

# I. ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА ФЛУИДИТЕ

## 1.1. МЕХАНИЧНИ СВОЙСТВА НА ТЕЧНОСТИТЕ И ГАЗОВЕТЕ

**Деформируемост — лесноподвижност.** Материята в природата се среща в твърдо, течно и газообразно агрегатно състояние, а в някои случаи и в смесено. Тези основни форми на съществуване на материята са установени термодинамично и се характеризират със съответната физико-химична устойчивост при обикновени условия. Течностите и газовете имат от гледна точка на хидродинамиката сходни механични свойства, поради което се наричат общо *флуиди*.

Агрегатното състояние на веществата се определя от междумолекулните (кохезионните) сили. При преминаване от твърдо в течно състояние на веществата междумолекулните сили съществено намаляват, но остават все още достатъчно големи, за да държат молекулите на определени места, които обаче могат лесно да се разменят под действието на външни сили. Преминаването на течностите в газообразно състояние се съпровожда почти при пълно изчезване на действието на кохезионните сили между молекулите на флуида. Докато твърдото състояние на веществата се възприема като субстанция, която има устойчивост срещу промяната на формата, флуидите поради малките кохезионни сили не притежават каквато и да е устойчивост срещу промяна на формата им. Тази обща стличителна черта на течностите и газовете да се деформират лесно определя едно основно тяхно механично свойство — лесноподвижност, т. е. да текат.

**Непрекъснатост на флуидната среда.** Независимо от молекулния строеж на течностите и газовете, съгласно с който масата им има дискретно (прекъснато) разпределение, при изучаване на тяхното движение и равновесие те се разглеждат като непрекъснатата среда. Смята се, че масата на флуидите е разпределена непрекъснато в обемите, които те заемат, и липсват каквито и да са празни пространства. Основание за това дава обстоятелството, че елементарните линейни размери при математичното разглеждане са винаги достатъчно големи спрямо междумолекулните разстояния и амплитудите на трептене, както и дължината на свободния пробег на молекулите на газовете при Брауновото им движение, и едновременно достатъчно малки в сравнение с линейните размери на разглеждания флуиден обем. По този начин вместо самия флуид се изучава неговият модел, който притежава свойството непрекъснатата среда — континуум.

Това от своя страна опростява изследването, тъй като дава възможност всички статични, кинематични и динамични величини на флуидите в равновесие и движение (плътност, налягане, скорост, ускорение и др.) да се разглеждат като непрекъснати функции на координатите на точките в пространството и времето и по този начин да се използва математическият апарат, който се базира на непрекъснатите функции. Абстракцията непрекъснатата среда е неприемлива за силно разредените газове, каквито например се срещат в горните слоеве на атмосферата.

**Полепваемост по стените.** Полепваемостта по стените е свойство, което е следствие на действието на адхезионните сили между молекулите на стената и граничните с тях молекули от течността или газа. Вследствие на тези сили, които са значително по-големи от кохезионните сили между молекулите на флуидната среда, допиращите се до стената частици „полепват“ и не могат да се плъзгат по нея, докато плъзгането между отделните флуидни частици е лесно осъществимо. В резултат на това, когато флуидите се движат в условия на ограничаващи ги стени (течения в тръби и канали или обтичане на тела), винаги флуидни частици полепват по стените и остават неподвижни спрямо тях, като съседните флуидни частици се плъзгат край стените, движейки се със скорости, които могат да имат произволни стойности, особено отдалечените от стените частици.

Силно разредените газове и течностите с екстремно големи молекули правят изключение от това свойство.

## 1.2. ПЛЪТНОСТ И СВИВАЕМОСТ

**Плътност.** Плътността е физична величина, която характеризира разпределението на масата на флуидите в пространството, което те заемат. Тя изразява количеството маса, съдържащо се в единица обем, т. е.

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta W} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (1.1)$$

където  $\Delta m$  е масата в обема  $\Delta W$ .

За флуидите с неравномерно разпределение на масата в пространството уравн. (1.1) определя средната плътност в разглеждания обем. В съответствие с хипотезата за непрекъснатата среда плътността в произволна точка се определя от границата на отношението

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W} = \frac{dm}{dW} \quad (1.2)$$

жато обемът  $\Delta W$  се намалява така, че точката остава винаги във вътрешността му.

Разпределението на плътността в пространството може да бъде равномерно или неравномерно, като в най-общия случай тя е функция на координатите и времето, т. е.

$$\rho = \rho(x, y, z, t). \quad (1.3)$$

Специфичният обем  $v$  представлява реципрочната стойност на плътността и се изразява чрез обема на единица маса:

$$v = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}. \quad (1.4)$$

В техниката понякога се използва физичната величина обемно (специфично) тегло, което изразява теглото на масата, съдържаща се в единица обем:

$$\gamma = \frac{dG}{dW} = \rho g, \quad \frac{\text{N}}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{ s}^2}, \quad (1.5)$$

където  $N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ .

Параметрите  $\rho$ ,  $v$  и  $\gamma$  зависят от естеството на флуидната среда, а за даден флуид главно от налягането и температурата. Вследствие на свиваемостта с увеличаване на налягането плътността  $\rho$  нараства (при течностите поради слабата свиваемост в незначителна степен). Поради температурното разширение с увеличаване на температурата  $\rho$  намалява, като при газовете промените са сравнително по-големи. В табл. 1.1—1.3 са дадени стойностите за  $\rho$  на някои по-често употребявани в техниката флуиди.

**Свиваемост.** Свойството на флуидите под действието на външното налягане да изменят своя обем се нарича свиваемост. Тя се характеризира с коефициента на обемно свиване  $\beta_p$ , който е равен на относителното изменение на обема  $W$  при промяна на налягането  $p$  с 1 Pa, т. е.

$$\beta_p = - \frac{1}{W} \left( \frac{dW}{dp} \right), \quad \frac{\text{m}^3}{\text{N}}. \quad (1.6)$$

където знакът  $(-)$  показва намаляване на обема с увеличаване на налягането. Като се вземе под внимание, че  $\rho W = m$ , след диференциране се получава  $\frac{dW}{W} = - \frac{d\rho}{\rho}$ , откъдето уравн. (1.6) приема вида

$$\beta_p = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} : \frac{1}{\rho_a} \quad (1.7)$$

В практиката често се използва реципрочната стойност на коефициента на обемно свиване, наречена *модул на обемното свиване*.

$$E_w = \frac{1}{\beta_p} = \rho \frac{dp}{d\rho} = \rho a^2, \quad \frac{N}{m^2} \quad (1.8)$$

където  $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$  е скоростта на разпространение на звука в разглежданата флуидна среда, която е мярка за свиваемостта. Колкото по-малка е свиваемостта на флуидната среда, толкова по-голяма е скоростта на разпространение на звука в нея и обратно.

Таблица 1.1

При температура 16°C	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\mu \cdot 10^6$ , Pa/s	$\nu \cdot 10^6$ , m <sup>2</sup> /s
Вода	998	106,47	1,066
Живак	13551	156,6	0,115
Етилов алкохол	790	124,0	1,570
Метилев алкохол	791	60,0	0,759
Анилин	1022	481,8	4,715
Бензол	879	67,0	0,762
Бензин	680—705	59,8	0,85—0,88
Глицерин	1260	105000	836
Машинно масло	900	40700	444
Етилов етер	716	24,8	0,346

Таблица 1.2

При температура 0°C и атмосферно налягане 0.1 MPa	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\mu \cdot 10^6$ , Pa/s	$\nu \cdot 10^6$ , m <sup>2</sup> /s
Въздух	1,292	1,67	13,0
Неон	0,899	2,48	33,1
Кислород	1,428	1,91	13,4
Водород	0,089	0,84	94,1
Въглероден двуокис	1,796	1,38	7,0
Метан	0,716	1,02	14,2
Азот	1,250	1,66	13,3

Таблица 1.3

t, C	Вода			Въздух		
	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\mu \cdot 10^6$ , Pa/s	$\nu \cdot 10^6$ , m <sup>2</sup> /s	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\mu \cdot 10^6$ , Pa/s	$\nu \cdot 10^6$ , m <sup>2</sup> /s
0	1000	179,5	1,80	1,29	1,67	13,0
10	1000	171,5	1,30	1,24	1,74	13,9
20	998	101,0	1,01	1,20	1,79	14,9
40	992	65,5	0,661	1,12	1,91	17,0
60	983	47,4	0,482	1,06	2,03	19,2
80	972	35,7	0,368	0,99	2,15	21,7
100	958	28,3	0,296	0,94	2,28	24,5

Течностите вследствие на по-компактната молекулна структура и все пак значителните кохезионни сили са малко свиваеми. При тях коефициентът на обемно свиване се изменя пренебрежимо малко с изменение на налягането и температурата. Средната му стойност за водата с  $\beta_p = \frac{1}{2 \cdot 10^9} \frac{1}{\text{Pa}} = 2 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{at}}$ , което означава, че при увеличаване на налягането с една атмосфера обемът на водата ще се намали с 1/20 000. Коефициентът на обемно свиване за другите течности има стойности от същия порядък. Например за газ  $\beta_p = \frac{1}{1,7 \cdot 10^9} \text{Pa}^{-1}$ , нефт  $\beta_p = \frac{1}{1,6 \cdot 10^9} \text{Pa}^{-1}$  и др. Тези стойности за коефициента на обемно свиване и обстоятелството, че в повечето инженерни задачи изменението на наляганията не са много големи, дават основание течностите да се разглеждат като практически несвиваеми флуиди.

Изменението на обема на флуидните среди при промяна на температурата се характеризира с коефициента на топлинно (обемно) разширение  $\beta_T$ , който е равен на относителното изменение на обема при изменение на температурата с един градус, т. е.

$$\beta_T = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dT} \right), \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}. \quad (1.9)$$

Коефициентът на топлинно разширение за течностите е сравнително малък. За водата например при изменение на температурата от 10 до 20° и налягане 10<sup>5</sup> Pa  $\beta_T = 0,00015 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , което дава основание да се приема, че плътността на течностите се променя сравнително малко с изменение на температурата.

В газовете разстоянията между молекулите са големи, а кохезионните сили сравнително малки, поради което за разлика от

течностите те са силно свиваеми флуиди. При тях плътността е в пряка зависимост от характера на процеса на изменение на състоянието на газа (изотермен или адиабатен и т. н.). В инженерната практика плътността се привежда към стандартни условия (налягане  $p_0=101\,325$  Pa, плътност  $\rho_0$  и температура  $20^\circ\text{C}$  или  $T_0=293$  K), като за други условия (налягане  $p$  и температура  $T$ ) тя може да бъде определена по израза

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}. \quad (1.10)$$

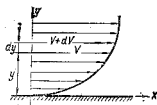
При движещите се флуиди за оценка на свиваемостта е възприето да се използва отношението на скоростта на движение към звуковата скорост, изразено с т. нар. *число на Мах*:

$$\text{Ma} = \frac{V}{a}. \quad (1.11)$$

При малки стойности на Ма флуидите се проявяват като несвиваеми независимо от големината на скоростта на звука в тях. Свиваемостта започва да се проявява при  $\text{Ma}=0,3$  и все повече нараства с увеличаването на числото на Мах. Практически газовете могат да бъдат разглеждани като несвиваеми флуиди при скорости на движение, по-малки от 100 m/s. В тези случаи тяхното равновесно състояние и движение се описват от законите на хидродинамиката, валидни за несвиваемите флуиди.

### 1.3. ВИСКОЗИТЕТ

Вискозитетът се нарича свойството на флуидите, да оказват съпротивление срещу деформация. Той се проявява във вид на



Фиг. 1.1

вътрешно триене при относителното преместване на съседните флуидни частици или слоеве и следователно характеризира и степента на подвижност на флуидите, т. е. свойството им да текат.

При движение на флуидите край твърди повърхнини обикновено скоростта при стената (вследствие на свойството поделваемост) е  $V=0$  и с отдалечаването от нея тя плавно нараства, т. е.  $V=V(y)$ , както е показано на фиг. 1.1. Такова разпределение на скоростта в напречна посока показва наличие на приплъзване между отделните слоеве на течението, обусловено от свойството вътрешно триене и съпроводено с появяване на тан-

генциални сили и съответни тангенциални напрежения. Логично е да се приеме, че тези напрежения са в пряка зависимост от разпределението на скоростта, респ. скоростта на ъгловата деформация на относителното плъзгане, мярка за която е производната  $\frac{dV}{dy}$ , наричана още *напречен градиент на скоростта*. Съгласно с хипотезата на Нютон (1687) връзката между тангенциалните напрежения и производната на скоростта се изразява с линейната зависимост

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV}{dy} \quad (1.12)$$

където коефициентът на пропорционалност  $\mu$  се разглежда като физична константа.

Уравнението (1.12) е аналитичен израз за определяне на вътрешното триене или вискозитета на флуидите и е известно в хидродинамиката като *закон на Нютон за вътрешното триене*. По-късно той е формулиран в кинетичната теория на газовете като закон за пренасяне на импулса на молекулите. От урав. (1.12) се вижда, че когато  $V=0$  или  $V=\text{const}$ ,  $\frac{dV}{dy}=0$  и  $\tau_{yx}=0$ . Следователно тангенциалните напрежения са възможни само когато движещите флуиди са с неравномерно разпределение на скоростта по напречното сечение.

Коефициентът на пропорционалност  $\mu$  се нарича *динамичен коефициент на вискозитета*, защото уравни. (1.12) представлява динамична зависимост между тангенциалната сила и движението на флуида. Неговото измерение е  $\frac{N \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s}$ .

Динамичният коефициент на вискозитета не зависи от налягането и характера на движението, а се определя само от физичните свойства на флуида и неговата температура.

Често като мярка за вискозитета се използва отношението

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{m^2}{s} \quad (1.13)$$

което са нарича *кинематичен коефициент на вискозитета*, тъй като има размерност, включваща само кинематични величини.

Зависимостта на вискозитета от налягането е практически пренебрежима за течностите и за повечето газове и пари при не-много големи налягания на парите. Вискозитетът обаче в голяма степен зависи от температурата — при газовете се увеличава, а при течностите намалява с нарастване на температурата. Стойностите на  $\mu$  и  $\nu$  за често използваните течности и газове са дадени в табл. 1.1÷1.3.

Вискозитетът на флуидите се определя от молекулната им структура и силите на междумолекулните взаимодействия, поради което той понякога се нарича молекулен вискозитет.

Силите на вътрешното триене в течностите се появяват за сметка на механичната връзка между частиците, респ. на кохезионните сили на молекулите им. Може да се смята, че в течностите има стабилна решетъчна структура, при която молекулите трептят около своето средно положение. Под действието на тангенциалните напрежения флуидните слоеве се плъзгат един спрямо друг и трептящите молекули могат от време на време да преминават в ново равновесно положение. С повишаване на температурата средните скорости на трептеливите движения на молекулите се увеличават, благодарение на което по-лесно се преодоляват кохезионните сили; частиците на течността придобиват по-голяма подвижност и следователно вискозитетът намалява.

Според кинетичната теория причината за появяване на сили от вътрешното триене в газовете е обменът на количество на движение, определен от дифузията на молекулите на отделните слоеве, които се движат с различни скорости. Този обмен на количеството на движение е пропорционален на средната скорост и средния свободен пробег на молекулите. Нагряването увеличава скоростта на молекулите и свободния им пробег, обмена на количеството на движение, а следователно и вискозитета им.

Ролята на вискозитета при движение на флуидите е двойка. От една страна, той определя предаването на движението от слой на слой и формирането на непрекъснато скоростно поле на течението. От друга страна, молекулярният механизъм на това предаване на движението поглъща част от механичната енергия на флуида, която преминава в топлина. Преминаването на механичната енергия в топлина се нарича *разсейване* или *дисипация*, която е свързана със загуба на енергия. Следователно дисипацията е свързана с т. нар. хидродинамично съпротивление, отчитането на което е наложително при решаване на много практически задачи.

Вискозитетът на флуидите обикновено се определя по опитен път с уреди, наречени *вискозиметри*.

Повечето от флуидите, срещани в техниката (всички газове, вода, спирт, глицерин, масла, течни метали и др.), са подчинени на Нютоновия закон (1.12) и поради това се наричат *нютонови течности*. Срещат се обаче и такива, които не се подчиняват на този закон, поради което се наричат *ненютонови* или *ачомални течности*. Такива са суспензиите от твърди частици, глинестите и бетонните разтвори, продуктите на нефта при температури, близки до тази на застиване, колоидните разтвори, разтопените пластични материали, кръвта и др.

Тангенциалните напрежения в аномалните течности се определят по формулата на Бинхам:

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dV}{dy} \quad (1.14)$$

Както се вижда, при тях силите от вътрешното триене, респ.  $\tau_0$ , се появяват още когато тези течности са в покой, но със стремеж да започнат движението. Всъщност уравн. (1.14) е валидно за всички течности, като за нютоновите напрежението  $\tau_0$  е много малко и практически може да се пренебрегне. Коефициентът  $\mu$  в уравн. (1.14) е динамичният коефициент на т. нар. структурен вискозитет. Освен от естеството на флуида той зависи и от характера на движението му.

Един вече широко развит раздел на хидродинамиката, основно третиращ проблемите за изясняване на връзката между тангенциалните напрежения и скоростта на деформация на различните видове среди, напоследък се отделя в самостоятелна наука с название реология.

**Идеален флуид.** Много често решаването на хидродинамични задачи с отчитане на вътрешното триене е съпътствувано със значителни трудности. В редица други случаи вътрешното триене не играе съществена роля и може да се пренебрегне. Тези именно съображения са наложили въвеждане на понятието идеален флуид, за който се смята, че е лишен от вискозитет, топлопроводност и дифузия и има абсолютна подвижност. Разбира се, в понятието идеален флуид вискозитетът може да се пренебрегне като източник на съпротивление, но не и като фактор, който обуславя предаването на движението от слой на слой и формира по този начин скоростното поле на течението.

Идеални флуиди в природата няма. Те представляват опростен модел на реално съществуващите флуиди. Приемането на флуида за идеален, респ. пренебрегването на съпротивлението от вътрешното триене при движението му, създава редица улеснения в аналитичното изследване на флуидните течения.

## II. ХИДРОСТАТИКА

Хидростатиката изучава законите за равновесие на флуидите и взаимодействието им със заобикалящите ги стени или потопените в тях изцяло или частично твърди тела. Равновесието е механично състояние на относителен покой между отделните флуидни частици. То е възможно, когато разглеждан флуиден обем е неподвижен или се движи спрямо избрана координатна система по начин, при който отделните му съставни частици не

изменят положението си една спрямо друга, т. е. когато целият обем се движи като *твърдо тяло*. При праволинейно движение това е възможно, ако всички флуидни частици се движат с еднаква скорост или ускорение, а при криволинейно движение — с еднаква ъглова скорост, респ. нормално ускорение. Равновесието на флуидите се определя от силовото взаимодействие и съществува само когато векторната сума от всички външни сили и моменти или сумите от техните проекции по съответните координатни оси са равни на нула.

## 2.1. ВИДОВЕ СИЛИ И НАПРЕЖЕНИЯ ВЪВ ФЛУИДИТЕ

Във флуидите не могат да действуват съсредоточени сили вследствие на свойството им да текат. Възможно е само действието на сили, които са непрекъснато разпроделени във флуидния обем или по повърхнината, наречени съответно *масови* и *повърхностни сили*.

**Масови сили.** Приложени са върху всички частици на флуидния обем и са пропорционални на съответните им маси. Това са преди всичко теглото, инерционните сили на възможните преносни ускорителни движения на съда или системата, а също така и различните видове електромагнитни и други сили.

Непрекъснатото разпределение на масовите сили във флуидния обем дава основание да се приеме съществуването на съответни силови полета, чиито интензитет се определя по изрза

$$F = \frac{\Delta F_m}{\Delta m} \cdot N = \frac{m}{s^2} \cdot N, \quad (2.1)$$

където  $\Delta F_m$  е главният вектор на масовата сила, действаща на масата  $\Delta m$ . Същност интензитетът на силовото поле може да се интерпретира физически като сила, действаща върху единица маса, разположена в полето, която по абсолютна стойност е равна на съответното ускорение.

**Повърхностни сили.** Приложени са по повърхнината на разглеждания флуиден обем. Те се обуславят от непосредственото въздействие на частиците на съседните флуидни обеми или на други тела (твърди или газове), които са в допир с разглеждания флуиден обем. В най-общия случай приложените върху произволен лицев елемент повърхностни сили биват нормални и тангенциални. Тези сили, отнесени към единица площ, определят съответните напрежения: нормални (на опън или натиск) — с направление по нормалата към лицевия елемент, и тангенциални, които лежат в неговата равнина.

Поради малките кохезионни сили, респ. свойството им да текат, флуидите не могат да понесат нормални напрежения на опън. В

съответствие със закона на Нютон за триенето (1.12) при флуидите в равновесие е невъзможно да съществуват тангенциални напрежения. Следователно вътрешното напрежато състояние на флуидите в относителен покой се характеризира само с нормални напрежения на натиск и е значително по-просто от това на еластичните тела.

Налягане. Нормалното напрежение на натиск при флуидите се нарича налягане и се бележи с  $p$ . Ако нормалната сила на натиск  $\Delta P$  е равномерно разпределена по лицевия елемент  $\Delta f$ , налягането се определя с отношението

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta f} \quad (2.2)$$

При неравномерно разпределение на силата на натиск от урavn. (2.2) се определя средната стойност на налягането. В най-общия случай налягането в произволна точка е равно на границата на отношението

$$p = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{dP}{df} \quad (2.3)$$

когато лицевият елемент  $\Delta f$  намалява така, че точката да остане в него.

Измерението на налягането е  $N/m^2 = Pa$ . Тази единица за налягане се нарича *пакал* и се бележи с  $Pa$ . Наред с нея се използват и следните производни единици: килопаскал ( $kPa = 10^3 Pa$ ) и мегапаскал ( $MPa = 10^6 Pa$ ).

В практиката все още за измерителна единица за налягане се използва и техническата атмосфера (*ata*), при което

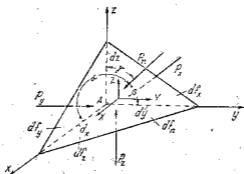
$$1 \text{ ata} = 10^5 Pa = 736 \text{ mm Hg} = 10\,000 \text{ mm H}_2\text{O}.$$

Известно е също понятието физична атмосфера — съответстваща на атмосферното налягане на морското равнище, което е равно на  $1,0332 \cdot 10^5 Pa$ , р-сп. на  $760 \text{ mm Hg} = 10332 \text{ mm H}_2\text{O}$ .

Ако налягането се отчита от нулата, се нарича *абсолютно налягане*. Понякога обаче то се отчита спрямо атмосферното налягане с разликата  $\Delta p = p_a - p$ , която се нарича *подналягане*, или  $\Delta p = p - p_a$ , която се нарича *надналягане*.

При флуидите в равновесие поради липсата на тангенциални напрежения в произволна точка на флуидния обем налягането по всички направления остава еднакво и не зависи от ориентацията на лицевия елемент в пространството, при който то действа в дадената точка. За доказателство от флуида в равновесие се отсича елементарна частица във форма на тетраедър с

ръбове  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ , по които четири стени с лица  $df_x$ ,  $df_y$ ,  $df_z$  и  $df_n$  действуват нормалните напрежения на натиск  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  и  $p_n$  (фиг. 2.1). Единият от върховете на тетраедъра съвпада с точката на разглеждане  $A$ , която е избрана за начало на коорди-



Фиг. 2.1

натната система. Вижда се, че с избора на останалите три върха на площадката  $df_n$  може да се зададе произволно ориентиране, дефинирано чрез ъглите  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , които външната им нормала сключва с координатните оси.

Върху тетраедъра, който е в равновесие, действуват повърхностни сили на натиск и масови сили. В случая повърхностните сили на натиск върху стените на тетраедъра са съответно:  $dP_x = p_x df_x$ ,  $dP_y = p_y df_y$ ,  $dP_z = p_z df_z$  и  $dP_n = p_n df_n$ ,

като проекциите на последната сила по осите  $x$ ,  $y$  и  $z$  са  $dP_{nx} = p_n \cos \alpha df_n = p_n df_x$ ,  $dP_{ny} = p_n df_y$  и  $dP_{nz} = p_n df_z$ , тъй като  $df_n \cos \alpha = df_x$ ,  $df_n \cos \beta = df_y$  и  $df_n \cos \gamma = df_z$ .

