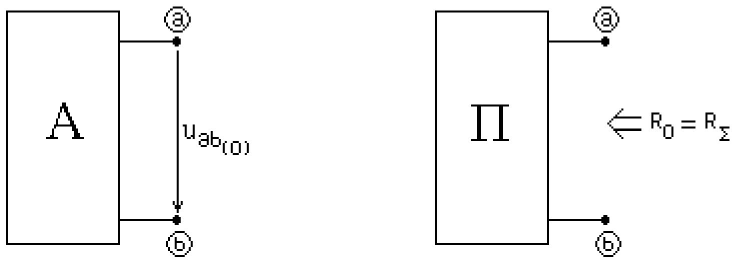
Обикновено теоремата на Тевенен се използва, когато се търси тока в един единствен клон от сложна електрическа верига. По отношение на този клон останалата част от веригата се разглежда като активен двуполюсник *A*, при което токът *i* в клона *a-b* (фиг.2.54.б) може да се определи чрез израза

$$i = \frac{u_{ab(0)} + e}{R_0 + R}$$

При това положение анализа на една верига по теоремата на Тевенен се свежда до определянето на:

1) $u_{ab(0)}$ - определя се от опита на празен ход на двуполюсника ($i = 0\,;\, R \to \infty$) - фиг.2.55.а;

2) R_0 - входното съпротивление на двуполюсника, разглеждан като пасивен (идеалните източници на напрежение се заменят с идеален проводник, а клоновете с идеални източници на ток се прекъсват) - фиг.2.55.б.

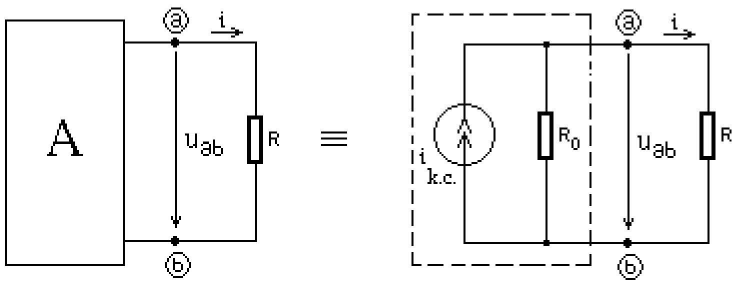


а) б)

фиг.2.55

2. Теорема на Нортън

Според *теоремата на Нортън* всеки активен двуполюсник може да се замени с еквивалентен източник на ток с е.д.т., равен на тока на късо съединение на двуполюсника $i_{k.c.}$ и вътрешно съпротивление R_0, равно на входното му съпротивление по отношение на разглежданите изводи (фиг.2.56.а и б).



а) б)

фиг.2.56

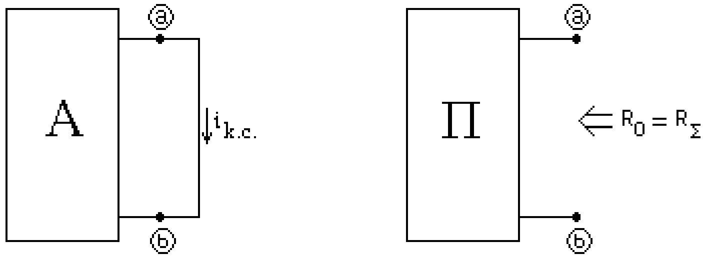
Тогава съгласно теоремата на Нортън токът i в клона a-b (фиг.2.56.б) се определя от израза

$$i = i_{k.c.} \frac{R_0}{R_0 + R}$$

Анализът на дадена верига по теоремата на Нортън се свежда до определянето на:

1) i_{kc} - определя се от опита на късо съединение за двуполюсника ($u = 0\ ;\ R = 0$) - фиг.2.57.а;

2) R_0 - входното съпротивление на двуполюсника, разглеждан като пасивен - фиг.2.57.б.

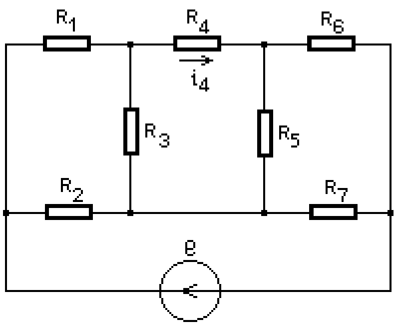


а) б)

фиг.2.57

<u>Решени примери и задачи</u>

2-49. Да се определи токът i_4 в клон *4* от показаната на фиг.2.58 електрическа верига по теоремата на Тевенен, ако е дадено: $R_1=7\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=1\Omega$, $R_4=0{,}51\Omega$, $R_5=4\Omega$, $R_6=2\Omega$, $R_7=4\Omega$, $e=40V$.



фиг.2.58

<u>Решение</u>:

Съгласно *теоремата на Тевенен* токът i_4 е

$$i_4 = \frac{u_{ab(0)}}{R_0 + R_4}\ .$$

1) $u_{ab(0)}=?$

Напрежението на празен ход на двуполюсника се определя от веригата на фиг.2.59.а, в която клона *4* е изключен

$$u_{ab(0)} = R_3 i_{13} + R_5 i_{56} \, ,$$

където

$$i_{13} = i \frac{R_2}{(R_1 + R_3) + R_2} \quad \text{и} \quad i_{56} = i \frac{R_7}{(R_5 + R_6) + R_7} \, ,$$

при което тока през източника е

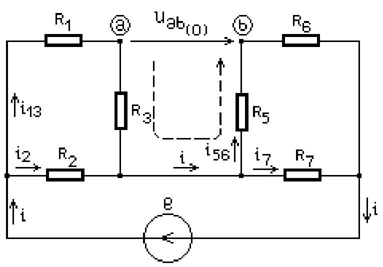
$$i = \frac{e}{\dfrac{(R_1 + R_3)R_2}{(R_1 + R_3) + R_2} + \dfrac{(R_5 + R_6)R_7}{(R_5 + R_6) + R_7}} = 10A \, .$$

След заместване за токовете и за търсеното напрежение се получава

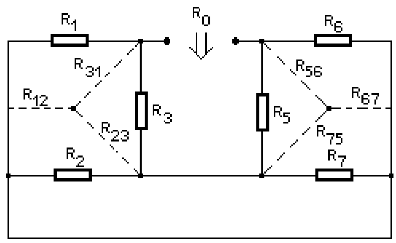
$i_{13}=2A$;

$i_{56}=4A$;

$u_{ab(0)}=18V$.



а)



б)

фиг.2.59

2) $R_0 =?$

Входното съпротивление на двуполюсника, разглеждан като пасивен, се определя от веригата на фиг.2.59.б. За целта преобразуваме триъгълниците $\triangle R_1R_2R_3$ и $\triangle R_5R_6R_7$ в еквивалентни звезди $\perp R_{12}R_{23}R_{31}$ и $\perp R_{56}R_{67}R_{75}$:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 1{,}4\Omega\ ,$$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 0{,}2\Omega\ ,$$

$$R_{31} = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 0{,}7\Omega\ ;$$

$$R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6 + R_7} = 0{,}8\Omega\ ,$$

$$R_{67} = \frac{R_6 R_7}{R_5 + R_6 + R_7} = 0{,}8\Omega\ ,$$

$$R_{75} = \frac{R_7 R_5}{R_5 + R_6 + R_7} = 1{,}6\Omega\ .$$

След това преобразуване входното съпротивление се определя с израза

$$R_0 = R_{31} + \frac{(R_{12} + R_{67})(R_{23} + R_{75})}{(R_{12} + R_{67}) + (R_{23} + R_{75})} + R_{56} = 2{,}49\Omega\ .$$

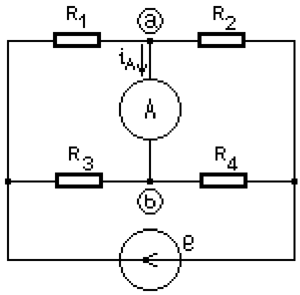
За стойността на търсеният ток се получава:

$$i_4 = \frac{18}{2{,}49 + 0{,}51} = 6\,A\ .$$

2-50. На фиг.2.60 е даден Уитстонов мост със стойности на елементите $R_1=8\Omega$, $R_2=12\Omega$, $R_3=24\Omega$, $R_4=16\Omega$, $e=12V$. Да се определи токът в измервателния диагонал i_A, ако:

1) амперметърът се приеме за идеален ($R_A=0$);

2) съпротивлението на амперметъра е $R_A=1{,}6\Omega$.



фиг.2.60

<u>*Решение*</u>*:*

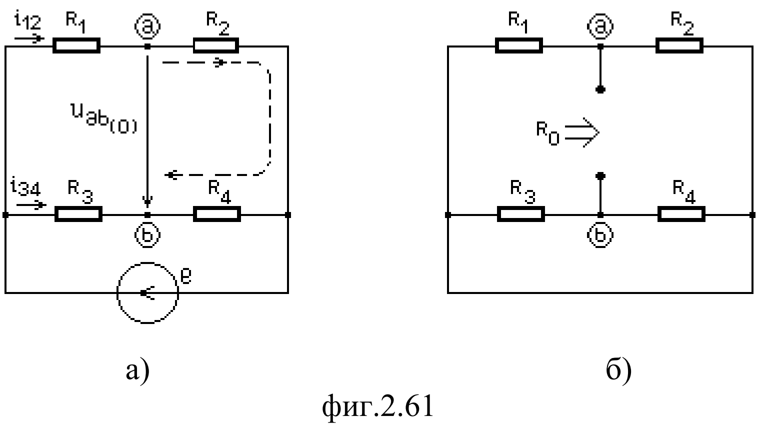
И в двата случая за токът през амперметъра по *теоремата на Тевенен* е в сила изразът:

$$i_A = \frac{u_{ab(0)}}{R_0 + R_A}.$$

1) $u_{ab(0)}$*=?*

Напрежението на празен ход на двуполюсника се определя по *II закон на Кирхоф* след прекъсване на клона с амперметъра (фиг.2.61.а):

$$u_{ab(0)} = R_2 i_{12} - R_4 i_{34}.$$



а) б)

фиг.2.61

За тази цел намираме токове i_{12} и i_{34}:

$$i_{12} = \frac{e}{R_1 + R_2} = 0{,}6\,A \text{ и } i_{34} = \frac{e}{R_3 + R_4} = 0{,}3\,A,$$

а след това и напрежението

$$u_{ab(0)} = 2{,}4V.$$

2) $R_0 = ?$

Входното съпротивление на двуполюсника, разглеждан като пасивен по отношение на изводите *a-b*, се определя от веригата на фиг.2.61.б с израза

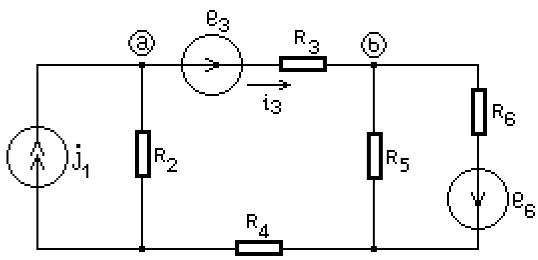
$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 14{,}4\Omega.$$

Токовете в измервателния диагонал за двата случая са:

$$1)\; i_A = \frac{2{,}4}{14{,}4 + 0} = 0{,}167\,A.$$

$$2)\; i_A = \frac{2{,}4}{14{,}4 + 1{,}6} = 0{,}15\,A.$$

2-51. Да се определи токът i_3 във веригата от фиг.2.62 по теоремите на Тевенен и Нортън при дадени: $j_1=5A,\ e_3=20V,\ e_6=100V,\ R_2=20\Omega,\ R_3=30\Omega,\ R_4=6\Omega,\ R_5=40\Omega,\ R_6=60\Omega$.



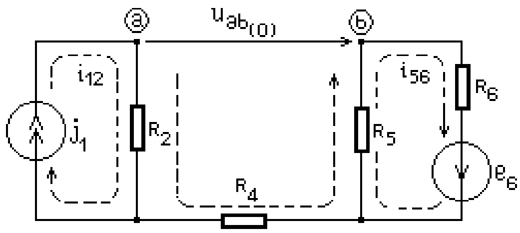
фиг.2.62

<u>*Решение*</u>:

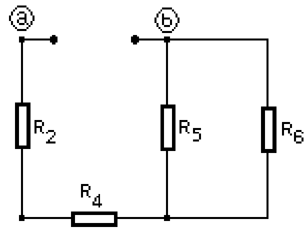
1. По *теоремата на Тевенен* токът i_3 е

$$i_3 = \frac{u_{ab(0)} + e_3}{R_0 + R_3}.$$

1) Напрежението на празен ход на двуполюсника $u_{ab(0)}$ се определя от схемата на фиг.2.63.а, в която клонът *3* е изключен



а)



б)

фиг.2.63

$$u_{ab(0)} = R_2 i_{12} + R_5 i_{56} = 140V \ ,$$

където

$$i_{12} = j_1 = 5A \, , \ i_{56} = \frac{e_6}{R_5 + R_6} = 1A \, .$$

2) Еквивалентното съпротивление R_0 се определя от схемата на фиг.2.63.б.:

$$R_0 = R_2 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = 50\Omega \ .$$

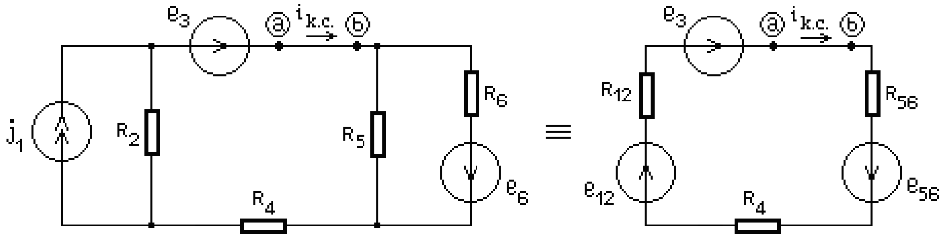
За стойността на търсения ток се получава:

$$i_3 = \frac{140 + 20}{50 + 30} = 2A \ .$$

2. Съгласно *теоремата на Нортън* токът i_3 е

$$i_3 = i_{k.c.} \frac{R_\Sigma}{R_\Sigma + R_3} \ .$$

1) Токът на късо съединение на двуполюсника $i_{к.с.}$ се определя от схемата на фиг.2.64.а, в която резисторът R_3 се дава накъсо.



а) б)

фиг.2.64

Схемата се преобразува, както е показано на фиг.2.64.б, при което

$$i_{k.c.} = \frac{e_{12} + e_3 + e_{56}}{R_{12} + R_4 + R_{56}} = 3{,}2A\,,$$

където

$$e_{12} = R_2 j_1 = 100V\,,\quad R_{12} = R_2 = 20\Omega\,,$$

$$e_{56} = \frac{e_5 R_6}{R_5 + R_6} = 40V\,,\quad R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = 24\Omega\,.$$

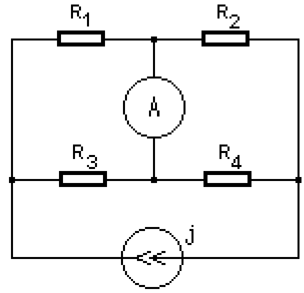
2) За определяне на еквивалентното съпротивление R_0 се използва същата схемата, както и при теоремата на Тевенен - фиг.2.63.б, т.е.

$$R_0 = 50\Omega\,.$$

След заместване за тока i_3 логично се получава същата стойност

$$i_3 = 3{,}2\frac{50}{50 + 30} = 2A\,.$$

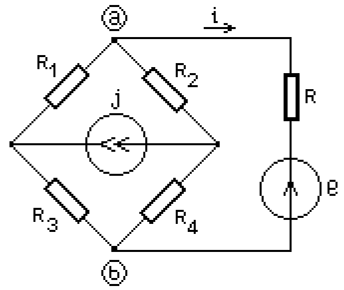
2-52. За мостовата схема на фиг.2.65 е дадено: $R_1=5\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=15\Omega$, $R_4=2\Omega$, $j=3A$. Да се определи токът в измервателния диагонал i_A чрез теоремите на Тевенен и Нортън, ако съпротивлението на амперметъра е $R_A=1{,}25\Omega$.



фиг.2.65

Отг.: $i_A=1,5A$.

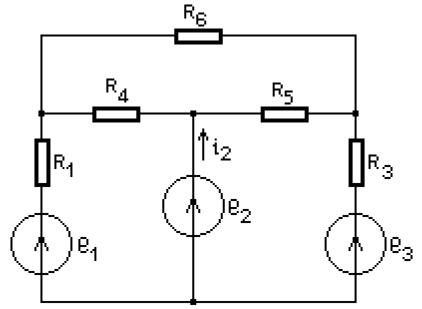
2-53. Да се определи стойността на тока i в клона a-b на веригата от фиг.2.66, ако е дадено: $R_1=10\Omega$, $R_2=15\Omega$, $R_3=15\Omega$, $R_4=10\Omega$, $R=2,5\Omega$, $j=1A$, $e=1V$.



фиг.2.66

Отг.: $i=0,1A$.

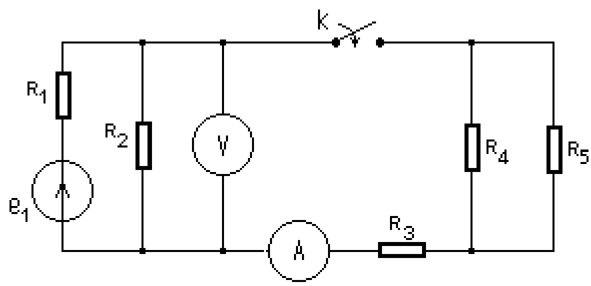
2-54. Да се определи стойността на тока i_2 в клона с идеален източник на е.д.н. по теоремата на Тевенен (фиг.2.67), като при определяне на напрежението на празен ход използвате метода на възловите потенциали. Дадено: $e_1=100V$, $e_2=37V$, $e_3=28V$, $R_1=3\Omega$, $R_3=1\Omega$, $R_4=9\Omega$, $R_5=15\Omega$, $R_6=12\ \Omega$.



фиг.2.67

Отг.: $i=-4A$.

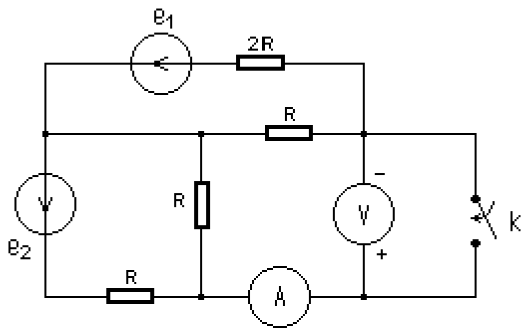
2-55. До затварянето на ключа *k* във веригата на фиг.2.68 волтметърът има показание $u_{V1}=120V$. Да се определи показанието на амперметъра и волтметъра след затварянето на ключа *k*, ако уредите са идеални $(R_V \to \infty; R_A = 0)$ и елементите са: $R_1=8\Omega$, $R_2=6\Omega$, $R_3=15\Omega$, $R_4=100\Omega$, $R_5=70\Omega$. Каква е стойността на $e_1=?$



фиг.2.68

Отг.: $i_A=2A$; $u_{V2}=113,15V$; $e_1=280V$.

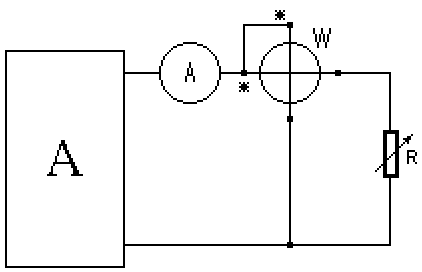
2-56. Показанието на волтметъра при дадената полярност на включване и отворен ключ *k* във веригата на фиг.2.69 е $u_V=100V$. Определете показанието на амперметъра след затварянето на ключа *k* и стойността на е.д.н. e_1, ако останалите елементи са с параметри: $R=20\Omega$, $e_2=80V$.



фиг.2.69

Отг.: $i_A=4{,}29A$; $e_1=180V$.

2-57. При изменение на съпротивлението на товарния резистор, включен към изводите на активния двуполюсник (фиг.2.70), чрез ватметъра и амперметъра са отчетени максимална мощност $P_{max}=500W$ и максимален ток $i_{max}=10A$. Определете параметрите на активния двуполюсник като източник на напрежение.

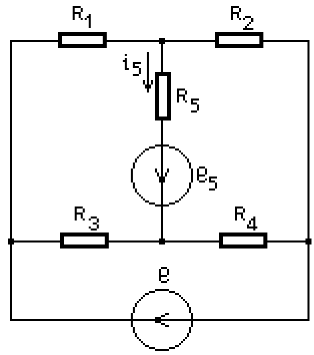


фиг.2.70

Упътване: $P_{max}=\dfrac{u_0^{\,2}}{4R_0}$ и $i=\dfrac{i_{kc}}{2}=\dfrac{i_{max}}{2}=\dfrac{u_0}{2R_0}$.

Отг.: $u_0=200V$; $R_0=20\ \Omega$.

2-58. Да се определи стойността на е.д.н. e във веригата от фиг.2.71, ако е известно, че $i_5=4A$ и са дадени стойностите на елементите: $R_1=10\Omega$, $R_2=15\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=4\Omega$, $R_5=2\Omega$, $e_5=30V$.



фиг.2.71

Отг.: e=100V.

2.7. Принцип на наслагването. Принцип на взаимността

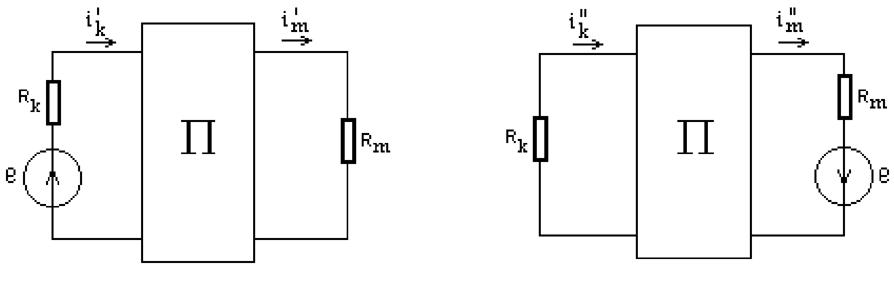
2.7.1. Принцип на наслагването

Според *принципа на наслагването (суперпозицията)* клоновите токове и напреженията между произволни двойки точки в сложна линейна електрическа верига могат да се определят като алгебрична сума от съответните клонови токове и напрежения, породени от самостоятелното действие на отделните източници. Източниците, които не участват в анализа, се заменят с вътрешните си съпротивления, т.е. идеалните източници на напрежение се заменят с идеален проводник, а клоновете с източници на ток се прекъсват.

За определянето на отделните съставки на клоновите токове или напрежения могат да се използват всички методи за анализ. Понеже на практика се налага да се анализират вериги с един източник, затова най-често се използва метода с еквивалентно преобразуване на пасивни участъци.

2.7.2. Принцип на взаимността

1) При действие на източник на напрежение: Ако източник на напрежение, единствен за сложна ел. верига, включен в клон k, обуславя ток i_m' в клон m (фиг.2.72.а), то същият източник, включен в клон m с посока на e посоката на i_m', ще обуславя ток i_k'' в клон k (фиг.2.72.б), като е изпълнено равенството $i_k'' = i_m'$.



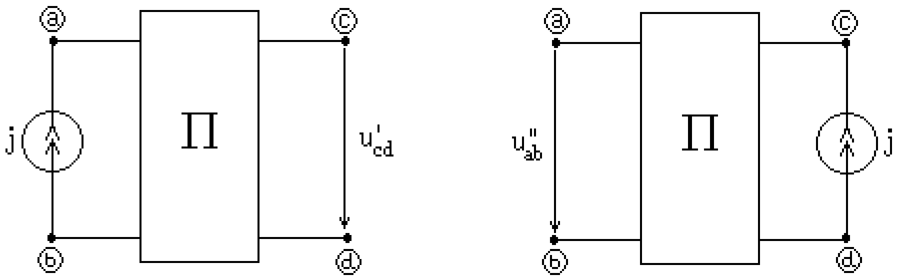
а) б)

фиг.2.72

Ако в клоновете действат различни източници на напрежение, то тогава е в сила следното равенство

$$\frac{e_k}{e_m} = \frac{i_m'}{i_k''} \quad \text{или} \quad i_k'' = i_m' \frac{e_m}{e_k} \ .$$

2) При действие на източник на ток: Ако източник на ток, единствен за сложна ел. верига, включен между точки *a* и *b*, обуславя напрежение u_{cd}' между точки *c* и *d* (фиг.2.73.а), то същият източник, включен между точки *c* и *d* с посока на u_j посоката на u_{cd}', ще обуславя напрежение u_{ab}'' между точки *a* и *b* (фиг.2.73.б), като е изпълнено равенството $u_{ab}'' = u_{cd}'$.



а) б)

фиг.2.73

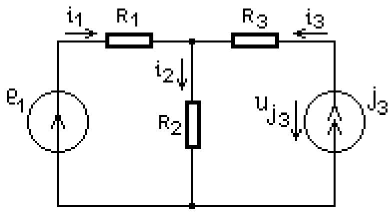
Ако в клоновете действат различни източници на ток, то тогава е в сила равенството

$$\frac{j_k}{j_m} = \frac{u_{cd}'}{u_{ab}''} \quad \text{или} \quad u_{ab}'' = u_{cd}' \frac{j_m}{j_k} \ .$$

Комбинацията от двата принципа - принципа на наслагването и принципа на взаимността - е ефективен метод за намиране на токове и напрежения в сложна електрическа верига.

<u>Решени примери и задачи</u>

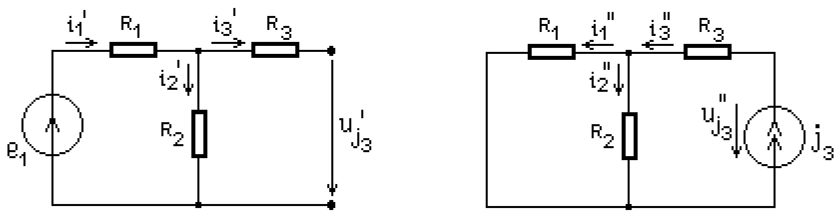
2-59. Като използвате принципа на наслагването, определете неизвестните токове и напрежения в показаната на фиг.2.74 електрическа верига, ако е дадено: $e_1=25V$, $R_1=5\Omega$, $R_2=20\Omega$, $R_3=10\Omega$, $j_3=1A$.



фиг.2.74

Решение:

Неизвестните в дадената верига са клоновите токове i_1 , i_2 и напрежението u_{j3} на източника на ток. Съгласно принципа на наслагването те се определят като алгебрична сума от токовете и напреженията, обусловени от самостоятелното действие на източниците във веригата. Допълнителните вериги, които трябва да се анализират, са дадена на фиг.2.75.а и б.



а) б)

фиг.2.75

Както се вижда, изключените източници се заменят с вътрешните си съпротивления, j_3 прекъсва клона *3* (фиг.2.75.а), а e_1 се заменя с идеален проводник (фиг.2.75.б). Двете вериги са прости и най-лесно се анализират чрез преобразуване. При избраните положителни посоки за стойностите на съответните съставки се получават стойностите:

1) за схемата от фиг.2.75.а.

$$i_1' = i_2' = \frac{e_1}{R_1 + R_2} = 1A ;$$

$$i_3' = 0 ;$$

$$u_{j3}' = -R_3 i_3' + R_2 i_2' = R_2 i_2' = 20V .$$

2) за схемата от фиг.2.75.б.

$$i_1'' = j_3 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}8A ;$$

$$i_2'' = j_3 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0{,}2A ;$$

$$u_{j3}'' = R_3 j_3 + R_2 i_2'' = 14V .$$

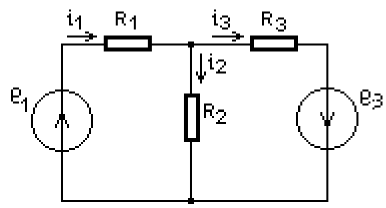
Алгебричната сума от двете съставки дава стойностите на търсените величини:

$$i_1 = i_1' - i_1'' = 0{,}2A ;$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' = 1{,}2A ;$$

$$u_3 = u_{j3}' + u_{j3}'' = 34V .$$

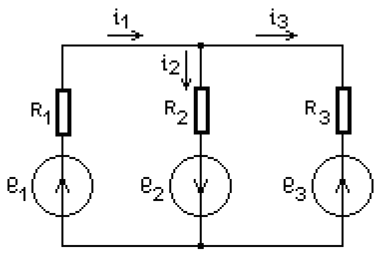
2-60. Определете клоновите токове по принципа на наслагването за веригата от фиг.2.76, ако стойностите на елементите са: $e_1=100V$, $e_3=50V$, $R_1=3\Omega$, $R_2=6\Omega$, $R_3=3\Omega$. Направете проверка чрез баланса на мощностите.



фиг.2.76

Отг.: $i_1=26{,}67A$; $i_2=3{,}33A$; $i_3=23{,}33A$.

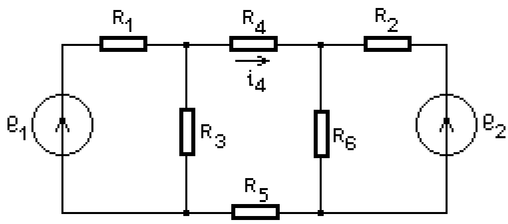
2-61. Определете клоновите токове във веригата от фиг.2.77, ако за стойностите на елементите е дадено: $e_1=50V$, $e_2=30V$, $e_3=60V$, $R_1=25\Omega$, $R_2=15\Omega$, $R_3=30\Omega$.



фиг.2.77

Отг.: i_1=1,428A; i_2=2,952A; i_3=–1,524A.

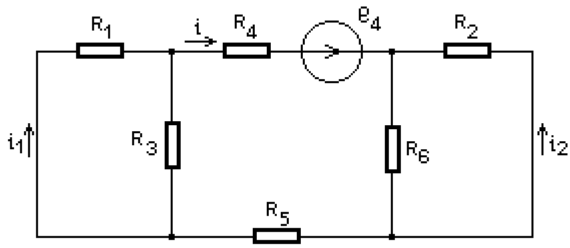
2-62. Като използвате принципа на взаимността, намерете тока i_4 в показаната на фиг.2.78 верига, ако е дадено: $e_1=80V$, $e_2=120V$, $R_1=6\Omega$, $R_2=8\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=5\Omega$, $R_5=7\Omega$, $R_6=2\Omega$.



фиг.2.78

<u>*Решение*</u>:

Според принципа на взаимността, ако един - единствен източник на напрежение e_4 в клон *4* поражда ток i_1 в клона *1* (и i_2 в клона *2*, фиг.2.79), то същият източник, включен в клон *1* (респективно клон *2)* ще породи ток в клона *4* със същата стойност.