Ако  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  са скалярни компоненти на интензитета на силовото поле, т. е.  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ , проекциите на масовата сила ( $dF_m = F dm$ ) по съответните координатни оси ще бъдат:  $X dm = \rho X \frac{dx}{3} df_x$ ,  $Y dm = \rho Y \frac{dy}{3} df_y$  и  $Z dm = \rho Z \frac{dz}{3} df_z$ .

От условията за равновесие на разглеждания флуиден обем, записани в проекции например по ос  $x$ , следва равенството:

$$p_x df_x - p_n df_x + \rho X \frac{dx}{3} df_x = 0$$

или

(2.4)

$$p_x - p_n + \rho X \frac{dx}{3} = 0$$

и по аналогия за другите две оси:

$$p_y - p_n + \rho Y \frac{dy}{3} = 0$$

и

$$p_z - p_n + \rho Z \frac{dz}{3} = 0.$$

При намаляване на тетраедъра в точка, което е възможно, когато ръбовете  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  се стремят към нула, налягането в точка  $A$  приема определена големина, а именно

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p.$$

Полученият резултат показва убедително, че налягането в произволна точка на флуидния обем не зависи от направлението. То се характеризира само с големината си, която в дадена точка на флуидния обем и във фиксиран момент от време има напълно определена стойност. Следователно налягането може да се разглежда като скалярна величина, която е функция само на координатите и времето, т. е.

$$p = p(x, y, z, t). \quad (2.5)$$

Поради тази особеност често при флуидите в равновесие то се нарича *хидростатично налягане*.

Разгледаното свойство на флуидите в равновесие се отнася и за движението на идеалните флуиди. При движението на реалните флуиди обаче се появяват тангенциални напрежения, в резултат на които налягането в произволна точка не е еднакво и зависи от направлението на лицевия елемент, върху който е приложено.

## 2.2. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ЗА РАВНОВЕСИЕТО НА ФЛУИДИТЕ

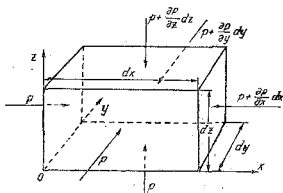
За получаване на диференциалните уравнения на хидростатиката, които установяват зависимостта на налягането в произволна точка от характера на действащите във флуида масови сили, се разглежда равновесието на елементарна флуидна частица с форма на паралелепипед (фиг. 2.2) с дължина на ръбовете  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ , отделена от вътрешността на флуида, намиращ се в относителен покой (равновесие).

Нека върху единица маса от паралелепипеда да действа масовата сила  $F$  с компоненти  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  и да действат силите от стени, пре-

сичащи се в точка  $O$ , действа налягането  $p$ , по съответните противоположни стени на паралелепипеда (Фиг. 2.2) налягането ще бъде

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx, \quad p + \frac{\partial p}{\partial y} dy, \quad p + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

където  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$  и  $\frac{\partial p}{\partial z}$  са промените на налягането на единица



Фиг. 2.2

ница дължина съответно по направленията на координатните оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Тогавата от условията за равновесие по направление на ос  $x$  следва

$$\left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + X \rho dx dy dz = 0$$

и аналогично по осите  $y$  и  $z$  се получават компонентните уравнения:

$$\begin{aligned} \rho X &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho Y &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho Z &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Получената система диференциални уравнения е известна в хидродинамиката като *диференциални уравнения на Ойлер за равновесието на флуидите*.

Тъй като  $X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \vec{F}$  и  $\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } p$ , системата уравнения (2.6) може да се представи във векторна форма

$$\vec{F} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.7)$$

Ако отделните уравнения на системата (2.6) се умножат съответно с  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и се съберат последователно левите и десните им страни, се получава

$$\rho (Xdx + Ydy + Zdz) = dp. \quad (2.8)$$

Полагайки в уравн. (2.8)  $dp = 0$ , се получава зависимостта

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad (2.9)$$

която всъщност е уравнението на повърхнините, по които налягането е еднакво, т. нар. *изобарни повърхнини*.

Получените уравнения (2.8) и (2.9) са основни уравнения, които могат да се използват успешно при решаване на всички хидростатични задачи.

Щом като в уравн. (2.8)  $dp$  е пълен диференциал, при наличие на равновесие дясната му част е също пълен диференциал и за еднороден несвиваем флуид ( $\rho = \text{const}$ ) се получава

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d\Phi. \quad (2.10)$$

От последното уравнение се вижда, че масовите сили имат потенциал  $\Phi(x, y, z)$  и проекциите на интензитета на полето могат да се представят във вида

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (2.11)$$

Следователно равновесието на еднороден несвиваем флуид е възможно само когато масовите сили имат потенциал. Уравнението (2.8) може да се запише още във вида

$$dp = -\rho d\Phi$$

или

$$p + \rho \Phi = \text{const}. \quad (2.12)$$

От уравн. (2.12) следва, че изобарните повърхнини са едновременно и повърхнини с постоянен потенциал ( $d\Phi = 0$ ), т. е. *екви-потенциални повърхнини*.

### 2.3. НЯКОИ ПРИМЕРИ ЗА РАВНОВЕСИЕ НА ФЛУИДИТЕ В ОТНОСИТЕЛЕН ПОКОЙ

Равновесие на флуид в гравитационно силово поле. Нека масовата сила е силата на земното привличане. При насочена вертикално нагоре координатна ос  $z$  компонентите на масовата сила са съответно  $X=0$ ,  $Y=0$  и  $z=-g$  и следователно уравн. (2.8) приема вида

$$dp = -\rho g dz, \quad (2.13)$$

Очевидно е, че всяка хоризонтална равнина  $z = \text{const}$  е изобар на повърхнина.

За несвиваем флуид ( $\rho = \text{const}$ ) уравн. (2.13) след интегриране довежда до израза

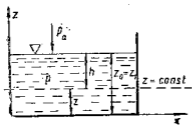
$$p + \rho g z = \text{const}. \quad (2.14)$$

Ако налягането  $p_1$  на височина  $z_1$  е известно, константата на предишното равенство се определя от  $\text{const} = p_1 + \rho g z_1$ , с което се намира, че

$$p = p_1 + \rho g (z_1 - z). \quad (2.15)$$

Вижда се, че налягането на флуидите намалява с увеличаване на височината  $z$ . При течностите най-често налягането  $p_1$  е известно по свободната им повърхнина, което при открит съд (фиг. 2.3) е равно на атмосферното ( $p_1 = p_a$ ). Ако с  $h = z_1 - z$  се означава дълбочината на разглежданата точка, уравн. (2.15) преминава в често използвания вид

$$p = p_1 + \rho g h = p_a + \gamma h, \quad (2.16)$$



Фиг. 2.3

където членът  $\rho g h$  може да се нарече промяна на налягане, а в случай когато по свободната повърхнина действа атмосферното налягане — надналягане.

Според уравн. (2.16) при увеличаване на външното налягане, респ. налягането, което действа по свободната повърхнина, със същата стойност се увеличава и налягането в произволните точки от вътрешността на флуида. Следователно флуидите имат свойството да предават външното налягане на всички частици от

вътрешността им без изменение, което всъщност е законът на Паскал.

Уравненията от (2.14) до (2.16) вадат строго за несвиваемите флуиди и са приложими за газовете само при малки промени във височините, т. е. при малки разлики  $z_1 - z$ , за които може да се приеме  $\rho = \text{const}$ . В най-общия случай за свиваемите флуиди уравн. (2.13) може да се интегрира, ако е позната зависимостта  $\rho = f(p)$ . При изотермично състояние на газовете ( $T = \text{const}$ ) тази зависимост по закона на Клапейрон е линейна от вида

$$\frac{p}{\rho} = RT,$$

където  $T$  К е абсолютната температура, а  $R$ ,  $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$  е т. нар. *газова константа*, която зависи от естеството на газа. За атмосферния въздух  $R = 292,6 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ .

В тези случаи уравн. (2.13) получава вида

$$dp = -\rho g dz = -g \frac{p}{RT} dz$$

или

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz,$$

което, интегрирано в границите от  $p_0$  до  $p$  и от  $z_0$  до  $z$  при условие, че при разглежданата газова област  $T = T_0 = \text{const}$ , довежда до израза

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT_0} (z - z_0)$$

или

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{RT_0} (z - z_0)} \quad (2.17)$$

и

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{RT_0} (z - z_0)} \quad (2.18)$$

Получените зависимости са приложими за ограничени разлики във височините в земната атмосфера, за която е изпълнено изотермичното условие.

Ако в уравн. (2.17) за  $z_0 = 0$  се положи  $p_0 = p_s$ , т. е. равно на атмосферното налягане на морското равнище, се получава т. нар. *барометрична височинна формула*

$$p = p_s e^{-\frac{gz}{RT_0}}, \quad (2.19a)$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{gz}{RT}} \quad (2.196)$$

По-обща резултати и с по-добро съответствие с действителността се получават, ако се приеме политропният закон за състоянието на въздуха (газа)

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \text{ или } \rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/n},$$

където  $n$  е показателят на политропата, за който в случая се приема  $n=1,24$ .

Сега уравн. (2.13) приема вида

$$\frac{dp}{dz} = -g \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/n},$$

а след разделяне на променливите:

$$p^{-1/n} dp = -\frac{g \rho_0}{p_0} p_0^{\frac{n-1}{n}} dz.$$

Този израз се интегрира сравнително лесно, както следва:

$$\frac{n}{n-1} \left( p^{\frac{n-1}{n}} - p_0^{\frac{n-1}{n}} \right) = -\frac{p g \rho_0}{p_0} p_0^{\frac{n-1}{n}} (z - z_0)$$

и като се вземе под внимание зависимостта  $\frac{p_0}{\rho_0} = RT_0$  се получава

$$z - z_0 = \frac{nRT_0}{g(n-1)} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right], \quad (2.20)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left[ 1 - \frac{g(n-1)}{nRT_0} (z - z_0) \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (2.21)$$

$$\text{и } \frac{\rho}{\rho_0} = \left[ 1 - \frac{g(n-1)}{nRT_0} (z - z_0) \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (2.22)$$

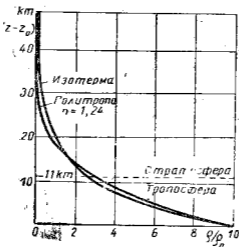
За политропния процес температурата се изменя в зависимост от налягането по зависимостта

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

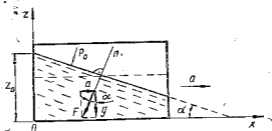
и следователно

$$\frac{T}{T_0} = \left[ 1 - \frac{g(n-1)}{nRT_0} (z - z_0) \right] \quad (2.23)$$

На фиг. 2.4 е показана зависимостта  $z - z_0 = f\left(\frac{p}{p_0}\right)$ , опреде-



Фиг. 2.4



Фиг. 2.5

лена по уравн. (2.17) и (2.20). Вижда се, че ако атмосферата изцяло е изотермна, нейната височина би била неограничена, докато политропният вид на атмосферата винаги заема ограничена височина — до около 30 000 метра.

Ако височината се мери от морското равнище, за което  $z_0 = 0$ , респ.  $H = z - z_0$ , и се приеме за  $t_0 = 15^\circ\text{C}$  или  $T_0 = 288\text{ K}$   $R = 292,6\text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$  и  $n = 1,24$ , следва

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{H}{44374} \right)^{5.167}, \text{ Pa}; \quad (2.24)$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{H}{44374} \right)^{4.167}, \text{ kg/m}^3 \quad (2.25)$$

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{H}{44374} \right), \text{ K}. \quad (2.26)$$

За политропната атмосфера в границите на т. нар. тропосфера, която се разпростира до около 11 000 m, температурата намалява на всеки 1000 m с около 6,5° C. Над тази височина в т. нар. стратосфера температурата остава до известна гранична височина практически постоянна и е равна на -56,34° C.

В табл. 2.1 са дадени по-важните параметри на стандартната атмосфера.

**Равновесие на флуид при праволинейно-ускорително движение.** Нека съд, напълнен с течност, се движи равноускорително (равнозакъснително) в хоризонтално направление. Тогава върху всяка частица на флуида ще действуват нейното тегло и масовата сила от преносното ускорително (закъснително) движение в посока, обратна на ускорението. Ако съдът се движи равноускорително с ускорение  $a$ , при така избраната координатна система (фиг. 2.5) за проекциите на масовата сила на резултантното силово поле се получава  $X = -a$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -g$ .

От уравн. (2.9) за изобарните повърхнини следва изразът:

$$ax + gz = \text{const.} \quad (2.27)$$

от който се вижда, че те са равнини, наклонени спрямо хоризонталната равнина под ъгъл

$$\alpha = \text{arctg} \frac{a}{g}.$$

От уравн. (2.8) за налягането в произволна точка се получава зависимостта

$$dp = -\rho(ax + gdz)$$

или след интегриране

$$p = \text{const} - \rho(ax + gz). \quad (2.28)$$

От граничното условие, например в точката с координати  $x = 0$  и  $z = z_0$ , налягането е  $p_a$  (което остава еднакво по цялата свободна повърхнина) и за константата се получава

$$\text{const} = p_a + \rho g z_0.$$

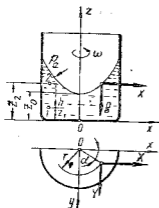
Таблица 2.1

Височина над морското равнище $H$	Налягане $p$	Температура $T$	Плотност $\rho$	Звукова скорост $a$	КК: ематичен коефициент на висклозитет $\gamma$
m	Pa	K	kg/m <sup>3</sup>	m/s	m <sup>2</sup> /s
1	2	3	4	5	6
0	101,325	288,16	1,2250	340,28	$1,4807 \cdot 10^{-5}$
1 000	89,876	271,65	1,1117	336,43	$1,5312 \cdot 10^{-5}$
2 000	79,498	271,14	1,0067	332,52	$1,7146 \cdot 10^{-5}$
3 000	70,125	268,64	$9,0941 \cdot 10^{-1}$	328,16	$1,8624 \cdot 10^{-5}$
4 000	61,686	262,13	$8,1942 \cdot 10^{-1}$	321,56	$2,0271 \cdot 10^{-5}$
5 000	54,045	255,63	$7,3654 \cdot 10^{-1}$	320,51	$2,2103 \cdot 10^{-5}$
6 000	47,213	249,13	$6,6072 \cdot 10^{-1}$	316,41	$2,4153 \cdot 10^{-5}$
7 000	41,098	242,63	$5,9011 \cdot 10^{-1}$	312,25	$2,6152 \cdot 10^{-5}$
8 000	35,648	236,14	$5,2591 \cdot 10^{-1}$	308,05	$2,9030 \cdot 10^{-5}$
9 000	30,791	229,64	$4,6712 \cdot 10^{-1}$	303,78	$3,1942 \cdot 10^{-5}$
10 000	26,491	223,15	$4,1366 \cdot 10^{-1}$	299,45	$3,5232 \cdot 10^{-5}$
11 000	22,690	216,66	$3,6485 \cdot 10^{-1}$	295,00	$3,8966 \cdot 10^{-5}$
13 000	16,572	216,66	$2,6648 \cdot 10^{-1}$	295,07	$5,3351 \cdot 10^{-5}$
15 000	12,107	216,66	$1,9467 \cdot 10^{-1}$	295,07	$7,3029 \cdot 10^{-5}$
20 000	5,5269	216,66	$8,8871 \cdot 10^{-2}$	295,07	$1,5997 \cdot 10^{-4}$
25 000	2,5262	216,66	$4,0621 \cdot 10^{-2}$	295,07	$3,4998 \cdot 10^{-4}$
30 000	1,1836	230,35	$1,7901 \cdot 10^{-2}$	304,25	$8,3565 \cdot 10^{-4}$
35 000	0,58024	244,01	$8,2812 \cdot 10^{-3}$	313,14	$1,8929 \cdot 10^{-3}$
40 000	0,29586	257,66	$4,0003 \cdot 10^{-3}$	321,78	$4,0956 \cdot 10^{-3}$

Следователно налягането в произволна точка на течността се определя по израза

$$p = p_a + \rho g(z_0 - z) - \rho a x. \quad (2.29)$$

**Равновесие на въртяща се течност.** Друг характерен случай е равновесието на течност, налята в цилиндричен съд, който се върти около вертикалната си ос  $z$  (фиг. 2.5) с постоянна ъглова скорост  $\omega$ . Вследствие на полепваемостта по стената и вътрешното триене течността се увлича от съда и известно време след започване на движението тя започва да се върти като твърдо тяло със същата ъглова скорост. Очевидно е, че в това състояние течността се намира в относителен покой спрямо координатната система  $x, y, z$ , която се върти заедно със съда.



Фиг. 2.6

В случая върху всяка флуидна частица ще действуват земното притегляне и центробежната сила от преносното въртливо движение. Тогава проекциите на

масовата сила  $\vec{F}$  на резултантното силово поле по координатните оси са съответно

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g,$$

а уравнението на изобарните повърхнини в съответствие с (2.9) получава вида

$$\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz = \text{const}$$

или

$$z = r^2 \frac{\omega^2}{2g} + \text{const}, \quad (2.30)$$

които очевидно са ротационни параболоиди.

Съгласно с уравня. (2.8) за налягането в произволни точки на течността се получава зависимостта

$$dp = \rho \omega^2 (x dx + y dy) - \rho g dz$$

или след интегриране

$$p = \rho r^2 \frac{\omega^2}{2} - \rho g z + \text{const}. \quad (2.31)$$

От граничното условие, например в точката с координати  $r=0$  и  $z=z_0$ , налягането е  $p_a$  и за произволна константа се получава

$$\text{const} = p_a + \rho g z_0.$$

Следователно

$$p = p_a + \rho g(z_0 - z) + \rho r^2 \frac{\omega^2}{2}. \quad (2.32)$$

Интерес представлява изменението на налягането във вертикално направление, т. е. за точки с координати  $r = \text{const}$ ,  $z$ . Ако например в две точки с координати  $r, z_1$  и  $r, z_2$  налягането е съответно  $p_1$  и  $p_2$ , за тяхната разлика се получава

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g(z_1 - z_2)$$

или

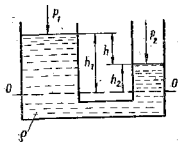
$$\Delta p = \rho g h,$$

където  $h$  е вертикалното разстояние между двете точки. Това показва, че във вертикално направление налягането е подчинено само на закона за гравитационното силово поле.

#### 2.4. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ХИДРОСТАТИКАТА

На основите на законите на хидростатиката са построени различни хидравлични уреди и машини, течностни манометри, хидравлични преси, хидравлични акумулатори, различни системи на хидро-пневмозадвижване и управление и др. В повечето случаи тези устройства представляват скачени съдове, в които се намира течност — вода, спирт, масло, живак и др.

**Скачени съдове.** Скачени съдове са такива, между които налягането може да преминава свободно. Нека течността в двата скачени съда (фиг. 2.7) да се намира в равновесие, като по свободната ѝ повърхнина в единия съд действа външното налягане  $p_1$ , а в другия  $p_2$  ( $p_1 < p_2$ ). Ако течността се намира в равновесие под действието само на силите на земното привличане, изобарните повърхнини са хоризонтални равнини. Тогава налягането, което действа например по хо-



Фиг. 2.7

ризонталната равнина  $O-O$ , може да се пресметне по уравн. (2.16), както следва:

$$p = p_1 + \rho g h_1,$$

$$p = p_2 + \rho g h_2.$$

От приравняването на тези равенства се получава

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h, \quad (2.33)$$

където  $h$  е вертикалното разстояние между свободните повърхнини в двата съда.

Ако в скачените съдове са налети две течности с различна плътност (които не се размесват и не влизат в химична реакция) и по свободната им повърхнина са приложени съответно наляганията  $p_1$  и  $p_2$  ( $p_1 < p_2$ ), налягането на разделителната повърхнина, която е изобарна (за еднородната течност), се определя по аналогичен начин от уравн. (2.16), т. е.

$$p = p_2 + \rho g h_2 = p_1 + \rho g h_1$$

или

$$p_2 - p_1 = g(\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2). \quad (2.34)$$

Последното уравнение показва, че при  $p_1 = p_2$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Следователно при еднакви външни налягания височините на свободните повърхнини на двете течности спрямо разделителната равнина са обратно пропорционални на съответните им плътности докато при еднородна течност ( $\rho_1 = \rho_2$ ) се получава  $h_1 = h_2$ .

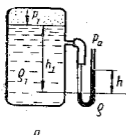
**Течностни манометри.** Очевидно е, че разликата във височините на свободните повърхнини на течностите в двата скачени съда определя разликата между външните налягания, които действуват по тези повърхнини. На този принцип се строят и използват т. нар. течностни манометри.

Най-простият течностен манометър се състои от вертикална  $U$ -образна прозрачна тръба, която е частично напълнена с течност — живак, вода, алкохол и др. Ако върху свободната повърхнина на течността в затворен съд действува налягане  $p_1$ , то може да се измери с  $U$ -образен манометър, при което са възможни различни схеми на свързване, показани на фиг. 2.8. Приема се, че по свободната дясна страна на манометъра действува познато налягане  $p_0$ , което в повечето случаи е атмосферното  $p_a$ .

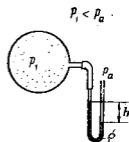
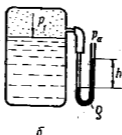
Тъй като разделителната равнина (фиг. 2.8 а) е изобарна, от уравн. (2.34) следва

$$p_1 = p_a + g(\rho h - \rho_1 h_1).$$

При свързване на манометъра към съда по фиг. 2.8 б лявата



Фиг. 2.8



Фиг. 2.9

му страна е запълнена с газ, който изпълва пространството над свободната повърхнина на течността в съда. Поради малката стойност на плътността на газа спрямо тази на течността в манометъра може да се приеме, че налягането по изобарната разделителна равнина е  $p_1$  и съгласно с уравн. (2.33)

$$p_1 = p_a + \rho gh.$$

Този начин на измерване на налягането  $p_1$  е по-удобен, тъй като отпада измерването на височината  $h_1$  и свързването на манометъра със съда е по-лесно.

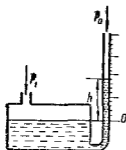
Когато налягането  $p_1$  е по-малко от атмосферното, разположението на манометричната течност ще бъде, както е показано на фиг. 2.9 и следователно

$$p_1 = p_a - \rho gh.$$

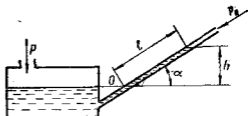
Течностните манометри са известни още като *диференциални манометри*, защото измерват разлики в наляганя, от които обаче лесно може да се определи абсолютната стойност на едното налягане, ако другото е познато. Разбира се, от значение е и плътността на течността в манометъра. При малки разлики в наляганята за получаване на подходящи височини  $h$  е необходимо да се използват течности с по-малка плътност (вода, спирт и др.), а при по-големи разлики в налягането течности с по-голяма плътност (живак).

Удобни за използване са т. нар. *чашкови манометри* (фиг.

2.10), при които единият от скачените съдове (чашката) има значително по-голямо напречно сечение, така че промяната на нивото на течността в него е пренебрежимо малка и отчитането се извършва само по вертикалната относително тясна калибрована



Фиг. 2.10



Фиг. 2.11

тръба. Установяването на нулевата точка по скалата става, когато двата скачени съда се поставят под едно и също налягане, например атмосферното.

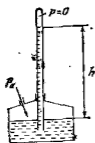
Течностните манометри, които са пригодени за точно измерване на много малки разлики в наляганията около 10 Pa, се наричат *микроманометри*. При тях се използват различни приспособления за точното определяне на височината  $h$ , която в случая е много малка. Това се постига чрез микроскопично отчитане (*микрометър на Прандтл*) или чрез увеличена проекция на вертикалната скала, закрепена към поплавок, който е поставен във вертикална тръба (*микрометър на Бетиц*) или посредством наклоняване на вертикалната тръба, както е показано на фиг. 2.11. В последния случай разликата в наляганията се определя по из-

раза

$$\Delta p = p - p_0 = \rho gh = \rho gl \cdot \sin \alpha, \quad (2.35)$$

където  $l$  е преместването на свободната повърхнина на течността по дължината на тръбичката, а  $\alpha$  — ъгълът на наклона. Вижда се, че с намаляване на ъгъл  $\alpha$  измерваната дължина  $l$  може да се направи многократно по-голяма от  $h$ , с което точността на отчитането се повишава. Наклонът може да се измени и с това да се нагласява желаната чувствителност на уреда.

На принципа на скачените съдове работят и живачните барометри (фиг. 2.12). Вертикалната прозрачна тръба, затворена в горния си край, е напълнена с живак и е потопена с отворения си край в намиращия се в чашката живак. Ако тръбата над



Фиг. 2.12

свободната повърхнина на живака е достатъчно дълга, в горния край се образува т. нар. *Торичелиева празнина*, в която може да се смята, че налягането е нула. Тогава за атмосферното налягане, което действа по повърхнината на живака в чашката, следва

$$p_a = \rho gh. \quad (2.36)$$

В Торичелиевата празнина обаче не съществува пълен вакуум, тъй като тя е запълнена с живачни пари. Разбира се, налягането на тези пари е твърде малко и затова грешката, която се получава при приемането, че  $p=0$ , е напълно приемлива.

### III. КИНЕМАТИКА НА ФЛУИДНИТЕ ТЕЧЕНИЯ

Кинематиката е раздел от механиката на флуидите, в който се разглеждат общите закони на движение, без да се анализират причините, които го пораждат. Кинематиката на флуидите за разлика от твърдите тела не може да се отдели изцяло от динамиката им. Това се дължи на обстоятелството, че при движението на определен флуиден обем разпределението на масата в него с течение на времето се изменя, което от своя страна оказва влияние на разпределението на скоростта и ускорението на флуидните частици. Ето защо в кинематиката на флуидите се налага заедно с чисто кинематични характеристики на движението да се разглеждат и динамични понятия като маса и плътност.

За разлика от теоретичната механика, в която се изучава движението на абсолютно твърди тела, в кинематиката на непрекъснатите среди се изучава движението на деформируеми тела, в процеса на който се изменят тяхната първоначална форма и разстоянието между частиците им. Особеност при флуидите е, че съставните им частици са лесноподвижни една спрямо друга и дори при наличие само на постъпателно движение те могат да имат различни скорости и ускорения. Следователно полето на течението трябва да се описва от векторите на скоростта и ускорението на флуидните частици в различните точки на изследвания флуиден обем, респ. пространство. Това от своя страна показва, че една от основните задачи на кинематиката е определянето на големината и посоката на скоростта и ускорението във всяка точка и за всеки момент от време, а въз основа на тях разпределението на налягането и плътността. Очевидно е, че тези кинематични величини са функции на времето и координатите на

пространството, и то непрекъснати и диференцируеми, което свойство е общо за флуидите и се отнася за всяка непрекъснатата среда.

### 3.1. МАТЕМАТИЧНО ОПИСАНИЕ НА ТЕЧЕНИЯТА

Съществуват два метода за изучаване на движението на частиците на флуидните среди. Единият от тях, наречен *метод на Лагранж*, се състои в изследване на движението в пространството на отделните флуидни частици, т. е. изучава се пътят, изминат от частиците във функция на времето. Тъй като флуидните частици са безкрайно много, за фиксиране на индивидуалните им траектории в пространството е необходимо в някакъв начален момент  $t_0$  да се зададат координатите на всяка определена частица  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  и след това да се следи движението в пространството. Или казано по друг начин, от безкрайното множество траектории на дадената частица ще принадлежи тази, която минава през точката, определена с началните ѝ координати  $(x_0, y_0, z_0)$ . По този начин движението се задава от положението на частиците във функция на времето и техните начални координати

$$r=r(r_0, t) \quad (3.1a)$$

или в компоненти — със система уравнения от вида

$$x=x(x_0, y_0, z_0, t),$$

$$y_0=y(x_0, y_0, z_0, t),$$

$$z=z(x_0, y_0, z_0, t). \quad (3.16)$$

Както е известно, уравн. (3.1) представлява траектория на флуидната частица. Чрез определяне на първата и втората му производна към времето  $t$  от него следват скоростта и ускорението на частиците.

Методът на Лагранж, наречен още субстанциален (индивидуален), е обичаен за механиката; спецификата на флуидите се спазва чрез използване на координатите  $r_0$ , наречени Лагранжови.

Другият метод, значително по-удобен, е *методът на Ойлер*, който се състои в изучаване с каква скорост различните флуидни частици в различен момент от време ще преминат през точка от полето на течението, фиксирана с координатите  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В случая задачата се свежда в изразяване на скоростта на флуидните частици във функция на времето  $t$  и координатите  $x$ ,  $y$ ,  $z$  на точките на пространството, т. е. в задаване на скоростното

поле. Параметрите  $(x, y, z, t)$  се наричат Ойлерови променливи. Следователно по метода на Ойлер, наречен още локален метод, движението на флуида се задава със скоростното поле

$$V = V(x, y, z, t) \quad (3.2a)$$

или с компонентите

$$u = u(x, y, z, t),$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t). \quad (3.2b)$$

Тук трябва да се забележи, че  $V$  не е скоростта на някоя налягана флуидна частица, а скоростта, с която различните флуидни частици преминават през разглежданата точка от пространството в течение на времето.

За по-пълно описание на флуидното течение е необходимо да се познава функцията на налягането, а при свиваемите флуиди и функцията на плътността

$$p = p(x, y, z, t),$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t). \quad (3.3)$$

Докато по субстанциалния метод координатите на движещите се флуидни частици са функция на времето, по локалния метод скоростта на частиците в различните точки се определя като функция на времето. Следователно по метода на Лагранж координатите  $x, y, z$  са зависими променливи, а по метода на Ойлер те са независими променливи, в което се състои основната разлика на двата метода. За математичното описание на теченията по-нататък е използван само методът на Ойлер.

Съгласно с метода на Ойлер движението на непрекъснатите среди се характеризира със скоростта на частиците им, която във всеки момент от време е определена по големина и направление. Следователно в изучаваното флуидно пространство във всеки момент и във всяка точка може да се построи векторът на скоростта. Съвкупността от тези вектори образува т. нар. *скоростно поле*, което дава мигновената картина на разпределението на скоростта.

Различават се няколко вида течения. Ако скоростното поле остава постоянно (неизменно) с течение на времето, т. е. ако скоростите във всяка точка от флуидното пространство не зависят от времето, течението се нарича *установено* или *стационарно*. Тогава скоростната функция се опростява във вида  $V = V(x, y, z)$ .

В най-общия случай, когато скоростното поле се изменя с времето, течението се нарича *неустановено* или *нестационарно* и следователно  $V=V(x, y, z, t)$ .

Един вид неустановено течение е т. нар. *изоморфно* или *полуустановено*, при което скоростите се менят с времето само по големина, но запазват направлението си. Такива могат да бъдат променливите по дебит течения в тръби и канали.

Има и течения, при които скоростите в отделните точки се изменят с времето по големина и направление, но в сравнително по големи интервали от време имат постоянни средни стойности. Това са т. нар. *установени по средна стойност* или *квазистационарни* течения, за които средната по време скорост в произволна точка на течението се определя по израза

$$\bar{V} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V dt.$$

Според броя на координатите, които са достатъчни за математичното описание на теченията, се различават три-, д-у- и едномерни течения. Очевидно е, че математически по-лесно се изследват теченията с по-ниска размерност.

### 3.2. ТОКОВИ ЛИНИИ И КАРТИНИ

По аналогия на силовите линии в силовите полета за онагледяване на скоростните полета се използват т. нар. *токови линии*, във всяка точка от които в даден момент от време скоростните вектори имат направлението на съответните допирателни (фиг. 3.1). Следователно за всяка точка от токовата линия скоростта  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  и съответният линеен елемент  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  са колинеарни вектори, така че условието

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad (3.4)$$

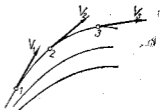
с което се изразява колинеарността, може да се разглежда като система от диференциални уравнения за токовата линия.

По същество токовите линии се различават от траекториите на флуидните частици. При неустановените течения скоростта в отделните точки на флуидното пространство се мени с времето по големина и направление, откъдето следва, че токовите линии ще изменят формата си. В такива случаи може да се говори само за моментни токови линии, които няма да съвпадат с траек-

торията на флуидните частици. При установените течения във всяка точка от пространството скоростта е постоянна по големина и направление и токовете линии остават непроменени в течение на времето и следователно ще представляват и траектории на флуидните частици.

Обикновено през всяка точка на флуидното течение може да се прекара само една токова линия. Изключение правят т. нар. *особени точки*, в които токовете линии се пресичат. Това от своя страна предполага движението на флуидните частици в особените точки да има едновременно различни направления, от което следва очевидно, че скоростта в тези точки може да бъде или нула, или безкрайност. Например точките  $A$  и  $A'$  на нулевата токова линия по контура на обтеченото тяло (фиг. 3.2) са особени. В тези точки, наречени още *критични* или *точки на заприщване*, скоростта е равна на нула.

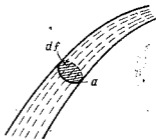
Повърхнините, чиито образувателни са токови линии, се наричат *токови повърхнини*. Тъй като във всяка точка на токовите линии скоростта няма напречна компонента, очевидно е, че през токовите повърхнини не може да преминава флуид. Повърхнината, образувана от токови линии, които преминават през точките на затворен контур (фиг. 3.3), се нарича *токова тръбичка*, а флуидът, който тече в нея — *токова нишка*. Ако напречното сечение  $f$  на токовата нишка е достатъчно малко, говори се за елементарна токова нишка (тръбичка). При това под напречно сечение се разбира сечението  $f$ , което е разположено напречно



Фиг. 3.1



Фиг. 3.2

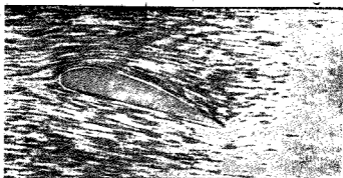


Фиг. 3.3

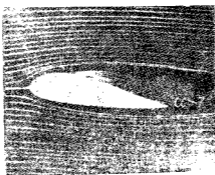
на токовите линии. При неустановените сечения конфигурацията на токовите тръбички (нишки) се изменя с времето, поради което тези понятия са намерили най-широко приложение при установените течения.

Съвкупността от достатъчно голям брой токови линии на едно

течение представлява т. нар. *токова картина*. Токови картини се използват за онагледяване на течението. Освен по теоретичен път (уравн. 3.4), токовете линии могат да се получат и опитно по визуалния метод или чрез фотографиране. При тези случаи



Фиг. 3.4



Фиг. 3.5

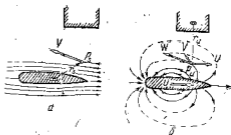
видимостта на теченията се постига посредством прибавяне на малки твърди частици (стърготини, прах и др.) към флуида, които извършват практически същото движение както изместените от тях флуидни частици. При фотографирането скраткотрайна експонация малките твърди частици, които се движат заедно с флуида, остават на снимката къси чертички, които по съвкупност формират токовата картина (фиг. 3.4). Тя е толкова по точна, колкото твърдите частици са по-малки или плътността им е по-близка до тази на флуида. Второто условие е лесно изпълнимо при течностите, но е неизпълнимо при газовите течения.

Визуализирането на газовите течения се извършва чрез внасяне на много тънки димни струйки (фиг. 3.5) или на много тънки и сравнително къси копринени нишки, закрепени в неподвижни

точки на изследваната област или на неподвижни, много тънки държачи.

Според това, дали токовете линии се разглеждат в координатна система в покой или движение, различават се абсолютни и относителни токови

картини. Така например скоростното поле, което възниква при праволинейно равномерно движение на лодка в езеро, ще бъде стационарно, а токовата картина—относителна, ако движението на водата се разглежда спрямо координатна система, свързана с лодката (фиг. 3.6а). Ако обаче движението на водата



Фиг. 3.6

се разглежда спрямо неподвижна координатна система, свързана с брега, скоростното поле ще бъде нестационарно, а токовата картина—абсолютна (фиг. 3.6б). Действително при преминаване на лодката в близост до дадена точка (фиг. 3.6б) скоростта на водата ще се увеличава с приближаване на лодката и ще намалява с отдалечаването ѝ, като едновременно ще променя направлението си. В случая абсолютното течение е неустановено, тъй като скоростта в която и да е точка от пространството, фиксирана спрямо неподвижната координатна система, свързана с брега, се мени с времето по големина и посока, понеже лодката променя непрекъснато положението си спрямо нея. В първия случай обаче (фиг. 3.6а) фиксираната точка ще се движи заедно с лодката, без да изменя положението си спрямо нея и следователно скоростта на водата в тази точка по големина и посока ще остава винаги една и съща.

### 3.3. УСКОРЕНИЕ НА ФЛУИДНИТЕ ЧАСТИЦИ

Ускоренията на флуидните частици са частните производни на техните скорости по времето. Задачата е как да се определят индивидуалните им скорости въз основа на скоростите в отделните точки на пространството, които флуидните частици получават при преминаването през тях. Това става сравнително лесно, ако в израза за скоростта  $V=V(r, t)$  или  $V=V(x, y, z, t)$  (по Ойлер) се приеме, че радиус-векторът  $r$  или проекциите му  $x, y, z$  са зависими променливи от времето  $t$ . Определените по този начин скорости като сложни функции от времето  $t$  се отнасят само до онези точки, които лежат на траекториите на флуидни-

те частици и следователно са и техни индивидуални скорости. Тогава за ускоренията на частиците се получава

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} \quad (3.5)$$

или 
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Като се вземе под внимание, че

$$\frac{dr}{dt} = V, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

се получават следните изрази за ускоренията на частиците в Ойлерови променливи:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial r}$$

и 
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.6a)$$

или във векторна форма

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}. \quad (3.6b)$$

В проекции по координатните оси от уравн. (3.6) следва

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.7)$$

Първият член в дясната страна на уравн. (3.6), респ. (3.7), изразява промяната на скоростта с времето в произволна фиксирана точка на пространството, т. е. местното ѝ изменение, и се нарича *локално ускорение*. За установените течения то е равно на нула. Останалите членове на дясната страна на уравнението характеризират изменението на скоростта, обусловено от преме-

стването (конвекцията) на частиците в пространството и се нарича *конвективно ускорение*. Следователно в най-общия случай ускорението на флуидните частици, т. нар. субстанциално ускорение, е сума от локалното и конвективното ускорение.

Често се оказва полезно използването на, т. нар. *естествена координатна система*, едната ос на която съвпада с допирателната  $s$  на траекторията на частиците, а другите две оси съответно с нормалата  $\hat{n}$  и бинормалата  $\hat{b}$  (фиг. 3.7). Обикновено естествената координатна система се използва при установените и неуставените (изоморфните) течения, при които токовете линии са неизменни и съвпадат с траекторията на флуидните частици.

Тъй като субстанциалните ускорения на флуидните частици в повечето случаи лежат в оскулачната равнина, те имат проекции само по осите  $s$  и  $n$ , наречени съответно *тангенциални* и *нормални ускорения*. Като се вземе под внимание, че за неуставените течения  $V = V(s, t)$ , а при установените  $V = V(s)$ , за тангенциалното ускорение се получава

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} \quad (3.8a)$$

или

$$a_t = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s}$$

и за установените

$$a_t = V \frac{\partial V}{\partial s}, \quad (3.8b)$$

където  $ds = V dt$  е пътят, изминат от частиците за време  $dt$  със скорост  $V$ .

За нормалното ускорение (фиг. 3.7) следва зависимостта

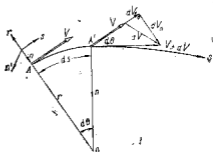
$$a_n = \frac{dV_n}{dt} = \frac{(V + dV) d\theta}{dt}$$

Произведението  $dV \cdot d\theta$  е много малко в сравнение с  $V d\theta$ , особено когато  $d\theta$  се стреми към нула, така че

$$a_n = \frac{V d\theta}{dt} \quad \text{или} \quad a_n = \frac{V^2}{r}, \quad (3.9)$$

където

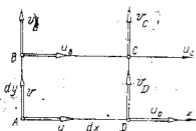
$$d\theta = \frac{ds}{r} = \frac{V dt}{r}$$



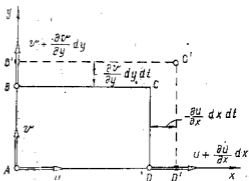
Фиг. 3.7

### 3.4. ДЕФОРМАЦИОННО И ВЪРТЕЛИВО ДВИЖЕНИЕ НА ФЛУИДНИТЕ ЧАСТИЦИ

Съгласно с теоремата на Коши—Хелмхолц елементарното движение на флуидните частици може да се разглежда като сума от постъпателно, въртеливо и деформационно преместване,



Фиг. 3.8



Фиг. 3.9

които в най-общия случай се извършват едновременно. Деформационното преместване, респ. деформацията при движението на флуидните частици, се дължи на нееднаквите скорости в различните им краища. За изясняването му се разглежда движението на флуидна частица, която в първоначалния момент има форма на елементарен паралелепипед с ръбове  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , които съвпадат с координатните оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . За удобство и по-голяма нагледност е анализирана деформацията и въртенето само на едната страна на паралелепипеда (фиг. 3.8) за краткия интервал от време  $dt$ . Ако в точката  $A$  скоростта  $V$  има компоненти  $u$ ,  $v$  и  $w$  ( $w$  не е показана на фигурата); в точките  $D$ ,  $B$  и  $C$  компонентите на скоростта в най-общия случай ще бъдат

$$\begin{aligned}
 u_D &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx & v_D &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx; \\
 u_B &= u + \frac{\partial u}{\partial y} dy & v_B &= v + \frac{\partial v}{\partial y} dy; \\
 u_C &= u_D + \frac{\partial u_D}{\partial y} dy = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy; & (3.10) \\
 v_C &= v_B + \frac{\partial v_B}{\partial x} dx = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx.
 \end{aligned}$$

Последните равенства за  $u_c$  и  $v_c$  са получени при съобразяване на зависимостите за  $u_D$  и  $v_B$  и след като са пренебрегнати малките величини от по-висок порядък.

**Обемна деформация.** Обемната деформация се обуславя от промяната на дължината на ръбовете (фиг. 3.9). Удължаването на ръба  $AD$  за време  $dt$  е

$$DD' = \left[ \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right] dt = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt$$

и по аналогия за ръба  $AB$ ,

$$BB' = \frac{\partial v}{\partial y} dy dt.$$

В случая за относителното удължение се получава:

$$\frac{DD'}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} dt, \quad \frac{BB'}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} dt,$$

като скоростта на относителната линейна деформация се определя от съответните частни производни

$$e_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{DD'}{dx} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{d}{dt} \left( \frac{BB'}{dy} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.11)$$

и по аналогия  $e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ .

За нарастването на обема за време  $dt$  се получава  $d(\Delta W) =$   
 $= \Delta W_{t+dt} - \Delta W_t =$

$$= \left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \right) \left( dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt \right) \left( dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt \right) - dx dy dz$$

или след извършване на съответните пресмятания и пренебрегване на членовете с  $dt^2$  и  $dt^3$  като малки величини от по-висок порядък

$$d(\Delta W) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz dt.$$

В случая относителната промяна на обема е

$$\frac{d(\Delta W)}{\Delta W} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt.$$

Оттук за скоростта на относителната обемна деформация, т. нар. скорост на относителното обемно разширение, се получава

$$\frac{d(\Delta W)}{\Delta W dt} = e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e_x + e_y + e_z. \quad (3.12)$$

Очевидно е, че промяната на обема е възможна само за свиваемите флуиди. За несвиваемите флуиди полученият израз (3.12) е равен на нула и следователно

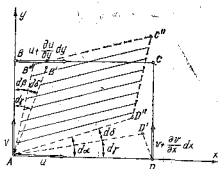
$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (3.13)$$

**Ъглова деформация и ротация.** Ако компонентата на скоростта  $v_D$  е по-голяма от  $v$  и  $u_B$  — по-голяма от  $u$ , ръбът  $AD$  се завърта на ъгъл  $d\alpha$  и заема положение  $AD''$ , а ръбът  $AB \rightarrow AB''$  се завърта в обратна посока на ъгъл  $d\beta$  и точка  $C$  се премества в положение  $C''$  (фиг. 3.10), където

$$d\alpha = \frac{DD''}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt,$$

$$d\beta = \frac{BB''}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt.$$

По този начин правоъгълникът  $ABCD$  се деформира в ромбоида  $AB''C''D''$ . В най-общия случай преместването на ръбовете  $AB$  и  $AD$  е съпроводено както с ъглова деформация, така и с ротация на разглежданата стена на паралелепипеда. Може да се смята, че паралелепипедът изпълнява и транслационно преместване, което не дава изменение на положението му спрямо



Фиг. 3.10

координатната система, тъй като тя се движи заедно с него. Независимо от едновременното извършване на деформацията и ротацията при движението на флуидната частица може да се смята, че те се извършват последователно. Например първоначално сте-

ната се е деформирала, в резултат на което ръбовете  $AD$  и  $AB$  се завъртат един спрямо друг на един и същи ъгъл  $d\gamma$ , а след това вследствие на ротацията деформираната стена се е завъртала на ъгъл  $d\delta$ . Следователно ъгъл  $d\gamma$  ще бъде мярка за ъгловата деформация, а ъгъл  $d\delta$  — за ротацията, за които съгласно с фиг. 3.10 се получава

$$d\gamma = d\beta + d\delta \text{ и } d\gamma = d\alpha - d\delta$$

или 
$$d\gamma = \frac{1}{2} (d\alpha + d\beta) \quad (3.14)$$

и 
$$d\delta = \frac{1}{2} (d\alpha - d\beta). \quad (3.15)$$

От уравн. (3.14) за компонентите на скоростта на ъгловата деформация в равнината  $x, y$  и по аналогия за останалите равнини следват изразите:

$$\frac{d\gamma}{dt} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (3.16)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

В най-общия случай деформацията се извършва чрез завъртане и разтегляне на ръбовете, като компонентите на деформационната скорост, определени по уравн. (3.11) и (3.16), може да се разглеждат като елементи на т. нар. *тензор-деформационна скорост* във вида

$$S = \begin{Bmatrix} e_x & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_y & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_z \end{Bmatrix}. \quad (3.17)$$

Обикновено тензорът е симетричен, тъй като  $e_{xy} = e_{yx}$ ,  $e_{xz} = e_{zx}$ ,  $e_{yz} = e_{zy}$ .

За ъгловата скорост, която характеризира въртенето на разглежданата стена на паралелепипеда в равнината  $x, y$  (като

твърдо тяло) около ос  $z$  и по аналогия за компонентите на ъгловата скорост спрямо другите оси, в съответствие с уравн. (3.15) се получава

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$
(3.18)

откъдето  $|\omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$ .

Уравнение (3.18) определя в диференциална форма връзката между компонентите на ъгловата скорост  $\vec{\omega}$  и тези на скоростта на течението  $\vec{V}$ . Във векторна форма то може да се запише

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}. \quad (3.19)$$

Възприето е векторът  $\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}$  да се нарича *вектор на завихреността на течението* или *вихър на скоростта*. В повечето случаи при теченията на реалните флуиди вихърът на скоростта е различен от нула ( $\vec{\Omega} \neq 0$ ) и тези течения се наричат *вихрови*. Има обаче и такива, характеризиращи се с изчезващо влияние на силите на вътрешното триене, при което вихърът на скоростта е равен на нула ( $\vec{\Omega} = 0$ ) и те се наричат *безвихрови* или *потенциални течения*.

### 3.5. БЕЗВИХРОВИ ДВИЖЕНИЯ НА ФЛУИДИТЕ

Както вече се изтъкна, теченията, които се извършват без въртене на флуидните частици, се наричат безвихрови или потенциални. Тъй като причината за вихровото движение на частиците са редица фактори, от които вътрешното триене е с преобладаващо значение, следва, че безвихровите движения са възможни в случаите, когато вискозните сили са пренебрежимо малки или равни на нула. Очевидно това условие е изпълнено при течения на идеален флуид, а при реалните флуиди само в областта от теченията, където липсва напречен градиент на скоростта, или когато скоростите на движение на частиците са срав-

нително големи (големи Рейнолдсови числа), при което се наблюдава изчезващо влияние на вискозните сили.

В съответствие с определението за безвихровите течения следва, че ъгловата скорост на всяка частица, а следователно и вихърът на скоростта и техните компоненти са равни на нула. Във векторна форма това условие може да се запише, както следва:

$$\vec{\omega} = 0$$

или 
$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V} = 0, \quad (3.20 \text{ а})$$

а според уравн. (3.18) с компонентите

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (3.20 \text{ б})$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

където  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$  е скоростното поле на течението.