фиг.2.79

Тогава

$$i_4 = i_1 \frac{e_1}{e_4} + i_2 \frac{e_2}{e_4} .$$

*На практика тези две съставки съответстват на съставките от принципа на наслагването, т.е.

$$i_4 = i_4' + i_4'' ,$$

където i_4' и i_4''са токовете, обусловени от самостоятелното действие съответно на e_1 и e_2.
Стойността на e_4 е произволна и може да бъде избрано

$$e_4=e_1=80V.$$

Тогава за търсените токове се получава:

$$i = \frac{e_4}{R_\Sigma} = \frac{e_4}{R_4 + R_5 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_6}{R_2 + R_2}} = \frac{80}{16} = 5A ,$$

откъдето

$$i_1 = i \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 2A , \; i_2 = -i \frac{R_6}{R_2 + R_6} = -1A$$

и

$$i_4 = i_1 \frac{e_1}{e_4} + i_2 \frac{e_2}{e_4} = i_1 + i_2 \frac{e_2}{e_1} = 2 - 1 \frac{120}{80} = 0{,}5A .$$

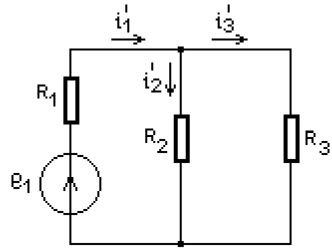
2-63. Да се определи клоновият ток i_1 в електрическата веригата от фиг.2.77 (зад.**2-61)**, като се използва принципът на взаимността.

Решение:

Според принципа на взаимността

$$i_1 = i_1' + i_2' \frac{e_2}{e_1} - i_3' \frac{e_3}{e_1} ,$$

където i_1', i_2' и i_3' са токовете, породени от самостоятелното действие на e_1 (фиг.2.80), като минусът пред третия член на сумата се дължи на различните посоки на i_3' и e_3.



фиг.2.80

Стойностите на тези токове са:

$$i_1' = \frac{e_1}{R_\Sigma} = \frac{e_1}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{50}{35} = 1{,}428\,A\,;$$

$$i_2' = i_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0{,}952\,A\,;$$

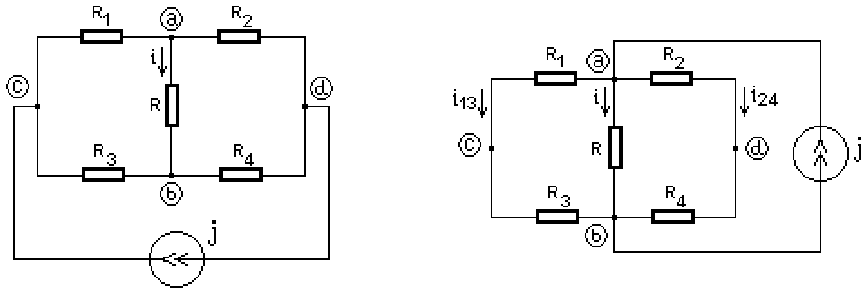
$$i_3' = i_1' - i_2' = 0{,}476\,A\,,$$

откъдето

$$i_1 = i_1' + i_2' \frac{e_2}{e_1} - i_3' \frac{e_3}{e_1} = 1{,}428 + 0{,}952 \frac{30}{50} - 0{,}476 \frac{60}{50} = 1{,}428\,A\,.$$

По аналогичен начин могат да се намерят и токовете в останалите два клона. За проверка могат да се използват получените резултати от зад. **2-61**.

2-64. Като използвате принципа на взаимността, определете тока *i* в измервателния диагонал на моста, захранен от източник на ток (фиг.2.81.а). ако е дадено: $j=0{,}1A$, $R_1=R_4=40\Omega$, $R_2=R_3=60\Omega$, $R=50\Omega$.



а) б)

фиг.2.81

Решение:

Ако е известно напрежението u_{ab} в краищата на диагонала, търсения ток може да бъде определен по *закона на Ом*

$$i = \frac{u_{ab}}{R}.$$

Съгласно принципа на взаимността, ако един - единствен източник на ток j, включен между точки c и d, поражда напрежение u_{ab} между точки a и b, то същият източник, включен между точки a и b, ще поражда напрежение u_{cd} между точки c и d, като

$$u_{ab} = u_{cd}.$$

По този начин след преобразуване се получава веригата от фиг.2.81.б. От нея изразът за търсеното напрежение е

$$u_{ab} = u_{cd} = R_3 i_{13} - R_4 i_{24}.$$

По метода на възловите потенциали, ако $V_b=0$, за потенциала V_a на възел a се получава

$$V_a = \frac{i_{(a)}}{G_{aa}} = \frac{j}{\frac{1}{R_1+R_3} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2+R_4}} = \frac{0,1}{0,01+0,02+0,01} = 2,5V,$$

от където

$$i_{13} = \frac{V_a}{R_1+R_3} = 0,025A \text{ и } i_{24} = \frac{V_a}{R_2+R_4} = 0,025A.$$

Тогава

$$u_{cd} = R_3 i_{13} - R_4 i_{24} = 60.0,025 - 40.0,025 = 0,5V$$

и

$$i = \frac{u_{cd}}{R} = \frac{0,5}{50} = 0,01A \,.$$

ГЛАВА 3

Електрически вериги за променлив ток. Символичен метод за анализ на синусоидални режими

В електрическите вериги за променлив ток действат източници на променливи напрежения и токове, като най-широко разпространени са веригите с периодични синусоидални режими. Процесите, които протичат в тези вериги, са значително по-сложни и се дължат на променливия характер на електромагнитните полета. Появяват се явленията самоиндукция, взаимна индукция, фазово изместване и др., при което анализът на тези вериги се усложнява.

3.1. Параметри на синусоидалните напрежения и токове. Мощности при синусоидални режими. Символично представяне на синусоидални и несинусоидални величини с комплексни числа

3.1.1. Параметри на синусоидалните напрежения и токове

1. Моментна стойност

Общият вид на функциите на синусоидалните напрежения и токове е следният:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \text{ и } i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

където

- U_m, I_m са максималните или амплитудни стойности на синусоидалните величини;

- $(\omega t + \psi_u)$, $(\omega t + \psi_i)$ - фази на синусоидалните величини;

- ψ_u, ψ_i - начални фази - определят стойността на величините в началния момент ($t=0$);

- T - период на синусоидалната величина - времето, за което величината прави едно пълно изменение, [s];

- $f = \dfrac{1}{T}$ - честота - броят на периодите за една секунда, [Hz];

- $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ - ъглова честота - ъгълът, с който фазата на синусоидалната величина нараства за един период, [$rad/s \equiv s^{-1}$];

- $\varphi = \psi_u - \psi_i$ - фазова разлика - разликата между началните фази на напрежението и тока в една верига.

2. Средна стойност - средноаритметичната стойност на синусоидалната величина за един положителен полупериод:

$$U_{cp} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t)dt = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m;$$

$$I_{cp} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t)dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m.$$

3. Ефективна стойност - под ефективна (средноквадратична) стойност на един синусоидален ток се разбира такава стойност на постоянен ток, при която за едно и също време двата тока предизвикват един и същ енергиен ефект в два еднакви резистора:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m.$$

Под ефективна стойност на едно синусоидално напрежение се разбира такова постоянно напрежение, което обуславя ток, равен по ефективната стойност на тока, обусловен от синусоидалното напрежение:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t)dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m.$$

4. Коефициент на формата - отношението на ефективната към средната стойност на една синусоидална величина:

$$k_f = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

3.1.2. Мощности при синусоидални режими

Ако в една електрическа верига общият вид на функциите на входното напрежение и входния ток е

$$u(t) = U_m \sin \omega t, \quad i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

то в такава верига се дефинират следните видове мощности:

1. Моментна мощност - произведението от моментните стойности на напрежението и тока във веригата

$$p(t) = u(t).i(t) = U_m \sin \omega t . I_m \sin(\omega t - \varphi) =$$
$$= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi).$$

Моментната мощност е сума от:

- постоянна съставка - $\{UI \cos \varphi\}$

и

- променлива съставка - $\{UI \cos(2\omega t - \varphi)\}$, която се изменя с двойно по-голяма честота.

Физическият смисъл на моментната мощност е скорост на обмен на енергия между източника и консуматора в електрическата верига.

2. Активна мощност - средната стойност на моментната мощност за един период, която съответства на постоянната съставка:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = UI \cos \varphi, \ [W].$$

Това е мощността, свързана с електрическата енергия, която се преобразува необратимо в друг вид (напр. топлинна, светлинна, механична и др.).

3. Пълна мощност - амплитудната стойност на променливата съставка на моментната мощност:

$$S = UI, \ [VA].$$

Това е най-голямата възможна стойност на активната мощност, която се получава при $cos\varphi=1$.

Отношението

$$\frac{P}{UI} = \frac{P}{S} = \cos\varphi$$

се нарича *фактор на мощността* и показва каква част от пълната мощност е активната, или частта, която отива за извършване на полезна работа.

4. Реактивна мощност

Променливата съставка на моментната мощност може да бъде представена по следния начин:

$$UI\,cos(2\omega t-\varphi)=UI\,cos\,\varphi\,cos\,2\omega t+UI\,sin\,\varphi\,sin\,2\omega t=$$
$$=P\,cos\,2\omega t+Q\,sin\,2\omega t\,.$$

Изразът:

$Q=UI\,sin\,\varphi$, $[VAR]$ се нарича реактивна мощност.

Това е мощността, свързана с енергията, запасявана в електрическите полета на кондензаторите и магнитните полета на бобините.

5. Връзка между различните видове мощности

$$P=UI\,cos\,\varphi=S\,cos\,\varphi\,;$$

$$Q=UI\,sin\,\varphi=S\,sin\,\varphi\,;$$

$$S=UI=\frac{P}{cos\,\varphi}=\frac{Q}{sin\,\varphi}=\sqrt{P^2+Q^2}\,.$$

3.1.3. Символично представяне на синусоидалните величини с комплексни числа

При анализа на електрически вериги в синусоидален режим се извършват математически операции със синусоидални величини. За опростяване на тези действия се използва т. нар. *символичен метод*, при който синусоидалните величини се представят като комплексни числа.

Комплексната функция

$$\underset{\bullet}{u}(t)=U_m e^{j(\omega t+\psi_u)}=U_m\,cos(\omega t+\psi_u)+jU_m\,sin(\omega t+\psi_u)$$

съдържа в имагинерната си част синусоидалната функция и се приема за нейно изображение, т.е:

$$\underset{\bullet}{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = \dot{U}_m e^{j\omega t} \rightarrow U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Величината

$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ - се нарича комплексна амплитудна стойност, а

$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = U\angle\psi_u$ - се нарича комплексна ефективна стойност или *комплекс* на синусоидалната величина.

На практика при анализа на електрическите вериги се работи с комплексите на синусоидалните величини и последните се приемат за определени, когато са намерени техните ефективни стойности и началните им фази.

Ако разгледаме комплекса на синусоидална величина като комплексно число, то последното може да се запише със следните форми (алгебрична, експоненциална и тригонометрична):

$$\dot{U} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{jarctg\frac{b}{a}} = re^{j\psi} = r\cos\psi + jr\sin\psi,$$

където

$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\psi \\ b &= r\sin\psi \end{aligned}\right\}$ - са съответно реална и имагинерна част на комплексното число, а

$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \psi &= arctg\frac{b}{a} \end{aligned}\right\}$ - модул и аргумент на синусоидалната величина.

Модулът на комплексното число съответства на ефективната стойност на синусоидалната величина, а аргументът съответства на началната фаза.

3.1.4. Символично представяне на несинусоидални величини с комплексни числа

Комплексното изображение дава възможност като комплексни числа да бъдат представени и електрически величини, които не са синусоидални функции, като например *импеданс* и *мощност*.

Нека комплексите на напрежението и тока в една верига са съответно

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = U\angle\psi_u \text{ и } \dot{I} = Ie^{j\psi_u} = I\angle\psi_i .$$

1. Комплексно съпротивление (импеданс)

Отношението на комплексите на напрежението и тока в една верига се нарича *комплексно съпротивление* или *комплексен импеданс* на електрическата верига:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = ze^{j\varphi} ,$$

където

- $z = \dfrac{U}{I}$ е модулът на импеданса, равен на отношението на ефективните стойности на напрежението и тока;

- φ е аргументът на импеданса, равен на фазовата разлика във веригата.

2. Комплексна мощност

Произведението от комплекса на напрежението и комплексно спрегнатата стойност на тока се нарича *комплексна мощност*:

$$\dot{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ .$$

Активната мощност е реалната част на комплексната мощност:

$$P = Re\left\{\dot{S}\right\} = UI\cos\varphi ,$$

а реактивната мощност е имагинерната част от комплексната мощност.

$$Q = Im\left\{\dot{S}\right\} = UI\sin\varphi .$$

3.2. Елементарни двуполюсници

3.2.1. Двуполюсник от съпротивителен елемент

Ако на изводите на един съпротивителен елемент с активно съпротивление R е подадено синусоидално напрежение

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

то за тока през R по закона на Ом се получава

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Амплитудната и ефективната стойност са съответно

$$I_m = \frac{U_m}{R}; \; I = \frac{U}{R},$$

а началната фаза на тока и фазовата разлика във веригата са:

$$\psi_i = \psi_u; \; \varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$$

Изразът за комплекса на тока е

$$\dot{I} = Ie^{j\psi_i} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u} = \frac{\dot{U}}{R},$$

откъдето

$$\dot{U} = R\dot{I}.$$

Мощността, която се отделя в елемента

$$\dot{S} = \dot{U} \overset{*}{I} = \left\{UIe^{j\varphi}\right\}_{\varphi=0} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + j0 = P,$$

е чисто активна и може да се определи от изразите:

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

3.2.2. Двуполюсник от индуктивен елемент

Ако на изводите на един индуктивен елемент с индуктивност L е подадено синусоидално напрежение

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

изразът за тока през него е

$$i(t)=\frac{1}{L}\int u(t)dt=\frac{1}{L}\int U_m\,sin(\omega t+\psi_u)dt=\frac{U_m}{\omega L}sin(\omega t+\psi_u-\frac{\pi}{2}).$$

Амплитудната и ефективната стойност на тока в елемента са

$$I_m=\frac{U_m}{X_L};\ I=\frac{U}{X_L},$$

където

$X_L=\omega L$, [Ω] - се нарича индуктивно съпротивление.

Началната фаза на тока и фазовата разлика във веригата са:

$$\psi_i=\psi_u-\frac{\pi}{2};\ \varphi=\psi_u-\psi_i=\frac{\pi}{2}.$$

Комплексът на тока е

$$\dot{I}=Ie^{j\psi_i}=\frac{U}{X_L}e^{j(\psi_u-\frac{\pi}{2})}=\frac{\dot{U}}{jX_L},$$

или

$$\dot{U}=jX_L\dot{I},$$

където jX_L е комплексното съпротивление на индуктивния елемент.

Мощността, която се отделя в елемента

$$\dot{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=\left\{UIe^{j\varphi}\right\}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=UI\,cos\,\varphi+jUI\,sin\,\varphi=0+jQ=jQ,$$

е чисто реактивна и може да се определи от изразите:

$$Q=UI\,sin\,\varphi=X_LI^2=\frac{U^2}{X_L}.$$

3.2.3. Двуполюсник от капацитивен елемент

Ако на изводите на един капацитивен елемент с капацитет C е подадено синусоидално напрежение

$$u(t)=U_m\,sin(\omega t+\psi_u),$$

тока през него е

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = C\frac{dU_m\,sin(\omega t + \psi_u)}{dt} = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}).$$

Амплитудната и ефективната стойност на тока в елемента са:

$$I_m = \frac{U_m}{X_C};\ I = \frac{U}{X_C},$$

където

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, [$\Omega$] - се нарича капацитивно съпротивление.

Началната фаза на тока и фазовата разлика във веригата са:

$$\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2};\ \varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Комплексът на тока е

$$\dot{I} = Ie^{j\psi_i} = \frac{U}{X_C}e^{j(\psi_u + \frac{\pi}{2})} = \frac{\dot{U}}{-jX_C},$$

или

$$\dot{U} = -jX_C\dot{I},$$

където $-jX_C$ е комплексното съпротивление на капацитивния елемент.

Мощността, която се отделя в елемента:

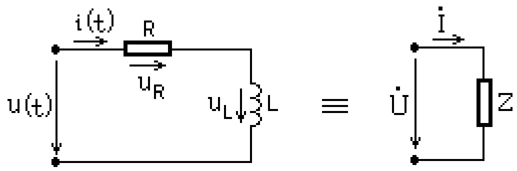
$$\dot{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = \left\{UIe^{j\varphi}\right\}_{\varphi = -\frac{\pi}{2}} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = 0 - jQ = -jQ,$$

е чисто реактивна и може да се определи от изразите:

$$Q = UI\sin\varphi = X_C I^2 = \frac{U^2}{X_C}.$$

Решени примери и задачи

3-1. Двуполюсник от последователно свързани резистор с активно съпротивление $R=10\Omega$ и бобина с индуктивност $L=79,6mH$ е захранен от източник на синусоидално напрежение с моментна стойност $u(t)=311,13\sin 314,16t\,V$ (фиг.3.1.а). Да се определят моментните стойности на тока във веригата, напреженията на резистора и бобината, както и фазовата разлика между входното напрежение и тока. Да се построи векторната диаграма на веригата.



а) б)

фиг.3.1

Решение:

Такава верига се анализира чрез преобразуване. За нея се записва уравнение по II закон на Кирхоф с моментните стойности на напреженията

$$u_R + u_L = u\,,$$

чиито комплексен образ е

$$\dot{U}_R + \dot{U}_L = R\dot{I} + jX_L\dot{I} = (R + jX_L)\dot{I} = Z\dot{I} = \dot{U}\,.$$

Комплексното съпротивление (импеданс) на веригата е сума от комплексните съпротивления на двата елемента (фиг.3.1.б):

$$Z = R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L{}^2}\,e^{jarctg\frac{X_L}{R}} = ze^{j\varphi}\,,$$

където

$X_L = \omega L = 314{,}16.79{,}6.10^{-3} = 25\Omega$ е индуктивното съпротивление на бобината.

Тогава

$$Z = 10 + j25 = \sqrt{10^2 + 25^2}\, e^{jarctg\frac{25}{10}} =$$

$$= 26{,}93e^{j68{,}2^\circ} = 26{,}93\angle 68{,}2^\circ\ \Omega .$$

Аргументът на импеданса е точно фазовата разлика във веригата:

φ=68,2°.

Комплексът на тока във веригата е

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U\angle\psi_u}{z\angle\varphi} = \frac{220\angle 0^\circ}{26{,}93\angle 68{,}2^\circ} = 8{,}17\angle -68{,}2^\circ\ A ,$$

а неговата моментна стойност

$$i(t) = \sqrt{2}.8{,}17.sin(314{,}16t - 68{,}2^\circ)\, A .$$

Комплексната ефективна стойност на напрежението върху резистора е

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = 10.8{,}17\angle -68{,}2^\circ = 81{,}7\angle -68{,}2^\circ\ V ,$$

откъдето за моментната стойност се получава

$$u_R(t) = \sqrt{2}.81{,}7.sin(314{,}16t - 68{,}2^\circ)V .$$

По аналогичен начин за напрежението на бобината:

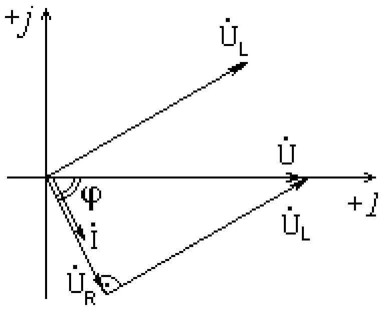
$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I} = j25.8{,}17\angle -68{,}2^\circ =$$

$$= 25\angle 90^\circ.8{,}17\angle -68{,}2^\circ = 204{,}25\angle 21{,}8^\circ\ V$$

и

$$u_L(t) = \sqrt{2}.204{,}25.sin(314{,}16t + 21{,}8^\circ)V .$$

Векторната диаграма на веригата включва комплексите на напреженията на елементите и входното напрежение, както и комплекса на тока в обща диаграма. Тя е построена принципно на фиг.3.2.



фиг.3.2

От векторната диаграма може да се направи проверка на получените резултати. Напреженията U_R, U_L, U образуват правоъгълен триъгълник, при което за връзката между ефективните стойности на тези напрежения е в сила равенството:

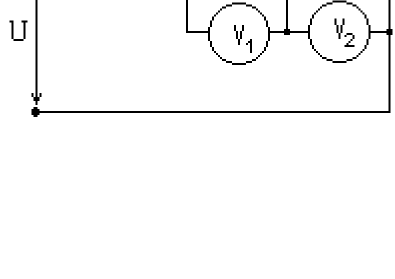
$$\sqrt{U_R^{\,2} + U_L^{\,2}} = U$$

или в числов вид с получените стойности

$$\sqrt{81{,}7^2 + 204{,}25^2} = 220,$$

$$219{,}98 \approx 220.$$

3-2. Към източник на синусоидално напрежение с параметри $U=120V$ и $f=50Hz$ е включен двуполюсник от последователно съединени резистор със съпротивление $R=9\Omega$ и бобина с индуктивност $L=42mH$. Във веригата са включени амперметър и два волтметъра, както е показано на фиг.3.3. Да се определят показанията на уредите и фазовата разлика между входното напрежение и входния ток. (Уредите измерват ефективните стойности на синусоидалните величини и се приемат за идеални: $R_V \to \infty; R_A = 0$).



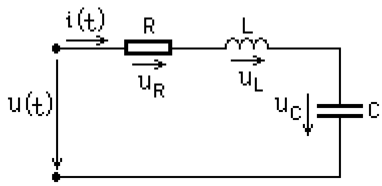
фиг.3.3

$$Отг.: I = 7{,}5\ A; U_1 = 67{,}6\ V; U_2 = 99{,}1\ V; \varphi = 55{,}7^\circ.$$

3-3. През двуполюсник от последователно свързани резистор със съпротивление $R=250\Omega$ и кондензатор с капацитет $C=4\mu F$ протича синусоидален ток с ефективна стйност $I=0{,}18A$ и честота $f=100Hz$. Да се определят: импедансът Z, ефективните стойности на входното напрежение U, напреженията на елементите U_R и U_C и фазовата разлика φ между входното напрежение и тока. Да се построи векторната диаграма на веригата.

$$Отг.: Z = 469{,}9\ \Omega; U = 84{,}6\ V; U_R = 45\ V; U_C = 71{,}6\ V; \varphi = -57{,}86^\circ.$$

3-4. На фиг.3.4 е показан двуполюсник от последователно свързани резистор с активно съпротивление $R=20\Omega$, бобина с индуктивност $L=31{,}86mH$ и кондензатор с капацитет $C=159\mu F$, захранен от източник на синусоидално напрежение с моментна стойност $u(t) = \sqrt{2}.220.\sin 314{,}16t\ V$. Да се определят: импедансът на веригата, фазовата разлика, ефективните стойности на тока и напреженията на елементите. Да се построи векторната диаграма на веригата.



фиг.3.4

Решение:

За дадената верига по II закон на Кирхоф се записва уравнението:

$$u_R + u_L + u_C = u$$

или в комплексен вид

$$\dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + jX_L\dot{I} + (-jX_C)\dot{I} =$$
$$= [R + j(X_L - X_C)]\dot{I} = Z\dot{I} = \dot{U}.$$

Комплексният импеданс на веригата е

$$Z = R + j(X_L - X_C) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\, e^{jarctg\frac{(X_L - X_C)}{R}} = ze^{j\varphi},$$

където:

- $X_L = \omega L = 314{,}16.31{,}8.10^{-3} \approx 10\Omega,$

- $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314{,}16.159.10^{-6}} \approx 20\Omega.$

Тогава

$$Z = 20 + j(10 - 20) = \sqrt{20^2 + 10^2}\, e^{jarctg\frac{-10}{20}} =$$
$$= 22{,}36e^{-j26{,}57^\circ} = 22{,}36\angle -26{,}57^\circ\ \Omega,$$

т.е. фазовата разлика във веригата е φ=–$26{,}57°$. Минусът пред φ показва, че токът изпреварва входното напрежение и веригата като цяло има капацитивен характер.
За комплекса на тока във веригата се получава

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220}{22{,}36\angle -26{,}57^\circ} = 9{,}84\angle 26{,}57^\circ\ A.$$

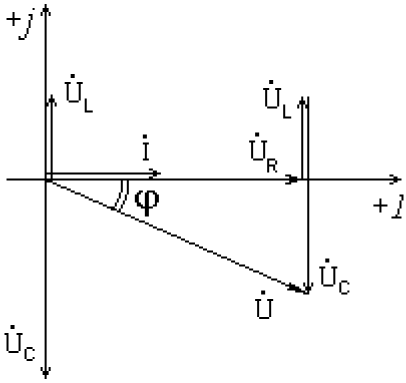
Комплексните ефективни стойности на напреженията на елементите са:

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = 20.9{,}84\angle 26{,}57^\circ = 196{,}8\angle 26{,}57^\circ\ V,$$

$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I} = 10\angle 90^\circ.9{,}84\angle 26{,}57^\circ = 98{,}4\angle 116{,}57^\circ\ V,$$

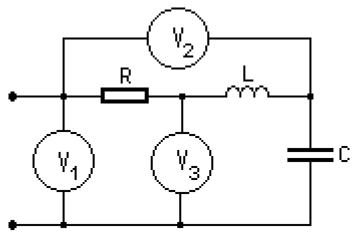
$$\dot{U}_C = -jX_C\dot{I} = 20\angle -90^\circ.9{,}84\angle 26{,}57^\circ = 196{,}8\angle -63{,}43^\circ\ V.$$

Векторната диаграма на веригата е построена принципно на фиг.3.5 при $\psi_i=0°$, т.е. завъртяна на ъгъл φ=– $26{,}57°$.



фиг.3.5

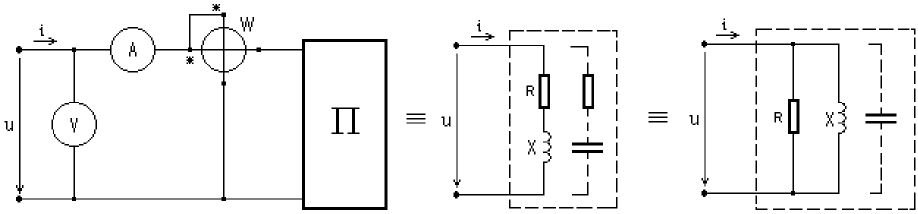
3-5. При измерване на напреженията в една верига от последователно свързани *R, L* и *C* елементи е допусната грешка в свързването, поради което са измерени не напреженията на отделните елементи, а ефективните стойности на входното напрежение и на сумарните напрежения (u_R+u_L) и (u_L+u_C), както е показано на фиг.3.6. Определете напреженията на отделните елементи, ако показанията на така свързаните уреди са: $U_1=20V$, $U_2=52,5V$, $U_3=12V$ и е известно че фазовата разлика е положителна ($\varphi>0$).



фиг.3.6

Отг.: $U_R=16V$, $U_L=50V$, $U_C=38V$.

3-6. Един от начините за опитно определяне на параметрите на един пасивен двуполюсник е чрез измерване на входното напрежение, входния ток и активната мощност, както е показано на фиг.3.7.а. Да се определят еквивалентните параметри на двуполюсника, ако измерените стойности са следните: $U=36V$; $I=0,945A$; $P=13,4W$ и $f=50Hz$.



а)   б)   в)

фиг.3.7

<u>Решение</u>:

1) Последователна заместваща схема - фиг.3.7.б.

Активната мощност, консумирана от двуполюсника е

$$P = UI\cos\varphi = RI^2,$$

откъдето за активното съпротивление се получава

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{13,4}{0,945} = 15\Omega\,.$$

Отношението на ефективните стойности на напрежението и тока дава импеданса на веригата:

$$z = \frac{U}{I} = \frac{36}{0,945} = 38,095\Omega\,.$$

От друга страна, при последователно свързани елементи импедансът на веригата е

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}\,,$$

откъдето

$$X = \sqrt{z^2 - R^2} = 35,02\Omega\,.$$

Тогава за стойностите на реактивните елементи се намира

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{35,02}{2\pi.50} = 111,5\,mH$$

или

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi.50.35{,}02} = 90{,}89\ \mu F\ .$$

2) Паралелна заместваща схема - фиг.3.7.в.

При паралелно свързани елементи, за да бъдат двата двуполюсника еквивалентни, трябва да е изпълнено условието:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX}.\frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB\ .$$

В случая

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{15}{15^2 + 35{,}02^2} = 0{,}010335\, s$$

и

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{35{,}02}{15^2 + 35{,}02^2} = 0{,}02413\, s\ .$$

Тогава за съпротивленията на елементите от паралелната схема се получава:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{0{,}010335} = 96{,}76\ \Omega$$

и

$$X = \frac{1}{B} = \frac{1}{0{,}024113} = 41{,}44\ \Omega\ .$$

За стойностите на реактивните елементи се намира

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{41{,}44}{2\pi.50} = 131{,}9\, mH$$

или

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi.50.41{,}44} = 76{,}81\ \mu F\ .$$

Проверка: Еквивалентният импеданс на елементите от последователната схема е

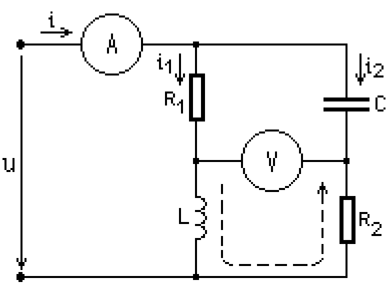
$$Z = \frac{R.jX}{R + jX} = \frac{96,76.j41,44}{96,76 + j41,44} = 15 + j35,02\,\Omega\,.$$

На практика за определяне на характера на еквивалентния реактивен елемент паралелно на двуполюсника се включва кондензатор и по промяната на входния ток се съди за вида на елемента: ако токът нарасне елементът е капацитивен, ако намалее е индуктивен.

3-7. Комплексният импеданс на един двуполюсник е $Z=(560–j750)\Omega$, а активната мощност, измерена на входа му, е $P=4W$. Да се определят еквивалентните параметри на двуполюсника, напрежението и токът на източника и фазовата разлика между тях, ако честотата е $f=800Hz$.

Отг.: $R = 560\,\Omega;\, C = 0,265\,\mu F, U = 79,11V;\, I = 0,0845\,A;\, \varphi = -53,25^\circ$.