Както е известно от векторното смятане, уравн. (3.20) е необходимо и достатъчно условие за това, че скоростният вектор  $\vec{V}$  в отделните точки на флуидното течение е градиент на някаква функция  $\varphi(x, y, z)$ , а компонентите му са частни производни на тази функция по съответните координати, т. е.

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi \quad (3.21)$$

и 
$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.22)$$

Функцията  $\varphi$  напълно характеризира безвихровото движение и се нарича *потенциал на скоростта*, а безвихровите течения — *потенциални течения*. Тъй като скоростта  $\vec{V}$  е непрекъснатата функция на  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и скоростният потенциал  $\varphi$  ще зависи непрекъснато от тези променливи величини. Съгласно с уравн. (3.22) изследването на скоростното поле при безвихровите течения на флуидите се свежда очевидно до изучаването на скоростния потенциал, наличието на който дава възможност да се построи сравнително проста теория на потенциалните течения.

Ако уравненията (3.22) се умножат почленно на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и се съберат, се получава

$$d\varphi = udx + vdy + wdz \quad (3.23 \text{ а})$$

или

$$\varphi = \int \vec{V} d\vec{r} = \vec{V} \cos \theta d\vec{r} = \int (udx + vdy + wdz), \quad (3.23 \text{ б})$$

където  $d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$  е елемент от линията, по която се интегрира.

Определянето на потенциалната функция става особено просто, когато е възможно интегрирането по дължината  $s$  на токовите линии. Тъй като  $V$  и  $ds$  по дефиниция са колинеарни вектори, следва

$$\varphi = \int V ds. \quad (3.24)$$

Повърхнините, в отделните точки на които потенциалната функция остава еднаква, се наричат *еквипотенциални повърхнини*. Тяхното уравнение е от вида

$$\varphi(x, y, z, t) = \text{const}, \quad (3.25)$$

където времето  $t$  се разглежда като параметър на нестационарните течения, който липсва при стационарните. От уравн. (3.21) следва, че скоростите, респ. токовите линии, са насочени нормално към еквипотенциалните повърхнини, които са като напречни сечения на флуидното течение. Ортогоналната мрежа от токовете и еквипотенциалните линии се нарича *потенциална мрежа на течението*.

### 3.6. ВИХРОВИ ДВИЖЕНИЯ НА ФЛУИДИТЕ

Въртеливото движение на флуидните частици около мигновена ос, преминаваща през тях, се нарича *вихрово движение*. То се характеризира с т. нар. *вихър на скоростта*, който е различен от нула, т. е.  $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V} \neq 0$ , и се появява навсякъде при теченията на реалните флуиди, където силите на вътрешното триене имат преобладаващо значение. Физически неравенството  $\Omega \neq 0$  в произволна точка на вихровата област означава, че в тази точка има въртене на елементарен обем, което не винаги се забелязва от наблюдателя. Например при движение на скутер във вода се виждат много добре образуваните след него вихри, докато вихровото движение на частиците, разположени в близост

до обтечените странични стени, където има напречен градиент на скоростта, остава незабелязано. Вихровото движение се наблюдава при всички случаи на обтечени тела и по-специално в областите от теченията, в които има напречен градиент на скоростта. Циклоните, антициклоните и смерчовете от гледна точка на хидродинамиката представляват концентрирани вихрови образувания в атмосферата.

Вихровите движения играят съществена роля в хидродинамиката, тъй като са в основата на редица полезни, а също така и вредни ефекти. Така например вихровото движение около крилото на самолета в крайна сметка определя подемната му сила. Едновременно с това то е съпроводено със загуба на енергия, изразходвана за въртеливото движение на частиците, и следователно е източник на т. нар. *вихрово съпротивление*.

Докато ъгловата скорост при твърдите тела е постоянна, при флуидите тя може да се мени в отделните точки на флуидното пространство. Това дава основание да се приеме, че скоростното поле поражда поле на вихъра на скоростта, т. нар. *вихрово поле*, във всяка точка на която вихърът  $\vec{\Omega}$  е определен по големината и посоката. Това поле също може да бъде стационарно и нестационарно.

Линиите, във всяка точка на които в даден момент векторите на вихрите на скоростта  $\vec{\Omega}$  са допирателни към тях (фиг. 3.11), се наричат *вихрови линии*. Тъй като векторът на вихъра, респ. на ъгловата скорост, е насочен перпендикулярно спрямо равнината на въртене, вихровата линия представлява мигновена ос на въртене на флуидните частици, разположени по нея. При неустановените течения вихровите линии изменят своята форма и положение, докато при установените течения те са неизменни с времето.

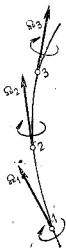
По аналогия на токовете линии (уравн. 3.4) диференциалното уравнение на вихровите линии има вида

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} . \quad (3.26)$$

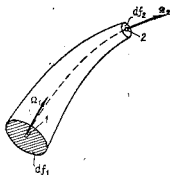
В най-общия случай вихровите линии не съвпадат с токовете линии. Познати са обаче и вихрови движения, при които вихровите линии съвпадат с токовете линии и следователно векторите на скоростите и вихрите остават успоредни. Това са т. нар. *винтови движения*. Уравнението на оста на винтовото движение се определя от условието  $\vec{V} // \vec{\Omega}$  и следователно

$$\frac{u}{\Omega_x} = \frac{v}{\Omega_y} = \frac{w}{\Omega_z} . \quad (3.27)$$

Повърхнината, образувана от вихрови линии, които минават през точките на елементарен затворен контур, се нарича *вихрова тръбичка*, а частта от движещия се флуид, ограничен от нея — *вихров шнур* (фиг. 3.12).



Фиг. 3.11



Фиг. 3.12

Характерна величина на вихровите тръбички е т. нар. *поток на вихъра на скоростта* или интензитет на вихровата тръбичка, дефиниран като

$$i = \int_{f_n} \text{rot} \vec{V} df_n = \int_{f_n} \vec{\Omega} df_n, \quad (3.28)$$

където  $f_n$  е лицето на напречното сечение на вихровата тръбичка, разположена нормално на вектора  $\Omega$ .

В съответствие с известната във векторния анализ теорема на Гаус следва, че потокът на вихъра на скоростта през произволна затворена повърхнина е равен на нула, т. е.

$$\int_{f_n} \vec{\Omega} df_n = 0. \quad (3.29)$$

Като затворена повърхнина се разглежда повърхнината на обема на вихровата нишка, ограничен от двете произволни сечения  $df_1$  и  $df_2$  (фиг. 3.12). От определението на вихровата линия е очевидно, че векторът на вихъра на скоростта няма нормални компоненти към вихровата повърхнина и следователно не-

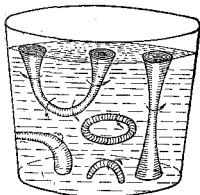
товият поток през нея е равен на нула. Тогава от уравн. (3.29) се получава

$$\int_{f_1} \Omega_1 df_1 = \int_{f_2} \Omega_2 df_2. \quad (3.30)$$

Съотношението (3.30) изразява втората теорема на Хелмхолц за постоянство на интензитета на вихровата тръбичка по дължината ѝ.

Ако модулът и направлението на вихъра на скоростта остават постоянни по цялото напречно сечение на вихрова тръба, теоремата на Хелмхолц може да се запише още така:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \Omega_1 f_1 = \Omega_2 f_2 = \dots = \Omega_n f_n = \\ &= \Omega f = \text{const.} \quad (3.31) \end{aligned}$$



Фиг. 3.13

Получената зависимост показва, че сечението на вихровите тръбички никъде не може да стане равно на нула, тъй като в това сечение скоростта на въртене на флуидните частици трябва да стане равна на безкрайност, което е физически невъзможно. Следователно вихровите тръбички не могат да завършват във вътрешността на флуида. Те или образуват затворени пръстени, или завършват на повърхнината, която ограничава флуида (фиг. 3.13).

### 3.7. ЦИРКУЛАЦИЯ НА СКОРОСТТА

Криволинейният интеграл от скаларното произведение на вектора на полето  $\vec{V}$  и векторния елемент  $d\vec{r}$  по затворен контур от вътрешността на течението (фиг. 3.14) се нарича циркулация на скоростта, т. е.

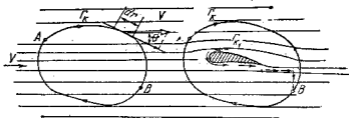
$$\Gamma = \oint \vec{V} d\vec{r} = \oint V \cos \theta dr \quad (3.32 \text{ а})$$

или с компоненти

$$\Gamma = \oint (u dx + v dy + w dz). \quad (3.32 \text{ б})$$

При пресмятане на циркулацията на скоростта по уравн. (3.32) тя се приема условно за положителна, ако обходът се прави в

посока на проекцията на скоростта  $V_{\theta} = V \cos \theta$ . Циркулацията на скоростта в безвихровите течения може да се изрази чрез скоростния потенциал. Полагайки  $u dx + v dy + w dz = d\varphi$  за произволен незатворен контур  $L$ , се получава



Фиг. 3.14

$$\Gamma = \int_L d\varphi = \varphi_A - \varphi_B,$$

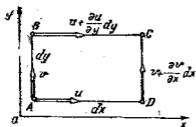
където  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  са стойностите на потенциалната функция в края на контура. За затворен контур  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  представляват стойностите на скоростния потенциал в точките  $A$  и  $B$  на контура, които съвпадат една с друга.

Ако безвихровото течение е с еднозначно определен скоростен потенциал,  $\varphi_A = \varphi_B$  и циркулацията на скоростта по затворения контур (фиг. 3.14 а) е равна на нула. При многозначно определен скоростен потенциал  $\varphi_A \neq \varphi_B$  и циркулацията на скоростта по затворен контур е различна от нула (фиг. 3.14 б). В разглежданите случаи на фиг. 3.14 а и б са показани съответно едносвързана и двусвързана област. Едносвързана област е тази, в която всяка затворена крива линия може чрез непрекъснато скъсяване да се сведе до точка, без да напусне флуида, докато при многосвързаната област затворените линии не могат да се сведат до точка, без да напуснат флуида.

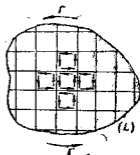
В хидродинамиката понятието циркулация на скоростта се използва нашироко при изучаването на вихровите движения. Посредством циркулацията се установява връзка между интензитета на вихъра и разпределението на скоростта във флуидните течения. Това се налага от обстоятелството, че както вихърът на скоростта, така и интензитетът му за разлика от скоростта не могат да се измерят директно. Понятието циркулация на скоростта има особено голямо значение в аеродинамиката и се използва при изследване на обтичането на летателните апарати и по-специално при определянето на подемната сила на крилото.

**Теорема на Стокс.** Задачата е да се измери връзка между интензитета на вихъра и циркулацията на скоростта. За целта

се разглежда безкрайно малък контур във форма на правоъгълник, който се намира във флуидното течение с непрекъснато разпределение на скоростния вихър. Проекциите на скоростта в точките  $A, B, C$  и  $D$  са определени по уравн. (3.10) и са показани



Фиг. 3.15



Фиг. 3.16

на фиг. 3.15. Циркуляцията на скоростта по този елементарен контур е сума от циркуляциите по безкрайно малките страни с дължина  $dx$  и  $dy$ , както следва:

$$\begin{aligned} d\Gamma_z &= udx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right)dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)dx - vdy = \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx dy \end{aligned} \quad (3.33)$$

или в съответствие с уравн. (3.18)

$$d\Gamma_z = 2\omega_z df_z = \Omega_z df_z.$$

Тъй като  $\Omega_z$  е проекцията на вихъра по ос  $z$ , дясната част на полученото равенство представлява потокът на вихъра през сечението  $df_z$ . По аналогичен начин за сеченията в другите координатни равнини се получава:

$$d\Gamma_x = \Omega_x df_x,$$

$$d\Gamma_y = \Omega_y df_y.$$

откъдето за елементарната правоъгълна площ  $df_n$ , произволно разположена в пространството, следва

$$d\vec{\Gamma} = \vec{\Omega} df_n = \text{rot} \vec{V} df_n. \quad (3.34)$$

Получената зависимост показва, че циркуляцията на скорост-

та по безкрайно малък правоъгълен контур е равна на потока на вихъра на скоростта през елементарната площ ограничена от контура или интензитета на съответната вихрова тръбичка, обхваната от този контур.

Уравнение (3.34) може лесно да се обобщи и за произволен равнинен контур  $L$ , разположен във флуидното течение (фиг. 3.16). Посредством система от ортогонални линии повърхнината, ограничена от контура, се разделя на безкраен брой елементарни правоъгълници, като циркулацията по контура на всеки от тях се определя по уравн. (3.34). По целия произволен контур циркулацията е

$$\Gamma = \int \Omega df_n = \iint di.$$

Но тъй като циркулациите по общите страни на съседните безкрайно малки правоъгълници взимно се анулират, защото са противоположни по знак, сумата от циркулациите по всички елементарни правоъгълни контури е равна на циркулацията на скоростта по общия контур, т. е.

$$\Gamma = \int \vec{\Omega} df_n = i. \quad (3.35)$$

Този резултат може да се обобщи и на произволна повърхнина, която се опира на произволен контур. Уравнение (3.35) е математичен запис на теоремата на Стокс: *циркулацията на скоростта по произволен затворен контур, разположен във флуидното пространство е равна на интензитета на вихровата тръбичка, еднократно обхваната от този контур.*

#### IV. ОСНОВНИ УРАВНЕНИЯ НА МЕХАНИКАТА НА ФЛУИДИТЕ

##### 4.1. ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА МАТЕРИЯТА – УРАВНЕНИЕ ЗА НЕПРЕКЪСНАТОСТТА

Уравнението за непрекъснатостта на флуидните течения е израз на закона за запазване на материята, установен от М. В. Ломоносов през 1748 г. Съгласно с този закон флуидните частици през време на движението си могат да изменят както формата, така и обема си  $\Delta W$  и средната плътност  $\rho$  в него, докато масата им  $\Delta m$  остава постоянна величина, т. е.

$$\frac{d(\Delta m)}{dt} = \frac{d(\rho \Delta W)}{dt} = 0,$$

и след диференциране

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d(\Delta W)}{\Delta W dt} = 0, \quad (4.1)$$

Тъй като отношението  $\frac{d(\Delta W)}{\Delta W dt} = e$  е всъщност скоростта на обемната деформация, уравн. (4.1) може да се запише

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho e = 0$$

или като се вземе под внимание изразът (3.13),

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (4.1a)$$

респ.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (4.1b)$$

Ако в най-общия случай  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ , тогава

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \\ &+ w \frac{\partial \rho}{\partial z}, \end{aligned}$$

с което след обединяване на производните в уравн. (4.1) се получава уравнението за непрекъснатостта на неустановено течение на свиваем флуид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.2a)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (4.2b)$$

За установено течение на свиваем флуид  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  и уравнението за непрекъснатостта приема вида

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.3a)$$

$$\text{или} \quad \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0, \quad (4.36)$$

а за установено течение на несвиваем флуид при който  $\rho = \text{const}$ , се получава

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4.4a)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (4.46)$$

За потенциално течение уравнението за непрекъснатостта в съответствие с уравн. (3.22) може да се запише, както следва:

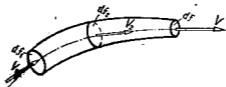
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (4.5a)$$

а за несвиваемите флуиди и установено течение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0. \quad (4.56)$$

Полученото уравнение се нарича *уравнение на Лаплас*. Функциите, които задоволяват това уравнение, са хармонични функции, от което следва, че и скоростният потенциал на безвихровото течение е също хармонична функция на координатите  $x, y, z$ .

Получените уравнения са разповидност на уравнението за непрекъснатостта, което е основно в механика на флуидите. Очевидно за свиваемите флуиди то дава връзката между обема и плътността на флуидните частици, а при несвиваемите флуиди показва, че през време на движението си флуидните частици се деформират със запазване на обема си.



Фиг. 4.1

За решаване на много практически задачи често се използва уравнението за непрекъснатостта на едномерно течение по дължина на токова тръбичка (фиг. 4.1) или с крайни размери, какъвто е случаят на течения в тръби и канали. Очевидно то е

важно за установени и изоморфни течения, при които токовете тръбички не изменят своята форма и размери с течение на времето. Тъй като напречните сечения на токовете тръбички са много малки, може да се приеме, че параметрите на течението (в случая  $V$  и  $\rho$ ) в границите на произволно избрано напречно сечение са постоянни. Тогава, вземайки под внимание, че през околната повърхнина на токовете тръбички не протича флуид, от закона за запазване на материята следва, че количеството флуидна маса, която преминава през отделните напречни сечения на токовата тръбичка за единица време, е постоянна величина, т. е.

$$dq = \rho_1 V_1 df_1 = \rho_2 V_2 df_2 = \dots = \rho_n V_n df_n = \text{const}, \quad (4.6a)$$

където  $q$ ,  $\text{kg/s}$  е т. нар. *масов дебит* на течението.

Изразът (4.6a) е уравнението за непрекъснатостта на едномерно течение на свиваем флуид. За несвиваем флуид ( $\rho = \text{const}$ ) то може да се запише във вида

$$dQ = V_1 df_1 = V_2 df_2 = \dots = V_n df_n = \text{const}, \quad (4.6b)$$

където  $Q = \frac{dq}{\rho}$ ,  $\text{m}^3/\text{s}$ , е т. нар. *обем дебит*.

Получените уравнения показват, че масовият дебит при свиваемите флуиди и обемният при несвиваемите са постоянни величини по цялата дължина на елементарната токова тръбичка. Следователно сечението на токовете тръбички не може да стане равно на нула никъде във вътрешността на течението, тъй като в него скоростта трябва да стане безкрайно голяма, което е физически невъзможно. Ето защо токовете тръбички, респ. токовете линии остават непрекъснати по дължина на течението, като се простират от едната до другата граница на разглежданата област или образуват затворени контури, поради което уравн. (4.6) се нарича *уравнение за непрекъснатостта*.

За течения в тръби и канали, където скоростта по напречното сечение се изменя по големина, докато плътността се изменя незначително, уравнението за непрекъснатостта може да се запише, както следва:

$$q = \int \rho V df = \rho V_m f = \text{const}$$

или  $q_1 V_{m_1} f_1 = q_2 V_{m_2} f_2 = \dots = q_n V_{m_n} f_{m_n} = \text{const}, \quad (4.7a)$

а за несвиваем флуид

$$Q = V_{m_1} f_1 = V_{m_2} f_2 = \dots = V_{m_n} f_n = \text{const}. \quad (4.7b)$$

където  $V_m = \frac{1}{f} \int V dS$  е средната по напречното сечение скорост.

При разглеждане на каналните течения обикновено масовият дебит  $q$  или обемният  $Q$  е известен и за средната по напречното сечение скорост се получава

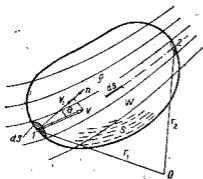
$$V_m = \frac{q}{\rho f} = \frac{Q}{f}$$

#### 4.2 ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА ИМПУЛСА. ТЕОРЕМА ЗА КОЛИЧЕСТВОТО НА ДВИЖЕНИЕ НА ФЛУИДИТЕ

Теоремата за количеството на движение на флуидните течения следва от втория закон на Нютон за движението на материалните среди. Съгласно с този закон резултативата от силите, с които околната среда въздейства върху произволна флуидна маса, е равна на скоростта на изменение на нейното количество на движение, т. е.

$$\vec{K} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{J}}{dt} \quad (4.8)$$

където  $\vec{J} = m\vec{V}$  е количеството на движение на масата  $m$ , която се движи със скорост  $\vec{V}$ . От втория закон на Нютон за движението следва, че масата в произволен контролен обем  $W$  се изменя количествено само когато върху нея са приложени външни сили.



Фиг. 4.2

Уравнение за количеството на движение. Уравнението за количеството на движение може да се получи, като законът на Нютон се приложи например за течение през контролен обем по фиг. 4.2. Флуидът постъпва през повърхнината  $S$  на контролния обем от лявата страна и го напуска от дясната. Векторът  $n$  съвпада с посоката на нормалата към повърхнината и сключва със скоростта  $V$  ъгъл  $\theta$ . По време на движението на флуида промяна на количество-

то на движение вътре в обема може да настъпи по две причини. Първо, защото плътността и скоростта в обема могат да се променят с времето (при неустановени течения). Второ, когато втичащото в обема количество на движение е различно от изтичащото

то, в резултат на което ще се получи натрупване или изчерпване на количеството на движение в контролния обем. Във всеки случай скоростта на изменение на общото количество на движение ще представлява сума от двете изменения, което може да бъде заложено в едно векторно уравнение, както следва:

$$\vec{K} = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \vec{V} dW + \oint_S \rho \vec{V} V_1 dS, \quad (4.9a)$$

или

$$\vec{K} = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \vec{V} dm + \oint_S \vec{V} dq. \quad (4.9b)$$

Тук  $K$  е външната сила, с която околната среда взаимодействува върху флуида, ограничен от контролния обем, респ. контролната повърхнина. Тя причинява изменение на количеството на движение, което е представено от дясната страна на уравнението.

Първият интеграл от дясната страна съдържа производението  $\rho \vec{V} dW = \vec{V} dm$ , което представлява количеството на движение на елементарната маса  $dm$  в обема. Следователно първият член в дясната страна на уравн. (4.9) е скоростта на изменение на количеството на движение на флуида в контролния обем, дължаща се на изменението на количеството на флуида вътре в обема в зависимост от времето вследствие на изменението на скоростта и плътността. В интеграла на втория член  $\rho V_1 ds = dq$  е масовият дебит през елементарна повърхнина  $dS$  (т. е. масата, която преминава през лицевия елемент за единица време), а производението  $V dq$  е количеството на движение на тази маса. Когато това количество на движение се интегрира по цялата повърхнина на контролния обем, се получава промяна на количеството на движение на флуида вътре в обема в резултат на обмена с външната околна среда. Сумата от двата интеграла дава общата скорост на изменение на количеството на движение на флуида в контролния обем.

При установени течения, за които скоростта и плътността са постоянни с времето, уравнението за количеството на движението приема вида

$$\vec{K} = \oint_S \rho \vec{V} U_1 dS = \oint_S \vec{V} dq, \quad (4.10a)$$

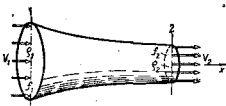
където  $V_1 = V \cos \theta$ . В компонентна форма по осите  $x$ ,  $y$  и  $z$  това векторно уравнение може да се запише

$$K_x = \oint_S \rho (V \cos \theta) u dS = \oint_S u dq,$$

$$K_y = \oint_S \rho(V \cos \theta) v dS = \oint_S v dq,$$

$$K_x = \oint_S \rho(V \cos \theta) w dS = \oint_S w dq. \quad (4.106)$$

При конкретни задачи в практиката контролната повърхнина се избира така, че да бъдат подходящо фиксирани входящото и из-



Фиг. 4.3

ходящото сечение (през които токовите линии да бъдат успоредни помежду си), а във от тях през повърхнината на контролния обем да няма обмен на флуидна маса. Например за течението в тръбопровода по фиг. 4.3 контролната повърхнина е образувана от каналните стени, през които не се втича и изтича флуид, и двете напречни сечения, отбелязани с 1 и 2, през които се пренася маса и количество на движение. При този случай интегрирането на уравн. (4.10) се опростява значително, особено ако се приеме, че скоростта е еднаква по цялото напречно сечение и е разположена нормално към него:

$$\vec{K} = (\rho_2 \vec{V}_2 f_2) \vec{V}_2 - (\rho_1 V_1 f_1) \vec{V}_1 = q_2 V_2 - q_1 \vec{V}_1.$$

Съгласно с уравнението за непрекъснатостта  $q_1 = q_2$  и следователно

$$\vec{K} = q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1). \quad (4.11a)$$

При реалните флуиди скоростта се мени по напречното сечение, което налага уравнението за количеството на движение да се пресмята със средната по сечение скорост, като се въвежда корекционният коефициент на Бусинеск

$$\beta = \frac{1}{V_{mf}^2} \int V^2 df,$$

с който се умножават скоростите, и следователно

$$\vec{K} = q(\beta_2 \vec{V}_{m_2} - \beta_1 \vec{V}_{m_1}). \quad (4.116)$$

За най-разпространените в техниката турбулентни течения  $\beta =$

$\approx 1,01 \div 1,04$ , поради което за простота по-нататък ще се смята  $\Phi = 1$ .