3-8. За стойностите на елементите от схемата на фиг.3.8 е дадено: $R_1=5\Omega$, $R_2=5\Omega$, $L=10mH$, $C=200\mu F$ и $u(t) = \sqrt{2}100\sin 500t\ V$. Да се определят показанията на уредите във веригата, ако последните се приемат за идеални.



фиг.3.8

<u>Решение</u>:

Съпротивленията на реактивните елементи във веригата са:

$$X_L = \omega L = 500.10.10^{-3} = 5\Omega\,,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500.200.10^{-6}} = 10\Omega\,.$$

Входният ток във веригата, който амперметърът измерва, може да бъде намерен като сума от токовете в двата паралелни клона, включени директно към захранващия източник

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 14 - j2 = 14{,}14\angle -8{,}13^\circ\ A,$$

където:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{100}{5 + j5} = 10 - j10 = 14{,}14\angle -45^\circ\ A,$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{100}{5 - j10} = 4 + j8 = 8{,}94\angle 63{,}43^\circ\ A.$$

Показанието на амперметъра е ефективната стойност на този входен ток:

$$I_A = I = 14{,}14\ A.$$

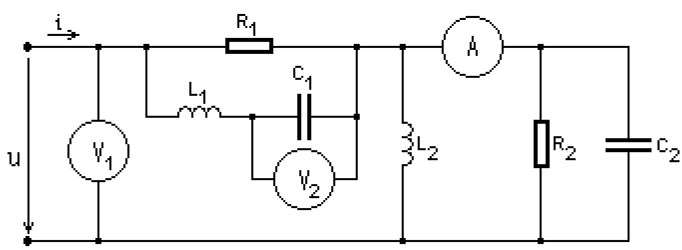
Напрежението, което волтметърът измерва, се намира по II закон на Кирхоф за някой от възможните контури, свързващи двата извода на волтметъра:

$$\dot{U}_V = jX_L\dot{I}_1 - R_2\dot{I}_2 = j5(10 - j10) - 5(4 + j8) =$$
$$= 30 + j10 = 31{,}62\angle 18{,}43^\circ\ V,$$

или ефективната стойност, която волтметъра показва е

$$U_V = 31{,}62 V.$$

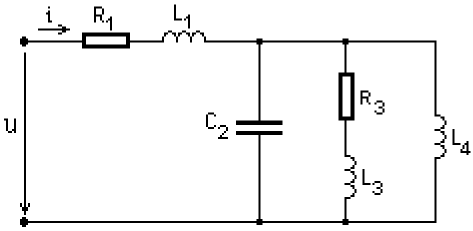
3-9. Да се определят показанията на уредите във веригата на фиг.3.9, ако е дадено: $R_1=20\Omega$, $L_1=20mH$, $C_1=50\mu F$, $R_2=40\Omega$, $L_2=40mH$, $C_2=25\mu F$ и $i(t) = \sqrt{2}\sin 1000t\ A$.



фиг.3.9

Отг.: $U_{V1} = 40V; U_{V2} = 20V; I_A = 1\sqrt{2}\ A.$

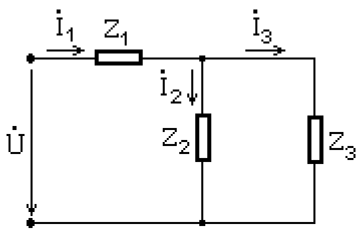
3-10. Да се определът комплексният импеданс и комплексът на входната мощност за веригата от фиг.3.10, ако захранващото напрежение е синусоидално с ефективна стойност $U=250V$ и честота $f=47{,}75Hz$, а стойностите на елементите са: $R_1=25\Omega$, $L_1=0{,}05H$, $C_2=111\mu F$, $R_3=15\Omega$, $L_3=0{,}05H$, $L_4=0{,}1H$.



фиг.3.10

Отг.: $Z_\Sigma = (40 + j30)\Omega;\dot{S}_\Sigma = (1000 + j750)VA$.

3-11. Параметрите на клоновете в показаната на фиг.3.11 верига са с комплексни импеданси: $Z_1 = (5 - j5)\Omega$, $Z_2 = (10 + j10)\Omega$, $Z_3 = (5 + j5)\Omega$. Да се определят комплексите на входното напрежение, входния ток и входната мощност, ако честотата на източника е $f=50Hz$, а максималната енергия на магнитното поле, запасявана в клон 3, е $W_{L3\,max} = 1{,}59J$.



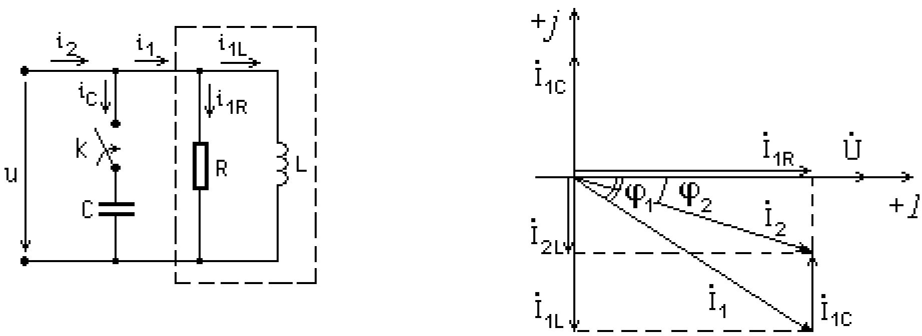
фиг.3.11

Отг.: $\dot{I}_1 = 15\angle 0^\circ\ A; \dot{I}_2 = 10\angle 0^\circ\ A; \dot{I}_3 = 5\angle 0^\circ\ A;$

$\dot{U} = 127{,}48\angle -11{,}31^\circ\ V; \dot{S}_{вх} = (1875 - j375)VA.$

3-12. Еднофазен асинхронен двигател (*АД*) с мощност $P=2{,}2kW$, свързан към захранваща линия с напрежение $U=220V$ и честота $f=50Hz$, работи при $cos\varphi_1=0{,}7$ ($\varphi>0$). Да се определи капацитетът C

на кондензатор, който трябва да се включи паралелно на консуматора, за да се повиши факторът на мощността на захранващата линия до $cos\varphi_2=0,95$.



а) б)

фиг.3.12

Решение:

Консуматорът (*АД*) може да се представи с паралелна заместваща схема, както е показано на фиг.3.12.а. Тогава токът през него I_1 може да се разложи като сума от чисто активна (I_{1R}) и чисто реактивна (I_{1L}) съставка, както е показано на векторната диаграма на фиг.3.12.б:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1R} + \dot{I}_{1L},$$

със стойности

$$I_{1R} = I_1 \cos\varphi_1 \text{ и } I_{1L} = I_1 \sin\varphi_1 .$$

При включване на кондензатор паралелно на консуматора се "компенсира" част от реактивната съставка и токът в линията намалява:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_C = \dot{I}_2$$

а с това и ъгълът на дефазиране между напрежението и тока в линията, и става φ_2.

От векторната диаграма се вижда, че една и съща активна мощност може да се постигне за различни стойности на тока в линията и $cos\varphi$:

$$P = UI_1 \cos\varphi_1 = UI_2 \cos\varphi_2 .$$

При това положение колкото по-висок е $cos\varphi$, толкова по-ниски са загубите на мощност в линията, които зависят от квадрата на тока.
За стойността на тока през кондензатора се получава:

$$I_C = I_{1L} - I_{2L} = I_1 sin\varphi_1 - I_2 sin\varphi_2 =$$

$$= \frac{P}{U cos\varphi_1} sin\varphi_1 - \frac{P}{U cos\varphi_2} sin\varphi_2 = \frac{P}{U}(tg\varphi_1 - tg\varphi_2).$$

От друга страна, по закона на Ом

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \omega CU ,$$

откъдето за капацитета се получава

$$C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{P}{\omega U^2}(tg\varphi_1 - tg\varphi_2) =$$

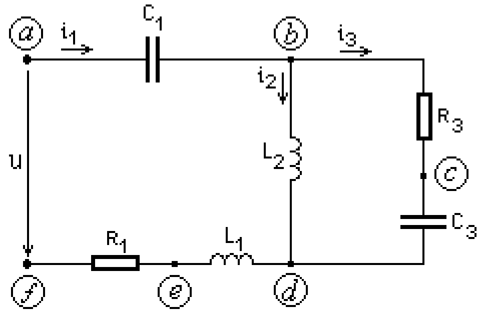
$$= \frac{2200}{2\pi 50.220^2}[tg(arccos 0{,}7) - tg(arccos 0{,}95)] \approx 100\mu F .$$

3-13. Консуматор на електроенергия с параметри $U=220V,\ f=50Hz$, $P=50kW$, $cos\varphi_1=0{,}7$ ($\varphi>0$) се захранва посредством двупроводна линия с активно съпротивление $R_л=0{,}1\Omega$. Да се определи капацитетът C на кондензатор, включен паралелно, при който факторът на мощността на захранващата линия ще се повиши до $cos\varphi_2=0{,}9$, и да се определи икономията от загуби на мощност в линията вследствие на това повишение.

$$Отг.: \Delta P = R_л(I_1^2 - I_2^2) = R_л \frac{P^2}{U^2}(\frac{1}{cos^2\varphi_1} - \frac{1}{cos^2\varphi_2}) = 4164{,}5W ;$$

$$C \approx 1762\mu F .$$

3-14. За показаната на фиг.3.13 верига са известни съпротивленията на елементите и тока в клон*1*. Да се построи топографичната диаграма и от нея да се определи стойността на комплекса на входното напрежение, ако е дадено: $I_1=1A$, $X_{C1}=10\Omega$, $X_{L1}=4\Omega$, $R_1=4\Omega$, $X_{L2}=5\Omega$, $R_3=8\Omega$, $X_{C3}=6\Omega$.



фиг.3.13

Решение:

Топографичната диаграма е диаграма на потенциалите на всички точки във веригата (не само възловите), както са означени на схемата. За целта определяме комплексите на напреженията на отделните елементи. Ако приемем, че I_1 е с нулева начална фаза, то клоновите токове в другите два клона са:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 1{,}24\angle -29{,}74° A ,$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = 0{,}62\angle 97{,}12° A .$$

Комплексите на напреженията на отделните елементи са:

$$\dot{U}_{ab} = -jX_{C1}\dot{I}_1 = -j10V,$$

$$\dot{U}_{bc} = R_3\dot{I}_3 = 4{,}96\angle 97{,}12° V,$$

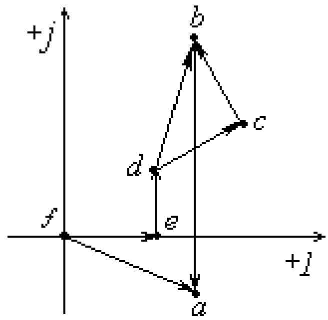
$$\dot{U}_{bd} = jX_{L2}\dot{I}_2 = 6{,}2\angle 60{,}26° V,$$

$$\dot{U}_{cd} = -jX_{C3}\dot{I}_3 = 3{,}72\angle 7{,}12° V,$$

$$\dot{U}_{de} = jX_{L1}\dot{I}_1 = j4V,$$

$$\dot{U}_{ef} = R_1\dot{I}_1 = 4V.$$

Приема се, че потенциалът на една от точките е нула и тя се намира в началото на комплексната координатна система. Спрямо нея се изобразяват потенциалите на всички останали точки. Най-удачно е това да бъде точката *f*, която е единият извод на източника, т.е. $\dot{V}_f = 0$. След това с помощта на линия и ъгломер в обратен ред, от точка f към точка a, последователно се нанасят намерените напрежения на елементите в координатната система, като се има предвид, че стрелката на вектора сочи точката, съответстваща на първия индекс на съответното напрежение (условно точката с по-високия потенциал) и положителната посока на отчитане на ъглите е обратна на часовниковата стрелка - фиг.3.14.



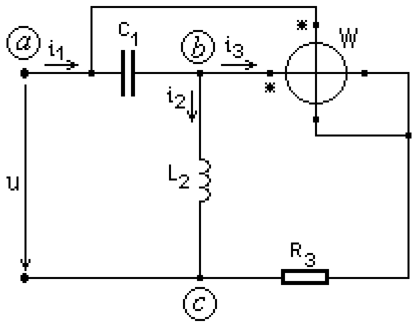
фиг.3.14

Входното напрежение се намира, като се измери разстоянието между точки a и f и се умножи с приетия мащаб по напрежение. Аргументът на напрежението се намира, като с ъгломера се измери ъгълът между положителната посока на реалната ос и вектора $\dot{U}_{af}$.

В случая $\dot{U}_{af} = 7\angle -5°V$.

Освен нагледността за потенциалите на точките във веригата топографичната диаграма позволява да се определят напреженията между всеки две точки, които не са били изчислени, но могат да представляват интерес, например $\dot{U}_{df}, \dot{U}_{cf}, \dot{U}_{bf}$ и т.н.

3-15. Да се определи показанието на ватметъра в показаната на фиг.3.15 електрическа верига, ако е дадено: $X_{C1}=5\Omega$, $X_{L2}=10\Omega$, $R_3=10\Omega$, $U=50V$.



фиг.3.15

Решение:

Изразът за мощността, отчитана от ватметъра е

$$P_W = Re\{\dot{U}_{ab}\overset{*}{I_3}\}\ W,$$

където

- $\dot{U}_{ab}$ е комплексът на напрежението върху напрежителната намотка на ватметъра, която образува самостоятелен клон;

- $\overset{*}{I_3}$ е комплексно спрегнатата стойност на тока през токовата намотка, която се включва последователно на някой от клоновете във веригата.

Трябва да се обърне внимание, че началният индекс на напрежението, както и знакът на тока в този израз се определят от положението на едноименните изводи на ватметъра (отбелязани със звездички на схемата). Първият индекс за напрежението се присвоява от точката, чийто потенциал има белязания извод на напрежителната намотка. Ако избраната посока на тока постъпва в белязания извод на токовата намотка, то токът участва в израза за мощността със знак "+".

Входният ток на двуполюсника е

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_\Sigma} = \frac{\dot{U}(R_3 + jX_{L2})}{X_{C1}X_{L2} + jR_3(X_{L2} - X_{C1})} = 10A,$$

а комплексът на тока $\dot{I}_3$ е

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1\frac{jX_{L2}}{R_3 + jX_{L2}} = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ A.$$

Напрежението на напрежителната намотка е

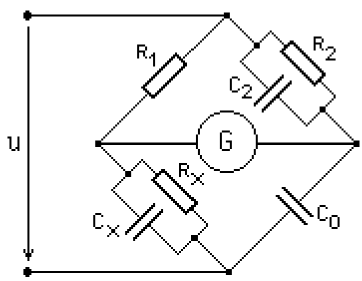
$$\dot{U}_{ab} = (-jX_{C1})\dot{I}_1 = -j50V \ .$$

Тогава за показанието на ватметъра се получава:

$$P = Re\{-j50.5\sqrt{2}\angle -45°\} = -250W \ .$$

Знакът минус в получения резултат означава, че практически ватметърът ще се отклонява в обратна посока. За да се получи правилно отклонение, трябва да се смени посоката на тока в една от двете намотки. В конкретния случай ватметърът не измерва реално потребявана мощност. За да отчита реално консумирана активна мощност, напрежението и токът през намотките му трябва да са входни величини на един двуполюсник.

3-16. На схемата на фиг.3.16 е показан мост на Шеринг за измерване на капацитети и ъгъла на диелектричните загуби ($tg\delta$). Да се определят R_X и C_X при равновесие на моста ($i_G=0$), ако честотата на захранващия източник е $f=50Hz$ и параметрите в останалите рамена са: $C_0=80\mu F$, $R_1=50\Omega$, $C_2=0,8\mu F$, $R_2=35\Omega$.



фиг.3.16

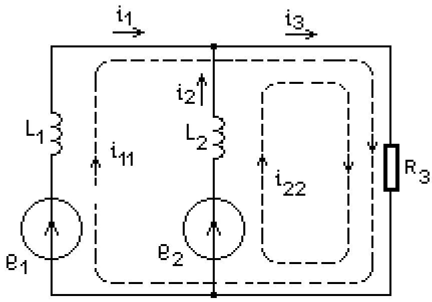
Отг.: $R_X \approx 6,4k\Omega; C_X \approx 56\mu F$.

3.3. Сложни вериги в установен синусоидален режим. Баланс на мощностите

Методите за анализ на сложни вериги в синусоидален режим са същите, както и при постояннотоковите вериги: контурни токове, възлови потенциали, теорема на Тевенен и т.н., като уравненията се записват в комплексен вид и се работи с комплексите на търсените величини.

Решени примери и задачи

3-17. Да се определят комплексите на клоновите токове и да се направи баланс на мощностите във веригата, показана на фиг.3.17, ако е дадено: $L_1=0{,}01H$, $L_2=0{,}04H$, $R_3=3\Omega$, $e_1(t)=100\sqrt{2}\sin 500t, V$, $e_2(t)=100\sqrt{2}\cos 500t, V$.



фиг.3.17

Решение:

За дадената верига по метода на контурните токове се записва следната система уравнения:

$$\begin{vmatrix} (jX_{L1}+R_3)\dot{I}_{11}+R_3\dot{I}_{22}=\dot{E}_1 \\ R_3\dot{I}_{11}+(jX_{L2}+R_3)\dot{I}_{22}=\dot{E}_2 \end{vmatrix} .$$

След определяне на индуктивните съпротивления на бобините за системата в числов вид се получава:

$$\begin{vmatrix} (3+j5)\dot{I}_{11}+3\dot{I}_{22}=100 \\ 3\dot{I}_{11}+(3+j20)\dot{I}_{22}=j100 \end{vmatrix} ,$$

с решения по метода на Крамер

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{300 + j1700}{-100 + j75} = 6{,}24 - j12{,}32 = 13{,}81\angle -63{,}14^\circ\ A,$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-800 + j300}{-100 + j75} = 6{,}56 + j1{,}92 = 6{,}84\angle 16{,}31^\circ\ A.$$

Тогава за комплексите на клоновите токове се получават стойностите:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 6{,}24 - j12{,}32 = 13{,}81\angle -63{,}14^\circ\ A,$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} = 6{,}56 + j1{,}92 = 6{,}835\angle 16{,}31^\circ\ A,$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{22} = 12{,}8 - j10{,}4 = 16{,}49\angle -39{,}07^\circ\ A.$$

При баланса на мощностите се работи с комплексните мощности, като се сравняват поотделно реалните и имагинерните части, които съответстват на активните и реактивните мощности във веригата.
Сумарната генерирана мощност е сума от мощностите на източниците:

$$\Sigma\dot{S}_\Gamma = \dot{E}_1 \overset{*}{I}_1 + \dot{E}_2 \overset{*}{I}_2 = 100(6{,}46 + j12{,}32) + j100(6{,}56 + j1{,}92) = \\ = 816 + j1888, VA.$$

Сумарната консумирана мощност е сума от мощностите на консуматорите:

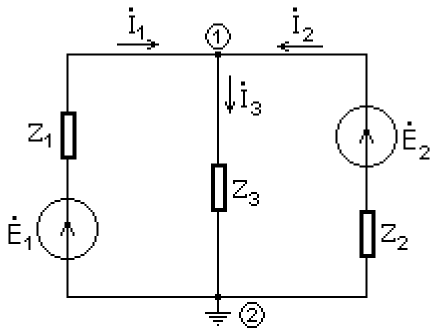
$$\Sigma\dot{S}_K = \Sigma\dot{U}_k \overset{*}{I}_k = \Sigma Z_k I_k^2 = j5.13{,}81^2 + j20.6{,}835^2 + 3.16{,}49^2 = \\ = 815{,}76 + j1887{,}93, VA.$$

Относителните грешки, които се допускат не бива да надвишават *0,25%*:

$$\beta_P, \% = \left|\frac{P_\Gamma - P_K}{P_\Gamma}\right| 100 = \left|\frac{816 - 815{,}76}{816}\right| 100 = 0{,}029 \le 0{,}25\%,$$

$$\beta_Q, \% = \left|\frac{Q_\Gamma - Q_K}{Q_\Gamma}\right| 100 = \left|\frac{1888 - 1887{,}93}{1888}\right| 100 = 0{,}004 \le 0{,}25\%.$$

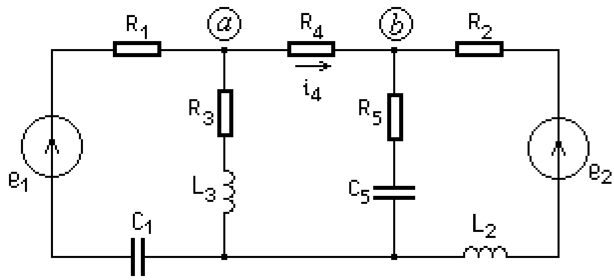
3-18. Да се определят комплексите на клоновите токове по метода на възловите потенциали и да се направи баланс на мощностите за веригата от фиг.3.18, ако е дадено: $\dot{E}_1 = 100\,V$, $\dot{E}_2 = 100\angle 90^\circ\,V$, $Z_1 = (10 + j20)\,\Omega$, $Z_2 = (8 + j8)\,\Omega$, $Z_3 = (6 - j8)\,\Omega$.



фиг.3.18

Отг.: $\dot{V}_1 = (54{,}054 + j24{,}324)\,V;\ \Sigma\dot{S}_Г = \Sigma\dot{S}_К \approx (805{,}5 + j367{,}5)\,VA$.

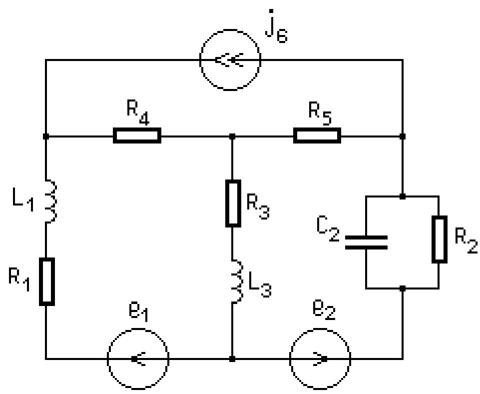
3-19. Да се определи токът I_4 в клон 4 на веригата, показана на фиг.3.19 по теоремата на Тевенен, ако е дадено стойностите на елемнтите от веригата са: $\dot{E}_1 = (480 + j360)\,V$, $\dot{E}_2 = (360 + j480)\,V$, $R_1 = R_2 = 14\,\Omega$, $X_1 = X_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = R_5 = 10\,\Omega$, $X_3 = X_5 = 25\,\Omega$, $R_4 = 30\,\Omega$.



фиг.3.19

Отг. $\dot{U}_{ab(0)} = 696\sqrt{2}\angle 135^\circ\,V;\ Z_\Sigma = 53{,}61\,\Omega;\ I_4 = 11{,}77\,A$.

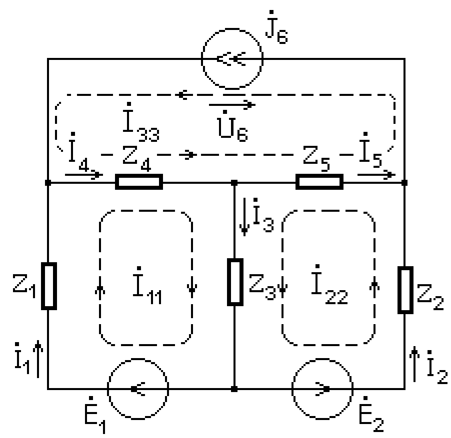
3-20. Да се определят клоновите токове и да се направи баланс на мощностите на веригата от фиг.3.20, ако е дадено: $\dot{E}_1 = 200\angle 0^\circ\ V$, $\dot{E}_2 = 200\angle 45^\circ\ V$, $\dot{J}_6 = 5\angle 0^\circ\ A$, $R_1 = X_{L1} = 5\Omega$, $R_2 = X_{C2} = 10\Omega$, $R_3 = X_{L3} = 15\Omega$, $R_4 = R_5 = 20\Omega$.



фиг.3.20

<u>Решение</u>:

След обединяване на елементите от отделните клонове в еквивалентни импеданси се получава схемата на фиг.3.21,



фиг.3.21

където:

$$Z_1 = R_1 + jX_{L1} = (5 + j5)\Omega,$$

$$Z_2 = \frac{R_2(-jX_{C2})}{R_2 + (-jX_{C2})} = \frac{-j100}{10 - j10} = (5 - j5)\Omega ,$$

$$Z_3 = R_3 + jX_{L3} = (15 + j15)\Omega ,$$

$$R_4 = Z_4 = 20\Omega ,\ R_5 = Z_5 = 20\Omega .$$

Броят на независимите контури в еквивалентната схема е *3*. Понеже във веригата има клон с източник на ток, то ако изберем метода на контурните токове веригата може да се анализира със системата с две уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} (Z_1 + Z_4 + Z_3)\dot{I}_{11} + Z_3\dot{I}_{22} + Z_4\dot{I}_{33} = \dot{E}_1 \\ Z_3\dot{I}_{11} + (Z_2 + Z_5 + Z_3)\dot{I}_{22} - Z_5\dot{I}_{33} = \dot{E}_2 \\ \dot{I}_{33} = \dot{J}_6 , \end{array} \right.$$

или след заместванеслед заместване

$$\left| \begin{array}{l} (40 + j20)\dot{I}_{11} + (15 + j15)\dot{I}_{22} = 100 \\ (15 + j15)\dot{I}_{11} + (40 + j10)\dot{I}_{22} = 241{,}42 + j141{,}42 . \end{array} \right.$$

По метода на Крамер стойностите на детерминантите от системата са:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (40 + j20) & (15 + j15) \\ (15 + j15) & (40 + j10) \end{vmatrix} = (1400 + j1200) - (j450) =$$
$$= 1400 + j750 = 1588{,}238\angle 28{,}18^0 ;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & (15 + j15) \\ (241{,}42 + j141{,}42) & (40 + j10) \end{vmatrix} =$$
$$= (4000 + j1000) - (1500 + j5742{,}6) =$$
$$= 2500 - j4742{,}6 = 5361{,}18\angle -62{,}2^0 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (40 + j20) & 100 \\ (15 + j15) & (241{,}42 + j141{,}42) \end{vmatrix} =$$
$$= (6828{,}4 + j10485{,}2) - (1500 + j1500) =$$
$$= 5328{,}4 + j8985{,}2 = 10446{,}323\angle 59{,}33^0 .$$

За контурните токове във веригата се получават следните стойности:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -0{,}023 - j3{,}375 = 3{,}376\angle -90{,}38^0\ A\,,$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 5{,}629 + j3{,}403 = 6{,}577\angle 31{,}15^0\ A\,.$$

Клоновите токове, изразени чрез контурните, са:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = -0{,}023 - j3{,}375 = 3{,}376\angle -90{,}38^0\ A\,,$$
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} = 5{,}629 + j3{,}403 = 6{,}577\angle 31{,}15^0\ A\,,$$
$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{22} = 5{,}606 + j0{,}028 = 5{,}6061\angle 0{,}29^0\ A\,,$$
$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{33} = 4{,}977 - j3{,}375 = 6{,}013\angle -34{,}14^0\ A\,,$$
$$\dot{I}_5 = \dot{I}_{33} - \dot{I}_{22} = -0{,}629 - j3{,}403 = 3{,}461\angle -100{,}47^0\ A\,.$$

От уравнението по *II закон на Кирхоф* за контур *III* напрежението на източника на ток е

$$\dot{U}_6 = Z_4\dot{I}_4 + Z_5\dot{I}_5 = 86{,}96 - j135{,}56 = 161{,}055\angle -57{,}32^0\,V\,.$$

Сумарната генерирана мощност във веригата е

$$\begin{aligned}\Sigma\dot{S}_{\Gamma} &= \dot{E}_1\overset{*}{I}_1 + \dot{E}_2\overset{*}{I}_2 + \dot{U}_6\overset{*}{J}_6 = \\ &= 200(-0{,}023 + j3{,}375) + (141{,}42 + j141{,}42)(5{,}629 - j3{,}403) + \\ &+ (86{,}96 - j135{,}56)5 = (1707{,}52 + j312)VA\,,\end{aligned}$$

а сумарната консумирана мощност

$$\begin{aligned}\Sigma\dot{S}_K &= Z_1I_1^2 + Z_2I_2^2 + Z_3I_3^2 + Z_4I_4^2 + Z_5I_5^2 = \\ &= (5 + j5)3{,}376^2 + (5 - j5)6{,}577^2 + (15 + j15)5{,}606^2 + \\ &+ 20.6{,}013^2 + 20.3{,}461^2 = (1707{,}37 + j312{,}11)VA\,.\end{aligned}$$

Относителните грешки са в допустимите граници от *0,25%*:

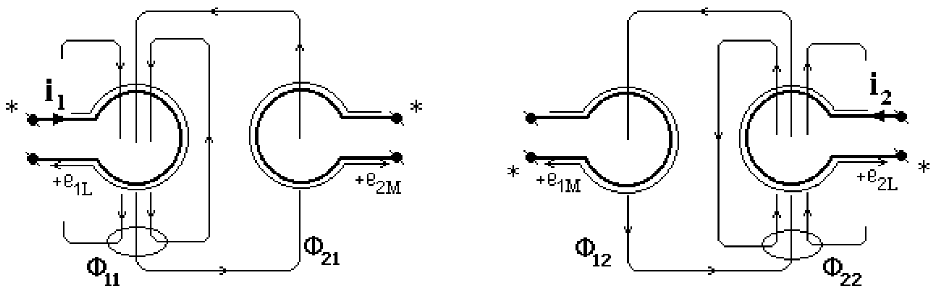
$$\beta_P,\% = \left|\frac{P_{\Gamma} - P_K}{P_{\Gamma}}\right|100 = \left|\frac{1707{,}52 - 1707{,}37}{1707{,}52}\right|100 = 0{,}008\% \le 0{,}25\%$$

и

$$\beta_Q,\% = \left|\frac{Q_K - Q_{\Gamma}}{Q_{\Gamma}}\right|100 = \left|\frac{312 - 312{,}11}{312}\right|100 = 0{,}035\% \le 0{,}25\%\,.$$

3.4. Електрически вериги с взаимна индукция

Ако два токови контура, през които протичат токове, са разположени близо един до друг, то част от магнитния поток, породен от тока в единия контур, обхваща другия (тази част се нарича взаимен магнитен поток), при което във втория контур се индуктира е.д.н. от взаимна индукция. И обратно, ако във втория контур протича ток, то той поражда магнитен поток, част от който, обхващайки първия контур, индуктира в него е.д.н. от взаимна индукция, т.е. на лице е *взаимна индуктивност* между двата контура. Положителните посоки на индуктираните е.д.н. и на магнитните потоци, които ги пораждат, са свързани по т.нар. правило на *дясновъртящия се винт* - фиг.3.22.а, б.