**Момент на количеството на движение на флуидите.** Законът за момента на количеството на движение е следствие от приложението на втория закон на Нютон към въртящи се маси. Съгласно с този закон моментът на резултантната външна сила, действаща върху флуидна маса, спрямо фиксирана точка или ос е равен на скоростта на изменение на момента на количеството на движение на тази флуидна маса, т. е.

$$\vec{K} \times \vec{r} = \frac{d}{dt} (\vec{J} \times \vec{r}).$$

Уравнението за момента на количеството на движение може да се получи по аналогичен начин, като законът на Нютон се прилага за течението през контролен обем (фиг. 4.2). Вместо количеството на движение  $\vec{J} = m\vec{V}$  се използва т. нар. *кинетичен момент*  $\vec{L} = m\vec{V} \times \vec{r}$  спрямо точка  $O$ , която е начало на радиус-вектора  $\vec{r}$ . Тогава за резултантния момент на външните сили се получава аналогично на уравн. (4.9) изразът

$$M_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_W (\vec{V} \times \vec{r}) \rho dW + \oint_S \rho (\vec{V} \times \vec{r}) V_{\perp} dS \quad (4.12a)$$

$$\text{или} \quad M_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_W (\vec{V} \times \vec{r}) dm = \oint (\vec{V} \times \vec{r}) dq, \quad (4.12b)$$

където  $(\vec{V} \times \vec{r})$  е площната скорост на лицевия елемент от контролната повърхнина.

За момента на количеството на движение за установено течение се получава

$$\vec{M}_k = \oint_S \rho (\vec{V} \times \vec{r}) V_{\perp} dS = \oint_S (\vec{V} \times \vec{r}) dq. \quad (4.13)$$

Аналогично на уравн. (4.11) за момента на количеството на движение за установено течение в тръби и канали следва изразът

$$\vec{M}_k = q[(\vec{V}_2 \times \vec{r}_2) - (\vec{V}_1 \times \vec{r}_1)]. \quad (4.14)$$

Получените уравнения (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) и (4.13) изразяват съответно теоремата за количеството на движение, и момента на количеството на движение при флуидните течения. Те са обобщени и приложими независимо от това, дали течението е на свиваем или несвиваем, идеален или реален флуид в условията на топлообмен

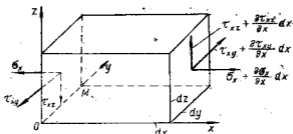
или без топлообмен. Както се вижда от тези уравнения, теоремата за количеството на движение позволява да се определят резултантната сила и нейният момент, като се познава плътността и скоростта по контролната повърхнина (а за момента и съответните радиус-вектори до фиксираната точка), без обаче да е необходимо познаването на процесите във вътрешността на контролния обем, в което се състои и нейното предимство.

#### 4.3. УРАВНЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕТО НА РЕАЛНИТЕ ФЛУИДИ

Уравненията за движение на реалните флуиди могат да се получат, като се излезе от закона за запазване на количеството на движение или от закона на Нютон, съгласно с който производението на масата на произволен флуиден обем и неговото ускорение е равно на равнодействащата на всички сили, приложени към него, т. е.

$$dK = adm. \quad (4.15)$$

Нека разглежданият произволен флуиден обем да е обемът на елементарна флуидна частица с форма на безкрайно малък паралелепипед с ръбове  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (фиг. 4.4). По стените на паралелепипеда ще действуват не само нормални напрежения, но и тангенциални, тъй като повърхностните сили при реалните флуиди са наклонени спрямо разглежданите повърхнини и могат да се представят със съответни нормални и тангенциални компоненти. В случая нормалните напрежения, приложени върху стените на паралелепипеда и успоредни на съответните координатни оси, са



Фиг. 4.4

означени с  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , а тангенциалните напрежения в равнината на всяка стена — с т с два индекса: първият показва координатната ос, към която разглежданата стена е разположена нормално, а вторият — координатната ос, чието направление има напрежението.

На фиг. 4.4 е показано условно разположение и направление на нормалните и тангенциални напрежения по съответните стени на паралелепипеда, което обаче е удобно за математическия анализ на движението на реалните флуиди. За направлението на проекциите на масовата сила на полето, което в повечето случаи е гравитационното  $(X, Y, Z)$ , се приема, че тяхната посока съвпада с тази на съответните координатни оси.

Аналогично на еластичните тела напрегнатото състояние по граничещите с точка  $M$  стени се дава от девет величини, чиято съвкупност образува т. нар. *тензор на напрежение*, който се записва във вида

$$P = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Обичайно е да се приеме, че  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , което при твърдите еластични тела означава равновесие на моментите от тангенциалните напрежения. Тогава тензорът (4.16) става симетричен спрямо главния диагонал и от напреженията могат да бъдат различни едно от друго само 6.

Върху разглеждания елементарен флуиден обем ще действуват повърхностни и масови сили. Техните проекции по съответните оси могат да се определят сравнително лесно, след като се познава разпределението на напреженията по стените на паралелепипеда и компонентите на масовата сила. Например от нормалните напрежения върху стените, разположени перпендикулярно на ос  $x$ , резултира силата

$$\left[ \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] dydz = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz.$$

От тангенциалните напрежения, които действуват по стените на паралелепипеда, успоредни на ос  $x$ , резултират съответно силите

$$\left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx dz = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

$$\text{и} \quad \left[ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] dx dy = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz,$$

като компонентата на масовата сила по направление на ос  $x$  е  $X dm$ .

Тогава, като се има предвид, че масата на паралелепипеда е

$dm = \rho dx dy dz$ , от уравн. (4.15) за уравнението на движение по направление на ос  $x$  и аналогично за осите  $y$  и  $z$  се получава

$$X \rho dx dy dz + \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = \frac{du}{dt} \rho dx dy dz$$

или

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{dw}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Системата уравнения (4.17) носи наименованието диференциални уравнения на движението на непрекъснатите среди в напрежения.

Както е известно, напреженията във флуидите зависят от скоростта на изменение на деформацията, а не от самата деформация, както това е при твърдите тела. Съгласно с обобщения закон на Нютон Стокс приема, че във вискозните флуиди компонентите на тензора напрежение (4.16) са линейна функция на компонентите на тензора деформационни скорости (3.17), т. е.  $P = as + b$ , където  $a = 2\mu$  и  $b$  — константа, която за тангенциалните напрежения според [1] се приема равна на нула.

Следователно за тангенциалните напрежения тази зависимост е от вида

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= 2\mu e_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= 2\mu e_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= 2\mu e_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

а за нормалните напрежения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu e_x + b, \\ \sigma_y &= 2\mu e_y + b, \\ \sigma_z &= 2\mu e_z + b. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Съгласно с второто обобщение на хипотезата на Нютон се приема, че средноаритметичното от трите нормални напрежения е равно на налягането, взето с отрицателен знак (спрямо посоката на  $\sigma$ ), т. е.

$$\sigma = -p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{2}{3} \mu (e_x + e_y + e_z) + b = \frac{2}{3} \mu e + b.$$

Знакът (-) пред налягането показва, че то винаги е насочено към вътрешността на разглеждания флуиден обем. В получените изрази  $e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$  и  $e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$  са компонентите на тензора деформационна скорост, а  $e = e_x + e_y + e_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} V$  е скоростта на обемиата деформация (вж. т. 3.4).

От последния израз за константата  $b$  се получава

$$b = -p - \frac{2}{3} \mu e = -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} V,$$

откъдето за нормалните напрежения може да се запише

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} V,$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} V, \quad (4.20 \text{ а})$$

$$\sigma_z = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} V$$

и за несвиваем флуид, за който  $\operatorname{div} V = 0$ , следва

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (4.20 \text{ б})$$

$$\sigma_z = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Следователно при движението на реалните флуиди нормалните напрежения не са равни на средноаритметичното на трите взаимно перпендикулярни нормални напрежения в точката освен в случаите на покой или движение на идеален флуид, когато  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$  и  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma = p$ .

Уравненията (4.18) и (4.20) представляват обобщеният закон на Нютон за свързване на нормалните напрежения с деформационните скорости, а флуидите, подчинени на този закон, се наричат нютонови флуиди.

За нютоновите флуиди въз основа на уравн. (4.18) и (4.20) системата диференциални уравнения за движение в напрежения (4.17) може да се запише в друг вид. Например за движение по направление на ос  $x$

$$\frac{du}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right\}.$$

След съответни преобразувания и опростявания и като се поставят компонентите на ускорението според (3.7), за уравнението на движението по направление на ос  $x$  и по аналогичен начин за уравненията по направление на осите  $y$  и  $z$  се получават изразите

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \gamma \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]; \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]; \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

При употребата на оператора на Лаплас системата диференциални уравнения може да се запише в по-компактна форма:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \\ &+ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} V, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + \\ &+ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} V, \end{aligned} \quad (4.22 a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} V;$$

и във векторна форма

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{V}). \quad (4.22 \text{ б})$$

За  $\operatorname{div} \vec{V} \neq 0$  (4.22) важи за свиваеми флуиди (газове). Ако е зададена масовата сила на полето  $F(X, Y, Z)$ , търсят се  $u, v, w, p, \rho, T, \mu$ , така че извън (4.22) трябва да се използват още 4 уравнения, уравнението за непрекъснатостта, уравнението за състоянието — на Клапейрон, енергийното уравнение и емпиричният закон  $\mu = f(T)$ .

За несвиваеми флуиди  $\rho = \text{const}$ ,  $\operatorname{div} V = 0$  и  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  уравн. (4.22) приема по-опростен вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \end{aligned} \quad (4.23 \text{ а})$$

и във векторна форма

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{V}. \quad (4.23 \text{ б})$$

Ако са известни масовите сили, плътността и кинематичният коефициент на вискозитета  $\nu$ , остават четири неизвестни  $u, v, w$  и  $p$ . Следователно е необходимо да се внесе към системата и уравнението за непрекъснатостта

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} V = 0. \quad (4.24)$$

Горните диференциални уравнения са получени независимо един от друг от Навие (1827), който използва метод, близък до кинетичната теория на газовете, и от Стокс (1845) по метода, който е при-

ложен тук. Поради това получените изрази се наричат най-често *уравнения на Навие—Стокс*.

Членовете на системата диференциални уравнения (4.23) имат измерение на ускорение и могат да се интерпретират като сили, отнесени към единица маса от флуида. Лявата част на уравнението представлява субстанциалното ускорение, първият член в дясната му страна — масовата сила на полето (която за гравитационно силово поле е равна на земното ускорение  $g$ ), вторият член  $\frac{1}{\rho} \text{grad } p$  — силата на налягането, а последният, който съдържа кинематичния коефициент на вискозитета, е силата на вътрешното триене, наричана понякога „вискозният“ член на Навие—Стоксовите уравнения.

При решаване на много практически задачи, каквито са теченията в тръби, в елементите на турбомашините и др. много поцелесъобразно се оказва използването не на декартовата, а на цилиндричната координатна система. Ако се означи осовата координата с  $x$ , радиалната с  $r$  и окръжната (азимутната) с  $\theta$  и проекциите на скоростта по тези координати съответно  $V_x = u$ ,  $V_r$  и  $V_\theta$ , като се направи преход от декартовата координатна система към цилиндричната, диференциалните уравнения на Навие—Стокс (4.23) и уравнението за непрекъснатостта (4.24) за течение на несвиваем флуид преминават във вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + V_r \frac{\partial u}{\partial r} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right), \quad (4.25a)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + u \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right),$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + u \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} V_\theta = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \quad (4.25b)$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (4.26)$$

Уравненията (4.23) и (4.24) представляват затворена система от четири диференциални уравнения и частни производни от втори ред за четири неизвестни функции ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $p$ ). Нелинейност-

та на системата се обуславя от членовете на конвективното ускорение в (4.23). При решаване на конкретни задачи трябва да се спазват зададените гранични условия, които се състоят в това, че относителната скорост при обтечените стени поради свойството полепваемост е равна на нула. При нестационарните течения трябва да се спазват и началните условия. Те обикновено се свеждат до задаване на разпределението на скоростта и налягането в цялото поле на флуидното течение за някакъв начален момент  $t_0$ , т. е. до задаване на функциите от вида

$$u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t) \text{ и } p(x, y, z, t),$$

които се удовлетворяват, ако уравненията на движение при  $t=t_0$  се превръщат в зададени функции на координатите.

Поради нелинейността на Навие—Стоксовите диференциални уравнения точни решения са възможни за сравнително по-прости задачи, когато граничните условия водят до линеаризиране на уравненията или до привеждането им в обикновени диференциални уравнения. Такъв е например случаят при течения с успоредни токови линии и скоростта има навсякъде еднаква посока. При по-сложните случаи се получават приблизителни решения, когато някои от членовете на Навие—Стоксовите уравнения са нула или могат да се пренебрегнат като малки спрямо останалите. Така например при установено течение може да се пренебрегне локалното ускорение. При други случаи може да се пренебрегне субстанциалното ускорение, а при течения без свободна повърхнина—масовата сила като недопринасяща към ускорението на флуидните частици, тъй като тя се уравновесява с Архимедовата подемна сила. Когато силите от вътрешното триене са малки, което е в сила за области на течението на реалните флуиди, отдалечени от обтечените стени, членът  $\nu \Delta V$  в уравненията на Навие—Стокс може да се изостави. Преценката за големината на отделните видове сили при теченията на реалните флуиди с цел отхвърляне на някои от членовете на Навие—Стоксовите уравнения трябва да се прави много внимателно, като се използват подходящи критерии.

#### 4.4. УРАВНЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕТО НА ИДЕАЛНИТЕ ФЛУИДИ

Диференциални уравнения на Ойлер. Ако в разглежданото флуидно течение се пренебрегнат силите от вътрешното триене, вискозният член в диференциалните уравнения на Навие—Стокс може да се изостави и следователно те приемат вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Получените уравнения са известни в механиката на флуидите като *Ойлерови диференциални уравнения за движението на идеален флуид*. Ако е позната масовата сила, неизвестни са функциите  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  и  $\rho$ . Това налага добавянето на още две уравнения — уравнението за непрекъснатостта и уравнението за състоянието, което дава връзката между налягането и плътността. При несвиваемите флуиди уравнението за състоянието не е необходимо.

Уравнения за движението на идеален флуид в естествени координати. Твърде често Ойлеровите уравнения се използват за решаване на едномерни задачи, записани в естествени координати (вж. т. 3.1). Очевидно е, че тогава системата (4.27) може да се запише във вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial S} &= -F_S - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \\ \frac{V^2}{r} &= -F_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

където  $F_S = -\frac{\partial \Phi}{\partial S}$  и  $F_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  са проекциите на масовата сила на полето ( $F$ ) по направленията съответно на осите  $S$  и  $n$ , а  $\frac{\partial p}{\partial S}$  и  $\frac{\partial p}{\partial n}$  — съответно надлъжният и напречният градиент на налягането. Разбира се, получените уравнения са валидни за установени и изоморфни течения, при които токовете линии не се изменят с времето. Първото уравнение на системата (4.28) се нарича едномерно Ойлерово уравнение, а второто — диференциално уравнение за изменение на налягането напречно на токовете линии.

Когато флуидът се намира само под въздействието на гравитационното силово поле, за което  $\Phi = gz + \text{const}$ , системата уравнения (4.28) приема вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} + g \frac{\partial z}{\partial S} &= 0, \\ \frac{V^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g \frac{\partial z}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

и за установени течения

$$\begin{aligned} V \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} + g \frac{\partial z}{\partial S} &= 0, \\ \frac{V^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g \frac{\partial z}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Тези диференциални уравнения са много подходящи за изследване на теченията по дължина и напречно на токовете линии.

Уравненията на Ойлер са нелинейни, поради което те все още нямат общо решение. Познати са решения за някои частни случаи, каквито са установените течения на несвиваем флуид.

**Преобразуване на Ламб—Громеко.** Независимо един от друг Ламб и Громеко са направили едно преобразуване на Ойлеровите уравнения, при което се внасят в явен вид кинематичната енергия и векторът на вихъра на скоростта. Това се постига, като в лявата страна на уравненията от системата (4.27) се прибавят и извадят изразите, както следва: за първото уравнение  $\pm v \frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\pm w \frac{\partial w}{\partial x}$ ; за второто —  $\pm u \frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\pm w \frac{\partial w}{\partial y}$ ; за третото —  $\pm v \frac{\partial v}{\partial z}$  и  $\pm u \frac{\partial u}{\partial z}$ . Тогава за първото уравнение се получава

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - w \frac{\partial w}{\partial x} = \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)}_{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right)} - v \Omega_z \quad \quad \quad w \Omega_y \\ = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Членовете във фигуративните скоби лесно се привеждат към вида, показан под всяка скоба, и ако се направят аналогични преобразувания за останалите две уравнения, се получават диференциални уравнения на Ойлер във формата Ламб—Громеко:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - X &= v \Omega_z - w \Omega_y, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - Y &= w \Omega_x - u \Omega_z, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Z &= u \Omega_y + v \Omega_x. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Системата диференциални уравнения (4.31) свързва чисто кинематични величини — скоростта и вихъра на скоростта, с динамични, като налягането и масовата сила на полето. Значението на тези уравнения се изразява в отделяне на членовете, които отчитат вихровата част на движението на флуидите, поради което в редица изследвания те са по-удобни за използване.

#### 4.5. УРАВНЕНИЕ НА БЕРНУЛИ

Интегрирането на Ойлеровите диференциални уравнения е възможно при два случая: безвихрови течения, които се извършват в условията на силово поле, притежаващо потенциал, и установени течения, макар и вихрови, но обезателно в условията на потенциално силово поле.

За безвихровите (потенциалните) течения в условията на потенциално силово поле, при които  $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V} = 0$  или  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$ , системата диференциални уравнения (4.31) приема вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - X &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - Y &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Z &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ако  $\Phi(x, y, z)$  е потенциалът на скоростното поле, а  $\Phi(x, y, z)$  — потенциалът на силовото поле, компонентите на локалното ускорение и компонентите на масовата сила може да се представят съответно с изразите:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ \text{и} \quad X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Тогав след заместване на тези изрази в уравненията (4.32) и умножаването им съответно на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  те приемат вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dx + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) dx + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dy + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) dy + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dz + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right) dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz &= 0, \end{aligned}$$

като след събиране на съответните им членове се получава

$$d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + d \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} dp + d\Phi = 0. \quad (4.33)$$

Интегралът на това уравнение е

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi = H(t), \quad (4.34)$$

където константата  $H(t)$  е произволна функция на времето и се определя от съответните начални и гранични условия.

Полученият израз (4.34) се нарича *интеграл на Коши—Лагранж* за потенциално неустановено течение на свиваем флуид.

Когато флуидното течение се извършва само в условията на земното силово поле, чиито потенциал е  $\Phi = gz + \text{const}$ , уравн. (4.34) приема вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = H(t). \quad (4.35)$$

Ако флуидът е несвиваем ( $\rho = \text{const}$ ), от уравн. (4.35) следва

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = H(t), \quad (4.36)$$

а за установено течение, при което  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$  и  $H(t) = H = \text{const}$ ,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = H = \text{const}, \quad (4.37)$$

където константата  $H$  остава една и съща по цялата област на течението.

Полученото уравнение е известно в механиката на флуидите като *интеграл или уравнение на Бернули за потенциално установено течение на идеален несвиваем флуид*. В него отделните членове имат размерност  $N \cdot m/kg$  и могат да се интерпретират като механична енергия, отнесена към един килограм маса на флуид, т. е. като специфична енергия. Първият член  $\frac{V^2}{2}$  представлява кинетичната енергия, вторият  $\frac{p}{\rho}$  — енергията на налягане, третият  $gz$  — потенциална енергия и  $H$  — общата специфична енергия на флуида.

Енергийното уравнение на Бернули по дължината на токовите линии се получава сравнително лесно посредством интегриране на първото уравнение на системата диференциални уравнения (4.29) за движението на идеален флуид в условията само на гравитационно силово поле в естествени координати, т. е.

$$\int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (4.38)$$

За установено течение на идеален несвиваем флуид  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$  и  $\rho = \text{const}$  уравн. (4.38) приема вида

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = H = \text{const}, \quad (4.39)$$

което е уравнение на Бернули, приложимо по дължината на токовата линия. В този вид то е получено без каквато и да е условност на скоростен потенциал, поради което остава в сила и за вихрови течения. На пръв поглед формално уравн. (4.39) има същия вид както уравн. (4.37). Разликата обаче е в това, че при потенциалните (безвихровите) течения константата  $H$ , респ. общата специфична флуидна енергия, е еднаква по цялата област на разглежданото течение. Такива са например теченията, които започват от свободна повърхнина, където флуидните частици са в покой или флуидът се движи праволинейно и равномерно. При вихровите течения константата  $H$ , респ. общата специфична енергия на флуида, е еднаква по дължината на токовите линии, но е различна за различните токови линии, т. е. всяка токова линия има своя константа. Характерно за тях е и това, че освен по дължината на токовите линии константата запазва своята стойност и по дължината на вихровите линии.

Когато се разделят отделните членове на уравн. (4.39) на  $g$ , Бернулиевото уравнение се привежда във вида

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = Z = \text{const}. \quad (4.40)$$

Всички членове имат размерност на дължината  $m$  и се наричат съответно:  $\frac{V^2}{2g}$  — динамична (скоростна),  $\frac{p}{\rho g}$  — пиезометрична,  $z$  — геодезична и  $Z$  — хидродинамична височина, които могат да се разглеждат като специфична механична енергия, отнесена към теглото на единица маса на флуида.

Позната е и друга разновидност на Бернулиевото уравнение

$$\frac{\rho V^2}{2} + p + \rho gz = \rho H = \text{const}. \quad (4.41)$$

Членовете на това уравнение имат размерност на налягане и могат да се интерпретират като механична енергия, отнесена към единица обем на флуида.

При отсъствие на масови сили или когато те са пренебрежимо малки в сравнение с другите сили, както е при газовете, уравнението на Бернули може да се запише във вида

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = p_0 = \text{const.} \quad (4.42)$$

Първият член на полученото уравнение се нарича *динамично налягане*, вторият — *хидродинамично* или т. нар. *статично налягане*, а сумата им — *пълно налягане*. Следователно при стационарно течение на идеален несвиваем флуид в отсъствие на масови сили пълното налягане е постоянна величина по дължината на токовите линии, а също така и по дължината на вихровите линии. В този вид то намира приложение при изучаване на движението на газовете, разглеждани като идеални несвиваеми флуиди, респ. в аеродинамиката на неголемите скорости ( $Ma < 0,3$ ).

#### 4.6. ЕНЕРГИЙНИ УРАВНЕНИЯ

Съгласно със закона за запазване на енергията при движението на флуидите енергията на флуидните частици не расте, нито намалява, а остава постоянна величина по дължина на течението, т. е.

$$E_1 = E = \text{const.}$$

където  $E_1$  е началната специфична енергия, а  $E$  — текущата. Както вече е известно, под специфична енергия се разбира енергията, отнесена към единица маса на флуида.

Въз основа на знанията от термодинамиката отделните съставлящи на енергията могат да бъдат:

— *Вътрешна енергия*  $E_v = u$ , която представлява кинетичната енергия на молекулярното движение (потенциалната енергия на междумолекулното въздействие се изключва, както това е прието за т. нар. идеален газ в термодинамически смисъл). Тя се определя с локалната температура на флуидите, т. е.

$$u = c_v T = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{k-1}. \quad (4.43)$$

— *Кинетична енергия*  $E_k$  на външното (подреденото) движение на молекулите на флуида, които като цяло образуват разглежданата флуидна частица. Както е известно, тя се дава от израза

$$E_k = \frac{V^2}{2}. \quad (4.44)$$

*Потенциална енергия*  $E_n$ , която може да се разглежда като сума от енергията на налягане и потенциалната енергия на външното силово поле, което тук се приема за гравитационното, т. е.

$$E_{\pi} = \frac{p}{\rho} + gz. \quad (4.45)$$

Тогава пълната енергия на единица маса ще бъде

$$E = E_{\kappa} + E_{\nu} + E_{\pi} = \frac{V^2}{2} + \frac{RT}{k-1} + \frac{p}{\rho} + gz. \quad (4.46)$$

При пренебрегване на члена  $gz$  като малка величина за газовете следва изразът:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{RT}{k-1} = \text{const.} \quad (4.47)$$

Според получения израз при установените адиабатни течения на газовете сумата от отделните специфични енергии (кинетична енергия, енергията на налягане и топлината) е постоянна величина по дължина на флуидното течение, респ. токовете ливии. Уравнение (4.47) показва още, че изменението на механичната енергия  $\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho}$  е придружено винаги с еквивалентно изменение на специфичната топлинна енергия  $\frac{RT}{k-1}$  и обратно.