а) б)

фиг.3.22

Когато токовете в двата контура са променливи, собствените (Φ_{11}, Φ_{22}) и взаимните магнитни потоци (Φ_{12}, Φ_{21}) също ще бъдат променливи и в двата контура ще се развиват явленията самоиндукция и взаимна индукция, като съответните е.д.н. са:

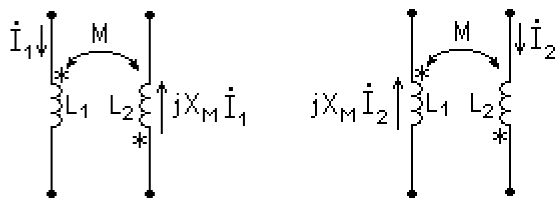
$$e_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{d(\psi_{11} \pm \psi_{12})}{dt} = -\frac{d(L_1 i_1 \pm M i_2)}{dt} =$$

$$= -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} \pm e_{1M} \;;$$

$$e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d(\psi_{22} \pm \psi_{21})}{dt} = -\frac{d(L_2 i_2 \pm M i_1)}{dt} =$$

$$= -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} \pm e_{2M} \,.$$

Е.д.н. от взаимна индукция (e_{1M}, e_{2M}) се добавят в уравненията по II закон на Кирхоф при анализа на веригите, подобно на е.д.н. от самоиндукция. За определянето на знаците им се въвеждат т. нар. *едноименни изводи*: тази двойка изводи, по отношение на която при еднаква ориентация на токовете спрямо тях, собственият и взаимният магнитен поток за даден контур имат еднакви посоки. Напреженията от взаимна индукция са положителни и връзката се нарича *съгласувана*, когато токовете в двете бобини са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи, в противен случай връзката се нарича *несъгласувана* и взаимноиндуктивните напрежения са отрицателни. Или по друг начин: посоката на тока и посоката на индуктираното е.д.н. са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи на двете индуктивно свързани бобини - фиг.3.23.а, б.



а) б)

фиг.3.23

За напреженията на двете бобини с индуктивна връзка в синусоидален режим са валидни следните уравнения в комплексен вид:

$$\dot{U}_1 = jX_{L1}\dot{I}_1 \pm jX_M\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = jX_{L2}\dot{I}_2 \pm jX_M\dot{I}_1.$$

На практика в уравненията знаците на индуктираните е.д.н. са "+", ако посоката на сумиране за контура съвпада с посоката на индуктираното е.д.н. (съгласувано свързване) и "–", ако посоката на индуктираното е.д.н. не съвпада с посоката на сумиране за контура (несъгласувано свързване). За примера от фиг.3.23 връзката между бобините е несъгласувана и знаците на индуктираните е.д.н. са "–".

За комплексите на пълните мощности на двата контура са валидни следните изрази:

$$\dot{S}_1 = \dot{U}_1 \overset{*}{I}_1 = (jX_{L1}\dot{I}_1 \pm jX_M \dot{I}_2)\overset{*}{I}_1 = jX_{L1}I_1^{\,2} \pm jX_M \dot{I}_2 \overset{*}{I}_1 ,$$

$$\dot{S}_2 = \dot{U}_2 \overset{*}{I}_2 = (jX_{L2}\dot{I}_2 \pm jX_M \dot{I}_1)\overset{*}{I}_2 = jX_{L2}I_2^{\,2} \pm jX_M \dot{I}_1 \overset{*}{I}_2 ,$$

където допълнителните членове предствляват мощностите, предавани по индуктивен път.

При това условие при баланс на мощностите в израза за сумарната консумирана мощност се появява допълнителен член (или членове, в зависимост от броя на двойките индуктивно свързани контури)

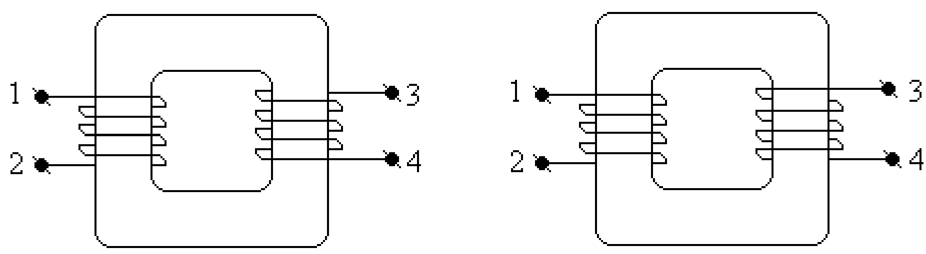
$$\Sigma\dot{S}_K = \Sigma Z_k I_k^{\,2} \pm 2\,jX_{pq}\,Re\{\dot{I}_p \overset{*}{I}_q\},$$

като знакът на допълнителния член е “+” при съгласувано свързване и “–” при несъгласувано свързване.

Наличието на индуктивна връзка в електрическите вериги усложнява техния анализ. Основните методи за анализ на такива вериги са или законите на Кирхоф, или методът на контурните токове. Анализ чрез еквивалентно преобразуване на пасивни участъци и метод на възловите потенциали са възможни само след като се направи т. нар. *електромагнитно развързване*, т.е. след отстраняване на електромагнитната връзка.

<u>Решени примери и задачи</u>

3-21. Като се приложи правилото на “дясновъртящтият се винт” да се определят едноименните изводи на показаните на фиг.3.24.а и фиг.3.24.б индуктивно свързани бобини.

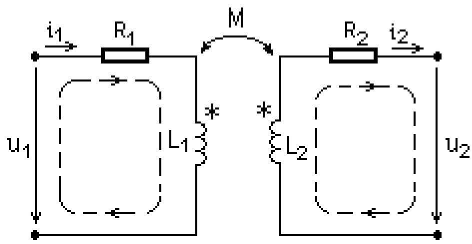


а) б)

фиг.3.24

Отг.: а) 1 и 4; респ. 2 и 3; б) 1 и 3; респ. 2 и 4.

3-22. Да се определят взаимната индуктивност M и коефициентът на взаимната връзка k между индуктивно свързани бобини от фиг.3.25, ако бобините са свързани по схема на линеен трансформатор в режим на празен ход. Дадено: $U_1=100V$, $f=50Hz$, $R_1=R_2=10\Omega$, $L_1=95,5mH$, $L_2=127,3mH$, $U_2=47,4V$. Да се направи електромагнитно развързване и трансформаторът да се представи с еквивалентна заместваща схема.



фиг.3.25

Решение:

1. Уравненията в комплексен вид по II закон на Кирхоф за двата контура от веригата са:

$$\dot{U}_1 = (R_1 + jX_{L1})\dot{I}_1 - jX_M\dot{I}_2$$

$$-\dot{U}_2 = (R_2 + jX_{L2})\dot{I}_2 - jX_M\dot{I}_1 .$$

При $I_2=0$ (режим на празен ход) системата уравнения се редуцира във вида:

$$\dot{U}_1 = (R_1 + jX_{L1})\dot{I}_1$$

$$\dot{U}_2 = jX_M\dot{I}_1 .$$

От второто уравнение за взаимната индуктивност се получава

$$M = \frac{X_M}{\omega} = \frac{\frac{U_2}{I_1}}{\omega} = \frac{U_2}{\omega I_1},$$

където

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + jX_{L1}} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{100}{10 + j30} = 1 - j3 = 3,16\angle -71,57^\circ\ A$$

и стойността на взаимната индуктивност е

$$M = \frac{47{,}4}{314{,}16.3{,}16} = 47{,}75mH \,.$$

Коефициентът на взаимно индуктивната връзка е

$$k = \frac{X_M}{\sqrt{X_{L1}X_{L2}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \frac{47{,}75.10^{-3}}{\sqrt{95{,}5.10^{-3}127{,}3.10^{-3}}} = 0{,}433 \,.$$

*На практика за определянето на M и k при известни L_1 и L_2 е достатъчно да се измерят токът в “първичната намотка” и напрежението на изводите на ”вторичната намотка” и да се приложат изразите, изведени по-горе.

2. Електромагнитно развързване.

Основната система уравнения може да се представи в следния вид

$$\dot{U}_1 = [R_1 + j(X_{L1} - X_M) + jX_M]\dot{I}_1 - jX_M\dot{I}_2$$

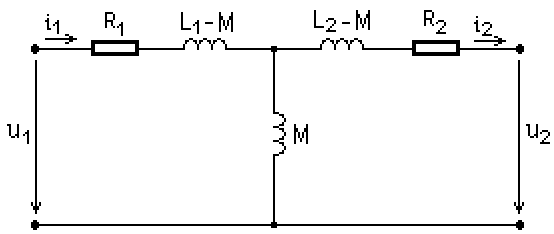
$$-\dot{U}_2 = [R_2 + j(X_{L2} - X_M) + jX_M]\dot{I}_2 - jX_M\dot{I}_1,$$

или

$$\dot{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - M) + j\omega M]\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$

$$-\dot{U}_2 = [R_2 + j(L_2 - \omega M) + j\omega M]\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_1 \,.$$

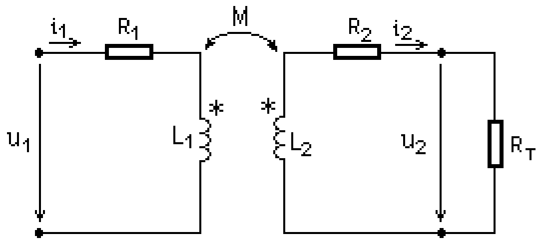
По тази система уравнения може да се построи еквивалентната заместваща схема на линейния трансформатор като обикновена двуконтурна верига, както е показано на фиг.3.26.



фиг.3.26

Тази верига се анализира като верига без индуктивна връзка и за нея могат да се приложат всички познати методи за анализ, в това число и метода на възловите потенциали.

3-23. Да се определи при каква ефективна стойност на входното напрежение U_1 във вторичната намотка на линейния трансформатор от фиг.3.27 ще протече ток $I_2=1,5A$, ако към нейните изводи е включено товарно съпротивление $R_T=5\Omega$ и параметрите на намотките са $R_1=10\Omega$, $R_2=15\Omega$, $X_{L1}=30\Omega$, $X_{L2}=40\Omega$, $X_M=15\Omega$.



фиг.3.27

Решение:

Уравнението за напреженията във вторичната намотка на трансформатора е

$$(R_2 + jX_{L2})\dot{I}_2 + R_T\dot{I}_2 - jX_M\dot{I}_1 = 0\,,$$

откъдето за тока в първичната намотка се получава

$$\dot{I}_1 = \frac{[(R_2 + R_T) + jX_{L2}]\dot{I}_2}{jX_M} = \frac{[20 + j40]1,5}{j15} =$$

$$= 4 - j2 = 4,47\angle -26,57^\circ\ A\,.$$

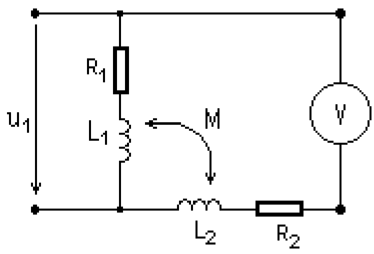
Напрежението на първичната намотка е

$$\dot{U}_1 = (R_1 + jX_{L1})\dot{I}_1 - jX_M\dot{I}_2 = (10 + j30)(4 - j2) - j15.1,5 =$$

$$= 100 + j77,5 = 126,52\angle 37,78^\circ\ V\,.$$

Следователно, търсената ефективната стойност на входното напрежение е $U_1=126,52V$.

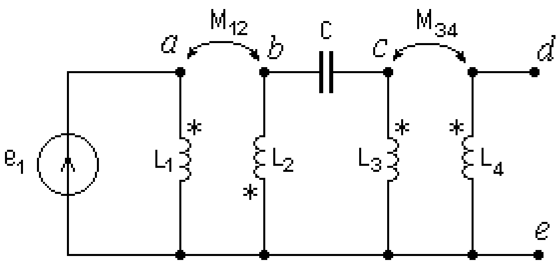
3-24. Да се определят възможните показания на волтметъра от фиг.3.28 (съгласувано и несъгласувано свързване), ако е дадено: $U_1=100V$, $R_1=5\Omega$, $R_2=4\Omega$, $X_{L1}=12\Omega$, $X_{L2}=13\Omega$ и $k=0,8$.



фиг.3.28

Отг.: $U_{съгл}=41,42V$; $U_{несъгл}=173,55V$.

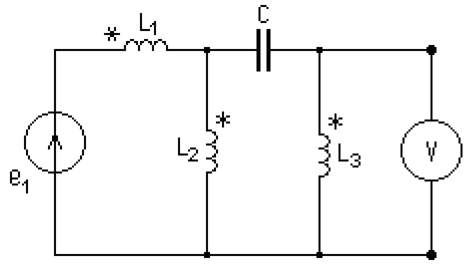
3-25. Да се определят напреженията $U_{ав}$, U_{cd}, U_{de} във веригата от фиг.3.29, ако е дадено: $E_1=10V$, $X_{L1}=15\Omega$, $X_{L2}=20\Omega$, $X_C=24\Omega$, $X_{L3}=120\Omega$, $X_{12}=X_{34}=10\Omega$.



фиг.3.29

Отг.: $U_{ав}=150V$; $U_{cd}=0V$; $U_{de}=100V$.

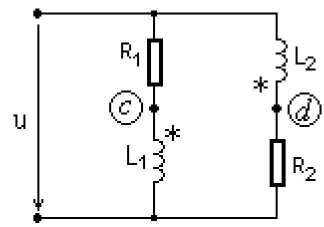
3-26. Да се определи показанието на волтметъра U_V във веригата от фиг.3.30, ако: $E_1=100V$, $X_{L1}=10\Omega$, $X_{L2}=5\Omega$, $X_C=9\Omega$, $X_{L3}=20\Omega$, $X_{12}=0\Omega$, $X_{13}=10\Omega$, $X_{23}=5\Omega$.



фиг.3.30

Отг.: $U_V=600V$.

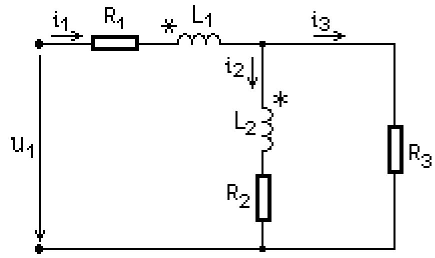
3-27. Да се определят клоновите токове и взаимната индуктивност M във веригата от фиг.3.31, ако при зададените параметри на елементите е измерена ефективна стойност на напрежението $U_{cd}=96V$ и е установено, че то изпреварва по фаза входното напрежение със 164°. Дадено: $U=100V$, $f=50Hz$, $R_1= X_{L1}=15\Omega$, $R_2=20\Omega$, $X_{L2}=10\Omega$.



фиг.3.31

Отг.: $I_1=5,5A$; $I_2=5,6A$; $M=31,8mH$.

3-28. За еквивалентната схема на линеен автотрансформатор (фиг.3.32) са известни: $R_1=20\Omega$, $R_2=30\Omega$, $X_{L1}=600\Omega$, $X_{L2}=880\Omega$, $X_M=650\Omega$. Да се определят клоновите токове и к.п.д. на автотрансформатора, ако $U_1=6kV$ и $R_3=200\Omega$.



фиг.3.32

Решение:

По метода на контурните токове, като за контурни са приети токовете i_1 и i_3, системата уравнения в комплексен вид е

$$[(R_1+R_2)+j(X_{L1}+X_{L2}+2X_M)]\dot{I}_1-[R_2+j(X_{L2}+X_M)]\dot{I}_3=\dot{U}_1$$

$$-[R_2+j(X_{L2}+X_M)]\dot{I}_1+[(R_2+R_3)+jX_{L2}]\dot{I}_3=0\,.$$

При нулева начална фаза на входното напрежение решенията на системата са:

$$\dot{I}_1 = 8{,}67\angle -20{,}71^\circ\ A\,,$$

$$\dot{I}_3 = 15{,}11\angle -5{,}86^\circ\ A\,,$$

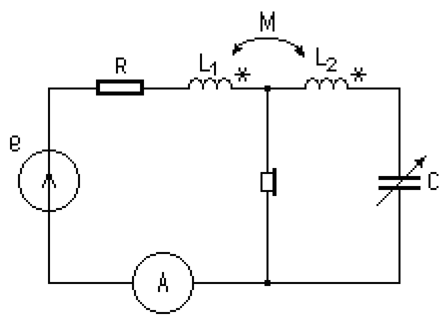
$$\dot{I}_2 = 7{,}07\angle -167{,}58^\circ\ A\,.$$

Коефициентът на полезно действие на автотрансформатора е

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_3 I_3^{\,2}}{Re\{\dot{U}_1 \overset{*}{I}_1\}} = \frac{R_3 I_3^{\,2}}{R_1 I_1^{\,2} + R_2 I_2^{\,2} + R_3 I_3^{\,2}} = 0{,}938\,.$$

*Обърнете внимание, че ток I_2 има два пъти по-малка стойност от ток I_3, докато при класическия двунамотъчен трансформатор те са равни. Това дава възможност при автотрансформаторите да се направи икономия на метал от сечението за вторичната намотка. Физически консуматорът в този случай получава енергия както по електромагнитен път чрез магнитното поле, така и непосредствено от източника по галваничен път.

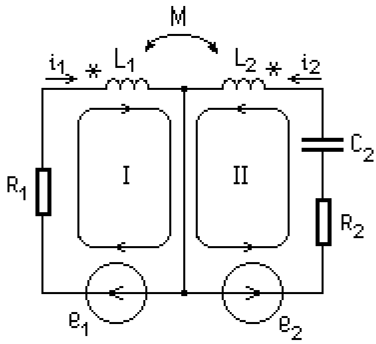
3-29. На фиг.3.33 е показана схема на мост за измерване на взаимната индуктивност, в който като нулев индикатор, отчитащ равновесието на моста, се използва телефонна слушалка (отсъствието на звук означава, че през нея не протича ток). Да се определи при каква взаимна индуктивност и при какъв капацитет се реализира равновесието на моста, ако е дадено: $e = 8\sqrt{2}\,\sin 1000t\,[V]$, $I=0{,}05A$, $R=50\Omega$, $X_1=100\Omega$, $X_2=80\Omega$.



фиг.3.33

Отг.: M=54,9mH, C=7,41μF.

3-30. За показаната на фиг.3.34 верига да се определят клоновите токове и да се направи баланс на мощностите, ако е дадено: $R_1=5\Omega$, $X_{L1}=10\Omega$, $R_2=10\Omega$, $X_{L2}=10\Omega$, $X_{C2}=20\Omega$, $X_M=10\Omega$, $\dot{E}_1 = 100V$, $\dot{E}_2 = j100V$.



фиг.3.34

Решение:

По метода на контурните токове, с контурни токове i_1 и i_2, системата уравнения в комплексен вид е:

$$(R_1 + jX_{L1})\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 = \dot{E}_1$$

$$jX_M\dot{I}_1 + [R_2 + j(X_{L2} - X_{C2})]\dot{I}_2 = \dot{E}_2,$$

с решения:

$$\dot{I}_1 = 5 - j5 = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ\ A,\ \ \dot{I}_2 = -5 = 5\angle 180^\circ\ A.$$

Сумарната генерирана мощност е както при вериги без индуктивна връзка

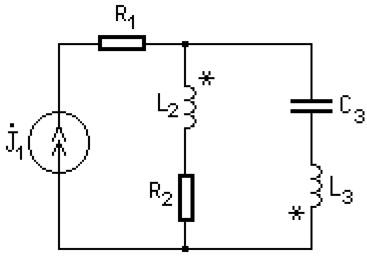
$$\Sigma\dot{S}_Г = \dot{E}_1\overset{*}{I}_1 + \dot{E}_2\overset{*}{I}_2 = 100(5 + j5) + j100(-5) = 500VA.$$

В израза за сумарната консумирана мощност се появява допълнителен член от индуктивната връзка, който е със знак “+” поради съгласуваното свързване

$$\Sigma\dot{S}_К = (R_1 + jX_{L1})I_1^2 + [R_2 + j(X_{L2} - X_{C2})]I_2^2 +$$

$$+ j\,Re\{2X_м\dot{I}_1\overset{*}{I}_2\} = 500VA.$$

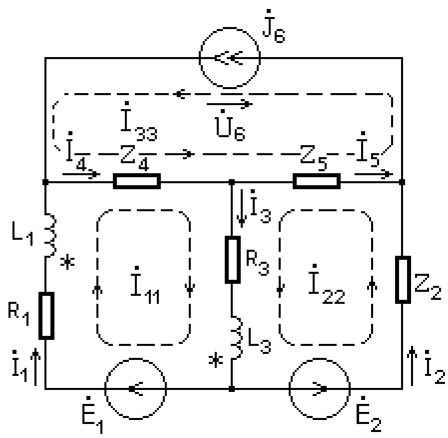
3-31. Да се определят клоновите токове и да се направи баланс на мощностите за показаната на фиг.3.35 верига, ако е дадено: $R_1=50\Omega$, $R_2=50\Omega$, $X_{L2}=30\Omega$, $X_{L3}=40\Omega$, $X_{C3}=60\Omega$, $X_M=20\Omega$, $\dot{J}_1 = 2\angle 0^\circ\ A$.



фиг.3.35

Отг.: $\Sigma\dot{S}_Г = \Sigma\dot{S}_К = (200 - j80)VA$.

3-32. Да се направи баланс на мощностите във веригата от фиг.3.36, ако за стойностите на елементите е дадено: $\dot{I}_1 = 3{,}376\angle -90{,}38^0\ A$, $\dot{E}_2 = 200\angle 45^\circ\ V$, $\dot{J}_6 = 5\angle 0^\circ\ A$, $R_1 = X_{L1} = 5\Omega$, $Z_2 = (5 - j5)\Omega$, $R_3 = X_{L3} = 15\Omega$, $Z_4 = Z_5 = 20\Omega$, $X_{13} = 5\Omega$.



фиг.3.36

Решение:

За анализа на веригата е достатъчно да се запише система уравнения по метода на контурните токове, в която неизвестни са $\dot{I}_{22}$ и $\dot{E}_1$:

$$\left|\begin{array}{l}(R_1 + jX_1 + Z_4 + R_3 + jX_3 - 2jX_M)\dot{I}_{11} + (R_3 + jX_3 - jX_M)\dot{I}_{22} + R_4\dot{I}_{33} = \dot{E}_1 \\ (R_3 + jX_3 - jX_M)\dot{I}_{11} + (Z_2 + Z_5 + R_3 + jX_3)\dot{I}_{22} - R_5\dot{I}_{33} = \dot{E}_2 .\end{array}\right.$$

От второто уравнение

$$\dot{I}_{22} = \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - (R_3 + jX_3 - jX_M)\dot{I}_{11} + R_5\dot{I}_{33}}{(Z_2 + Z_5 + R_3 + jX_3)} =$$
$$= \frac{208 + j192{,}28}{40 + j10} = 6{,}025 + j3{,}301 = 6{,}87\angle 28{,}72^\circ\ A,$$

и след заместване в първото уравнение за $\dot{E}_1$ се получава

$$\dot{E}_1 = (32{,}864 - j135{,}26) + (57{,}365 + j109{,}756) + 100 =$$
$$= 190{,}23 - j25{,}5 = 191{,}93\angle -7{,}63^\circ\ V .$$

Останалите клонови токове имат следните стойности:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{22} = 6{,}003 - j0{,}075 = 6{,}0035\angle -0{,}72^0\ A,$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{33} = 4{,}977 - j3{,}375 = 6{,}013\angle -34{,}14^0\ A,$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_{33} - \dot{I}_{22} = -1{,}026 - j3{,}301 = 3{,}457\angle -107{,}27^0\ A.$$

Напрежението на източника на ток е

$$\dot{U}_6 = Z_4\dot{I}_4 + Z_5\dot{I}_5 = 79{,}02 - j133{,}52 = 155{,}151\angle -59{,}38^0\ V .$$

Генерираната мощност във веригата

$$\Sigma\dot{S}_Г = \dot{E}_1\overset{*}{I}_1 + \dot{E}_2\overset{*}{I}_2 + \dot{U}_6\overset{*}{J}_6 = (1795{,}7 + j360{,}5)VA .$$

Консумираната мощност

$$\Sigma\dot{S}_К = Z_1I_1^2 + Z_2I_2^2 + Z_3I_3^2 + Z_4I_4^2 + Z_5I_5^2 + j\,Re\{-2X_{13}\dot{I}_1\overset{*}{I}_3\} =$$
$$= (1795{,}7 + j360{,}5)VA.$$

3.5. Електрически вериги в режим на резонанс

Един пасивен двуполюсник, съдържащ реактивни елементи от двата вида (*L* и *C*), се намира в режим на *резонанс* в два случая:

1) Когато еквивалентният импеданс на двуполюсника е реално число, т.е. $\varphi = 0$, и входното напрежение и входният ток съвпадат по фаза;

2) Когато еквивалентният импеданс клони към безкрайност, т.е. $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

И в двата случая пасивният двуполюсник не обменя реактивна мощност и енергия с източника.

1. Резонанс в двуполюсник от последователно свързани *R, L, C* елементи - *напрежителен резонанс*.

За такава верига в режим на резонанс е изпълнено условието

$Z_{вх} = Z_0 = R$, т.е. $X_{вх} = Jm\{Z_{вх}\} = 0$.

Честотата, при която се изпълнява това условие, е

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и се нарича *резонансна честота*.

$X_{L0} = X_{C0} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ се нарича *вълново съпротивление*.

Отношението

$\frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\rho}{R} = Q$ се нарича *качествен фактор*, а реципрочната стойност на това отношение

$\frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho} = d$ се нарича *затихване*.

При захранване от източник на напрежение токът във веригата е

$I_0 = \frac{U}{R} = I_{max}$ и има максимална стойност.

Интервалът от стойности на честотата, за които е изпълнено условието

$I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_0$ се нарича *честотна лента*.

Ширината на честотната лента е

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

или в относителни единици

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d$, т.е. затихването е честотната лента в относителни единици.

2. Резонанс в двуполюсник от паралелно свързани *R, L, C* елементи - *токов резонанс*.

При резонанс в такава верига е изпълнено условието

$Y_{вх} = Y_0 = G$, т.е. $B_{вх} = Jm\{Y_{вх}\} = 0$, и $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$B_{L0} = B_{C0} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma$ се нарича *вълнова проводимост*, а

$\frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{\gamma}{G} = Q = \frac{1}{d}$ *качествен фактор*.

При захранване от източник на напрежение токът във веригата е

$I_0 = GU = I_{min}$ и има минимална стойност.

Честотната лента е интервалът от стойности на честотата, за които е изпълнено условието

$I \leq \sqrt{2} I_0 = 1{,}4142 I_0$.

Резонанс в една верига може да се постигне по два начина:

1) чрез изменение на честотата на захранващия източник;

2) чрез изменение на параметрите на реактивните елементи *L* или *C*.

Решени примери и задачи

3-33. Двуполюсник от последователно свързани резистор с активно съпротивление $R=20\Omega$, бобина с индуктивност $L=0,1H$ и кондензатор с капацитет $C=10\mu F$ е захранен от източник на синусоидално напрежение с ефективна стойност $U=2V$. Да се определят: резонансната честота на контура, вълновото съпротивление, качественият фактор, затихването, ширината на честотната лента и входният ток за веригата.

Решение:

1) Резонансната честота за двуполюсник от последователен тип е

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1.10.10^{-6}}} = 1000\, s^{-1},$$

или

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 159,155\, Hz\ .$$

2) Вълновото съпротивление $\rho = X_{L0} = X_{C0}$ е:

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 100\, \Omega\ .$$

3) Качественият фактор, който показва колко пъти напрежението на реактивните елементи надвишава входното напрежение при резонанс, е

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{100}{20} = 5\ .$$

4) Затихването в контура е

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{1}{5} = 0,2\ .$$

5) Ширината на честотната лента

$$\Delta\omega = d\omega_0 = 200\, s^{-1} \text{ или } \Delta f = df_0 = 0,2.159,155 = 31,83\, Hz\ .$$

6) Входният ток, който е максималният възможен ток, е

$$I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R} = \frac{2}{20} = 0,1\, A\ .$$

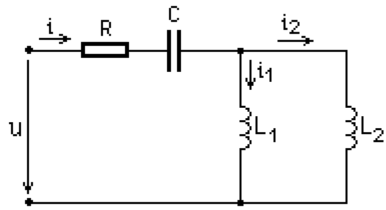
3-34. Резонансен контур от последователно свързани *R, L* и *C* елементи е с резонансна честота $\omega_0 = 10^6 s^{-1}$. Да се определят: стойността на капацитета при резонанс, вълновото съпротивление, качественият фактор, входният ток за веригата и ефективните стойности на напреженията на елементите, ако е дадено, че: $R=100\Omega$, $L=10mH$ и $U=100mV$.

Отг.: $C=100pF$; $\rho=10k\Omega$; $Q=100$; $I_0=1mA$; $U_R=100mV$; $U_{L0}=U_{C0}=10V$.

3-35. Резонансната честота на контур от последователно свързани *R, L* и *C* елементи е $f_0=500kHz$, а честотната лента е с ширина $\Delta f=20kHz$. Да се определят активното съпротивление и качественият фактор на контура, ако стойността на капацитета е $C=350pF$.

Отг.: $Q=25$; $R=36,4\Omega$.

3-36. За електрическата верига от фиг.3.37 стойностите на елементите са: $R=100\Omega$, $L_1=100mH$, $C=100\mu F$ и входно напрежение $u(t)=200\sin(1000t+45^\circ),V$. Да се определи стойността на L_2, за която веригата ще бъде в резонанс, както и моментните стойности на токовете във веригата.

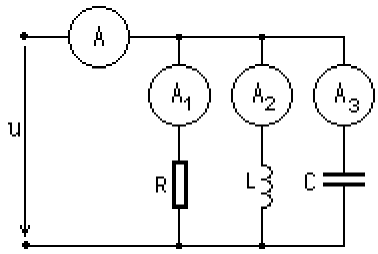


фиг.3.37

Отг.: $L_2=11,111mH$; $i(t)=2\sin(1000t+45^\circ),A$;

$i_1(t)=0,2\sin(1000t+45^\circ),A$; $i_2(t)=1,8\sin(1000t+45^\circ),A$.

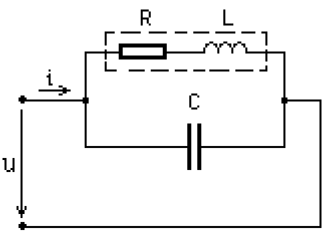
3-37. Двуполюсникът от паралелно свързани $R=50\Omega$, $L=10mH$ и $C=25\mu F$ (фиг.3.38) е в режим на резонанс на токовете. Да се определят: резонансната честота на контура, вълновата проводимост, качественият фактор и показанията на амперметрите, ако $U=200V$.