В съответствие с уравн. (4.43) уравнението на енергията (4.47) може да се запише

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const.}, \quad (4.48)$$

известно като *уравнение на Бернули за установено течение за свиваем флуид*.

Ако се вземе под внимание уравнението на Клапейрон за състоянието на газовете,  $\frac{p}{\rho} = RT$  уравнението на Бернули приема вида

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{const.} \quad (4.49)$$

Като се съобрази известната зависимост от физиката  $a^2 = \frac{dp}{\rho} = k \frac{p}{\rho}$ , където  $a$  е местната звукова скорост, уравн. (4.48) довежда до една друга разновидност на енергийното уравнение

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \text{const.} \quad (4.50)$$

Полученият израз дава връзката между скоростта на газа и

местната звукова скорост в полето на течението. Според същия израз с нарастване на скоростта на движение на газа, местната скорост на разпространение на звука намалява и обратно.

Съществен интерес представлява също така и връзката между скоростта на газа и енталпията му. Като се вземе под внимание зависимостта  $i = \frac{k}{k-1} RT$ , енергийното уравнение на Бернули (4.48) може да се запише във вида

$$\frac{V^2}{2} + i = \text{const.} \quad (4.51)$$

Този израз показва, че сумата от кинетичната енергия и енталпията на газа по дължина на течението е постоянна величина. Следователно увеличаването на кинетичната енергия, респ. скоростта, става за сметка на намаляване на енталпията на газа и обратно.

Получените разновидности на енергийното уравнение се използват широко в едномерната газодинамика.

За несвиваемите флуиди механичната (флуидната) енергия, която вследствие на триенето се превръща във вътрешна (топлинна) енергия, практически не може отново да се превърне във флуидна енергия и се разглежда като загубена енергия. В такъв случай, приемайки  $E_v = 0$ , енергийното уравнение (4.46) става

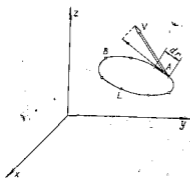
$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.},$$

което всъщност е уравнение на Бернули за установено течение на идеален несвиваем флуид.

#### 4.7. ТЕОРЕМА НА ТОМСЪН

Теоремата на Томсън е свързана с динамиката на вихрите в идеалните флуиди. Тя гласи: *циркулацията на скоростта по затворена флуидна линия не се изменя с времето, ако движението на идеален флуид е баротропно и се извършва под действието на масови сили, които имат еднозначен потенциал.* Движението се нарича баротропно, ако плътността на флуида във всяка точка на полето на течението зависи само от налягането, т. е.  $\rho = f(p)$ , а линиите, образувани винаги от един и същи флуид, се наричат флуидни линии. Очевидно е, че флуидните линии в течението не само ще се преместват заедно с флуидните частици, но ще изменят и формата си.

За доказателство на теоремата на Томсън се разглежда циркуляцията по дъгата  $AB$  на затворена флуидна линия (фиг. 4.5) която според уравн. (3.42) е



Фиг. 4.5

$$\Gamma = \int_A^B (u dx + v dy + w dz),$$

чиято производна по времето е

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_A^B \frac{d}{dt} (u dx + v dy + w dz) \quad (4.52)$$

След извършване на диференцирането на подинтегралния израз, като се държи сметка, че флуидната линия се движи заедно с частиците и се вземат под внимание изразите за проекциите на субстанциалното ускорение

$$\frac{d}{dt}(u dx) = \frac{du}{dt} dx + u \frac{d}{dt}(dx) = \frac{du}{dt} dx + u du,$$

по (4.27) се получава

$$\frac{d}{dt}(u dx) = \left( X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx + u du,$$

$$\frac{d}{dt}(v dy) = \left( Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dy + v dv,$$

и 
$$\frac{d}{dt}(w dz) = \left( Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dz + w dw.$$

По-нататък след съответно заместване на получените изрази в уравн. (4.52) то приема вида

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_A^B \left[ (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \right.$$

$$\left. + d\left(\frac{u^2}{2}\right) + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + d\left(\frac{w^2}{2}\right) \right] = \int_A^B \left[ -\Phi - \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) \right]$$

или 
$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left[ \frac{V^2}{2} - \frac{p}{\rho} - \Phi \right]_A^B. \quad (4.53)$$

Тъй като величините в скоби  $V$ ,  $p$  и  $\Phi$  са еднозначни функции на  $x$ ,  $y$  и  $z$ , ако интегрирането се извърши по цялата дължина на затворения флуиден контур, което означава точка  $B$  да съвпадне с т.  $A$ ; очевидно е, че

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0,$$

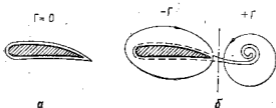
откъдето 
$$\Gamma = \text{const.} \quad (4.54)$$

От теоремата на Томсън следва, че в теченията, които са произлезли от покой и са непрекъснати, не може да има циркулация. Такива течения в съответствие с теоремата на Стокс са и остават безвихрови.

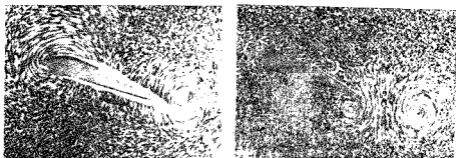
Понеже интензитетът на вихровите тръбички се определя от циркулацията на скоростта по контура, който ги обхваща, теоремата на Томсън дава основание да се смята, че интензитетът на вихровите тръбички не се изменя с времето, което е т. нар. трета теорема на Хелмхолц. Следователно в теченията на идеалните баротропни флуиди вихри не могат да възникнат и да изчезнат, както това е възможно при реалните флуиди, поради наличието на вискозитет и честото нарушаване на баротропността им (плътността освен от налягането зависи и от температурата, и др.).

Понякога при теченията на идеални флуиди, които се извършват в условията на масови сили, притежаващи потенциал, може също така да възникне циркулация. Това обаче е възможно само тогава, когато функциите на скоростта и налягането се прекъснат по дадена повърхнина, вследствие на което уравн. (4.54) приема стойност, равна на нула. Обикновено това се наблюдава при обтечени тела, при които съществуват условия за образуване на начален вихър. Като пример може да се разгледа течението около крилния профил по фиг. 4.6. Тъй като до започване на движението (фиг. 4.6 а) циркулацията около крилото е равна на нула, според теоремата на Томсън тя трябва и при движението на крилото да остане равна на нула. В действителност обаче летенето на самолета винаги е придружено с циркулация около крилото му (фиг. 4.6 б), която се наблюдава също така и при обтичането от флуид на лопатките на турбомашините и др. Това се дължи на обстоятелството, че частиците, които обтичат горната и долната контурна повърхнина на крилото (лопатките), се стичат в задния му ръб с различни скорости, което довежда до пресичане на съответните токови линии и следователно до образуване на т. нар. *разделителна повърхнина*, по

която функцията на скоростта се прекъсва. Последното е необходимо и достатъчно условие за появяване на начален вихър (фиг. 4.7 а, б), който се отнася от течението и има определена циркулация. Съгласно с теоремата на Томсън около крилото трябва



Фиг. 4.6



Фиг. 4.7 а б

ва да остане друг вихър, с циркулация, равна на циркулацията на началния вихър, но обратна по знак, така че тяхната сума да бъде равна на нула. Следователно по флуидната линия, която обхваща двете циркуляционни течения, циркулацията е нула и очевидно Томсъновата теорема е удовлетворена.

## V. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОСНОВНИТЕ УРАВНЕНИЯ НА МЕХАНИКАТА НА ФЛУИДИТЕ

### 5.1. ПРИЛОЖЕНИЕ НА БЕРНУЛИЕВОТО УРАВНЕНИЕ ЗА ТЕЧЕНИЕ В ТРЪБИ И КАНАЛИ

Под едномерно установено течение на идеален флуид се разбира такова течение, чито параметри могат да се изразят като функция на една единствена, вобщие криволинейна координата  $s$ .

Строго погледнато, едномерното разглеждане важи само за течения в елементарни токови тръбички с познато очертание, за които малките им напречни размери дават основание да се приеме, че параметрите на течението  $V$ ,  $p$ ,  $\rho$  и  $T$  са постоянни в границите на напречните им сечения и следователно зависят само от  $s$ -разгънатата дължина на централната токова линия в токовата нишка.

За разглеждания случай са на разположение уравнението на Бернули, уравнението за непрекъснатостта, а за свиваемите флуиди още уравненията за състоянието — на Клапейрон ( $p = \rho RT$ ) и адиабатата ( $p \rho^{-k} = \text{const}$ ). При решаването на системата от тези уравнения е достатъчно да се познават параметрите на течението в една единствена точка (при  $s = s_1$ ).

Едномерният модел се прилага и за течения с крайни размери. Явно е, че в такива случаи постоянството на параметрите не може да се запази, което налага използването на техни усреднени стойности по напречното сечение. Например при течение на реалните флуиди в тръби и канали поради свойството им полепваемост по стените и вътрешното триене се формира криволинеен скоростен профил с плавно изменение на скоростта от стойност нула при стената до максималната ѝ стойност във вътрешността на течението. В тези случаи се налага използването на средната по сечение (по дебит) скорост  $V_m = \frac{Q}{f}$ , където  $f$  е напречното сечение на тръбата или канала.

При приложението на уравнението на Бернули за течения в тръби и канали трябва да се съобрази обстоятелството, че кинетичната енергия, определена със средната по сечение скорост  $\left(\rho \frac{V_m^3}{2} f\right)$ , е малко занижена спрямо действителната кинетична енергия на течението  $\left(\int \frac{\rho V^3}{2} df\right)$ , което се коригира с т. нар. *коэффициент на Кориолис*  $\alpha$ , дефиниран с израза

$$\alpha = \frac{\int V^3 df}{V_m^3 f} \quad (5.1)$$

Тогава, като се вземе под внимание, че сумата на енергията на налягане и потенциалната енергия по напречните сечения с усреднени токови линии е постоянна величина, уравнението на Бернули може да се запише, както следва:

$$\alpha \frac{V_m^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} \quad (5.2)$$

Коефициентът на Кориолис обикновено зависи от степента на неравномерност на скоростния профил. За най-често срещаните в техниката турболентни течения  $\alpha=1,02\div 1,12$  и при неголеми изисквания за точност се приема  $\alpha=1$ .

За решаване на различни задачи в инженерната практика уравнението на Бернули се прилага за две сечения по дължина-та на течението, придружено с уравнението за непрекъснатостта:

$$\alpha_1 \frac{V_{m1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \alpha_2 \frac{V_{m2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2,$$

$$V_{m1} f_1 = V_{m2} f_2.$$

В повечето случаи е възможно първото сечение да се избере така, че в него да са известни параметрите  $V_{m1}$ ,  $p_1$  и  $z_1$ . Тогава при известна геодезична височина  $z_2$  остават неизвестни  $V_{m2}$  и  $p_2$ , като скоростта  $V_{m2}$  се определя от уравнението на непрекъснатостта. В други задачи и в двете сечения скоростта и налягането са непознати. В такива случаи разликата в налягането се измерва с помощта на течностни манометри, като от уравнението за непрекъснатостта се определя едната скорост във функция на другата, която впоследствие се пресмята от уравнението на Бернули, приложено за двете сечения.

Съгласно с уравнението на Бернули общата флуидна енергия по дължина на течението е постоянна величина, което е валидно за идеалните флуиди. За реалните флуиди обаче полепналите по стените флуидни частици въздействуват на плъзгащите се край тях флуидни частици с тангенциални напрежения (вследствие на вътрешното триене), от които резултира силата на съпротивлението, насочена срещу течението на флуида. За преодоляването на тази съпротивителна сила флуидът изразходва част от своята пълна (хидравлична) енергия  $H_s$ , J/kg или  $p_s$ , J/m<sup>3</sup>. Следователно пълната енергия намалява по дължина на течението и уравнението на Бернули, приложено за две сечения, има вида

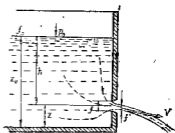
$$\alpha_1 \frac{V_{m1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \alpha_2 \frac{V_{m2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + H_{s1-2} \quad (5.3)$$

Следните няколко разглеждания върху по-важните практически случаи са илюстрация за използване на основните уравнения.

## 5.2. УСТАНОВЕНИ ТЕЧЕНИЯ НА НЕСВИВАЕМ ФЛУИД

Установено изтичане през малък отвор. Задачата е да се определят скоростта на изтичане и дебитът през отвор в стена на съд (фиг. 5.1). При изтичането на течност през отвора обик-

новено свободното ниво се понижава и следователно течението е неустановено. За да бъде течението установено, необходимо е височината  $z_0$  да остава постоянна. Това може да се постигне, като се долива течност с дебит, равен на изтичащия, или ако сечението на съда (резервоара)  $f_0$  е много по-голямо от сечението на отвора  $f$ , така че в сравнително не голям интервал от време да се смята  $z_0 = \text{const}$ .



Фиг. 5.1

Характерна особеност за течението са криволинейните токови линии в мястото на отвора и съответното му свиване, което на разстояние, приблизително равно на  $0,5 d$ , има най-тясно сечение  $f'$ , където токовите линии остават успоредни помежду си (фиг. 5.2). Причината за свиването на струята, наречено *напречна контракция*, се дължи на инерцията на флуидните частици, които се движат в близост до стената радиално към отвора и не могат да променят внезапно направлението на движението си. След най-тясното сечение струята започва да се разширява в резултат на размесването ѝ със заобикалящата я флуидна среда. Явлението напречна контракция се изразява с коефициента на свиване или с т. нар. *коефициент на напречна контракция*  $\epsilon = \frac{f'}{f} < 1$ . Той се определя опитно, като числените му стойности

зависят преди всичко от формата и местоположението на отвора, а също така и от критерия на Рейнолдс  $(Re = \frac{Vd}{\nu})$ , където  $V$  е скоростта на изтичане,  $d$  — диаметърът на отвора и  $\nu$  — кинематичният коефициент на вискозитета на течността. Например за кръгли отвороръбести или цилиндрични отвори с малка дебелина на стената (фиг. 5.2 а)  $\epsilon = 0,6 \div 0,64$ , докато при добре заоблен отвор по дъга от окръжност или лемниската (фиг. 5.2 б), подобен на дюза, които дава възможност за плавна промяна на направлението на токовите линии, коефициентът на напречна контракция се доближава до единица  $\epsilon \approx 1$ .

При изтичането всички токови линии започват от свободната повърхнина на течността в съда, за която височината  $z_0 = \text{const}$ , налягането  $p_0 \neq p_a$  и  $V_0 = 0$ . Очевидно е, че пълната специфична енергия по свободната повърхнина е постоянна величина, което определя еднаква константа на Бернулиевото уравнение за всички токови линии, т. е. безвихрово течение. Непосредствено след отвора налягането по напречното сечение е постоянно и равно на действащото по повърхнината на струята външно налягане  $p$  в случая, равно на атмосферното налягане. Тогава уравнението на Бернули може да се запише така

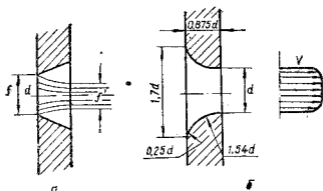
$$\frac{V_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_0 = \frac{V^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gz$$

или

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho} + 2gh}, \quad (5.4)$$

където  $h = z_0 - z$  и  $V_0 = 0$ .

Ако налягането по свободната повърхнина  $p_0$  е равно на атмосферното  $p_a$ ,



Фиг. 5.2

$$V = \sqrt{2gh}. \quad (5.5)$$

Получената зависимост е позната в хидродинамиката като уравнение на Торичели.

При установено изтичане на газове (свиваеми флуиди) с неголеми скорости ( $V < 100$  m/s), т. е. когато може да се приеме  $\rho = \text{const}$ , за които обикновено се пренебрегват масовите сили, от уравн. (5.4) за скоростта на изтичане се получава

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} p_n}, \quad (5.6)$$

където  $p_0$  е налягането в резервоара, който е закрит, а  $p_n$  — надналягането в него.

Вследствие на съпротивлението, което оказва вътрешното триене срещу движението на флуидните частици, скоростта на изтичане на реалните флуиди е по-малка от тази по (5.4). В случая за действителната скорост на изтичане се държи сметка чрез т. нар. *скоростен коефициент*  $\phi < 1$ , тъй че

$$V = \varphi \sqrt{\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho} + 2gh} \quad (5.7)$$

Коефициентът  $\varphi$  обикновено зависи от формата и големината на отвора, а също така и от критерия на Рейнолдс, особено когато  $Re < 10^5$ . Той се определя опитно, като числените му стойности са в границите  $\varphi = 0,84 \div 0,99$ .

Като се държи сметка за действителната скорост и за напречната контракция, дебитът на изтичащия флуид трябва да се изчислява по зависимостта:

$$Q = V f' = \varphi \epsilon f \sqrt{2gh} = \mu f \sqrt{2gh} \quad (5.8 \text{ а})$$

или при  $p_0 \neq p_a$

$$Q = \mu f \sqrt{\frac{2}{\rho} p_0 + 2gh} \quad (5.8 \text{ б})$$

а за газове

$$Q = \mu f \sqrt{\frac{2}{\rho} p_0} \quad (5.8 \text{ в})$$

където произведението  $\mu = \varphi \epsilon$  е т. нар. *коефициент на дебита*

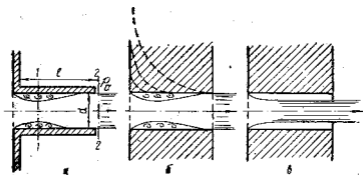
Като мярка за загубите на енергия при изтичане на флуиди през отвори се използва коефициентът на полезно действие на отвора, дефиниран с отношението

$$\eta = \frac{V^2}{2gh} = \varphi^2 \quad (5.9)$$

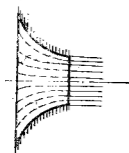
Установено изтичане през накрайници. Често за изпразване на съдове, напълнени с течност, се използват накрайници, които имат различно конструктивно оформяне. Пример за цилиндричен накрайник без закръгление на входящия му ръб е показан на фиг. 5.3. Изтичането през него може да стане по два начина. При накрайник с по-голяма дължина, примерно  $l = (3 \div 6)d$ , независимо, че в началото настъпва свиване на течението, изтичането става при напълно запълнено сечение, т. е.  $f' = f$  (фиг. 5.3 а), в резултат на което  $\epsilon = 1$ . При къси цилиндрични накрайници  $l < 1,5 d$  и особено при по-големи стойности на  $h$  или  $p_0$  след първоначалното си свиване струйното течение не може да се разшири и преминава през накрайника по същия начин както през отвор в стена (фиг. 5.3 б). Следователно дебитът на течението през първия накрайник е по-голям, тъй като има по-голям коефициент на дебит и по-голямо сечение на струята при изхода от накрайника.

Освен цилиндрични се използват също така и конфузор-

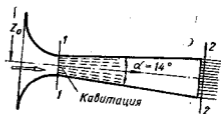
ни накрайници, оформени като дюзи (фиг. 5.4), за които  $\varepsilon = 1$ . Друга разновидност са дифузорните накрайници, които най-често представляват комбинация от дюза и дифузор (фиг. 5.5) Те имат също коефициент на напречна контракция  $\varepsilon =$



Фиг. 5.3



Фиг. 5.4



Фиг. 5.5

$= 1$ . В сравнение с дюзите обаче при еднакво най-малко сечение през дифузорния накрайник изтича по-голям дебит, тъй като при еднакви  $h$  и  $p_0$  скоростта при изхода от дифузора и дюзата е еднаква, докато изходящото сечение на дифузора е много по-голямо. За да не се получи откъсване на течението от стените, дифузорите се изпълняват с ъгъл на разширение, по-малък от  $14^\circ$ .

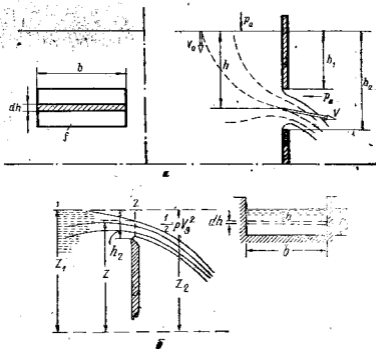
**Установено течение през големи отвори.** Определянето на дебита на течение през отвори във вертикални стени с по-големи размери (фиг. 5.6 а), които намират приложение особено в хидразликата, не може да се извърши по уравн. (5.8). В тези случаи скоростта в отделните точки по напречното сечение е променлива величина, която е всъответствие с уравнението на Торичели. Сега за определянето на дебита е целесъобразно отворът да се разложи на лицеви елементи във вид на хоризонтални ленти с дължина  $y$  и височина  $dh$ , както е показано в стра-

ничната проекция на фиг. (5.6 а) За дебита през един лъчев елемент може да се напише

$$dQ = \sqrt{2gh} \cdot y dh,$$

тъй че

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} y \sqrt{2gh} \cdot dh = \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} y h^{1/2} dh. \quad (5.10)$$



Фиг. 5.6 а, б

Интегралът е изчислим при зададено уравнение на контурната линия на отвора  $y(h)$ .

Уравнение (5.10) води лесно до резултати за отвори, при които  $y = \text{const} = b$  (например за правоъгълни отвори). Тогава се получава

$$Q = b \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} h^{1/2} dh = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} (h_2^{3/2} - h_1^{3/2}). \quad (5.11)$$

Очевидно и тук при пресмятането на действителния дебит трябва да се държи сметка за коефициента на дебита.

Ако горният ръб на отвора надвишава свободното ниво на

течността, се получава т. нар. *преливник* (фиг. 5.6 б). Обикновено преливниците са съоръжения на големи водохранилища, за които се смята, че нивото на свободната повърхнина не се изменя, като налягането по нея е атмосферното, а скоростта далеч от преливника е равна на нула

Дебитът през правоъгълен преливник се изчислява по уравн. (5.11), в което се полага  $h_1 = 0$ . Тогава при съобразяване на коефициента на дебита следва:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h_2^{3/2}. \quad (5.12)$$

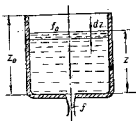
Коефициентът на дебита също така се определя опитно. За правоъгълен преливник с открита струя  $\mu = 0,6$ , откъдето за дебита се получава

$$Q = 3,33 b h_2^{3/2}. \quad (5.13)$$

В хидравличните лаборатории преливниците се използват като уреди за измерване на дебити. В тези случаи по опитен път се намира графичната зависимост  $Q = f(h_2)$ , което се нарича *тариране* на преливника. Тя служи по-нататък за определяне на дебита през преливника при отчитане на пиезометричната височина  $h_2$ .

### 5.3. НЕУСТАНОВЕНО ИЗТИЧАНЕ

Неустановеното изтичане на течности обикновено се наблюдава при изпразването на съдове, резервоари, басейни и др. Пример за такова течение представлява изтичането на течност от съд



Фиг. 5.7

през отвор в дъното му (фиг. 5.7). Очевидно разглежданото течение е неустановено, защото нивото на свободната му повърхнина се променя с времето, от което следва, че ще се променя и скоростта на изтичане. Нека  $z$  е променливата височина на свободната повърхнина (по която действа атмосферното налягане  $p_a$ ), мерена от дъното на съда. Предполага се, че за безкрайно малкия интервал от време  $dt$ , в който височината  $z$  се променя

$c_z dz$ , течението може да се смята за установено. През това време промяната на обема на течността в съда е  $\int_0 dz$ , която е равна на изтеклия през отвора обем флуид  $dQ dt$ , т. е.

$$-f_0 dz = dQ dt,$$

където

$$dQ = \mu V f = \mu f \sqrt{2gz}$$

и следователно

$$f_0 dz = -\mu f \sqrt{2gz} dt.$$

Знакът (—) се обуславя от обстоятелството, че на положителна промяна  $dt$  съответствува отрицателна промяна  $dz$ . Последният израз може да се запише, както следва:

$$dt = -\frac{f_0 dz}{\mu f \sqrt{2gz}}$$

или

$$dt = -\frac{f_0 dz}{\mu f \sqrt{2gz}}$$

След интегриране за времето на частично изпразване на съда (например от  $z_0$  до  $z_1$ ) се получава

$$t_{z_0-z} = -\frac{f_0}{\mu f \sqrt{2g}} \int_{z_0}^{z_1} z^{1/2} dz = \frac{2f_0}{\mu f \sqrt{2g}} (\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1}). \quad (5.14)$$

Времето за изпразване на съда следва от условието  $z_1 = 0$ , т. е.