фиг.3.38

Отг.: $\omega_0 = 2.10^3\ s^{-1}$; $\gamma=0{,}05s$; $Q=2{,}5$; $I=I_1=4A$; $I_2=I_3=10A$.

3-38. Паралелният резонансен контур от реална бобина и кондензатор (фиг.3.39) е със стойности на елементите $R=2\Omega$, $L=20mH$ и $C=50\mu F$. Да се определят: резонансната честота на контура, вълновото съпротивление и качественият фактор. При каква стойност на R резонансната честота може да бъде пресметната по формулата $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ с грешка, по-малка от $0{,}01\%$?



фиг.3.39

Решение:

Комплексното входно съпротивление на веригата е

$$Z_{вх} = \frac{(R + jX_L)(-jX_C)}{(R + jX_L) + (-jX_C)} = \frac{X_L X_C - jRX_C}{R + j(X_L - X_C)} =$$

$$= \frac{RX_L X_C - RX_C(X_L - X_C)}{R^2 + (X_L - X_C)^2} - j\frac{R^2 X_C + X_L X_C(X_L - X_C)}{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Условието за резонанс е

$$X_{вх} = Jm\{Z_{вх}\} = 0$$

или

$$R^2 + X_L(X_L - X_C) = 0,$$

откъдето за резонансната честота се получава

$$\omega_0 = \omega_0' = \sqrt{\frac{L - R^2C}{L^2C}} = 994{,}99 \approx 995\, s^{-1}.$$

Вълновото съпротивление е

$$\rho = \omega_0 L_e = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L_e}{C}} = 20{,}1\Omega,$$

където L_e е еквивалентната индуктивност от паралелната заместваща схема на бобината.

За качествения фактор се получава

$$Q = \frac{\rho}{R} = 10{,}05.$$

Относителната грешка за резонансната честота е

$$\frac{\omega_0 - \omega_0'}{\omega_0} \le 0{,}001,$$

откъдето

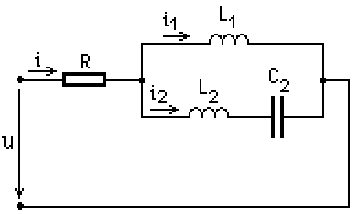
$$\frac{\omega_0'}{\omega_0} \ge 0{,}999 \text{ или } \frac{\sqrt{\frac{L - R^2C}{L^2C}}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} \ge 0{,}999.$$

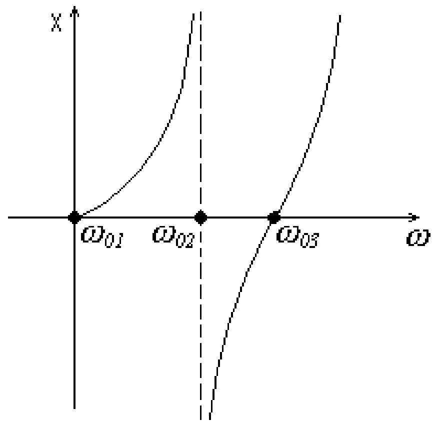
Тогава

$$\frac{L - R^2C}{L} \ge 0{,}999^2 \text{ и } R \le \sqrt{(1 - 0{,}999^2)\frac{L}{C}} = \sqrt{0{,}002\frac{L}{C}}.$$

В случая $R \le 0{,}894\Omega$.

3-39. Показаният на фиг.3.40.а двуполюсник е включен към източник на напрежение с постоянна ефективна стойност и регулируема честота. Да се определят резонансните честоти и клоновите токове в режимите на резонанс, ако е дадено: $U=5V$ $R=40\Omega$, $L_1=20mH$, $L_2=35mH$, и $C_2=0,05\mu F$.





а) б)

фиг.3.40

Решение:

Еквивалентното реактивно съпротивление на веригата е

$$X_{вх} = \frac{X_{L1}(X_{L2} - X_{C2})}{X_{L1} + X_{L2} - X_{C2}} = \frac{\omega L_1(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})}{\omega L_1 + \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{\omega L_1(\omega^2 L_2 C_2 - 1)}{\omega^2 (L_1 + L_2) C_2 - 1},$$

чиято графика като функция от честотата е показана принципно на фиг.3.40.б.

При честоти, съответстващи на нулите на числителя, двуполюсникът се намира в режим на резонанс на напреженията. В случая това са честотите:

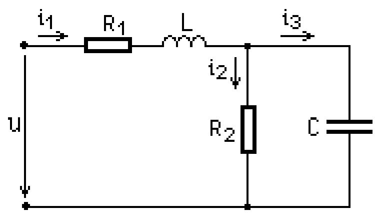
1) $\omega_{01} = 0$ - постояннотоков режим, $I_2 = 0A, I = I_1 = 0,125A$;

2) $\omega_{03} = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = 23904,57\, s^{-1}$, $I_1 = 0A, I = I_2 = 10,4mA$.

При честоти, съответстващи на нулите на знаменателя, двуполюсникът се намира в режим на резонанс на токовете, в случая това са честотите :

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C_2}} = 19069{,}25\,s^{-1},\ I = 0\,A,\, I_1 = I_2 = 13{,}1mA\,.$$

3-40. За веригата от фиг.3.41 е дадено: $R_1=50\Omega$, $L=100\ mH$, $R_2=100\Omega$, и $C=100\mu F$. Да се определят резонансната честота на веригата и комплексите на токовете, ако входното напрежение е с ефективна стойност $U=220V$.



фиг.3.41

Решение:

Еквивалентният импеданс на паралелно свързаните R_2 и C е

$$Z_{R_2C} = \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 + (-jX_C)} = \frac{R_2X_C^2}{R_2^2 + X_C^2} - j\frac{R_2^2X_C}{R_2^2 + X_C^2}\,.$$

От еквивалентното реактивно съпротивление за веригата и условието за резонанс

$$X_{вх} = X_L - \frac{R_2^2X_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0\,,$$

се намира резонансна честота за веригата

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_2^2C - L}{R_2^2C^2L}} = 300\,s^{-1}\,.$$

Входният ток е

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_0} = \frac{\dot{U}}{R_{вх}} = \frac{\dot{U}}{R_1 + \dfrac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2}} = \frac{220}{65,385} = 3,365\ A\,.$$

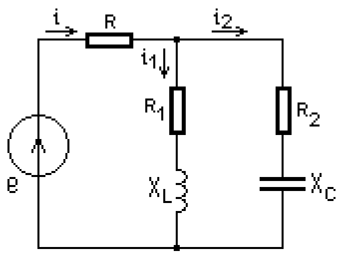
Останалите токове са съответно

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{(-jX_C)}{R_2 + (-jX_C)} = 1,866\angle -56,3^\circ\ A$$

и

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 2,799\angle 33,69^\circ\ A\,.$$

3-41. При какви стойности на X_C във веригата, показана на фиг.3.42, настъпва резонанс на токовете? Да се определят клоновите токове в тези случаи, ако е дадено: $R_1=8\Omega$, $R_1=40\Omega$, $R_2=40\Omega$, $X_L=30\Omega$, $E=120V$.

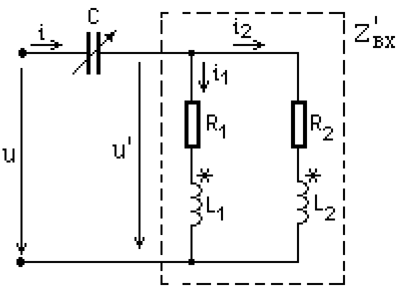


фиг.3.42

Отг.: $X'_C = 53,33\Omega, I' = 2,5A, I'_1 = 2A, I'_2 = 1,5A\,;$

$X''_C = 30\Omega, I'' = 3,06A, I''_1 = I''_2 = 1,91A\,.$

3-42. Определете при какви стойности на кондензатора C във веригата от фиг.3.43 настъпва резонанс, ако е дадено: $R_1 = R_2 = 100\Omega$, $L_1=0,1mH$, $L_2=0,2mH$, $M=0,1mH$ и $\omega = 5.10^5\ s^{-1}$.



фиг.3.43

*Упътване: $X_C = Jm\left\{Z'_{вх}\right\}$, където $Z'_{вх} = \dfrac{\dot{U}'}{\dot{I}} = \dfrac{\dot{U}'}{\dot{I}_1 + \dot{I}_2}$.

Отг.: C≈32nF.

3.6. Трифазни вериги

Трифазните вериги представляват съвкупност от три еднофазни вериги, свързани по определен начин. Ако е изпълнено условието източниците на е.д.н. в трите вериги да са с еднаква амплитуда, еднаква честота и да са дефазирани помежду си на $\frac{2\pi}{3} rad$ (или да образуват симетрична трифазна система е.д.н.):

$$e_1(t) = E_m \sin \omega t$$

$$e_2(t) = E_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$e_3(t) = E_m \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}),$$

трите вериги могат да бъдат обединени в една, при което се спестяват част от проводниците, свързващи източниците и консуматорите. Пестенето на материал за проводници, както и лесното получаване на въртящо се магнитно поле са основните преимущества на трифазните вериги.

Понятието "*фаза*" в трифазните вериги има двоен смисъл:

- фаза на синусоидалната величина;
- фаза - като част от електрическата верига.

Симетрична трифазна система е.д.н. представена в комплексен вид е:

$$\dot{E}_1 = Ee^{j0} = E$$

$$\dot{E}_2 = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}} = E\angle -\frac{2\pi}{3} = a^2 \dot{E}_1$$

$$\dot{E}_3 = Ee^{j\frac{2\pi}{3}} = E\angle \frac{2\pi}{3} = a\dot{E}_1,$$

където

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e\angle \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$ е комплексен оператор.

За такава симетрична трифазна система е.д.н. е изпълнено:

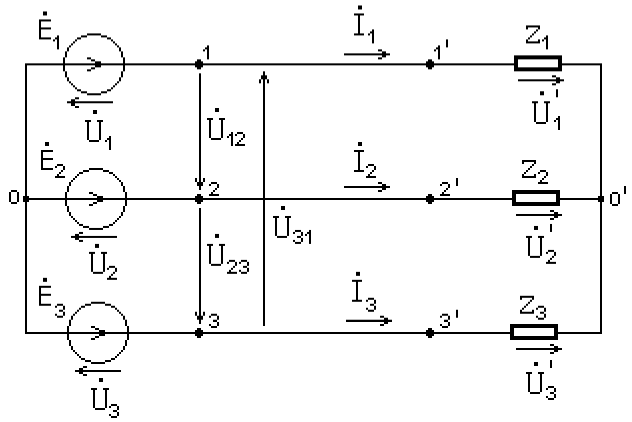
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

или в комплексен вид

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = E(1 + a^2 + a) = 0 .$$

1. Свързване "звезда" (⅄).

Ако краищата на трите източника (консуматора) са свързани в обща точка, то това свързване се нарича *звезда*, а общата точка се нарича *звезден център* - фиг.3.44,



фиг.3.44

където:

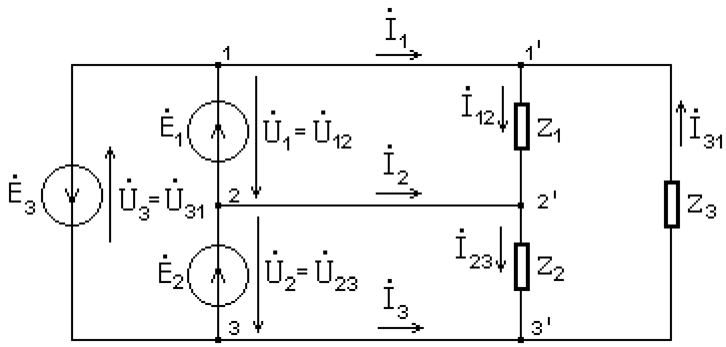
- U_1, U_2, U_3 са фазови напрежения на източника;
- U_{12}, U_{23}, U_{31} - линейни напрежения;
- I_1, I_2, I_3 - фазови и линейни токове.

За свързване *звезда* в симетричен режим ($Z_1 = Z_2 = Z_3$) е изпълнено:

$$U_л = \sqrt{3} U_ф ;\ I_л = I_ф .$$

2. Свързване "триъгълник" (△).

Ако трите източника (консуматора) са свързани в затворен контур (при източниците последователността на свързване е такава, че сумарното е.д.н. в контура е нула), то това свързване се нарича *триъгълник* - фиг.3.45,



фиг.3.45

където:

- U_1, U_2, U_3 са фазови напрежения на източника;
- U_{12}, U_{23}, U_{31} - линейни напрежения;
- I_1, I_2, I_3 - линейни токове;
- I_{12}, I_{23}, I_{31} - фазови токове;

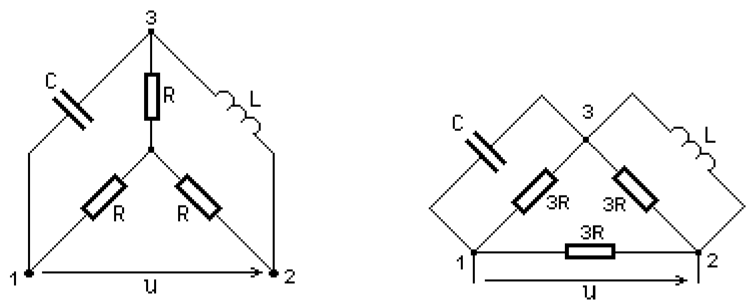
За свързване *триъгълник* в симетричен режим $(Z_1 = Z_2 = Z_3)$ е изпълнено

$$U_л = U_ф;\ I_л = \sqrt{3} I_ф .$$

Анализът на трифазните вериги се извършва по същите методи, по които се анализират сложни вериги за променлив ток. При симетричните системи се получават някои прости изрази за определянето на фазовите и линейните токове и напрежения, които се използват наготово.

Решени примери и задачи

3-43. Симетрична трифазна система напрежения може да се получи еднофазен източник на напрежение, като се реализира схемата, показана на фиг.3.46.а. Да се определи при каква честота на източника и при каква стойност на R напреженията u_{12}, u_{23} и u_{31} ще образуват симетрична трифазна система, ако $L=15mH$ и $C=20\mu F$.



а) б)

фиг.3.46

Решение:

Преобразува се звездата от резистори в еквивалентен триъгълник, както е показано на фиг.3.46.б, при което:

$$\dot{U}_{23} = -\frac{\dot{U}_{12}}{Z_{23} + Z_{31}} Z_{23}\,,\ \dot{U}_{31} = -\frac{\dot{U}_{12}}{Z_{23} + Z_{31}} Z_{31}\,.$$

При симетрична трифазна система напрежения е изпълнено следното условие:

$$\frac{\dot{U}_{23}}{\dot{U}_{31}} = \frac{Z_{23}}{Z_{31}} = \frac{a^2\dot{U}_{12}}{a\dot{U}_{12}} = a = 1\angle 120^\circ \text{, т.е.}$$

$$\frac{Z_{23}}{Z_{31}} = \frac{\dfrac{3R.jX_L}{3R + jX_L}}{\dfrac{3R.(-jX_C)}{3R - jX_C}} = \frac{z_{23}\angle\varphi_{23}}{z_{31}\angle\varphi_{31}} = 1\angle 120^\circ\,.$$

Последното съотношение е валидно при $X_L = X_C$, следователно

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1825{,}74 s^{-1}, \quad f = 290{,}58 Hz\,;$$

и

$$\varphi_{23} = arctg\frac{3R}{X_L} = 60^\circ,\ \varphi_{31} = arctg(-\frac{3R}{X_C}) = -60^\circ\,,$$

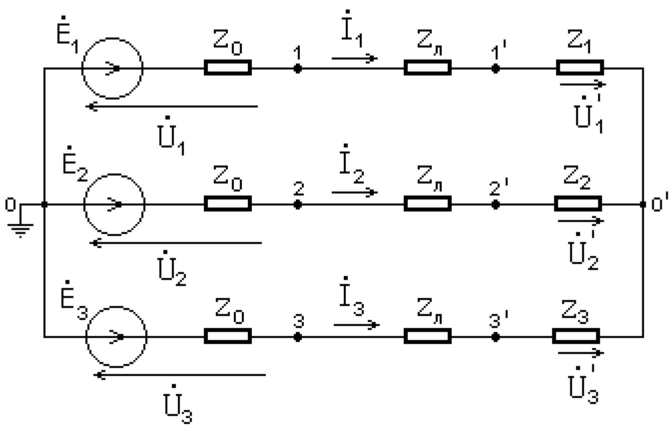
откъдето

$$R = X_L \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

При определената честота получаваме, че

$$X_L = X_C = 27{,}39\Omega \text{ и } R = 15{,}8\Omega.$$

3-44. Трифазен симетричен консуматор с импеданс Z на всяка фаза, свързан “звезда” е захранен от трифазен източник на е.д.н. с ефективна стойност E и вътрешен импеданс Z_0 посредством трипроводна линия с импеданс $Z_л$ (фиг.3.47). Определете фазовите токове, фазовите напрежения на източника и консуматора, ако е дадено: $Z=(18+j7)\Omega$, $Z_0=(0{,}5+j2)\Omega$, $Z_л=(1{,}5+j3)\Omega$ и $E=220V$.



фиг.3.47

Решение:

По метода на възловите потенциали при $\dot{V}_0 = 0$ за потенциала на т. $0'$ се получава следното уравнение:

$$\dot{V}_{0'} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dot{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{(\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3)Y_1}{3Y_1} = 0,$$

т.е. точките 0 и $0'$ имат еднакви потенциали, което е изпълнено винаги при симетричен режим на работа на трифазните системи - еднакви по стойност и характер товари в трите фази. Следователно, всяка от фазите може да се разглежда като независима верига чрез свързване на звездните центрове на източника *0* и на консуматора *0′*.

При това условие токовете в отделните фази са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} = \frac{\dot{E}_1}{Z_0 + Z_Л + Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{20 + j12} = 8{,}09 - j4{,}85 = 9{,}43\angle -30{,}96^\circ\ A,$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2}{Z_2} = \frac{\dot{E}_2}{Z_0 + Z_Л + Z} = \frac{220\angle -120^\circ}{20 + j12} = -8{,}25 - j4{,}58 = 9{,}43\angle -150{,}96^\circ\ A,$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3}{Z_3} = \frac{\dot{E}_3}{Z_0 + Z_Л + Z} = \frac{220\angle 120^\circ}{20 + j12} = 0{,}16 - j9{,}43 = 9{,}43\angle 89{,}04^\circ\ A.$$

Фазовите напрежения на изводите на източника са:

$$\dot{U}_1 = \dot{E}_1 - Z_0\dot{I}_1 = 202{,}26 - j13{,}76 = 206{,}71\angle -3{,}81^\circ\ V,$$

$$\dot{U}_2 = \dot{E}_2 - Z_0\dot{I}_2 = -115{,}04 - j171{,}74 = 206{,}71\angle -123{,}81^\circ\ V,$$

$$\dot{U}_3 = \dot{E}_3 - Z_0\dot{I}_3 = -91{,}22 + j185{,}49 = 206{,}71\angle 116{,}19^\circ\ V;$$

а фазовите напрежения на изводите на консуматора:

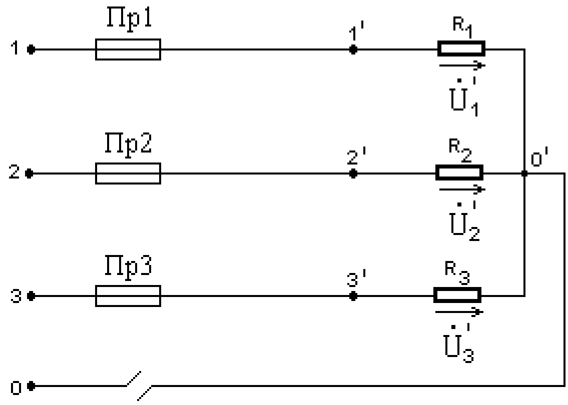
$$\dot{U}_1' = Z\dot{I}_1 = 179{,}57 - j30{,}67 = 182{,}17\angle -9{,}69^\circ\ V,$$

$$\dot{U}_2' = Z\dot{I}_2 = -116{,}4 - j140{,}13 = 182{,}17\angle -129{,}71^\circ\ V,$$

$$\dot{U}_3' = Z\dot{I}_3 = -63{,}17 + j170{,}87 = 182{,}17\angle 110{,}29^\circ\ V.$$

*Получените резултати показват, че съответните фазови напрежения на източника, фазови напрежения на консуматора и фазови токове са дефазирани на еднакви ъгли от съответните фазови е.д.н., т.е. аналогично на е.д.н. те образуват симетрични звезди.

3-45. Еквивалентният товар на всяка фаза от трифазната линия, захранваща една жилищна кооперация, е чисто активен и има стойности $R_1=2\Omega$, $R_2=3\Omega$, $R_3=8\Omega$. В даден момент поради повреда се прекъсва нулевият проводник на захранващия кабел - фиг.3.48. Да се определят фазовите напрежения на консуматорите за всяка от трите фази след тази повреда и стойността на консумираната мощност, ако захранващият източник е симетричен с линейно напрежение $U_л=380V$.



фиг.3.48

Решение:

Преди прекъсването на нулевия проводник всеки от консуматорите в трите фази, независимо от несиметрията, е работел при фазово напрежение

$$U_{\phi} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219{,}4V \ .$$

След прекъсване на нулевия проводник се получава случаят на несиметричен товар, свързан по схема *звезда* без изведен нулев проводник. В този случай между звездните центрове на източника и консуматора се появява напрежение, чиято стойност е

$$\dot{U}_{0'0} = \dot{V}_{0'} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dot{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = 62{,}03 - j41{,}32 = 74{,}53\angle -33{,}67^{\circ}\ V \ .$$

За фазовите напрежения на консуматора се получават следните изрази и стойности:

$$\dot{U}_1' = \dot{U}_1 - \dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{U}_{12} Y_2 - \dot{U}_{31} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = 163{,}14\angle 14{,}71^{\circ}\ V \ ,$$

$$\dot{U}_2' = \dot{U}_2 - \dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{U}_{23} Y_3 - \dot{U}_{12} Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = 227{,}78\angle -139{,}1^{\circ}\ V \ ,$$

$$\dot{U}_3' = \dot{U}_3 - \dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{U}_{31}Y_1 - \dot{U}_{23}Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = 288{,}89\angle 126{,}59^\circ\ V\ .$$

където

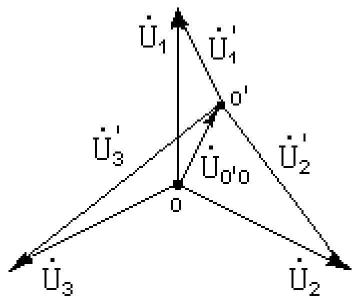
$$\dot{U}_{12} = 380V\ ,$$

$$\dot{U}_{23} = a^2\dot{U}_{12} = 380\angle -120^\circ\ V\ ,$$

$$\dot{U}_{31} = a\dot{U}_{12} = 380\angle 120^\circ\ V$$

са линейните напрежения на захранващия източник, които също както фазовите напрежения образуват симетрична звезда.

Векторната диаграма на фазовите напреженията на консуматора преди и след повредата е показана на фиг.3.49.



фиг.3.49

*На практика стойностите на фазовите напрежения на консуматорите в трите фази след повредата са чисто случайни и зависят от включените консуматори в момента на възникване на повредата. В най-неблагоприятен режим е фаза *3*, която е слабо натоварена. Поради тази причина на нулевия проводник не се поставя предпазител.

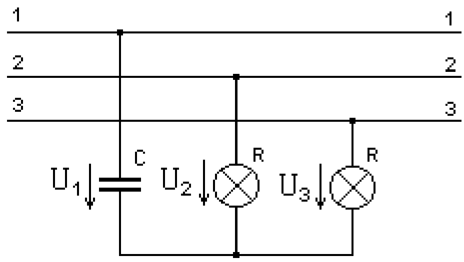
Консумираната от всяка фаза активна мощност се определя от израза

$$P_\phi = \frac{U_\phi^2}{R_\phi}\ ,$$

при което стойностите на мощността в отделните фази са:

$$P_1 = 13248{,}66W\ ,\quad P_2 = 17209{,}64W\ ,\quad P_3 = 10380{,}24W\ .$$

3-46. На фиг.3.50 е показана схема на елементарен указател на фазовия ред на една трифазна система. Към една от фазите е свързан кондензатор и тя се приема за “*1*” фаза. Към останалите две фази са свързани лампи с активно съпротивление $R=X_C$. Да се определи отношението между напреженията U_2 и U_3, ако трифазният източник е симетричен, с линейно напрежение $U_л=380V$.

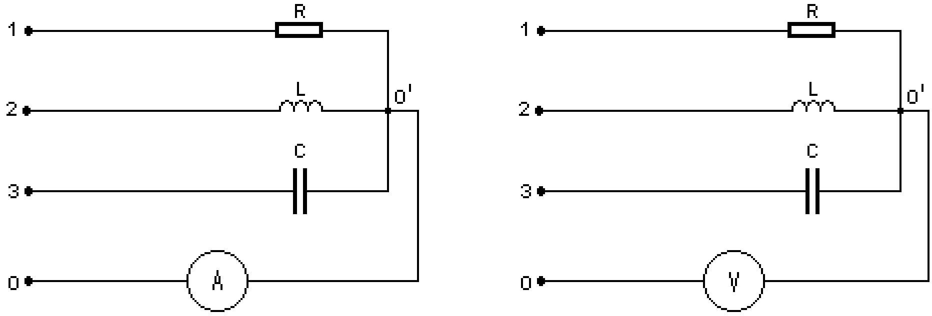


фиг.3.50

Отг.: $\dfrac{U_2}{U_3}=3{,}73$.

*Следователно, лампата включена към фаза *2*, ще свети много по-ярко от лампата във фаза *3*.

3-47. Да се определят показанията на уредите, включени във веригата на нулевия проводник на несиметричния трифазен консуматор $R=X_L=X_C=100\Omega$ (фиг.3.51.а и б.) ако захранващият трифазен източник е симетричен с линейно напрежение $U_л=380V$.

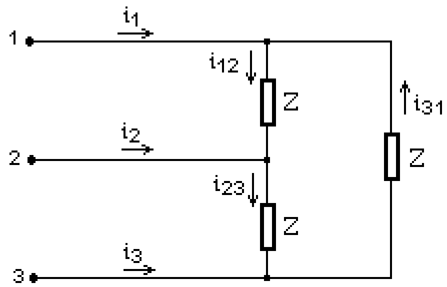


а) б)

фиг.3.51

Отг.: а) $I_A=1{,}61A$; *б)* $U_V=160{,}6V$.

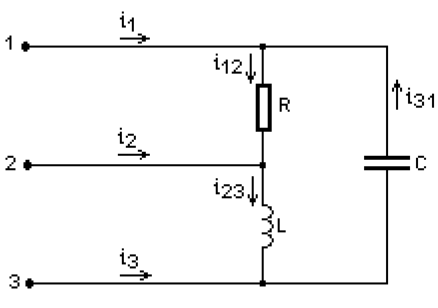
3-48. Да се определят фазовите и линейните токове, както и активната и реактивната мощност на симетричен трифазен консуматор свързан в триъгълник, с импеданс $Z=(20-j20)\Omega$, ако $U_л=380V$ (фиг.3.52).



фиг.3.52

$$Отг.: \ I_{12} = I_{23} = I_{31} = 13{,}44A;\ I_1 = I_2 = I_3 = 23{,}28A;$$
$$\dot{S}_{3ф} = (10830 - j10830)VA.$$

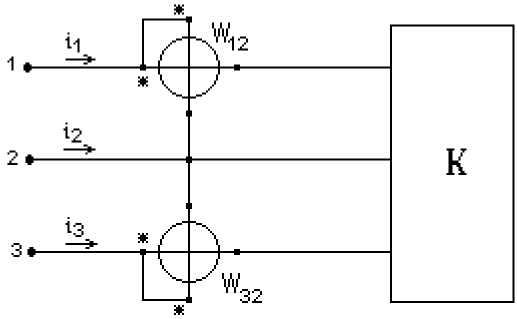
3-49. Да се определи отношението между ефективните стойности на линейните токове в показаната на фиг.3.53 трифазна верига с несиметричен консуматор, свързан в триъгълник, при еднакъв модул на импедансите $R=X_L=X_C$ спрямо линейния ток при симетричен товар и същия модул на импеданса, ако източникът на напрежение е симетричен.



фиг.3.53

$$Отг.: \ I = I_л = \sqrt{3}I_ф = \frac{\sqrt{3}U_л}{R};\ I_1 = 1{,}115I;\ I_2 = 1{,}115I;\ I_3 = 0{,}577I.$$

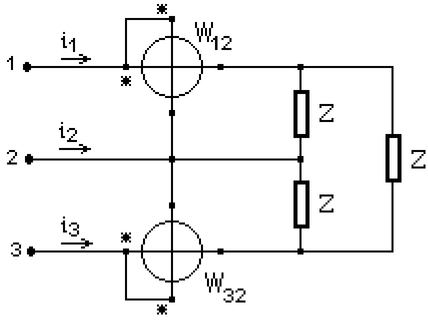
3-50. На фиг.3.54 е показана известната схема на Арон за измерване на активната мощност в трипроводна трифазна система посредством два ватметъра. Да се докаже, че сумата от показанията на двата ватметъра е равна на активната мощност на консуматора независимо от схемата на свързване и дали е симетричен, или е несиметричен.



фиг.3.54

*Упътване: В израза за моментната трифазна мощност, представете един от токовете чрез останалите. Обикновено това е токът във фазата, в която не е включена токова намотка на някои от ватметрите (за дадената схема това е ток i_2).

3-51. Даден е трифазен симетричен консуматор с импеданс $Z=(15+j15)\Omega$, свързан в триъгълник (фиг.3.55) и захранен от източник с линейно напрежение $U_л=380V$. Да се определят показанията на двата ватметъра, свързани по схема на Арон и общата активна мощност на веригата.



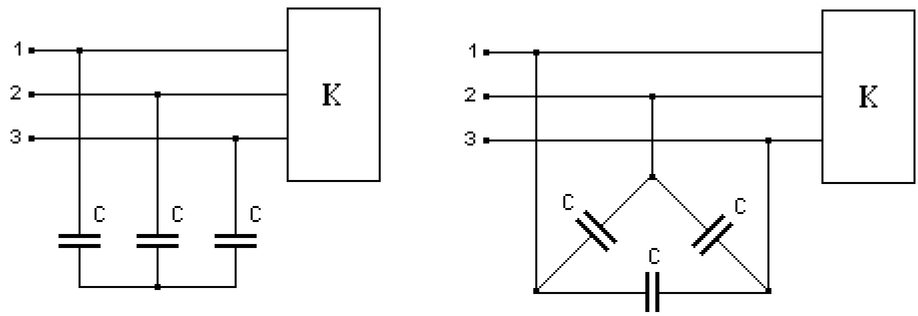
фиг.3.55

Отг.: $P_{3ф}=P_{12}+P_{32}=2.3051,5=6013W$.

3-52. Трифазен симетричен консуматор е с параметри: активна мощност $P=12kW$, линейно напрежение $U_л=380V$, $f=50Hz$ и $cos\varphi=0,6$. Да се определи капацитета C на кондензатор, който трябва да се включи във всяка една фаза, за да се повиши фактора на мощността на линията до стойност $cos\varphi=1$, ако:

1) кондензаторите се свържат по схема звезда - фиг.3.56.а;

2) кондензаторите се свържат по схема триъгълник - фиг.3.56.б.



а) б)

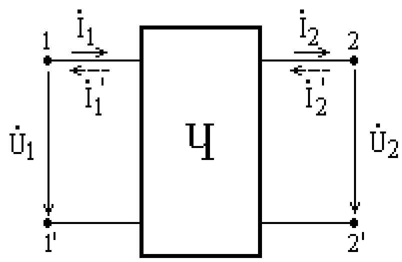
фиг.3.56

Отг.: 1) $C=165\mu F$; 2) $C=55\mu F$.

3.7. Четириполюсници

1. Основни понятия

Четириполюсниците представляват електротехнически устройства с две двойки изводи, които предават електромагнитна енергия (електрически сигнали) от едно устройство (източник) към друго устройство (консуматор). Изводите, които се свързват към източника, се наричат *входни* (*първични*), а тези които се свързват към консуматора, се наричат *изходни* (*вторични*). Като четириполюсници могат да се разгледат трансформаторите, усилвателите, филтрите, предавателните линии и др. Всички тези устройства, имащи различно предназначение и структура, могат да бъдат представени по един и същи начин като четириполюсници и да бъдат описани с едни и същи системи уравнения, даващи зависимостите между входните и изходните величини (токове и напрежения). Схемното изображение на един четириполюсник е дадено на фиг.3.57.



фиг.3.57

Четириполюсниците биват:

1) пасивни и активни - ако на изводите на четириполюсника в изключено състояние няма напрежение, то той е пасивен;

2) линейни и нелинейни - ако елементите, от които е изграден четириполюсника са линейни, то самият той е линеен;

3) симетрични и несиметрични - ако смяната на местата на изводите не променя токовете и напреженията във веригата, в която е включен, то четириполюсника е симетричен;

4) обратими и необратими - ако предавателното съпротивление между входните и изходните изводи (отношението между входното

напрежение и изходния ток) остава постоянно, независимо от това коя двойка изводи е входна, то четириполюсника е обратим (взаимен), в противен случай той е необратим (невзаимен). Всички пасивни линейни четириполюсници са обратими.

2. Системи уравнения за пасивни четириполюсници в установен синусоидален режим

Тези системи уравнения дават зависимостите между първичните и вторичните напрежения и токове, без да се анализират процесите в електрическите вериги. Коефициентите на пропорционалност в уравненията, свързващи първичните и вторичните величини на четириполюсника, се наричат параметри на четириполюсника. В зависимост от това коя двойка величини се изразява от останалите, съществуват следните системи уравнения:

1) ***Y*** - **система уравнения** – изразява зависимостите на входния и изходния ток от входното и изходното напрежение:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \,. \end{array}\right.$$

2) ***Z*** - **система уравнения** – изразява зависимостите на входното и изходното напрежение от входния и изходния ток:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \,. \end{array}\right.$$

3) ***A*** - **система уравнения** – най-често употребяваната система уравнения, наречена още *предавателна система уравнения*. Изразява зависимостите на входното напрежение и входния ток от изходното напрежение и изходния ток:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \,, \end{array}\right.$$

където коефициентите A и D са безразмерни величини, B има размерност на съпротивление, а C - на проводимост. За пасивен взаимен четириполюсник е изпълнена следната зависимост между коефициентите:

$$AD - BC = 1 \,.$$

4) ***B*** **- система уравнения** – изразява зависимостите на входното напрежение и входния ток от изходното напрежение и изходния ток при захранване от обратната страна (т.е. при смяна на местата на входните и изходните изводи). В случая посоките на двата тока са обратни на разглежданите досега ($\dot{I}_1^{'}$ и $\dot{I}_2^{'}$):

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1^{'} \\ \dot{I}_2^{'} = C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1^{'} . \end{vmatrix}$$

5) ***H*** **- система уравнения** – изразява зависимостите на входното напрежение и изходния ток от изходното напрежение и входния ток:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 . \end{vmatrix}$$

6) ***G*** **- система уравнения** – изразява зависимостите на входния ток и изходното напрежение от входното напрежение и изходния ток:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 . \end{vmatrix}$$

Ако схемата на даден четириполюсник е известна, параметрите му могат да бъдат изчислени, като се използват методите за анализ на електрически вериги. Ако схемата на четириполюсника не е известна, то параметрите му могат да бъдат определени опитно.

3. Характеристични параметри на пасивни четириполюсници

1) Характеристични съпротивления – това са входни съпротивления, които отговарят на следните условия:

$$Z_{C1} = Z_{BX1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_{T2} + B}{CZ_{T2} + D} \quad \text{при} \quad Z_{T2} = Z_{C2}$$

и

$$Z_{C2} = Z_{BX2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1}{C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1} = \frac{DZ_{T1} + B}{CZ_{T1} + A} \quad \text{при} \quad Z_{T1} = Z_{C1},$$

където

$Z_{T2} = \dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ е комплексното товарно съпротивление при захранване от първичната страна;

$Z_{T1} = \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$ е комплексното товарно съпротивление при захранване от вторичната страна.

Когато четириполюсникът е натоварен с характеристичното си съпротивление то режима се нарича *съгласувано натоварване*. За такъв режим стойностите на съпротивленията са

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \text{ и } Z_{C2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}} \, .$$

За симетричен четириполюсник

$$Z_C = Z_{C1} = Z_{C2} = \sqrt{\frac{B}{C}} \, .$$

2) Константа на разпространение

Отношението

$$\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = e^{2\gamma} = (\sqrt{AD} + \sqrt{BC}\,)^2 \, ,$$

където

$$e^{\gamma} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} \, ,$$

$\gamma = ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}\,) = \alpha + j\beta$ се нарича константа на разпространение.

Реалната част на константата на разпространение

α се нарича константа на затихване, а имагинерната част

β се нарича фазова константа.

За симетрични четириполюсници в съгласуван режим:

$$\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)^2 = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)^2 = e^{2\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^{\alpha} e^{j\beta}$$

или

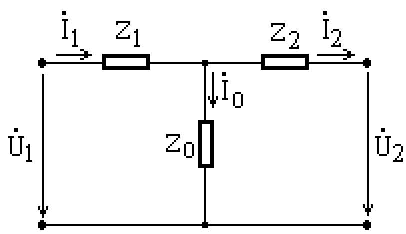
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^{\alpha} \quad \text{и} \quad \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2} = \beta \, .$$

За константата на затихването α се получава

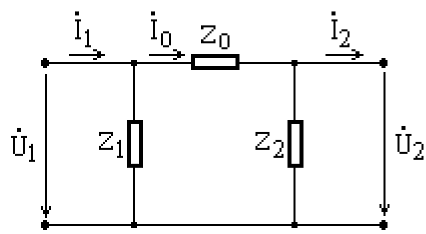
$$\alpha = \frac{1}{2} ln \frac{S_1}{S_2} = ln \frac{U_1}{U_2} = ln \frac{I_1}{I_2}, \; Np \quad \text{или} \quad \alpha = 10 \, lg \frac{S_1}{S_2}, \; dB \, .$$

Решени примери и задачи

3-53. Като използвате законите на Кирхоф, определете *A*-параметрите на четириполюсниците, чиито заместващи схеми са показани на фиг.3.58.а и б, ако Z_1, Z_2, Z_0 са дадени параметрично.



а)



б)

фиг.3.58

Решение:

1) Веригата от фиг.3.58.а представлява т.нар. *T*-образна заместваща схема на четириполюсник. Система уравнения по законите на Кирхоф за нея е следната:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_0 \\ \dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_0 \dot{I}_0 \\ \dot{U}_2 = -Z_2 \dot{I}_2 + Z_0 \dot{I}_0 \, . \end{array} \right.$$

От последното уравнение изразяваме напрежението и тока на импеданса Z_0:

$$Z_0\dot{I}_0 = \dot{U}_2 + Z_2\dot{I}_2 ,$$

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_2 + Z_2\dot{I}_2}{Z_0} = \frac{1}{Z_0}\dot{U}_2 + \frac{Z_2}{Z_0}\dot{I}_2 .$$

Заместваме в останалите две уравнения, при което се получава:

$$\dot{U}_1 = Z_1\dot{I}_1 + \dot{U}_2 + Z_2\dot{I}_2 = Z_1\left[\frac{1}{Z_0}\dot{U}_2 + (1+\frac{Z_2}{Z_0})\dot{I}_2\right] + \dot{U}_2 + Z_2\dot{I}_2 =$$

$$= (1+\frac{Z_1}{Z_0})\dot{U}_2 + (Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1Z_2}{Z_0})\dot{I}_2 ,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = \dot{I}_2 + \frac{1}{Z_0}\dot{U}_2 + \frac{Z_2}{Z_0}\dot{I}_2 = \frac{1}{Z_0}\dot{U}_2 + (1+\frac{Z_2}{Z_0})\dot{I}_2 .$$

Следователно *A*-параметрите на четириполюсниците с *T*-образна заместваща схема са:

$$A = (1+\frac{Z_1}{Z_0}),\ B = (Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1Z_2}{Z_0}),\ C = \frac{1}{Z_0};\ D = (1+\frac{Z_2}{Z_0}).$$

2) Веригата от фиг.3.58.б е т.нар. *П*-образна заместваща схема на четириполюсника.

За нея по законите на Кирхоф се записват следните уравнения:

$$\dot{U}_1 = Z_0\dot{I}_0 + \dot{U}_2 = Z_0(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_2}) + \dot{U}_2 = (1+\frac{Z_0}{Z_2})\dot{U}_2 + Z_0\dot{I}_2 ;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} + \dot{I}_0 = \frac{1}{Z_1}\left[(1+\frac{Z_2}{Z_0})\dot{U}_2 + Z_0\dot{I}_2\right] + (\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_2}) =$$

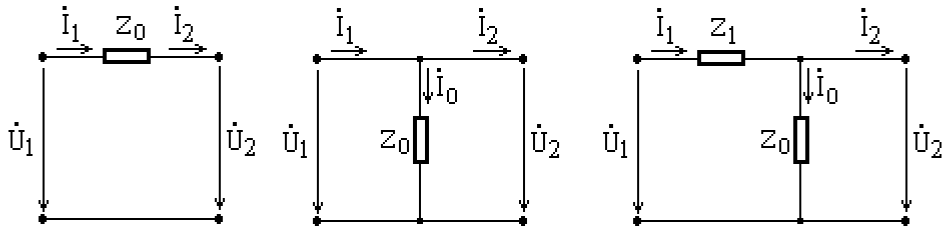
$$= (\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_0}{Z_1Z_2})\dot{U}_2 + (1+\frac{Z_0}{Z_1})\dot{I}_2 ,$$

откъдето за *A*-параметрите на четириполюсниците с *П*-образна схема се получават стойностите:

$$A=(1+\frac{Z_0}{Z_2});\ B=Z_0;\ C=(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{Z_0}{Z_1Z_2});\ D=(1+\frac{Z_0}{Z_1}).$$

3-54. Направете проверка на получените резултати в зад.**3.53** чрез анализ на режимите на празен ход ($\dot{I}_2=0$) и късо съединение ($\dot{U}_2=0$).

3.55. Определете *A*-параметрите на елементарните четириполюсници от фиг.3.59 при известни $Z_1=j30\,\Omega$ и $Z_0=-j10\,\Omega$.



а) б) в)

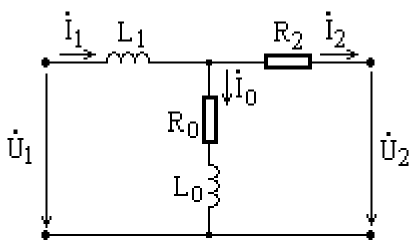
фиг.3.59

Отг.: а) $A=D=1, B=j30\,\Omega, C=0$;

б) $A=D=1, B=0, C=j0{,}1\,s$;

в) $A=-2, B=j30\,\Omega, C=j0{,}1\,s, D=1$.

3-56. Да се определят *A*-параметрите на четириполюсника от фиг.3.60 чрез анализ на режимите на празен ход и късо съединение, ако е дадено $X_1=R_2=R_0=X_0=10\Omega$.



фиг.3.60

<u>Решение</u>:

1) В режим на *празен ход* на изхода ($\dot{I}_2 = 0$) A-системата уравнения на четириполюсника е:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{U}_1 = A\dot{U}_{20} \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_{20}\ , \end{array} \right.$$

откъдето за константите A и C се получава:

$$A = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_{20}} = \frac{\dot{U}_1}{(R_0 + jX_0)\dot{I}_{10}} = \frac{\dot{U}_1}{(R_0 + jX_0)\dfrac{\dot{U}_1}{jX_1 + (R_0 + jX_0)}} =$$

$$= \frac{jX_1 + (R_0 + jX_0)}{(R_0 + jX_0)} = \frac{10 + j20}{(10 + j10)} = (1{,}5 + j0{,}5);$$

$$C = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{20}} = \frac{\dot{I}_{10}}{(R_0 + jX_0)\dot{I}_{10}} = \frac{1}{(R_0 + jX_0)} = (0{,}05 - j0{,}05)\,s\ .$$

2) В режим на *късо съединение* на изхода ($\dot{U}_2 = 0$) A-системата уравнения добива вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{U}_1 = B\dot{I}_{2k} \\ \dot{I}_{1k} = D\dot{I}_{2k}\ , \end{array} \right.$$

откъдето константите B и D са

$$B = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{2k}} = \frac{\dot{U}_1}{\dfrac{(R_0 + jX_0)\dot{U}_1}{jX_1(R_0 + jX_0) + (R_0 + jX_0)R_2 + jX_1R_0}} = \frac{j300}{10 + j10} = (15 + j15)\,\Omega,$$

$$D = \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_{2k}} = \frac{\dot{I}_{1k}}{\dfrac{(R_0 + jX_0)\dot{I}_{1k}}{(R_0 + jX_0) + R_2}} = \frac{(R_0 + jX_0) + R_2}{(R_0 + jX_0)} = \frac{20 + j10}{(10 + j10)} = (1{,}5 - j0{,}5)\ .$$

3-57. Коефициентите на даден четириполюсник са следните: $A = 1 + j$, $B = 100\,\Omega$, $C = j0{,}01\,s$. Да се определят параметрите на четириполюсника от *T*-образната и *П*-образната еквивалентна заместваща схема.

Решение:

1) Като изходим от зависимостите за коефициентите от *T*-образна заместваща схема

$$A=(1+\frac{Z_1}{Z_0}),\ C=\frac{1}{Z_0},\ D=(1+\frac{Z_2}{Z_0})$$

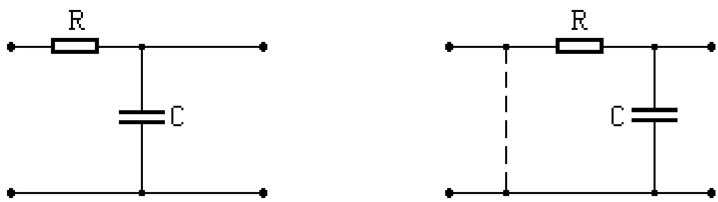
за параметрите се получава:

$$Z_0=\frac{1}{C}=\frac{1}{j0{,}01}=-j100\,\Omega\ ;$$

$$Z_1=(A-1)Z_0=100\,\Omega\ ;$$

$$Z_2=(D-1)Z_0=0\ .$$

Следователно еквивалентната схема на четириполюсника е показана на фиг.3.61.а.



а) б)

фиг.3.61

2) От изразите за коефициентите от *П*-образната заместваща схема

$$A=(1+\frac{Z_0}{Z_2}),\ B=Z_0,\ D=(1+\frac{Z_0}{Z_1})$$

за параметрите се получават:

$$Z_0=B=100\,\Omega\ ,$$

$$Z_1=\frac{Z_0}{(D-1)}\to\infty\ ,$$

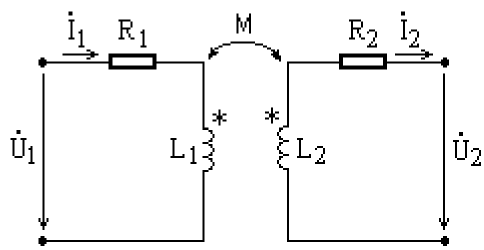
$$Z_2 = \frac{Z_0}{(A-1)} = -j100\,\Omega \,.$$

Еквивалентната схема на четириполюсника е показана на фиг.61.б. Понеже четириполюсникът е несиметричен, то и заместващите схеми практически са еднакви.

3-58. Ако коефициентите на един четириполюсник са $A = 0$, $B = -j20\,\Omega$, $C = -j0{,}01\,s$ и $D = 1$, определете параметрите на четириполюсника от *T*-образната заместваща схема.

Отг.: $Z_1 = -j20\,\Omega$; $Z_0 = j20\,\Omega$; $Z_2 = 0$.

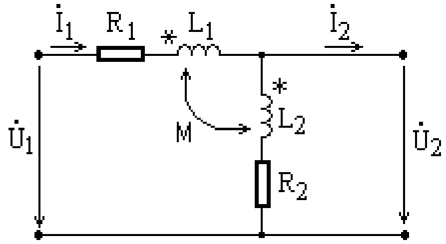
3-59. Да се определят параметрите на намотките на линейния трансформатор и взаимната индуктивност между тях (фиг.3.62), ако са дадени неговите *A*-параметри като четириполюсник: $A = (3 - j0{,}4)$; $B = (10 + j24{,}6)\,\Omega$; $D = (2 - j0{,}4)$ и $f = 50\,Hz$.



фиг.3.62

От:. $R_1 = R_2 = 2{,}03\,\Omega$; $L_1 = 48{,}45\,mH$; $L_2 = 32{,}3\,mH$; $M = 16{,}15\,mH$.

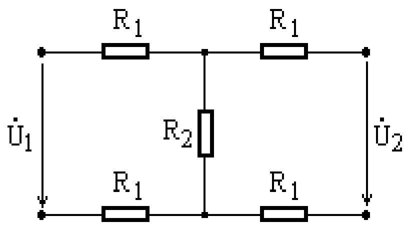
3-60. Да се определят *A*-параметрите на четириполюсника от фиг.3.63 (линеен автотрансформатор), ако стойностите на елементите са: $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $X_1 = 20\,\Omega$, $X_2 = 30\,\Omega$; $X_M = 15\,\Omega$.



фиг.3.63

Отг.: $A = (1{,}78 + j2{,}45.10^{-3})$; $B = (3{,}04 + j8{,}35)\,\Omega$;
$C = (1{,}96 - j22{,}1)10^{-3}\,s$; $D = (0{,}67 - j29{,}4.10^{-3})$.

3-61. Атенюаторът (затихвател) представлява четириполюсник съставен само от резистори, както е показано на фиг.3.64. За него е характерно, че изходното напрежение е във фаза с входното но с намалена стойност. Да се определят стойностите на резисторите, от които е изграден атенюаторът, ако са дадени характеристичното му съпротивление $Z_C = 800\,\Omega$ и константата на разпространение $\gamma = \alpha = 2\,Np$.



фиг.3.64

Решение:

За симетричен четириполюсник, какъвто е атенюаторът

$$Z_C = \sqrt{\frac{AB}{CD}} = \sqrt{\frac{B}{C}}\,.$$

В режим на *празен ход* входните съпротивления на четириполюсника от *A*-системата уравнения са:

$$Z_{10} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{10}} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{A}{C} \; ; \; Z_{20} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_{20}} = \frac{D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1}{C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1} = \frac{D}{C}$$

или

$$Z_0 = \frac{A}{C}.$$

В режим на *късо съединение* входните съпротивления на четириполюсника са:

$$Z_{1k} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{1k}} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{B}{D} \; ; \; Z_{2k} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_{2k}} = \frac{D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1}{C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1} = \frac{B}{A}$$

или

$$Z_k = \frac{B}{A}.$$

Тогава характеристичното съпротивление е

$$Z_C = \sqrt{Z_0 Z_k} \; .$$

Освен това, константата на разпространение е

$$e^{\gamma} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} = ch\gamma + sh\gamma$$

и

$$e^{-\gamma} = \sqrt{AD} - \sqrt{BC} = ch\gamma - sh\gamma \; .$$

Тогава

$$th\gamma = \frac{sh\gamma}{ch\gamma} = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{e^{\gamma} + e^{-\gamma}} = \frac{2\sqrt{BC}}{2\sqrt{AD}} = \frac{\sqrt{\frac{B}{D}}}{\sqrt{\frac{A}{C}}} = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_0}} \; .$$

Следователно, системата уравнения, от която могат да се намерят стойностите на резисторит, е следната:

$$\begin{cases} Z_C = \sqrt{Z_0 Z_k} \\ th\gamma = \sqrt{\dfrac{Z_k}{Z_0}} \end{cases}$$

или в числов вид

$$\begin{cases} Z_0 Z_k = 800^2 \\ \dfrac{Z_k}{Z_0} = th2 = 0{,}964^2 \end{cases} \quad \text{с решения} \quad \begin{cases} Z_0 = 829{,}85\Omega \\ Z_k = 771{,}18\Omega . \end{cases}$$

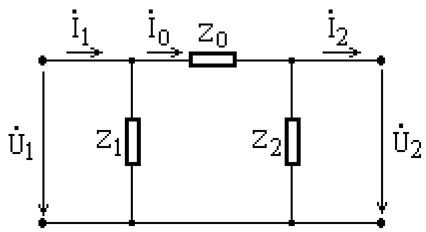
От дадената схема за стойностите на входните съпротивления се получава нова система:

$$\begin{cases} Z_0 = 2R_1 + R_2 = 829{,}85\Omega \\ Z_k = 2R_1 + \dfrac{2R_1 R_2}{2R_1 + R_2} = 771{,}18\Omega . \end{cases}$$

Положителните решения на последната система дават търсените стойности на елементите на атенюатора:

$$R_1 = 304{,}6\Omega ;\ R_2 = 220{,}65\Omega .$$

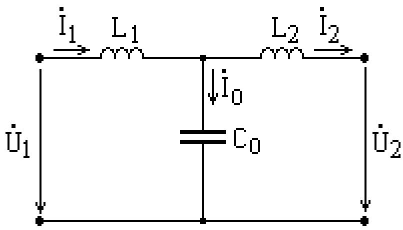
3-62. Константата на разпространение на един симетричен четириполюсник е $\gamma = (2 + j0{,}6)$, а характеристичното му съпротивление $Z_C = 200\angle 30^\circ\ \Omega$. Да се определят A-параметрите на четириполюсника и стойностите на елементите от Π-образната еквивалентна заместваща схема (фиг.3.65).



фиг.3.65

Отг.: $A = D = (3{,}11 + j2{,}05)$; $B = (302{,}6 + j332)\,\Omega$;
$Z_1 = Z_2 = 152{,}34 + j9{,}32\,\Omega$; $Z_0 = B = (302{,}6 + j332)\,\Omega$.

3-63. Да се определят *A*-параметрите, характеристичното съпротивление и затихването при съгласувано натоварване на четириполюсника от фиг.3.66, ако стойностите на елементите му са $X_1 = X_2 = X_0 = 100\,\Omega$.



фиг.3.66

Отг.: $A = D = (3{,}11 + j2{,}05)$; $B = j100\,\Omega$;
$C = -j0{,}01\,s$; $Z_C = 100\,\Omega$; $\gamma = 0$.

ГЛАВА 4

Преходни процеси в линейни електрически вериги

4.1. Закони за комутацията. Класически метод за анализ на преходни процеси

1. Основни понятия. Закони за комутацията

При преминаването от един установен режим в друг установен режим в електрическите вериги се развива т.нар. *преходен процес.* Преходните процеси са характерни за вериги, които съдържат реактивни елементи (бобини и кондензатори) и възникват при:

- първоначално включване (или изключване) на източниците във веригите;

- промяна в конфигурацията на веригата;

- промяна в параметрите на елементите от веригата.

Всяко внезапно изменение в конфигурацията на веригата (включване, изключване или превключване на елементи от нея) се нарича *комутация*. За отразяване на комутацията в електрическите вериги се въвежда допълнителен идеален елемент *ключ*, характеризиращ се с две състояния:

- отворено състояние - $R \to \infty$;

- затворено състояние - $R=0$.

Преминаването от едното състояние в другото става мигновено (с безкрайно голяма скорост в интервала $0_- \le t \le 0_+$).

При комутация става промяна в енергийното състояние на реактивните елементи. В даден момент електромагнитната енергия, запасена в една електрическа верига, е:

$$W = W_L + W_C = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = \frac{\psi i}{2} + \frac{qu}{2}.$$

Понеже тази енергия не може да се изменя скокообразно, то функциите на токовете през бобините (респ. свързания с тях магнитен поток ψ) и на напреженията на кондензаторите (респ. свързания с тях електричен заряд q) са непрекъснати функции.

Математически тези положения са известни като *закони за комутацията* и се записват така:

$i_L(0_-) = i_L(0_+)$; $\left[\psi(0_-) = \psi(0_+)\right]$ - *I закон за комутацията*,

$u_C(0_-) = u_C(0_+)$; $\left[q(0_-) = q(0_+)\right]$ - *II закон за комутацията*,

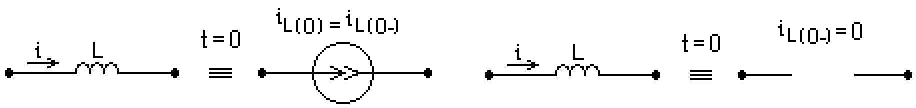
където

$t = 0_-$ е моментът от време непосредствено преди комутацията,

$t = 0_+$ е моментът от време непосредствено след комутацията.

В съответствие с така дефинираните закони за комутация в момента на комутация $t = 0$ реактивните елементи могат да се разглеждат по следния начин:

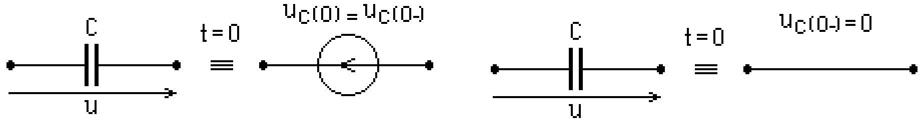
1) бобините - като източници на ток (фиг.4.1.а) с ток, равен на тока в бобината непосредствено преди комутацията $i_L(0) = i_L(0_-)$. При нулево начално условие $i_L(0_-) = 0$ бобината се държи като прекъснат клон (фиг.4.1.б).



а) б)

фиг.4.1

2) кондензаторите - като източници на напрежение (фиг.4.2.а) с е.д.н., равно на напрежението на кондензатора непосредствено преди комутацията $u_C(0) = u_C(0_-)$. При нулево начално условие $u_C(0_-) = 0$ кондензаторът се държи като идеален проводник (фиг.4.2.б).



а) б)

фиг.4.2

Анализът на електрически вериги в преходен режим се свежда до определянето на функциите на токовете и напреженията на елементите от веригата след комутацията. За изследването на преходните процеси се използват два основни метода:

1) класически метод;

2) операторен метод.

2. Класически метод за анализ на преходни процеси

Класическият метод за анализ на преходни процеси се основава на решаването на нехомогенна система линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти, съставена за веригата след комутацията по някои от познатите методи за анализ - закони на Кирхоф, метод на контурните токове, метод на възловите потенциали и др. Чрез изключване на неизвестните от тази система се получават диференциалните уравнения за всяка величина.

Редът на диференциалното уравнение съответства на реда на системата диференциални уравнения и зависи от броя на реактивните елементи във веригата.

Пълното решение на едно линейно нехомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти се състои от две части:

$$x(t) = x_{уст} + x_{св} = x_{уст} + \Sigma A_k e^{p_k t},$$

където

- $x_{уст}$ е частно решение на нехомогенното ДУ или *установена съставка*,

- $x_{св} = \Sigma A_k e^{p_k t}$ е общо решение на хомогенното ДУ или *свободна съставка*, като A_k са константи, а p_k са корени на характеристичното уравнение.

<u>Ред за анализ на преходни процеси по класически метод</u>:

1. За веригата след комутацията се съставя системата интегродиференциални уравнения по законите на Кирхоф, метод на контурните токове или метод на възловите потенциали.

2. Записва се характеристичното уравнение (характеристична детерминанта) на хомогенното ДУ (система ДУ), като производните

на дадена величина “$\frac{dx}{dt} = x'$” се заменят с p, а интегралите “$\int xdt$”- с $\frac{1}{p}$ и се намират корените p_k.

3. Намира се установената съставка $x_{уст}$ на търсената величина по някой от методите за анализ на електрически вериги в установен режим.

4. Определят се константите A_k на свободната съставка от началните условия - стойността на функцията, която търсим (и на нейните производни, ако е необходимо), за момент $t = 0$:

- за вериги от първи ред (с един реактивен елемент)

$$x(0) = x_{уст} + A_k \Rightarrow A_k = x(0) - x_{уст};$$

- за вериги от втори ред (с два реактивни елемента)

$$\left| \begin{array}{l} x(0) = x_{уст} + A_1 + A_2 \\ x'(0) = p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_1 + A_2 = x(0) - x_{уст} \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = x'(0) \end{array} \right. .$$

Намирането на $x(0)$ и $x'(0)$ става чрез анализ на веригата за момент $t = 0$, като се спазват законите на комутацията. Величините, подчиняващи се на законите на комутацията (i_L и u_C), се определят за момента преди комутацията ($t = 0_-$) и се наричат независими начални условия. Тези начални условия могат да бъдат:

- *нулеви*, когато в съответния реактивен елемент не е била запасена енергия, и

- *ненулеви*, когато в тях е била запасена енергия.

При нулеви начални условия клоновете съдържащи бобини, се прекъсват, а клоновете с кондензатори се заменят с идеален проводник.

При ненулеви начални условия се анализира установеният режим във веригата преди комутацията ($t = 0_-$) и се определят интересуващите ни величини.