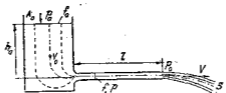
$$t = \frac{2f_0}{\mu f \sqrt{2g}} \sqrt{z_0} = \frac{2f_0 z_0}{\mu f \sqrt{2gz_0}}. \quad (5.15)$$

Тъй като  $\mu f \sqrt{2gz_0} = Q'$  е дебитът при установено изтичане при  $z_0 = \text{const}$ , за което времето на изтичане е  $t' = \frac{f_0 z_0}{Q'}$ , очевидно е, че времето на изпразване на съда при неустановеното течение е два пъти по-голямо от това на установеното, т. е.  $t = 2t'$ .

Друг пример за неустановено течение представлява изтичането на течността от съд по фиг. 5.8, което става през тръба с напречно сечение  $f \ll f_0$ , където  $f_0$  е лицето на свободната повърхнина на течността в съда. Тръбата е затворена в края си и след отварянето ѝ започва изтичането, чиято скорост  $V$  от нула в началния момент се увеличава асимптотично до скоростта на установеното течение. Предполага се, че през това време нивото

на течността в съда няма да се понижава забележимо, тъй че геометричната височина  $h_0$  може да се смята за постоянна.

Тогъва уравнението на Бернули за неустановено течение на несвиваем флуид (4.38), приложено за две точки от токова ли-



Фиг. 5.8

ния, първата от които по сечение  $f_0$ , където се приема  $V_0 = 0$  и втората по произволно напречно сечение  $f$  на хоризонталната тръба може да се запише

$$\frac{p_a}{\rho} + gh_0 = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \int_0^s \frac{\partial V}{\partial t} ds, \quad (5.16)$$

Ако тръбата има постоянно напречно сечение по цялата си дължина, скоростта  $V$  няма да зависи от координатата  $s$  и следователно

$$\int_0^s \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{dV}{dt} s,$$

като уравн. (5.16) приема вида

$$\frac{p_a}{\rho} + gh_0 = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + s \frac{dV}{dt}. \quad (5.17)$$

В случай че втората точка от токовата линия се вземе по сечението в края на тръбата, където  $s = l$ , и се приеме  $p = p_0 = p_a$ , от уравн. (5.17) се получава

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2l} (2gh_0 - V^2). \quad (5.18)$$

Съгласно с уравн. (5.18) в началния момент, когато  $V = 0$ , ускорението има най-голяма стойност:

$$\frac{dV}{dt} = g \frac{h_0}{l}.$$

докато при достигане на режима на установеното течение, т. е.

$V \rightarrow \sqrt{2gh_0}$ , ускорението приема стойност  $\frac{dV}{dt} = 0$ .

Интегралът на уравн. (5.18) дава израза

$$\frac{1}{\sqrt{2gh_0}} \operatorname{arcth} \frac{V}{\sqrt{2gh_0}} = \frac{t}{2l} \quad (5.19 \text{ а})$$

или 
$$V = \sqrt{2gh_0} \operatorname{th} \left( \frac{t \sqrt{2gh_0}}{2l} \right). \quad (5.19 \text{ б})$$

Тъй като доближаването на скоростта на изтичане до тази на установеното течение е асимптотично, следва, че тяхното изравняване ще стане след безкрайно дълго време. По уравн. (5.19 а) се пресмята лесно, че  $V_2 = 0,99 \sqrt{2gh_0}$  се достига за  $t = 5,3 \frac{l}{\sqrt{2gh_0}}$  където  $\operatorname{arcth} 0,99 = 2,65$ . Примерно за  $l = 160 \text{ m}$  и  $\sqrt{2gh_0} = 8 \text{ m/s}$   $t = 106 \text{ s}$ .

Съгласно с уравн. (5.17) за фиксирано време налягането  $p$  в хоризонталната тръба намалява линейно с  $s$  по дължината ѝ. С течение на времето  $V \rightarrow \sqrt{2gh_0}$ ,  $\frac{dV}{dt} \rightarrow 0$  и  $p = p_1$ .

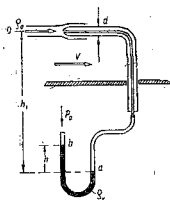
Ако при установено течение край на тръбата се затваря с шибер или клапан, течението става закъснително  $\frac{dV}{dt} < 0$  и от уравн. (5.17) следва, че налягането нараства по дължината на тръбата и има най-голяма стойност пред затварящия орган. Когато затварянето се извърши внезапно,  $\frac{dV}{dt} \rightarrow \infty$  и  $p \rightarrow \infty$ . Следователно в такъв случай, макар и за кратко време, могат да се получат неограничено големи нараствания на наляганията в тръбопровода. Това пояснява принципно механизма на т. нар. *хидравличен или воден удар*.

#### 5.4. ИЗМЕРВАНЕ НА НАЛЯГАНЕ И СКОРОСТИ ПРИ ТЕЧЕНИЯ НА НЕСВИВАЕМ ФЛУИД

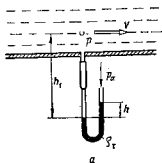
##### Измерване на налягане

За измерване на пълното налягане  $p_n$  достатъчно е да се пробие отвор в точката на заприщване на обтеченото тяло и действащото в него налягане да се отведе към манометър. На този принцип за пръв път френският учен Пито (1732 г.) създава

уред за измерване на пълното налягане, наречен по-късно *тръба на Пито* (фиг. 5.9). Тя представлява тръбичка с много малък диаметър, извита под прав ъгъл, единият край на която се насочва срещу течението, а другият посредством каучукова



Фиг. 5.9



Фиг. 5.10

тръба се свързва с манометър. Диаметърът на цилиндричната част на тръбата на Пито, която се поставя във флуидното течение, обикновено е от 2 до 5 mm, а диаметърът на отвора в точката на заприщване е 0,3 mm.

Според схемата на фиг. 5.10 пълното налягане се пресмята по израза

$$p_n = p_a + \rho_r gh - \rho gh, \quad (5.20)$$

където  $\rho$  и  $\rho_r$  е съответно плътността на флуида на течението и плътността на течността в манометъра.

За газове  $\rho \ll \rho_r$  в изразът приема вида

$$p_n = p_a + \rho_r gh. \quad (5.21)$$

В двата израза  $p_a$  е налягането, което действа от другата страна на манометъра (най-често атмосферното).

Измерването на налягането в близост до обтечени стени (в граничния слой) се извършва със специални миниатюрни тръби на Пито, наречени още *микросонди*. Обикновено те имат отвор с диаметър  $0,15 \div 0,3$  mm, като диаметърът на цилиндричната им част е  $d < 1$  mm.

При измерване на статичното налягане обикновено се срещат два случая: измерване на налягането по стените на канали и обтечени тела и измерване на налягането в произволни точки във

вътрешността на флуидното течение. В първия случай измерването се извършва посредством малък отвор в стената (фиг. 5.10 а), който се съединява с манометър. Диаметърът на отвора трябва да е по-малък от 3 mm, за да не се създават условия за деформиране на токовите линии в мястото на отвора (фиг. 5.10 б), което би нарушило точността на измерването. Отворите трябва да бъдат добре загладени от страна на течението и да няма издатини (стърчащи ръбове), които биха смутили течението.

Съгласно с фиг. 5.10 а статичното налягане се определя по израза

$$p_{ст} = p_a + \rho_r gh - \rho gh_1 \quad (5.22)$$

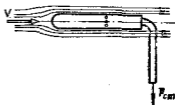
и при

$$\rho \ll \rho_r$$

$$p_{ст} = p_a + \rho_r gh. \quad (5.23)$$

Ако отворът в стената е разположен в участък, в който токовите линии са успоредни помежду си и на стената, през него може да се измерва статичното налягане и във вътрешността на течението, като на височината  $h_1$  се задават съответни стойности. При газовете вследствие на пренебрегване на гравитационните масови сили налягането по стената е равно на налягането по цялото напречно сечение.

За измерване на статичното налягане във вътрешността на течението най-често се използва сондата по фиг. 5.11, известна като *тръба на Пито—Прандтл*. Тя се състои от заоблен в началото си цилиндър и има по околната си повърхнина малки отвори (от 4 до 8 на брой) или тесен процеп, през който се отвежда измерваното налягане. Отворите се поставят на такова разстояние от началото (от 3 до 8 пъти диаметъра  $\bar{d}$ ), където предизвиканото от обтичането на челната част на цилиндъра закривяване на токовите линии е изчезнало и те са станали практически успоредни прави. Тогава в отворите действа статичното налягане. Оста на сондата трябва да се нагласява по посока на течението (отклонения до около  $5^\circ$  не водят до значителни грешки).



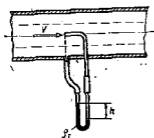
Фиг. 5.11

При измерването на статичното налягане в течения с високи подзвукови скорости се използват сонди с конусна носова част, които имат различно конструктивно изпълнение.

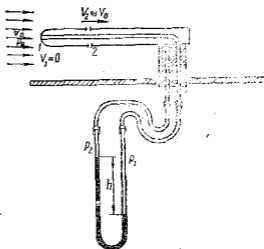
## Измерване на скорости

От израза за динамичното налягане  $p_d = \rho \frac{V^2}{2} = p_n - p_{ст}$  следва зависимостта

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_{ст})} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot p_d} \quad (5.24)$$



Фиг. 5.12



Фиг. 5.13

според която за определяне на скоростта е необходимо да се измери разликата между пълното и статичното налягане. Пълното налягане може например да се измери с тръба на Пито, а статичното — с отвор в стената на тръбопровода, съответно свързани с манометър (фиг. 5.12), който в случая ще измерва разликата между двете налягания:

$$p_d = p_n - p_{ст} = (\rho_T - \rho) gh$$

или при

$$\rho \ll \rho_T$$

$$p_d = \rho_T gh.$$

Оттук за скоростта се получава

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\rho_T - \rho) gh}, \text{ респ. } V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \rho_T gh}. \quad (5.25)$$

Освен по разгледния начин скоростта се измерва с *тръбата на Прандтл*, която представлява съчетание от тръбата на Пито и тръбата за статичното налягане Пито—Прандтл (фиг. 5.13). Свързаният към нея диференциален манометър отчита направо разликата между пълното и статичното налягане, като скоростта се определя по уравн. (5.24) и (5.25).

Тъй като налягането и температурата на околната среда оказват влияние върху показанията на скоростомерната тръба, плътността  $\rho$  трябва да се вземе при съответните стойности на тези параметри.

Прандтловага тръба се употребява както за измерване на скоростта на теченията, така и за измерване на скоростта на движещите се във флуид тела, например самолети, кораби и др., към които тя е закрепена и насочена по посока на скоростта им.

**Термоанемометри.** Описаният метод за определяне на скоростта чрез измерване на динамичното налягане не е подходящ за използване в неустановени бързопроменливи течения. В такива случаи се прилага т. нар. *термоанемометричен метод*. Принципно той се основава на обстоятелството, че ако тънка метална нишка, нагрявана от електрически ток, е поставена във флуидно течение, очевидно е с увеличаване на скоростта температурата на нишката да намалява, а съответно и съпротивлението ѝ. Следователно големината на скоростта на течението може да се приведе в измерима електрическа величина (електрическо съпротивление или големина на тока). Връзката между големината на тока, съпротивлението на нишката, респ. температурата  $\theta$ , и скоростта на флуида, който я обтича, се дава от полуемпиричната зависимост

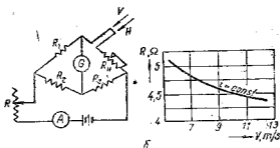
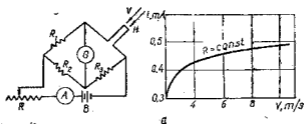
$$i^2 R = (T - T_0) (c + b \sqrt{V}), \quad (5.26)$$

в която  $b$  е константа, определяща физичните свойства на нишката, а  $c$  — константа, която дава мащабността на тока през нишката при температурна разлика  $1^\circ\text{C}$  и нулева скорост на течението ( $V=0$ ).

От уравн. (5.26) следва, че при  $R = \text{const}$  се получава  $i = f(V)$ , а при  $i = \text{const}$   $R = f(V)$ . Следователно могат да се осъществят две схеми, по които работят термоанемометрите: с постоянно съпротивление и с променлива големина на тока.

Основната част на електрическата схема на термоанемометри (фиг. 5.14 а, б) представлява Уинстънов мост, който се захранва от постояннотоков източник. Към него е включена тънка метална нишка със съпротивление  $R_n$ , обикновено платинена, никелова или волфрамова, с диаметър  $d = 0,005 \div 0,15$  mm и дължина  $l = 3 \div 6$  mm, опъната и закрепена в краищата на метална вилка. Съпротивлението на моста  $R$  служи за промяна на големината на тока  $i$ , която се отчита от амперметъра  $A$ . При флуид в покой

мостът се изравнява чрез довеждане на галванометъра  $G$  до нулево показание посредством променливото съпротивление  $R_4$ . Поставена в течение, нишката се охлажда, намалява електричeskото си съпротивление и изравняването на моста се нарушава.



Фиг. 5.14 а б

В случая отклонението на галванометъра, респ. големината на съпротивлението, е мярка за скоростта, т. е.  $R=f(V)$ ; при  $i=\text{const}$  — термоанемометър с постоянна големина на тока (фиг. 5.14 б). Този метод на измерване се използва предимно за малки скорости  $V < 5 \div 6 \text{ m/s}$ . По-голям обseg на измерване може да се получи, ако чрез съпротивлението  $R_4$  се увеличи големината на тока през моста и се възстанови първоначалната температура, респ. съпротивлението  $R_4$  на нишката, и галванометърът се доведе отново до нулево показание. Тогава като мярка за скоростта служи големината на тока, т. е.  $i=f(V)$ ; при  $R_3=\text{const}$  — термоанемометър с постоянно съпротивление (фиг. 5.14 а)

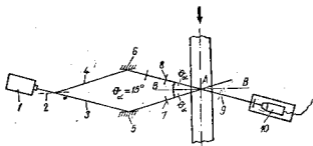
Термоанемометрите са много чувствителни уреди, създадени за измерване на скорости в голям диапазон. Те са намерили голямо приложение, като са изработени с компенсация на топлинната енергия на акумулирания ток на нишката. Тогава те стават практически безинертни в определена област на честотата на трептене на измерваното течение, поради което се оказват годни за измерване на турбулентността на теченията.

Освен за измерване на големината на скоростта са познати и

термоанемометри за измерване и на нейното направление. Обикновено те са равнинни с две нишки, разположени в една равнина под ъгъл от 8 до 19°, и пространствени, състоящи се от три нишки, съединени в единия им край, които не са разглеждани, тъй като са обект на специални ръководства по експериментална хидроаеродинамика.

**Лазер-Доплеров анемометър.** В експерименталната хидроаеродинамика са познати и други методи за измерване на скоростта във флуидните течения: оптични, акустични, кинематични и др. В последно време бързо се развива и усъвършенствува Лазер-Доплеровият метод за измерване на скорости, при който се използва разсейването на светлината. Неговото приложение става възможно след откриване на принципа за *усилване на светлината с помощта на принудително излъчване*, т. е. лазерния източник на светлина, който работи с честота от  $10^4$  до  $10^{16}$  Hz, и ефекта на Доплер\*.

Лазер-Доплеровият анемометър фактически измерва скоростта на микроскопичните твърди частици, намиращи се във флуидното течение. Неговият принцип на работа се основава на измерване на Доплеровото отместване на честотата на разсеяните от движещите се твърди частици светлинни вълни, което е пропорционално на скоростта на движение на частиците, респ. на флуида. Същ-



Фиг. 5.15

ността на метода се състои в това, че лазерният сноп се фокусира в зададена точка вътре в течението, като разсеяната от твърдите частици светлина се събира и направлява към съответен приемник, който след обработване на изходния сигнал определя големината на Доплеровото отместване на флуидното течение.

На фиг. 5.15 е показана схема на оптичната система на Лазер-Доплеровия анемометър. Лъчът на лазера 1 попада на полупроз-

\* Ефектът на Доплер се състои в това, че броят на механичните вълни, които достигат до наблюдателя за единица време, се различава от броя на вълните, които излъчва източникът, ако той или наблюдателят се движи относително средата, в която се разпространяват вълните.

рачната пластина 2, където се получава разделянето му на основен и опорен лъч. Основният лъч 3 се отразява от огледалото 5 и посредством лещата 7 се фокусира във флуидното течение, примерно в точка А, като част от попадащата светлина се разсейва в направление на фотоумножителя 9, при което вследствие на Доплеровия ефект настъпва отместване на честотата на разсеяните вълни.

Опорният лъч 4 се отразява от огледалото 6 и с помощта на лещата 8 се фокусира също в точка А на флуидното течение. Той попада във фотоумножителя 10, преминавайки през двете апретурни бленди (диафрагми) 9, които ограничават обема и ъгловото направление на полето на наблюдение на фотоумножителя. Двата лъча — основен и опорен, попадайки на фотокатода, създават трептения с честота, равна на доплеровото отместване, което е пропорционално на осовата компонента на скоростта в измерваната точка, като изходният сигнал се анализира с помощта на дискриминатор. За удобство двата лъча са насочени симетрично спрямо равнината В—В, която е перпендикулярна на оста на тръбопровода, респ. флуидното течение.

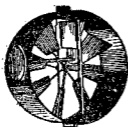
Предимствата на Лазер-Доплеровия анемометър се изразяват главно в следното: не се внасят никакви смущения във флуидното течение; има висока пространствена разделителна способност, малка инертност и сравнително голяма точност на измерване. С него могат да се провеждат измервания и в агресивни течности, в течение с висока температура, а също в многофазни и многокомпонентни флуидни среди, където термоанемометрите не могат да се използват. Поради голямата си чувствителност тези анемометри притежават голямо бързодействие, което ги прави удобни за измерване на моментните стойности на скоростта при неустановените течения. Диапазонът на измерваните скорости с Лазер-Доплеровия анемометър е от няколко cm/s до неколкостотин m/s.

Известен недостатък на Лазер-Доплеровия анемометър е това, че за измерване на скорости във флуидното течение трябва да се намират микроскопични твърди частици, които разсейват светлината. Обикновено флуидите, срещани в инженерната практика, съдържат достатъчно голям брой та-и-ва разсейващи частици, което гарантира измерването на скоростта с Лазер-Доплеровия анемометър. В случаите, когато флуидната среда не съдържа разсейващи частици, е необходимо да се внесат такива по изкуствен начин.

**Анемометри.** Много често, в метеорологията, промишлената аеродинамика, климатичната и вентилационната техника за измерване на скоростта на въздушни течения се използват т. нар. *анемометри*. Те имат сравнително просто устройство — едно лопатъчно колело, състоящо се от няколко радиално разположени

лопатки, закрепени на обща ос, и регистриращо устройство, свързано с оста посредством механична предавка.

В зависимост от формата на лопатките те биват крилчати (фиг. 5.16) и чашкообразни (фиг. 5.17). И при двата вида



Фиг. 5.16



Фиг. 5.17

анемометри въртелното движение се предава на регистриращо устройство, посредством което се отчита скоростта. Познати са специални конструкции крилчати анемометри за измерване на много малки скорости около  $V=0,02 \div 0,5$  m/s.

В последно време за измерване на скорости на флуидни течения се използват специални конструкции анемометри с много малки размери на лопатъчното колело и електронна обработка и регистриране на скоростта. Те са много чувствителни уреди, като електронното устройство дава възможност за отчитане както на моментната стойност на скоростта  $V$ , така също и на средната по време скорост  $\bar{V}$ . Познати са различни конструктивни изпълнения на тези анемометри с възможност за измерване на скорости в диапазона  $V=0 \div 40$  m/s. Тъй като те са предназначени главно за целите на климатичната и вентилационната техника, обикновено са комбинирани и с уред за измерване на температурата.

## 5.5. ИЗМЕРВАНЕ НА ДЕБИТИ

Определянето на дебита на флуидните течения се извършва по зависимостта

$$Q = V_m f, \quad (5.27)$$

където  $f$  е лицето на напречното сечение на флуидното течение, а  $V_m$  — средната скорост. За кръгло сечение:

$$V_m = \frac{1}{f} \int V df = \frac{2}{R^2} \int V r dr. \quad (5.28)$$

В съответствие с последния израз задачата за определяне на средната по сечение скорост се свежда до решаване на интеграла по аналитичен път, ако е позната зависимостта

$$V = f(r),$$

или чрез графичното интегриране, ако по опитен път е намерено разпределението на скоростта по напречното сечение на флуидното течение. Например за течение в цилиндрична тръба измерването на скоростта се извършва в отделни точки по диаметъра и се очертава скоростният профил  $V = f(d)$  (фиг. 5.18).

В практиката обикновено интегралът в (5.28) се определя по графичен път, като по абсцисната ос се нанасят стойностите на  $r$ , а по ординатата стойностите на произведението  $Vr$ , които се отчитат от скоростния профил.

Освен по описания начин, който е свързан с неудобството да се работи с плузиметър, средната скорост може да се определи по следния начин: сечението на тръбата се разделя на  $n$  равни по площ пръстеновидни сечения. В средата на всяко сечение (фиг. 5.19) от очертания скоростен профил се определя съответната скорост  $V_i$ , която се счита за постоянна по сечението на пръстена, откъдето за средната скорост може да се използва изразът

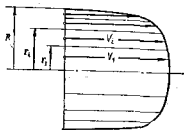
$$V_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i. \quad (5.29)$$

За фиксиране на разните по площ пръстеновидни сечения се използва формулата

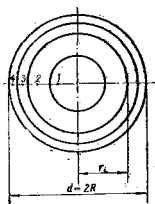
$$r_i = R \sqrt{\frac{i}{n}}, \quad (5.30)$$

където  $n$  е броят на сеченията,  $i$  — номерът на сеченията, считан от центъра на тръбата;  $r_i$  — външният радиус на пръстеновидното сечение и  $R$  — радиусът на тръбата.

При канали или въздухопроводи с произволно напречно сечение



Фиг. 5.18

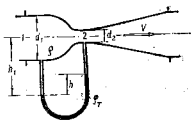


Фиг. 5.19

то се разделя на  $n$  броя равни по площ елементарни сечения и скоростта се определя по уравни. (5.29).

**Дебитомери.** Дебитомерите са уреди за директно измерване на средната скорост, а следователно и на дебита на теченията в тръби и канали. Техният принцип на действие се основава на създаване на разлика в налягането в сравнително къс участък по дължината на течението за сметка на стесняване на сечението му. От тази разлика с помощта на Бернулиевото уравнение и уравнението за непрекъснатостта се определя средната по сечение скорост, респ. дебитът.

Един от най-разпространените дебитомери е *тръбата на Вентури* (фиг. 5.20). Обикновено тя се вгражда в прав цилиндричен участък, на тръбопровода с напречно сечение  $f_1$ , стеснява се плавно по посока на течението до  $f_2$ , където има къс цилиндричен участък, след което се разширява конусно до  $f_1$ . Стесняването на сечението довежда до ускоряване на течението и съответно намаляване на налягането, като в най-тесното сечение скоростта е най-голяма, а налягането — най-малко. От уравнението на Бернули, приложено за напречните сечения 1-1 и 2-2, и уравнението за непрекъснатостта



Фиг. 5.20

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + p_2 \text{ и } V_1 f_1 = V_2 f_2,$$

за средната скорост в сечение 2—2 се получава

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}, \quad (5.31)$$

а за дебита

$$Q = \frac{f_2}{\sqrt{1 - (f_2/f_1)^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (5.32)$$

Като се държи сметка за влиянието на вътрешното триене чрез скоростния коефициент  $\varphi$  и за напречната контракция чрез коефициента  $\varepsilon$  за действителния дебит, се получава

$$Q = \frac{\varphi \varepsilon \pi d_2^2}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

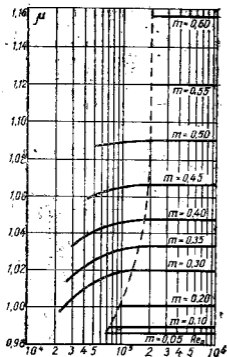
или

$$Q = 1,105 \mu d_2^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}, \quad (5.33)$$

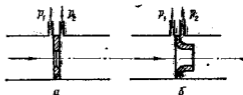
където  $\frac{\pi \sqrt{2}}{4} = 1,105$ ;  $\mu = \frac{\varphi \varepsilon}{1 - m^2}$  се нарича *коефициент на дебита*, който обединява коефициентите  $\varphi$ ,  $\varepsilon$  и отношението на напречното сечение  $m = \frac{f_2}{f_1}$ . Той се определя по опитен път чрез еталониране, като числените му стойности зависят от Рейнолдсовото число ( $Re = \frac{V d_1}{\nu}$ ,  $d_1$  — диаметър на тръбопровода) и отношението  $m = \frac{f_2}{f_1}$  (фиг. 5.21).