4.2. Преходни процеси във вериги от първи ред

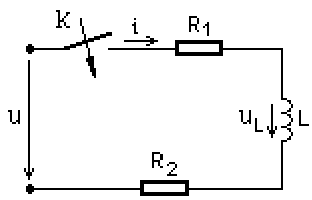
Това са ел. вериги, които се описват с диференциално уравнение от първи ред (с един независим реактивен елемент). При тях по класическия метод величините се получават като сума от установена и свободна съставки:

$$x(t) = x_{уст} + x_{св} = x_{уст} + Ae^{pt} .$$

При линейни електрически вериги коренът на характеристичното уравнение е отрицателен ($p<0$) и преходният процес е сходим, апериодичен. Установената съставка зависи от вида на захранващите източници (постояннотокова или синусоидална), а свободната съставка е намаляваща експоненциална функция.

Решени примери и задачи

4-1. Да се определи функцията на тока *i(t)* след затварянето на ключа *k* във веригата показана на фиг.4.3, ако за елементите е дадено: $u=240V$, $R_1=30\Omega$, $R_2=50\Omega$, $L=100mH$.



фиг.4.3

Решение:

1) За дадената верига след комутацията може да се запише уравнение по втори закон на Кирхоф:

$$u_{R_1} + u_L + u_{R_2} = u$$

или

$$R_1 i + L\frac{di}{dt} + R_2 i = u\ .$$

2) Характеристичното уравнение на хомогенното ДУ е

$$(R_1 + R_2) + pL = 0\,,$$

с корен

$$p = -\frac{(R_1 + R_2)}{L} = -800\,s^{-1}\ .$$

3) Търсената величина е

$$i(t) = i_{уст} + Ae^{pt}\,,$$

с установена стойност

$$i_{уст} = \frac{u}{R_1 + R_2} = 3\,A\ .$$

4) Константата A се определя от началните условия за веригата - стойността на търсената функция за момента $t = 0$:

$$i(0) = i_{уст} + A\,,$$

откъдето

$$A = i(0) - i_{уст}\ .$$

Понеже независимото начално условие по първи закон за комутацията е нулево, т.е.

$$i_L(0) = i_L(0_-) = 0\,,$$

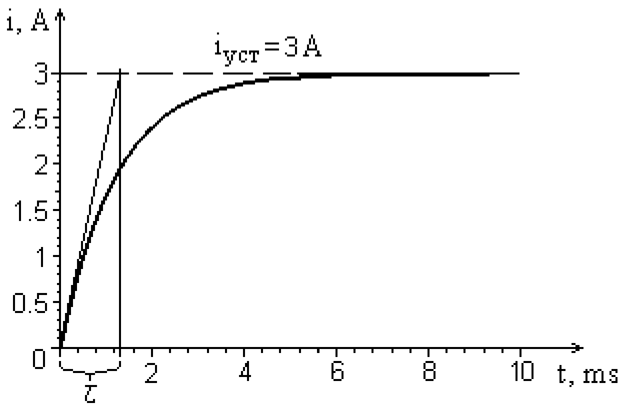
то

$$A = 0 - i_{уст} = -i_{уст} = -3\,A\ .$$

За функцията на тока във веригата окончателно се получава

$$i(t) = (3 - 3e^{-800\,t})\,A\,,$$

чиято графика е показана на фиг.4.4.



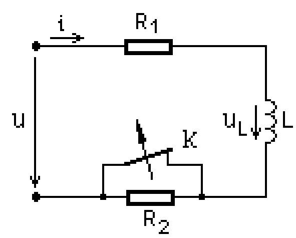
фиг.4.4

*Допирателната в началната точка на графиката отсича от оста на времето отсечката τ, която представлява времеконстантата на преходния процес. Числено времеконстантата е равна на:

$$\tau = \left|\frac{1}{p}\right| = \left|\frac{1}{-800}\right| = 1{,}25\,ms\ .$$

Времеконстантата показва времето, за което функцията се изменя "*e*" пъти ($e \approx 2{,}72$). На практика за време около $3 \div 5$ пъти τ преходният процес завършва.

4-2. Да се определи напрежението на бобината $u_L(t)$ във веригата от фиг.4.5, ако ключът k е бил затворен и се отваря. Дадено: $u=240V$, $R_1=30\Omega$, $R_2=50\Omega$, $L=100mH$.



фиг.4.5

Решение:

След комутацията се получава верига, аналогична на вече разгледаната в зад.**4-1**, т.е.

$$R_1 i + L\frac{di}{dt} + R_2 i = u \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{(R_1 + R_2)}{L} = -800\, s^{-1}\,.$$

От израза за тока $i(t)$ могат да бъдат определени и функциите на напреженията на елементите във веригата, в т.ч. и на бобината:

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}\,.$$

Търсим тока

$$i(t) = i_{уст} + Ae^{pt}\,,$$

чиято установена стойност е

$$i_{уст} = \frac{u}{R_1 + R_2} = 3\,A\,.$$

От началното условие за константата A се получава

$$A = i(0) - i_{уст}\,.$$

Независимото начално условие по първи закон за комутацията е ненулево, т.е. в бобината е протичал ток преди комутацията със стойност

$$i_L(0) = i_L(0_-) = \frac{u}{R_1} = 8\,A\,.$$

Тогава

$$A = i(0) - i_{уст} = 8 - 3 = 5\,A$$

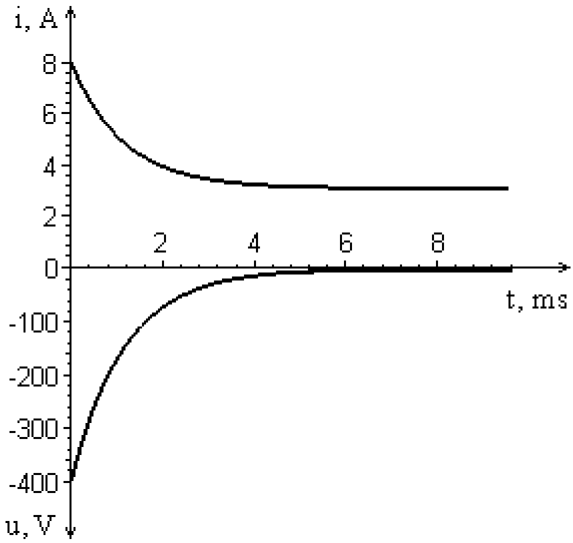
и за тока във веригата се получава

$$i(t) = (3 + 5e^{-800\,t})\,A\,.$$

Изразът за напрежението на бобината $u_L(t)$ е

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = 100.10^{-3}\frac{d}{dt}\left[3 + 5e^{-800\,t}\right] = 0{,}1.5.(-800)e^{-800\,t} = -400e^{-800\,t}\,V\,.$$

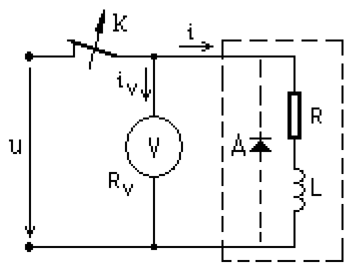
Графиките на $i(t)$ и $u_L(t)$ са показани на фиг.4.6.



фиг.4.6

*При така избраната посока на u_L знакът минус показва, че бобината се държи като източник и за сметка на запасената в нея енергия токът във веригата запазва стойност *8A* в момента след комутацията, въпреки увеличението на съпротивлението.

4-3. Паралелно на електромагнит за постоянен ток с параметри $R=25\Omega$, $L=100H$ е включен волтметър с вътрешно съпротивление $R_V=200k\Omega$ и показание $u_V=300V$. В даден момент ($t=0$) захранващият източник се изключва (фиг.4.7). Да се определи напрежението на волтметъра в началния момент след комутацията $u_V(0)$ и енергията, която ще се отдели в него по време на преходния процес. Каква част от нея ще се отдели в първата *1ms*?



фиг.4.7

<u>Решение</u>:

За верига след комутацията са валидни следните уравнения:

$$\begin{cases} i + i_V = 0 \\ R_V i_V = Ri + L\dfrac{di}{dt} \end{cases}.$$

На практика след комутацията се получава последователен контур от волтметъра и електромагнита, за който се записва следното уравнение:

$$(R_V + R)i + L\frac{di}{dt} = 0.$$

Характеристичното уравнение

$$(R_V + R) + pL = 0$$

има корен

$$p = -\frac{(R_V + R)}{L} = -2000{,}25\ s^{-1}.$$

Токът във веригата е

$$i(t) = i_{уст} + Be^{pt} = Be^{pt},$$

т.е. има само свободна съставка, понеже източникът се изключва.

Тогава константата *B* е

$$i(0) = B = 12\ A,$$

понеже съгласно I закон за комутацията

$$i_L(0) = i_L(0_-) = \frac{u_{V(0_-)}}{R} = \frac{300}{25} = 12\ A.$$

За тока във веригата се получава изразът

$$i(t) = 12e^{-2000{,}25\,t}\ A,$$

а от него по закона на Ом се намира и напрежението на волтметъра:

$$u_V(t) = R_V i_V = -R_V i = -2{,}4.10^6\, e^{-2000{,}25\,t}\ V.$$

Началната стойност на напрежението на волтметъра е

$$u_V(t) = -2{,}4.10^6\ V\ ,$$

което означава, че увеличението след прекъсване на захранването е

$$\frac{u_V(0)}{u_V(0_-)} = \left|\frac{-2{,}4.10^6}{300}\right| = 8000 \text{ пъти.}$$

Енергията, която ще се отдели във вътрешното съпротивление на волтметъра по време на преходния процес е

$$W_V = \int_0^\infty R_V i_V{}^2 dt = R_V \int_0^\infty i_V{}^2 dt = 200.10^3 \int_0^\infty (12.10^6 e^{-2000{,}25\,t})^2 dt =$$

$$= 2{,}88.10^8 \int_0^\infty e^{-4000{,}5\,t} dt = \frac{2{,}88.10^8}{-4000{,}5} e^{-4000{,}5\,t}\Big|_0^\infty = 7199{,}1\,J\,.$$

От нея в първата *1ms* се отделя

$$W_V(0{,}001) = \frac{2{,}88.10^8}{-4000{,}5} e^{-4000{,}5\,t}\Big|_0^{0{,}001} =$$

$$= -7199{,}1(0{,}0183 - 1) = 7067{,}3\,J\,,$$

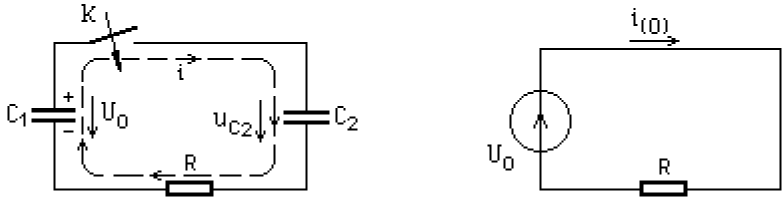
на която енергия съответства мощност

$$P_V = \frac{W_V}{t} = \frac{7067{,}3}{0{,}001} = 7067{,}3\,kW\ ,$$

при което волтметърът ще се повреди.

*За предпазна мярка паралелно на електромагнита се свързва полупроводников диод Д (както е показано на схемата с пунктир), който в нормален режим е запушен ($R_Д \to \infty$) и не влияе на веригата. При изключване на източника диодът се отпушва ($R_Д \to 0$) и запасена в магнитното поле на бобината енергия се преобразува в топлина в собственото вътрешното съпротивление *R* на бобината.

4-4. Кондензаторът C_1, зареден до напрежение U_0, се включва към верига от последователно свързани резистор *R* и кондензатор C_2 (незареден), както е показано на фиг.4.8.а. Определете функцията на тока *i(t)* във веригата и енергията, отделена в резистора по време на преходния процес. Зависи ли отделената енергия от съпротивлението на резистора? Какво ще бъде напрежението на кондензаторите след края на преходния процес? Дадено: C_1=50μF, C_2=25μF, R=500Ω, U_0=600V.



а) б)

фиг.4.8

Решение:

Уравнението, описващо верига след комутацията е

$$\frac{1}{C_1}\int idt + \frac{1}{C_2}\int idt + Ri = 0\,.$$

На него съответства характеристичното уравнение

$$\frac{1}{pC_1} + \frac{1}{pC_2} + R = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}} + R = 0\,,$$

с корен

$$p = -\frac{1}{R\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}} = -120\,s^{-1}\,.$$

Токът във веригата е

$$i(t) = i_{уст} + De^{pt} = De^{pt}$$

и има само свободна съставка, понеже след комутацията източник във веригата няма.

Съгласно II закон за комутацията независимите начални условия са:

$$u_{C1}(0) = u_{C1}(0_-) = U_0 = 600\,V\,,$$
$$u_{C2}(0) = u_{C2}(0_-) = 0\,,$$

при което от схемата на фиг.4.8.б валидна за веригата в момента $t=0$

$$D = i(0) = \frac{U_0}{R} = 1{,}2\ A\ .$$

Крайният израз за тока във веригата е:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{R\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}t} = 1{,}2e^{-120\,t}\ A\ .$$

Енергията, която се отделя в резистора по време на преходния процес е

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty R(\frac{U_0}{R} e^{pt})^2 dt =$$

$$= \frac{U_0{}^2}{R}\frac{1}{2p}e^{2pt}\Big|_0^\infty = -\frac{U_0{}^2}{2pR} =$$

$$= -\frac{U_0{}^2}{2(-\frac{1}{R\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}})R} = \frac{U_0{}^2}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = 3\ J$$

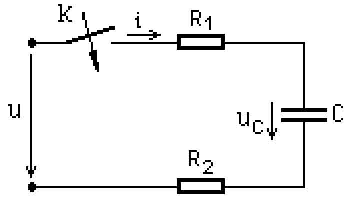
и не зависи от съпротивлението R.

Напреженията на кондензаторите след преходния процес са:

$$u_{C2}(t) = \frac{1}{C_2}\int_0^\infty idt = \frac{1}{25.10^{-6}}\int_0^\infty 1{,}2e^{-120\,t}dt = \frac{1{,}2}{25.10^{-6}}\frac{1}{-120}e^{-120\,t}\Big|_0^\infty =$$
$$= -400(0-1) = 400V\ .$$

$$u_{C1}(t) = \frac{1}{C_1}\int_0^\infty -idt + u_{C1}(0_-) = -\frac{1{,}2}{50.10^{-6}}\frac{1}{-120}e^{-120\,t}\Big|_0^\infty + 600 =$$
$$= 200(0-1) + 600 = 400V\ .$$

4-5. Двуполюсник от последователно свързани кондензатор $C=100\mu F$ и два резистора $R_1=6\Omega$, и $R_2=4\Omega$ се включва към източник на постоянно напрежение $u=100V$ (фиг.4.9). Да се определи в кой момент от време напрежението на кондензатора u_C ще бъде два пъти по-голямо от напрежението u_{R1} на резистора R_1.



фиг.4.9

Решение:

Уравнението за верига след комутацията е

$$(R_1 + R_2)i + \frac{1}{C}\int i dt = 0$$

с характеристично уравнение

$$R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} = 0$$

и корен на това уравнение

$$p = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} = -1000\, s^{-1}.$$

Търсените напрежения имат следните изрази:

$$u_{R1}(t) = u_{R1\,уст} + Ae^{pt},$$

$$u_C(t) = u_{C\,уст} + Be^{pt}.$$

При $t \to \infty$ за установените стойности се получава:

$$u_{R1\,уст} = Ri_{уст} = 0 \text{ и}$$

$$u_{C\,уст} = u = 100\,V.$$

Понеже независимото начално условие е

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 0,$$

константите са

$$A = u_{R1}(0) = R_1 i(0) \text{ и}$$

$$B = u_C(0) - u_{C\,уст} = -u_{C\,уст} = -100V .$$

От веригата за момента $t = 0$

$$i(0) = \frac{u}{R_1 + R_2} = 10\,A ,$$

откъдето

$$A = u_{R1}(0) = R_1 i(0) = 60V$$

и крайните изрази за напреженията са:

$$u_{R1}(t) = 60e^{-1000t} ,$$

$$u_C(t) = 100 - 100e^{-1000t} .$$

За определяне на момента от време t_x изхождаме от равенството

$$u_C(t_x) = 2u_{R1}(t_x)$$

или

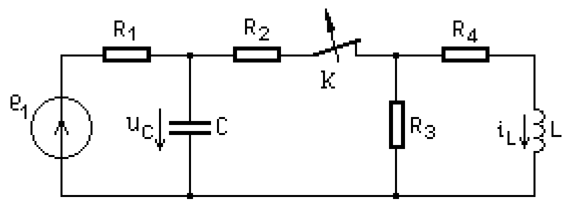
$$100 - 100e^{-1000t_x} = 2.60e^{-1000t_x}$$

$$220e^{-1000t_x} = 100 ,$$

откъдето

$$t_x = \frac{ln\dfrac{100}{220}}{-1000} = \frac{-0{,}788}{-1000} = 0{,}788\,ms .$$

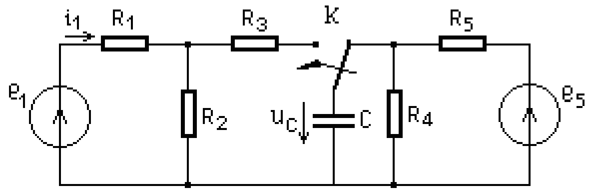
4-6. Да се определят функциите на напрежението $u_C(t)$ и на тока $i_L(t)$ след комутацията във веригата от фиг.4.10, ако е дадено: $e_1=80V$, $R_1=2\Omega$, $R_2=3{,}6\Omega$, $R_3=6\Omega$, $R_4=4\Omega$, $C=50\mu F$, $L=0{,}4H$.



фиг.4.10

Отг.: $u_C(t) = (80 - 20e^{-10000t})V$; $i_L(t) = 6e^{-25t}\ A$.

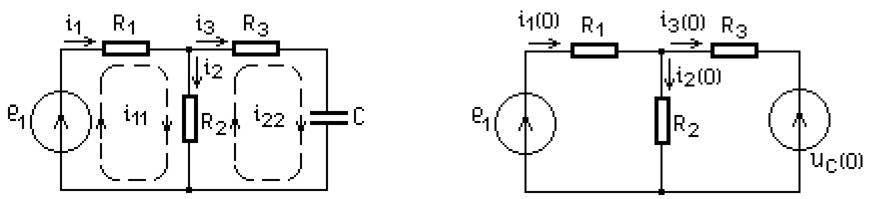
4-7. Да се определят функциите на тока $i_1(t)$ и на напрежението $u_C(t)$ след превключването на ключа k във веригата от фиг.4.11. Дадено: $e_1=100V$, $e_5=300V$, $R_1=R_2=10\Omega$, $R_3=R_4=20\Omega$, $R_5=40\Omega$, $C=100\mu F$.



фиг.4.11

<u>Решение</u>:

За веригата след комутацията, показана на фиг.4.12.а



а) б)

фиг.4.12

се записва следната система уравнения по метода на контурните токове:

$$\left| \begin{array}{l} (R_1 + R_2)i_{11} - R_2 i_{22} = e \\ -R_2 i_{11} + (R_1 + R_2)i_{22} + \dfrac{1}{C}\int i_{22}dt = 0. \end{array} \right.$$

Характеристичната детерминанта на тази система е

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_1 + R_2 + \dfrac{1}{pC}) \end{vmatrix} = 0,$$

с корен

$$p = -400\, s^{-1}.$$

Търсените функции имат вида

$$i_1(t) = i_{1\,уст} + Ae^{pt},$$

$$u_C(t) = u_{C\,уст} + Be^{pt}.$$

За $t \to \infty$ установените стойности са

$$i_{1\,уст} = i_{2\,уст} = \frac{e_1}{R_1 + R_2} = 5\,A \text{ и}$$

$$u_{C\,уст} = u = 100\,V.$$

Независимото начално условие по II закон за комутацията е ненулево, т.е. кондензаторът е бил зареден до стойност

$$u_C(0) = u_C(0_-) = \frac{e_5}{R_4 + R_5}R_4 = 100\,V.$$

От функциите за $t = 0$ константите са

$$A = i_1(0) - i_{1\,уст} \text{ и}$$

$$B = u_C(0) - u_{C\,уст} = 100 - 50 = 50\,V.$$

За намирането на $i_1(0)$ се анализира веригата за момента $t = 0$ (фиг.4.12.б), по някой от методите за анализ на установени режими:

$$i_1(0) = 4\,A,$$

откъдето

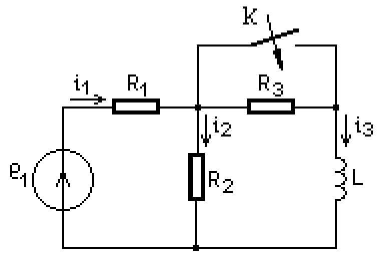
$$A = i_1(0) - i_{1\,уст} = 4 - 5 = -1\,A\,.$$

Крайните изрази за търсените функциите са:

$$i_1(t) = (5 - 1e^{-400t})\,A\,,$$

$$u_C(t) = (50 + 50e^{-400t})V\,.$$

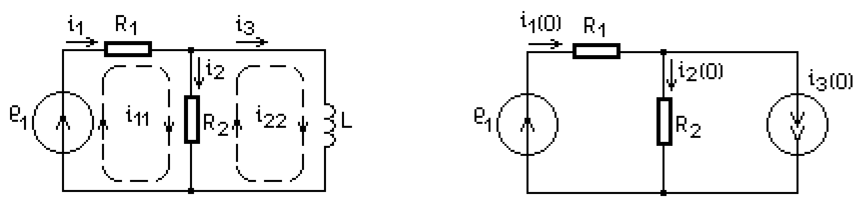
4-8. Да се определят функциите на клоновите токове след комутацията в показаната на фиг.4.13 верига ако е дадено: $e_1=124V$, $R_1=10\Omega$, $R_2=6\Omega$, $R_3=4\Omega$, $L=0,3H$.



фиг.4.13

Решение:

Веригата след комутацията е показана на фиг.4.14.а.



а) б)

фиг.4.14

За нея по метода на контурните токове се записва следната система уравнения:

$$\begin{vmatrix} (R_1 + R_2)i_{11} - R_2 i_{22} = e \\ -R_2 i_{11} + R_2 i_{22} + L\dfrac{di_{22}}{dt} = 0. \end{vmatrix}$$

Характеристичната детерминанта на тази система е

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + pL) \end{vmatrix} = 0,$$

с корен

$$p = -12{,}5\, s^{-1}.$$

Функции на клоновите токове в общ вид са:

$$i_k(t) = i_{k\, уст} + A_k e^{pt}, \; k=1,2,3.$$

В установен режим бобината се държи като идеален проводник, при което:

$$i_{2\, уст} = 0,$$

$$i_{1\, уст} = i_{3\, уст} = \frac{e_1}{R_1} = 12{,}4\; A.$$

Определяне на константите A_k става от началните стойности на токовете след комутацията, като за целта се анализира веригата за момента $t = 0$ (фиг.4.14.б). Съгласно първия закон за комутацията независимото начално условие е:

$$i_3(0) = i_3(0_-) = \frac{e_1 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_5 + R_3 R_1} = 6\; A.$$

По законите на Кирхоф за началните стойности на останалите два тока се получава

$$\begin{vmatrix} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0) = e_1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \qquad i_1(0) = 10\; A \text{ и } i_2(0) = 4\; A.$$

Тогава константите са:

$$A_1 = i_1(0) - i_{1\, уст} = -2{,}4\; A,$$

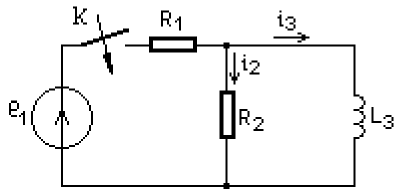
$$A_2 = i_2(0) - i_{2\, уст} = 4\; A,$$

$$A_3 = i_3(0) - i_{3\,уст} = -6{,}4\ A\,.$$

Окончателно функциите на трите тока са:

$$i_1(t) = (12{,}4 - 2{,}4e^{-12{,}5t})\ A\,,$$
$$i_2(t) = 4e^{-12{,}5t}\ A\,,$$
$$i_3(t) = (12{,}4 - 6{,}4e^{-12{,}5t})\ A\,.$$

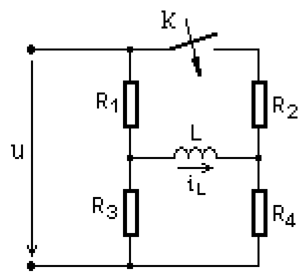
4-9. Определете в кой момент от време t_x след началото на преходния процес във веригата от фиг.4.15 токовете i_2 и i_3 ще имат еднакви стойности, т.е. $i_2(t_x) = i_3(t_x)$. Дадено: $e_1=50V$, $R_1=4\Omega$, $R_2=6\Omega$, $L_3=3H$. Да се намери отношението между енергията, отделена в резистора R_2, и енергията, запасена в бобината L_3 в установен режим.



фиг.4.15

Отг.: $t_x=0{,}421s$; $W_2/W_3=0{,}4$.

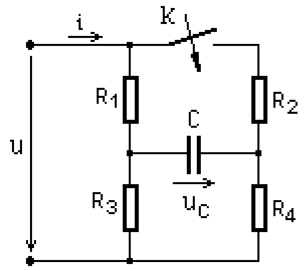
4-10. Да се определи функцията на тока през бобината $i_L(t)$ след комутацията (фиг.4.16), ако е дадено: $u=100V$, $R_1=R_3=5\Omega$, $R_2=R_4=10\Omega$, $L=1H$.



фиг.4.16

Отг.: $i_L(t) = 4e^{-7{,}5t}\ A\,.$

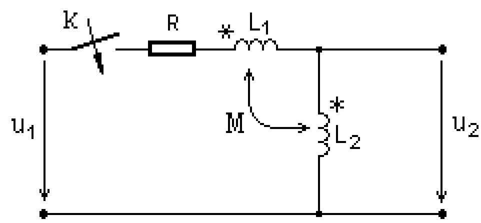
4-11. Да се определят функциите на напрежението на кондензатора $u_C(t)$ и на тока през източника $i(t)$ след комутацията във веригата от фиг.4.17, ако е дадено: $u=300V$, $R_1=R_3=50\Omega$, $R_2=R_4=100\Omega$, $C=50\mu F$.



фиг.4.17

Отг.: $i(t)=(4{,}5-0{,}5e^{-266{,}67t})\ A$; $u_C(t)=150e^{-266{,}67t}\ V$.

4-12. Да се определи функцията на напрежението на вторичната намотка на линейния автотрансформатор $u_2(t)$ след включването му към източник на синусоидално напрежение (фиг.4.18). При каква начална фаза на захранващото напрежение ψ_u настъпва направо установен режим, без да се развива преходен процес? Дадено: $u_1(t)=220\sqrt{2}\sin(314t+\psi_u)$, $R=4\Omega$, $L_1=L2=25mH$, $M=10mH$.



фиг.4.18

Решение:

Диференциалното уравнение на автотрансформатора в режим на празен ход е

$$Ri_1+L_1\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_1}{dt}+2M\frac{di_1}{dt}=u_1,$$

с корен на характеристичното уравнение

$$p = -\frac{R}{L_1 + L_2 + 2M} = -57{,}14\, s^{-1} .$$

Следователно функцията на напрежението $u_2(t)$ има вида

$$u_2(t) = u_{2\,уст}(t) + Be^{pt} .$$

Установеният режим в тази верига е синусоидален, при което за да се намери $u_{2\,уст}$, най-напред се изчисляват индуктивните съпротивления:

$$X_{L1} = X_{L2} = \omega L_1 = 7{,}85\,\Omega ;$$

$$X_M = \omega M = 3{,}14\ \Omega .$$

Комплексът на установения ток на празен ход е

$$\dot{I}_{1\,уст} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j(X_{L1} + X_{L2} + M)} = \frac{220\angle\psi_u}{4 + j21{,}98} =$$
$$= 9{,}85\angle(\psi_u - 79{,}7^\circ)\, A ,$$

а комплексът на вторичното установено напрежение е

$$\dot{U}_{2\,уст} = j(X_{L2} + M)\dot{I}_{1\,уст} = 108{,}22\angle(\psi_u + 10{,}3^\circ)\, V .$$

Тогава

$$u_{2\,уст}(t) = 108{,}22\sqrt{2}\, sin(314t + \psi_u + 10{,}3^\circ)\, V .$$

Независимото начално условие съгласно първия закон за комутацията е

$$i_1(0) = i_1(0_-) = 0 .$$

Началната стойност на вторичното напрежение е

$$u_2(0) = (L_2 + M)\frac{di_1(0)}{dt} =$$
$$= (L_2 + M)\frac{U_{1m}\, sin\,\psi_u}{L_1 + L_2 + M} = 110\sqrt{2}\, sin\,\psi_u\, V ,$$

откъдето константата

$$B = u_2(0) - u_{2\,уст}(0) =$$
$$= \left[110\sqrt{2}\,sin\,\psi_u - 108{,}22\sqrt{2}\,sin(\psi_u + 10{,}3^\circ)\right]\ V\,,$$

Окончателно за търсената функция се получава

$$u_2(t) = 108{,}22\sqrt{2}\,sin(314t + \psi_u + 10{,}3^\circ) +$$
$$+ \left[110\sqrt{2}\,sin\,\psi_u - 108{,}22\sqrt{2}\,sin(\psi_u + 10{,}3^\circ)\right] e^{-57{,}14t}\ V\,.$$

Преходен процес няма да възникне, ако константата на свободната съставка е нула. Това условие се спазва при следната начална фаза на захранващото напрежение:

$$\psi_u = 90^\circ - 10{,}3^\circ = 79{,}7^\circ\,.$$

4.3. Преходни процеси във вериги от втори ред

При веригите от втори ред (с два независими реактивни елемента) в зависимост от корените на характеристичното уравнение са възможни три различни случая на преходен процес:

1) два реални отрицателни и различни корена p_1 и p_2:

$x(t) = x_{уст} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$ - апериодичен преходен процес;

2) два реални, отрицателни и равни помежду си корена $p_1 = p_2 = p$:

$x(t) = x_{уст} + A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt}$ - критично апериодичен преходен процес;

3) два комплексно спрегнати корена $p_{1,2} = -\delta \pm j\,\omega_{св}$:

$$x(t) = x_{уст} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} =$$

$= x_{уст} + 2Be^{-\delta t}\cos(\omega_{св} t \pm \beta)$ - псевдопериодичен или колебателен преходен процес, където

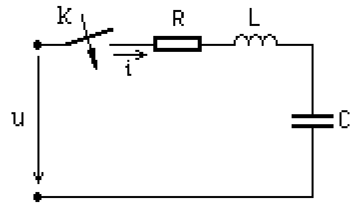
$A_1 = B\angle \pm \beta$ и $A_2 = B\angle \mp \beta$ са комплексно спрегнати числа.

При $\beta = \pm 90^\circ$, $cos(\omega_{св} t \pm \beta) = \pm sin\,\omega_{св} t$

$$x(t) = x_{уст} + 2Be^{-\delta t} sin\,\omega_{св} t\,.$$

Решени примери и задачи

4-13. Да се определи функцията на тока *i(t)* след затварянето на ключа *k* във веригата показана на фиг.4.19, времето, за което настъпва неговият максимум, и стойността на този максимум, ако е дадено: *u=100V*, *R=100Ω*, *L=100mH*, *C=25μF*.



фиг.4.19

Решение:

Диференциалното уравнение за веригата след комутацията е

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = u \ .$$

Характеристичното уравнение на хомогенното ДУ е

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0$$

или

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0 \ ,$$

с корени

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -500 \pm j\,387{,}3\ s^{-1} .$$

Функцията на тока във веригата *i(t)* е от вида

$$i(t) = i_{уст} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \ .$$

Понеже установеният режим е постояннотоков, кондензаторът прекъсва веригата и установена стойност на тока е нула, т.е.

$$i_{уст} = 0 .$$

Системата уравнения за определяне на константите е

$$\begin{vmatrix} A_1 + A_2 = i(0) - i_{уст} \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = i'(0) - i'_{уст} . \end{vmatrix}$$

Съгласно законите за комутацията независимите начални условия са:

$$i(0) = i(0_-) = 0 ,$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 0 .$$

От уравнението за веригата след комутацията за момента $t = 0$

$$Ri(0) + Li'(0) + u_C(0) = u ,$$

за първата производна на тока се получава

$$i'(0) = \frac{u - Ri(0) - u_C(0)}{L} = \frac{u}{L} = 1000\ A/s .$$

Заместването в системата за константите

$$\begin{vmatrix} A_1 + A_2 = 0 \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = 1000 \end{vmatrix}$$

дава следните стойности за тях:

$$A_1 = -j1{,}29 = 1{,}29\angle -90^\circ\ A ;\ A_2 = j1{,}29 = 1{,}29\angle 90^\circ\ A .$$

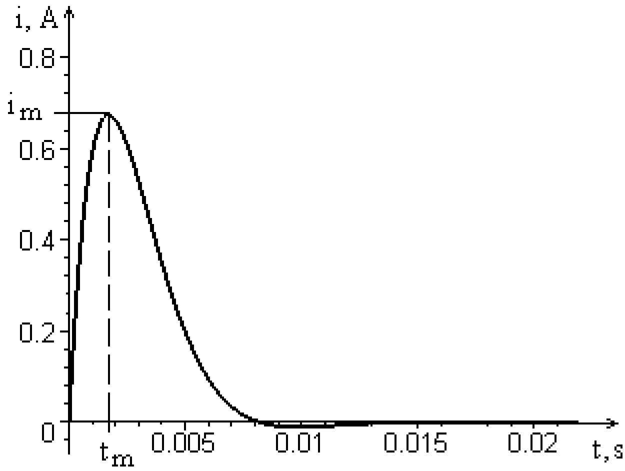
Окончателният вид на функцията на тока във веригата е

$$i(t) = -j1{,}29e^{(-500+j387{,}3)t} + j1{,}29e^{(-500-j387{,}3)t} =$$

$$= -j1{,}29e^{-500t}(e^{j387{,}3t} - e^{-j387{,}3t})\frac{2j}{2j} =$$

$$= 2{,}58e^{-500t} \sin 387{,}3t\ \ A .$$

Графиката на *i(t)* е показана на фиг.4.20.



фиг.4.20

Първата производна на функцията на тока по отношение на времето е следната

$$i'(t) = 2{,}58\left[-500.e^{-500t}\sin 387{,}3t + 387{,}3.e^{-500t}\cos 387{,}3t\right].$$

Тази функция се нулира при изпълнено следното равенство:

$$500.e^{-500t}\sin 387{,}3t = 387{,}3.e^{-500t}\cos 387{,}3t$$

или

$$tg387{,}3t = \frac{387{,}3}{500},$$

откъдето

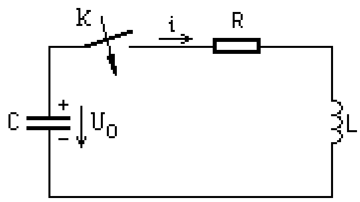
$$t = t_m = \frac{arctg\dfrac{387{,}3}{500}}{387{,}3} = \frac{arctg0{,}7746}{387{,}3} = \frac{0{,}659}{387{,}3} = 1{,}7\,ms.$$

Максимумът, който достига функцията на тока, е

$$i(t = 1{,}7.10^{-3}) = 2{,}58e^{-500.1{,}7.10^{-3}}\sin 0{,}659 = 0{,}675A\ .$$

4-14. Кондензатор с капацитет $C=100\mu F$, който е зареден до $U_0=500V$, се включва към бобина с параметри $R=7\Omega$ и $L=50mH$

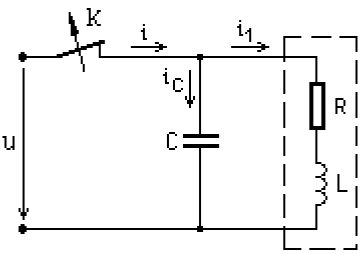
(фиг.4.21). Да се определи функцията на тока *i(t)* и каква част от запасената в кондензатора енергия се преобразува в топлина след време *t=1ms*.



фиг.4.21

Отг.: $i(t) = 22{,}64e^{-70t}\ sin\,441{,}7t\ A$; $W_R=0{,}019.W_0=0{,}2375\ J$.

4-15. Паралелно на еднофазен консуматор с параметри $R=4\Omega$ и $L=20mH$ е включен компенсиращ кондензатор с такъв капацитет *C*, че факторът на мощността на захранваща линия е $cos\varphi=1$. Да се определят напрежението на кондензатора $u_C(t)$ и максималната му стойност след изключване от източника в момент, когато токът през консуматора е максимален. Напрежението на източника е $U=380V$ и честота $f=50Hz$ (фиг.4.22).



фиг.4.22

<u>Решение</u>:

В началото се определя капацитетът на кондензатора и фазата на напрежението на източника, при която става изключването му.

При дадените параметри и честота импедансът на консуматора е

$$Z = R + jX_L = 4 + j\omega L = 4 + j6{,}283 = 7{,}45\angle 57{,}52^\circ\ \Omega\ ,$$

а комплексът на установения ток през него преди комутацията е

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{U\angle\psi_u}{Z_1} = 51{,}02\angle(\psi_u - 57{,}52^\circ) = I_1\angle\psi_{i1}\ A\,.$$

Токът през консуматора е максимален при $\psi_{i1} = 90^\circ$, откъдето $\psi_u = 147{,}52^\circ$.

От условието $cos\varphi=1$ следва, че

$$I_C = I_1 \sin\varphi_1 = 51{,}02.\sin 57{,}52^\circ = 43{,}04\ A\,,$$

и за капацитета на кондензатора се получава

$$C = \frac{I_C}{\omega U} = 360{,}5\mu F\ .$$

След изключване на източника във веригата се развива свободен преходен процес. Диференциалното уравнение за веригата след комутацията е

$$Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}\int i_1 dt = 0\,,$$

с корени на характеристичното уравнение

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -200 \pm j\,314{,}16\ s^{-1}\,.$$

Следователно функцията на напрежението $u_C(t)$ е от вида

$$u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\,,$$

където константите се определят от системата уравнения

$$\left| \begin{aligned} & A_1 + A_2 = u_C(0) \\ & p_1 A_1 + p_2 A_2 = u_C'(0). \end{aligned} \right.$$

Съгласно законите за комутацията независимите начални условия са:

$$i_1(0) = i_1(0_-) = I_{1m} = 51{,}02.\sqrt{2} = 72{,}15\ A\,,$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = u(0) = U_m \sin\psi_u =$$
$$= 380.\sqrt{2}.\sin 147{,}52^\circ = 288{,}59\,V\,.$$

Първата производна на напрежението u_C се определя чрез тока през него:

$$u_C'(0) = \frac{i_C(0)}{C} = -\frac{i_1(0)}{C} \approx -2.10^5\ V/s\ .$$

Заместването в системата за константите дава следните стойности за тях:

$$A_1 = 268{,}54\angle 57{,}52^\circ\ V\ ;\ A_2 = 268{,}54\angle -57{,}52^\circ\ V\ .$$

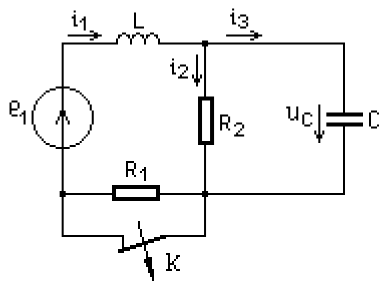
Окончателният вид на функцията за напрежението върху кондензатора е

$$u_C(t) = 537{,}08\,e^{-200t}\cos(314{,}16t + 57{,}52^\circ)\ V\ .$$

Максималната стойност на това напрежение е неговата начална стойност

$$u_{C_m} = u_C(0) = 288{,}59\ \ V\ .$$

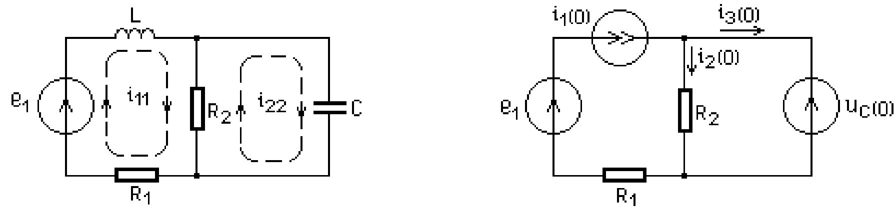
4-16. Да се определят функциите на клоновите токове и на напрежението на кондензатора след комутацията в показаната на фиг.4.23 електрическа верига, ако е дадено: $e_1=200V$, $R_1=R_2=50\Omega$, $L=0{,}1H$, $C=50\mu F$.



фиг.4.23

<u>Решение</u>:

За веригата след комутацията (фиг.4.24.а) по метода на контурните токове се записва следната система уравнения:



а) б)

фиг.4.24

$$\begin{cases}(R_1 + R_2)i_{11} + L\dfrac{di_{11}}{dt} - R_2 i_{22} = e_1 \\ -R_2 i_{11} + R_2 i_{22} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_{22}dt = 0.\end{cases}$$

Характеристичната детерминанта на тази система е

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix}(R_1 + R_2 + pL) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + \dfrac{1}{pC})\end{vmatrix} = 0,$$

с корени

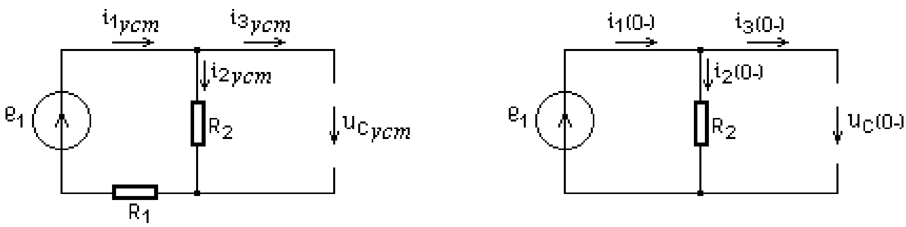
$$p_{1,2} = -450 \pm j\,444{,}44\ s^{-1}.$$

Клоновите токове и напрежението на кондензатора в общ вид са:

$$i_k(t) = i_{k\,уст} + A_{k,1}e^{p_1 t} + A_{k,2}e^{p_2 t}, \qquad k=1,2,3,$$

$$u_C(t) = u_{Cуст} + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}.$$

Поведението на веригата в установен режим е показано на фиг.4.25.а.



а) б)

фиг.4.25

Стойностите на търсените величини са:

$$i_{3\,уст} = 0,$$

$$i_{1\,уст} = i_{2\,уст} = \frac{e_1}{R_1 + R_2} = 2\,A,$$

$$u_{Cуст} = R_2 i_{2\,уст} = 100\,V.$$

За определяне на константите се решават следните системи уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} A_{k,1} + A_{k,2} = i_k(0) - i_{k\,уст} \\ p_1 A_{k,1} + p_2 A_{k,2} = i_k'(0) \end{array} \right. \quad \text{- за токовете}$$

и

$$\left| \begin{array}{l} B_1 + B_2 = u_C(0) - u_{Cуст} \\ p_1 B_1 + p_2 B_2 = u_C'(0) \end{array} \right. \quad \text{- за напрежението на кондензатора.}$$

Съгласно законите за комутацията независимите начални условия (фиг.4.25.б) са:

$$i_1(0) = i_1(0_-) = \frac{e_1}{R_2} = 4\,A,$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = R_2 i_2(0_-) = e_1 = 200\,V.$$

Началните стойности на останалите два тока се определят от следната системата уравнения за веригата в момента $t = 0$ (фиг.4.24.б):

$$\left| \begin{array}{l} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) \\ -L i_1'(0) + e_1 - R_1 i_1(0) = R_2 i_2(0) = u_C(0). \end{array} \right.$$

От нея:

$$i_2(0) = \frac{u_C(0)}{R_2} = 4\,A; \; i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 0;$$

$$i_1'(0) = \frac{e_1 - R_1 i_1(0) - u_C(0)}{L} = \frac{-R_1 i_1(0)}{L} = -2000\,A/s;$$

$$i_2'(0) = \frac{u_C'(0)}{R_2} = \frac{\dfrac{i_3(0)}{C}}{R_2} = 0\,;$$

$$i_3'(0) = i_1'(0) - i_2'(0) = -2000\ A/s\,.$$

След заместване в системите уравнения за константите се получават стойностите:

$$A_{1,2} = 1 \pm j1{,}238 = 1{,}591\angle \pm 51{,}07^\circ\ A\,;$$

$$A_{3,4} = 1 \mp j1{,}013 = 1{,}423\angle \mp 45{,}36^\circ\ A\,;$$

$$A_{5,6} = \pm j2{,}25 = 2{,}25\angle \pm 90^\circ\ A\,;$$

$$B_{1,2} = 50 \mp j50{,}629 = 71{,}157\angle \mp 45{,}36^\circ\ V\,.$$

Окончателният вид на функциите е следният:

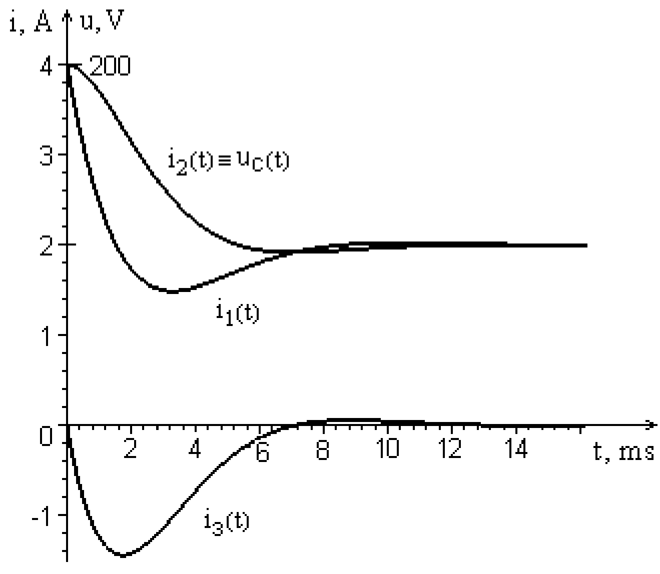
$$i_1(t) = 2 + 3{,}182\,e^{-450t}\,cos(444{,}41t + 51{,}07^\circ)\ A\,,$$

$$i_2(t) = 2 + 2{,}846\,e^{-450t}\,cos(444{,}41t - 45{,}36^\circ)\ A\,,$$

$$i_3(t) = -4{,}4\,e^{-450t}\,sin\,444{,}41t\ \ A\,,$$

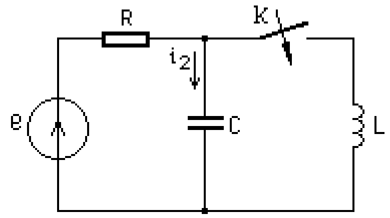
$$u_C(t) = 100 + 142{,}3\,e^{-450t}\,cos(444{,}41t - 45{,}36^\circ)\ V\,.$$

Графиките на тези функции са показани на фиг.4.26.



фиг.4.26

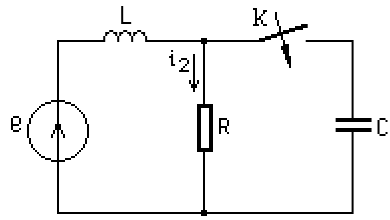
4-17. Да се определи функцията на тока през кондензатора $i_2(t)$ след комутацията във веригата на фиг.4.27, ако е дадено: $e=100V$, $R=10\Omega$, $L=12,5mH$, $C=50\mu F$.



фиг.4.27

Отг.: $i_2(t) = -10,33\,e^{-1000t}\,sin774,6t\;\;A$.

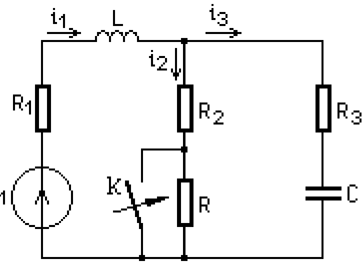
4-18. Определете функцията на тока през резистора $i_2(t)$ след комутацията във веригата от фиг.4.28, ако: $e=500V$, $R=100\Omega$, $L=0,5H$, $C=25\mu F$.



фиг.4.28

Отг.: $i_2(t) = 5 + 7,07\,e^{-200t}\,cos(200t - 135^\circ)\,A$.

4-19. Да се определят функциите на токове $i_2(t)$ и $i_3(t)$ след затварянето на ключа k във веригата на фиг.4.29, ако е дадено: $e_1=15V$, $R=R_1=R_2=R_3=5\Omega$, $L=20mH$, $C=200\mu F$.

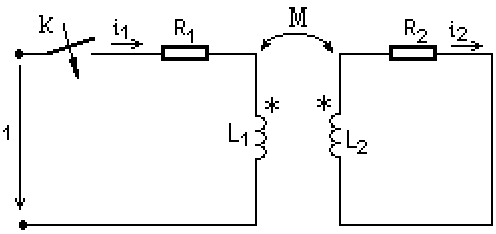


фиг.4.29

$$Отг.: \ i_2(t) = 1{,}5 - 0{,}774\, e^{-437{,}5t} \sin 242{,}06t \ A;$$

$$i_3(t) = -0{,}632 \ e^{-437{,}5t} \cos(242{,}06t - 142{,}24^{\circ}) \ A.$$

4-20. Да се определят функциите на токовете в първичната и вторичната намотки на линейния трансформатор и енергията, която получава вторичната намотка по време на преходния процес (фиг.4.30) ако е дадено, че $u_1=50V$, $R_1=5\Omega$, $L_1=0{,}2H$, $R_2=25\Omega$, $L2=1H$ и $k_{12}=0{,}8$.



фиг.4.30

$$Отг.: \ i_1(t) = 10 + 342{,}2\, e^{-24{,}36t} - 352{,}2\, e^{-25{,}64t} \ A;$$

$$i_2(t) = -194{,}1\, e^{-24{,}36t} + 194{,}1\, e^{-25{,}64t} \ A; \ W_2 = 24{,}7 \ J.$$

4.4. Операторен метод за анализ на преходни процеси.

Операторният метод за анализ на преходни процеси се основава на трансформацията на Лаплас, посредством която изходната система интегродиференциални уравнения за веригите след комутацията се преобразува в система алгебрични уравнения. В резултат на това преобразуване на дадена оригинална функция *f(t)* съответства друга функция *F(p)*, наречена изображение или операторен образ. След намиране на операторния образ оригиналната функция се получава чрез обратна трансформация на Лаплас или чрез теоремата за разлагане.

Ред за анализ на преходни процеси по операторен метод:

1. Съставя се еквивалентната операторна схема за веригата след комутацията, като в съответствие с трансформацията на Лаплас елементите от изходната схема се заменят както следва:

1)Резисторите не се променят:

$$u_R(t) = Ri(t) \Leftrightarrow U_R(p) = RI(p);$$

2) Бобините се заменят с операторно съпротивление pL и източник на е.д.н. със стойност $Li(0)$ и посока, посоката на тока в бобината:

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow U_L(p) = pLI(p) - Li(0);$$

3) Кондензаторите се заменят с операторно съпротивление $\frac{1}{pC}$ и източник на е.д.н. със стойност $\frac{u_C(0)}{p}$ и посока, обратна на посоката на напрежението върху кондензатора:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Leftrightarrow U_C(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0}{p});$$

4) Източниците на е.д.н. се заменят с операторно е.д.н. със стойност:

$$e(t) \Leftrightarrow E(p).$$

*На практика в тази точка изходната система интегродиференциални уравнения за веригата след комутацията се преобразува в операторен вид, като се отчетат независимите начални условия.

2. Определят се операторните образи на търсените величини по някой от методите за анализ на установени режими.

3. Намират се оригиналните функции на търсените величини.

Ако операторният образ на дадена величина е отношение на два полинома

$$F(p)=\frac{G(p)}{H(p)},$$

то оригиналната функция според теоремата за разлагането е

$$f(t)=\Sigma\frac{G(p_k)}{H'(p_k)}e^{p_k t},$$

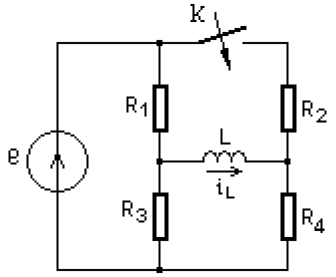
където

- p_k са корените на полинома в знаменателя $H(p)=0$;
- $G(p_k)$ - стойностите на $G(p)$ за съответните корени p_k;
- $H'(p_k)$ - стойностите на производната на $H(p)$ за съответните корени p_k.

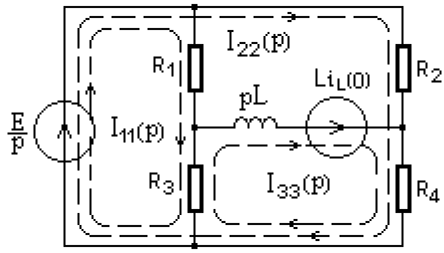
При операторния метод не се налага определянето на константите на свободните съставки и търсенето на зависимите начални условия, което при веригите от втори и по-висок ред е трудоемко. Това е за сметка на повече но по-прости изчисления.

Решени примери и задачи

4-21. Да се определи функцията на тока през бобината $i_L(t)$ след комутацията по операторния метод (фиг.4.31.а), ако е дадено: $u=100V$, $R_1=R_3=5\Omega$, $R_2=R_4=10\Omega$, $L=1H$.



а)



б)

фиг.4.31

Решение:

Съгласно първия закон за комутацията независимото начално условие за тока през L преди комутацията е

$$i_L(0) = i_L(0_-) = \frac{eR_3}{R_1R_3 + R_3R_4 + R_4R_1} = 4\ A\ .$$

Еквивалентната операторна схема за веригата след комутацията е показана на фиг.4.29.б. За тази схема по метода на контурните токове се записва следната система уравнения с операторните образи:

$$\left|\begin{array}{l} (R_1 + R_3)I_{11}(p) - R_3I_{33}(p) = \dfrac{E}{p} \\ (R_2 + R_4)I_{22}(p) + R_4I_{33}(p) = \dfrac{E}{p} \\ -R_3I_{11}(p) + R_4I_{22}(p) + (R_3 + R_4 + pL)I_{33}(p) = Li(0). \end{array}\right.$$

Операторният образ на тока през бобината по метода на Крамер е

$$I_L(p) = \frac{\Delta_3(p)}{\Delta(p)} = \frac{800}{200p + 1500} = \frac{G(p)}{H(p)},$$

където

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix}(R_1+R_3) & 0 & -R_3\\ 0 & (R_2+R_4) & R_4\\ -R_3 & R_4 & (R_3+R_4+pL)\end{vmatrix}=200p+1500\,;$$

$$\Delta_3(p)=\begin{vmatrix}(R_1+R_3) & 0 & \dfrac{E}{p}\\ 0 & (R_2+R_4) & \dfrac{E}{p}\\ -R_3 & R_4 & Li(0)\end{vmatrix}=800\,.$$

Ако полиномът в знаменателя се приравни на нула

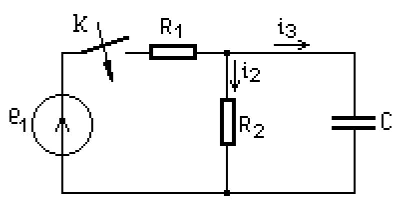
$$H(p)=200p+1500=0\,,$$

се намира еднократен корен $p_1=-7{,}5\,s^{-1}$.

По теоремата за разлагане на полиномите на прости дроби оригиналната функция на тока е

$$i_L(t)=\frac{G(p_1)}{H'(p_1)}e^{p_1t}=\frac{800}{200}e^{-7{,}5t}=4e^{-7{,}5t}\quad A\,.$$

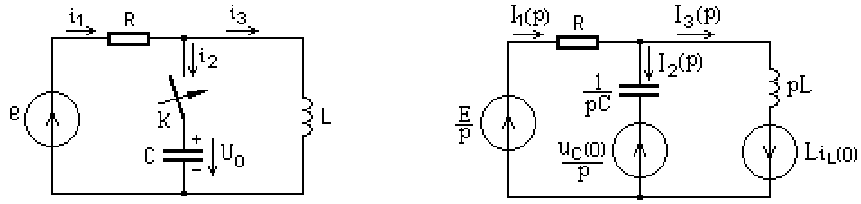
4-22. Като използвате операторния метод, определете в кой момент от време t_x след началото на преходния процес във веригата от фиг.4.32 токовете i_2 и i_3 ще са равни, т.е. $i_2(t_x)=i_3(t_x)$. Дадено: $e_1=600V$, $R_1=80\Omega$, $R_2=40\Omega$, $C=50\mu F$.



фиг.4.32

Отг.: $i_2(t)=5-5\,e^{-750t}\ A$; $i_3(t)=7{,}5\ e^{-750t}\ A$; $t_x=1{,}22ms$.

4-23. Кондензаторът C, зареден до напрежение $U_0=50V$, се включва във веригата, както е показано на фиг.4.33.а. Да се определят функциите на клоновите токове и на напрежението на кондензатора след комутацията, ако е дадено: $e=100V$, $R=100\Omega$, $L=1H$, $C=100\mu F$.



а) б)

фиг.4.33

Решение:

Независимите начални условия, при които възниква преходният процес, са ненулеви:

$$u_C(0)=u_C(0_-)=50V$$

$$i_3(0)=i_3(0_-)=\frac{e}{R}=1A.$$

За операторната схема на веригата след комутацията (фиг.4.33.б) по метода на възловите потенциали се записва следното уравнение за напрежението на кондензатора:

$$U_C(p)=\frac{\Sigma E(p)Y(p)}{\Sigma Y(p)}=\frac{\dfrac{E}{pR}+\dfrac{u_C(0)}{p}pC-\dfrac{Li(0)}{pL}}{\dfrac{1}{R}+pC+\dfrac{!}{pL}}=$$

$$=\frac{0{,}5p}{0{,}01p^2+p+100}=\frac{G(p)}{H(p)}.$$

Уравнението

$$H(p)=0$$

има корени $p_{1,2}=-50\pm j86{,}6\,s^{-1}$, което означава, че преходният процес е псевдопериодичен (колебателен).

Производната на полинома в знаменателя има стойност

$$H'(p) = 0{,}02p + 1 .$$

Тогава

$$G(p_1) = -25 + j43{,}3 = 50\angle 120^\circ ;\ H'(p_1) = j1{,}73 ;$$
$$G(p_2) = -25 - j43{,}3 = 50\angle -120^\circ ;\ H'(p_1) = -j1{,}73 .$$

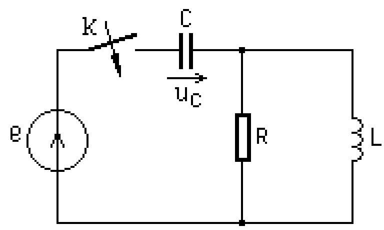
По теоремата за разлагане оригиналната функция за напрежението на кондензатора е

$$u_C(t) = \Sigma \frac{G(p_1)}{H'(p_1)} e^{p_1 t} = 57{,}8e^{-50t} \sin(86{,}6t + 120^\circ)\,V .$$

За функциите на токовете се използва намереното решение:

$$i_1(t) = \frac{u - u_C(t)}{R} = 1 - 0{,}578e^{-50t} \sin(86{,}6t + 120^\circ)\,A ,$$
$$i_2(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = -0{,}578e^{-50t} \sin(86{,}6t + 60^\circ)\,A ,$$
$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = \frac{u - u_C(t)}{R} = 1 + 0{,}578e^{-50t} \sin 86{,}6t\,A .$$

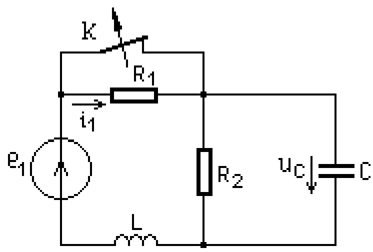
4-24. Определете функцията на напрежението на кондензатора след комутацията във веригата от фиг.4.34, ако е дадено: *e=500V*, *R=100Ω*, *L=0,5H*, *C=25μF*.



фиг.4.34

Отг.: $u_C(t) = 500 + 500\sqrt{2}\, e^{-200\,t} \sin(200t - 45^\circ)\,A .$

4-25. Да се определят функциите на клоновия ток $i_1(t)$ и на напрежението на кондензатора $u_C(t)$ след комутацията в показаната на фиг.4.35 електрическа верига, ако е дадено: $e_1=200V$, $R_1=R_2=60\Omega$, $L=0{,}1H$, $C=50\mu F$.



фиг.4.35

$$Отг.:\ i_1(t) = 1{,}67 + 3{,}32\, e^{-466{,}67t} \cos(426{,}87t + 59{,}7^\circ)\ A\ ;$$

$$u_C(t) = 100 + 148{,}16\, e^{-466{,}67t} \cos(426{,}87t - 47{,}55^\circ)\ V\ .$$

Литература

1. И. Атанасов, Сборник от задачи по основи на електротехника, София, ВХТИ, 1980.

2. И. Атанасов, Н. Шойлев, Сборник от задачи по теоретична електротехника, София, СТУ, 1991.

3. Н. Шойлев, И. Атанасов, Теоретична електротехника, София, ХТМУ, 2002.

4. С. Фархи, С. Папазов, Теоретична електротехника част I, София, Техника, 1987.

5. Л. Нейман, К. Демирчян, Теоретические основы электротехники, Ленинград, Енергия, 1967.

6. Сборник задач по Теоретическим основам электротехники, под ред. Л. Бессонов, Москва, Вышая школа, 1975.

7. Решени примери по Теоретична електротехника част I и II, под ред. С. Фархи, София, Техника, 1989.