На същия принцип са изградени диафрагмата (блендата) и дюзата (фиг. 5.22), които са намерили широко приложение поради сравнително по-простата им конструкция. Независимо от това, че течението през тях е съпроводено с по-големи енергийни загуби, особено при блендата, дебитът се пресмята също така по уравн. (5.33), като коефициентът на дебита  $\mu$  се различава от този на Вентуриевата тръба. И за двата уреда той също се определя опитно чрез еталониране, като по аналогия на фиг. 5.21 се дава зависимостта  $\mu = f(Re, m)$  съответно за дюза и бленда.

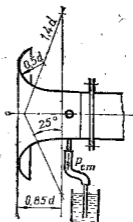
Тъй като различните тръбопроводни елементи — шибъри, колена, внезапни разширения и стеснения и др., внасят смущения във флуидното течение, за да се създават условия за несмутено течение в мястото на дебитомера правият участък преди него трябва да бъде с дължина  $l_1 \geq 10 d$ , а след него  $l_2 \geq 5 d$ .



Фиг. 5.21

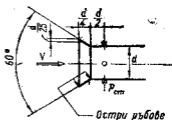


Фиг. 5.22



Фиг. 5.23

Много често, особено във вентилационната техника, за измерване на дебити се използват смукателни дюзи, монтирани в началото на смукателния тръбопровод, които едновременно играят ролята и на обтекател (фиг. 5.23), оформени по дъга от окръжност или лемниската. Тук се измерва разликата между атмосферното и статичното налягане в цилиндричния участък, разположен непосредствено след дюзата. Това може да се извърши с микроманометър или ако няма такъв, с помощта на стъклена тръбичка, потопена в съд с вода, както е показано на фиг. 5.23. Тъй като  $f_1 \rightarrow \infty$  и следователно  $m=0$  и



Фиг. 5.24

$\mu = \varphi$  (за случая съгласно т. 4.5  $\varphi = 0,98$ ), уравн. (5.33) приема вида

$$Q = 1,08 d^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}, \quad (5.34)$$

където  $d$  е диаметърът на цилиндричния участък на дюзата, респ. на диаметъра на смукателния тръбопровод.

Поради сравнително простата им конструкция в практиката са намерили приложение дюзите по фиг. 5.24. Сега за пресмятане на дебита се използва също (5.33), като стойностите на коефициента  $\mu$  се отчитат от съответни графики или таблици. На същата фигура са дадени стандартните размери на този вид дюза а в табл. 5.1 е дадена зависимостта на  $\mu$  от  $Re$ .

Таблица 5

$Re$	20000	40000	60000	100000	200000	300000	400000
$\mu$	0,93	0,94	0,945	0,953	0,967	0,973	0,975

## 5.6. КАВИТАЦИЯ

От уравнението на Бернули, записано във вида

$$p = \text{const} - \frac{\rho V^2}{2} - \rho g z,$$

вижда се, че при локално увеличаване на скоростта или на геодезичната височина в теченията през канали или около тела статичното налягане може да се намали до или под т. нар. *налягане на насищане*  $p_v$ , при което течността започва да се изпарява интензивно да кипи. Така например водата започва да кипи при  $20^\circ\text{C}$ , ако налягането в нея е  $p = p_v = 2500$  Па. Парните мехурчета при кипенето се образуват непрекъснато в областта с минимално налягане, отнасят се от течението и като достигнат областта с повишено налягане, изчезват поради кондензацията на парата в тях.

Кипенето на течността при налягането на насищане, получено в резултат на нарастването на скоростта и образуването във флуидното течение на области, запълнени с газове и пари, се нарича *кавитация*.

Обикновено началният стадий на кавитацията, т. нар. *газова*

кавитация, започва при налягания, по-високи от налягането на насищане, с отделянето на кавитационни мехурчета (зародиши), които представляват микроскопични газове (най-често въздушни) мехурчета във вътрешността на течността или повърхнината на обтечените стени. Разбира се, при обезвъздушени течности, т. е. при намален брой зародиши, кавитацията започва при налягания, по-малки от налягането на насищане. При намаляване на налягането малките мехурчета се обединяват и в течението се появяват области, т. нар. *каверни*, запълнени с газове и пари, отделени от течността, като при налягането на насищане този процес е най-силно изразен. Кавитацията се ускорява и от наличието на вихри, в чиито центрове наляганията могат да бъдат значително по-малки от тези на заобикалящата ги течност, както е случаят при корабните витла.

Парите и мехурчетата се образуват непрекъснато в областта до минималното налягане и ако по-нататък следва разширение на канала (фиг. 5.25), основната флуидна маса в този участък се движи във вид на свободна струя, заобиколена от пенообразна смес на пари, газове мехурчета и течност, като на известно разстояние каверната се затваря по стените и течението на течността запълва цялото напречно сечение на канала. Затварянето на каверната и изтичането по-нататък на пенообразната смес се дължи на нарасналото налягане  $p > p_0$  и следователно на изчезване на условията за кипене (настъпва кондензиране на парата и изчезване на мехурчетата).

Кавитацията може да се появи при минималните напречни сечения на теченията при обтичане на различни тела и крилни профили; в лопатъчните кола на хидравличните турбомашини, в хидравличните системи на самолетите, когато летят на големи



Фиг. 5.25

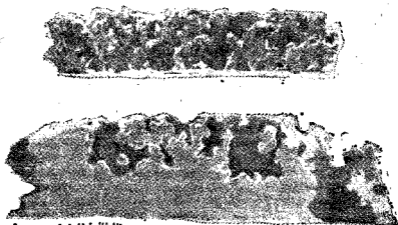
височини, и др. Тя е присъща за всички течности, включително и разтопените метали. Последното понякога се наблюдава при използване на течни метали в качеството на топлоносители при ядрените електроцентрали.

Като мярка за определяне на кавитационните свойства на крилни профили, обтечени тела или на течения в тръби и канали с променливо напречно сечение се използва т. нар. *кавитационно число*

$$k = \frac{2(\rho_0 - \bar{p}_v)}{\rho V_0^2}, \quad (5.35)$$

където  $\rho_0$  и  $V_0$  са налягането и скоростта в несмутеното течение далеч преди обтеченото тяло или в цилиндричния участък на тръбопровода.

В края на кавитационната област, където каверната се затваря, поради нарасналото налягане спрямо  $p_v$  кавитационните мехурчета започват да се свиват. Тогава парата в мехурчетата намалява бързо обема си и течността със значителна скорост нахлува концентрично в освободеното пространство, което обикновено е съпроводено с голямо нарастване на местното налягане (например до неколкостотин атмосферни). В резултат на това започва разрушаване на повърхнината на стените, т. е. явлението *кавитационна ерозия*. При по-продължително действие кавитацията може да разруши обтечените тела или каналните стени. Такива последици се срещат при корабни витла и при хидравлични турбомашини. За ерозията на стените в голяма степен допринася химичното въздействие на богатия с кислород въздух, съдържащ се



Фиг. 5.26 а, б.

във водата, а според някои автори и електрическото поле, което възниква в каверните. На фиг. 5.26 е показана повърхнина и разрез през лопатка на корабно витло, разядено от кавитация.

Обикновено кавитацията и по-специално свиването на мехурче-

тата е придружено с шум, наречен кавитационен, който понякога е толкова голям, че може да стане причина за вибрациите на отделните елементи на машините, които ги довеждат до неустойчива работа дори и до разрушаване. Едновременно с това кавитацията предизвиква увеличаване на съпротивлението, т. е. загуби на флуидна енергия на течението. Тъй като всички тези вредни действия са нежелателни в практиката, една от главните задачи при проектиране на хидравлични уреди и съоръжения е да не се допуска в тях явлението кавитация. За тази цел може да се въздействува в две направления: при предварително зададени параметри на несмутеното течение  $p_0$  и  $V_0$  трябва уредбата да се проектира така, че в най-тесното ѝ сечение да не се допуска достигане на максималната скорост, която довежда до статично налягане, равно на налягането на насищане, т. е. да се спазва условието винаги  $p_{\min} > p_v$ . При фиксирана стойност обаче на най-малкото сечение на течението трябва да се увеличи кавитационното число, което се постига с увеличаване на  $p_0$ , като се намалява геодезичната височина (например поставяне на кавитиращия елемент по-дълбоко в течността или намаляване на т. нар. смукателна височина на хидравличните машини) или чрез намаляване на скоростта  $V_0$ .

Понякога, особено при обтечени тела, областта на кавитацията (каверната) не се затваря на повърхнината им, а продължава и след тях. Това е т. нар. *суперкавитация*, при която не се наблюдава кавитационна ерозия по обтечените повърхнини. Поради това в последно време суперкавитационните витла намират успешно приложение в бързоходните кораби. Достигнати са също така значителни успехи при реализирането на суперкавитационни компени колела.

## 57. УСТАНОВЕНИ ЕДНОМЕРНИ ИЗОЕНТРОПНИ ГАЗОВИ ТЕЧЕНИЯ

**Скорост на изтичане.** При установено изоентропно изтичане на свиваем флуид (газ) от резервоар през къс тръбопровод с променливо напречно сечение (фиг. 5.27) връзката между основните параметри на течението; скорост, плътност, налягане, температура, енталпия, а също така и скорост на разпространение на звука във флуидната среда, се дава от енергийните уравнения. Ако например параметрите на газа в резервоара, респ. сечението  $O-O_1$ , са  $V_0=0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$  и  $i_0$ , които обикновено са предварително зададени, а параметрите в изходното сечение  $I-I$  са съответно  $V$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  и  $i$ , уравнението на Бернули (4.49), приложено за две точки на токовата линия по тези сечения, може да се запише във вида

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

откъдето за скоростта на изтичане се получава

$$V = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)}.$$

Като се вземе под внимание, че процесът е адиабатен, т. е.

$$\frac{p_0}{\rho} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}}, \text{ следва}$$

$$V = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (5.36)$$

Максималната стойност на скоростта се получава, когато газът изтича в абсолютен вакуум ( $p=0$  и  $T=0$ )

Фиг. 5.27

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} \quad (5.37a)$$

или

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2a_0^2}{k-1}} = \sqrt{2i}, \quad (5.37b)$$

където  $a_0^2 = k \frac{p_0}{\rho_0}$  е местната звукова скорост на газа в резервоара.

Получените уравнения показват, че максималната скорост съответствува на случая, когато цялата вътрешна енергия ще премине в кинетична. Скорости, близки до максималната, могат да се получат при изтичане на газовете от дюзите на ракетата, летяща в космическото пространство.

Параметри на течението в точката на заприщване. От енергийното уравнение (4.49) се вижда, че температурата ще получи максималната възможна за зададените конкретни първоначални параметри стойност в мястото, където скоростта е  $V=0$ , което се наблюдава в точката на заприщване А (фиг. 5.27). От (4.49) следва

$$\frac{k}{k-1} RT_0 = \frac{k}{k-1} RT + \frac{V^2}{2},$$

откъдето

$$T_0 = T + \frac{k-1}{kR} \frac{V^2}{2}. \quad (5.38)$$

Нарастването на температурата  $\Delta T$  е

$$\Delta T = T_0 - T = \frac{k-1}{kR} \frac{V^2}{2}, \quad (5.39 \text{ а})$$

което за въздух при  $k=1,4$  е

$$\Delta T = \frac{V^2}{2000}. \quad (5.39 \text{ б})$$

Съществено е, че повишаването на температурата не се наблюдава само в точката на заприщване. В непосредствена близост до обтечената повърхнина при реалните флуиди се образува т. нар. *граничен слой*, в който скоростта на течението намалява от скоростта на външното течение до нула при стената поради полепваемостта на флуида по стената. Тъй като в граничния слой скоростта на флуидните частици е малка, особено на тези, които се движат в близост до обтечената стена, следва, че температурата в граничния слой е близка до  $T_0$ . Тогава цялото тяло се оказва обгърнато от загрят флуиден слой, който предизвиква общо повишаване на температурата на стената му. При големи скорости, каквито в съвременната техника се срещат (при движение на ракети, скоростни самолети и някои турбомашини), динамичното загряване може да нарасне толкова, че да предизвика сериозни затруднения при подбирането на подходящи топлоустойчиви материали, а в някои случаи да предизвиква дори изгаряне. При малки скорости този ефект е незначителен и въобще не се отчита.

Ако е известна скоростта на течението и се съобрази, че  $kRT = a^2$  и  $\frac{V}{a} = \text{Ma}$  (число на Мах), от уравн. (5.38) сле два

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 = \frac{i_0}{i}.$$

За останалите параметри при изоентропен процес

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p}{p_0} \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (5.40)$$

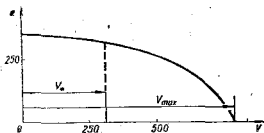
Очевидно е, че нарастването на скоростта на течението е съпроводено с намаляване на налягането, плътността, температурата и енталпията на газа.

**Местна звукова и критична скорост.** При изоентропните течения нарастването на кинетичната енергия може да се получи само при намаляване на енталпията на газа, поради което увеличаването на скоростта е свързано с понижаване на температурата. Но тъй като при това налягането намалява по-интензивно в сравнение с температурата, плътността на газа се понижава с нарастването на скоростта. Изложеното е валидно също така и за адиабатните течения на газовете. Това от своя страна показва, че при изоентропните или адиабатните газови течения с увеличаване на скоростта настъпва разширяване на газа и съответно намаляване на местната звукова скорост. Зависимостта на скоростта на звука от скоростта на течението следва от енергийното уравнение (4.50) и уравн. (5.37 б), т. е.

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \text{const} = \frac{V_{\max}^2}{2} \quad (5.41 \text{ а})$$

или 
$$a = \sqrt{\frac{k-1}{2} (V_{\max}^2 - V^2)}. \quad (5.41 \text{ б})$$

Съгласно с получената зависимост местната звукова скорост на течението намалява с увеличаване на скоростта му и обратно.



Фиг. 5.28

На фиг. 5.28 е показана зависимостта  $a = f(V)$ , построена по уравн. (5.41) за някаква определена стойност на  $V_{\max}$  респ. на температурата в резервоара. Скоростта на звука приема стойност нула при изтичане във вакуум, тъй като звукът не може да се разпространява в празно пространство.

В зависимост от големината на скоростта на течението спрямо местната звукова скорост теченията биват подзвукови и надзвукови, наричани още *свръхзвукови*. Ако например по дължина на някаква токова нишка или канал с променливо напречно сечение съществуват условия за увеличаване на скоростта на течението от нула до  $V_{\max}$ , в съответствие с енергийното уравнение (4.50) звуковата скорост ще намалява от  $a_0$  до нула, тъй като при  $V=V_{\max}$ ,  $T=0$ . Явно е, че по дължината на токовата тръбичка (канала) съществува такова сечение, в което скоростта на течението и местната звукова скорост са равни. Това сечение се нарича *критично сечение*  $f_*$ , а скоростта в него — *критична скорост*  $V_*$ . Параметрите на газа в критичното сечение се наричат критични параметри (записани с индекс звездичка).

Ако в уравн. (5.41) се приеме  $V_* = a_*$ , за критичната звукова скорост се получава

$$a_* = V_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \quad (5.42)$$

ли като се вземе под внимание уравн. (5.37),

$$a_* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} a_0 \quad (5.43)$$

За въздух при  $k=1,4$  и  $R=287 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  за критичната скорост се получава

$$a_* = 18,3 \sqrt{T_0} = 0,913 a_0 \quad (5.44)$$

Като се използват условията за адиабатния процес, за останалите критични параметри следват изразите:

$$\begin{aligned} \frac{p_*}{p_0} &= \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \frac{\rho_*}{\rho_0} &= \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \frac{T_*}{T_0} &= \frac{2}{k+1}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

които за въздух са съответно  $\frac{T_*}{T_0} = 0,831$ ,  $\frac{p_*}{p_0} = 0,528$  и  $\frac{\rho_*}{\rho_0} = 0,636$ .

При адиабатните течения местната звукова скорост може да бъде достигната само в най-тесното сечение на тръбата (канала), а при изтичане от конични (конфузорни) накрайници, само в крайното им сечение.

Често в газодинамиката наред с числото на Мах се използват и безразмерните числа  $\lambda$  и  $\tau$ , наречени съответно *скоростен коефициент* и *число на Чаплигин*.

Скоростният коефициент се дефинира с отношението

$$\lambda = \frac{V}{a_*} \quad (5.46)$$

Той показва степента на приближаване на местната скорост на течението на газа към местната критична скорост. Очевидно е, че при  $Ma < 1$  и  $\lambda < 1$  течението е подзвуково, при  $Ma > 1$  и  $\lambda > 1$  течението е надзвуково, а при  $Ma = \lambda = 1$  течението е звуково. При това  $\lambda$  и  $Ma$  са еднакви само при звуковите течения, като за останалите те имат винаги различни стойности.

Връзката между скоростния коефициент и числото на Мах може да се получи от (5.46) чрез повдигане на същото в квадрат и вземане под внимание равенството  $V = a Ma$ , т. е.

$$\lambda^2 = \frac{a^2 Ma^2}{a_*^2} = Ma \frac{T}{T_*}$$

Отношението на температурите в последния израз може да се определи по (5.40)

$$\frac{T}{T_*} = \frac{k+1}{2+(k-1)Ma^2}$$

откъдето

$$\lambda = \sqrt{\frac{(k+1)M_a^2}{2+(k-1)M_a^2}} \quad (5.47)$$

При изменение на скоростта на течението числото на Мах се изменя по-бързо отколкото коефициентът на скоростта и когато  $Ma$  клони към безкрайност,

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \quad (5.48)$$

като за въздуха при  $k=1,4$   $\lambda=2,45$ .

Числото на Чаплигин представлява отношение на местната ско-

рост на течението към максималната скорост, определена от параметрите на газа в резервоара при изтичане, разбира се във вакуум, т. е.

$$\tau = \frac{V}{V_{\max}} = \frac{V}{a_*} \frac{a_*}{V_{\max}} = \lambda \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}. \quad (5.49)$$

Когато  $Ma \rightarrow \infty$  и  $\lambda = \lambda_{\max}$ , числото на Чиплигин е  $\tau = 1$ .

### Установено течение на газ в канали с променливо напречно сечение

При установените течения на газовете в канали твърде съществен въпрос за практиката представлява изясняването на връзката между напречното сечение на канала и изменението на параметрите на газа. Това от своя страна дава указание за управление на течението, респ. напречните сечения по дължината му.

Като се използва уравнението за непрекъснатостта  $\rho V f = \text{const}$  и то се логаритмува, т. е.  $\ln \rho + \ln V + \ln f = \text{const}$ , след диференциране следва изразът

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{df}{f} = 0,$$

откъдето

$$\frac{df}{f} = -f \left( \frac{1}{V} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dV} \right). \quad (5.50)$$

От уравнението на Ойлер може да се получи зависимостта

$$V dV = - \frac{1}{\rho} dp = - \frac{dp}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = - a^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

или

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{V^2}{a^2} \frac{dV}{V} = Ma^2 \frac{dV}{V},$$

което, заместено в уравн. (5.50), довежда до израза

$$\frac{df}{f} = \frac{f}{V} (Ma - 1). \quad (5.51)$$

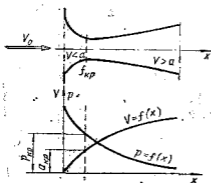
Полученото уравнение, носещо името на френския учен Хюгенъот,

установява връзката между сечението и скоростта на течението и дава възможност да се направи следният качествен анализ:

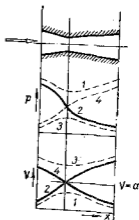
1. Ако по дължина на течението скоростта расте ( $dV > 1$ ), но остава дозвукова и следователно  $Ma < 1$ , от уравн. (5.51) следва, че при подзвуковите течения на газовете, както и при несвиваемите флуиди с намаляване на сечението на канала скоростта расте, а налягането намалява, и обратно — при увеличаване на сечението скоростта намалява, а налягането се увеличава.

2. Ако  $Ma > 1$  ( $V > a$ ),  $\frac{df}{dV} > 0$  и следователно при свръхзвуковите течения на газовете с увеличаване на напречното сечение на течението се увеличава скоростта, а налягането намалява, и обратно, в стесняващите се канали скоростта намалява, а налягането се увеличава. Този на пръв поглед парадоксален резултат се обяснява с това, че нарастването на скоростта в свръхзвуковите течения е свързано не само с изменение на налягането, но и с изменение на плътността. При това плътността намалява така силно, че произведението  $\rho f$  в уравнението за непрекъснатостта намалява независимо от увеличаване на сечението, което довежда до нарастване на скоростта.

3. Ако се разгледа течението в канал, който първоначално се стеснява, а след това се разширява, при определени условия в стесняващата се част дозвуковото течение ще се ускорява, достигайки звуковата скорост ( $V = a$ ) в най-тесното сечение, където



Фиг. 5.29



Фиг. 5.30

$df=0$  и  $Ma=1$ , след което преминава в свръхзвуково. На този именно принцип се построяват дюзите за получаване на течения със свръхзвукови скорости. За пръв път шведският инженер Лавал използва такава дюза за получаване на свръхзвукови скоро-

сти на изтичане при парните турбини, поради което е прието те да се наричат *дюзи на Лавал* (фиг. 5.29).

На фиг. 5.30 са показани възможните случаи на течението в свръхзвукова дюза. Ако течението в нея постъпва с подзвукова скорост, в зависимост от разликата в налягането пред  $p_0$  и след дюзата  $p_1$  за изменението на скоростта и налягането по дължината ѝ са възможни два случая, показани на фигурата съответно с кривите 1 и 2.

При голяма разлика в налягането, когато отношението  $\frac{p_1}{p_0} < \frac{p_{*}}{p_0}$ , т. е. когато например за въздух  $\frac{p_1}{p_0} < 0,528$ , скоростта в критичното сечение на дюзата достига местната звукова скорост, след което в разширяващата се част на дюзата тя става надзвукова (кривата 2). В случая дюзата реализира непрекъснато увеличаване на скоростта от под- в надзвукова и съответно намаляване на налягането, като по този начин тя изпълнява прякото си предназначение.

Ако разликата в налягането обаче е сравнително малка, т. е.  $\frac{p_1}{p_0} > \frac{p_{*}}{p_0}$ , независимо, че в конфузорния участък течението е ускорително, скоростта в най-тесното сечение не достига критичната си стойност. Течението става подзвуково, като скоростта на газа в разширяващия се участък на дюзата монотонно намалява, а налягането нараства. В случая Лаваловата дюза работи като *тръба на Вентури* (кривата 1).

При постъпването на течението в дюзата със свръхзвукова скорост за изменението на скоростта и налягането по дължината ѝ са възможни също така два случая (кривите 3 и 4). Ако налягането след дюзата е малко по-голямо от налягането пред нея, скоростта на надзвуковото течение в конфузорния участък ще намалява, без да достигне критичната си стойност в най-тесното сечение. По-нататък в дифузорния участък тя ще започне да расте (кривата 3) и следователно по цялата дължина на дюзата течението ще остане надзвуково.

Когато налягането след дюзата е значително по-голямо от налягането пред нея, скоростта на надзвуковото течение в конфузорния участък ще намалява, докато в най-тесното сечение стане равна на местната звукова скорост. По-нататък в дифузорния участък тя ще продължава да намалява и следователно газът ще изтича от дюзата с подзвукова скорост (кривата 4). В този случай дюзата работи като свръхзвуков дифузор.

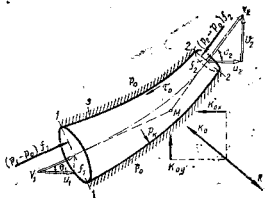
Докато процесът на преминаване на скоростта от под- в надзвукова е непрекъснат, обратният процес на преминаване от свръх- в подзвукова скорост е винаги прекъснат и има скокообразен характер. На практика при подобни случаи в дюзата се

появяват т. нар. *уплътнителни скокове*, които довеждат до рязко скокообразно намаляване на скоростта от свръхзвукова в подзвукова и съответно скокообразно изменение на налягането.

Дюзите за получаване на течения със свръхзвукови скорости намират широко приложение в реактивните и ракетните двигатели, газовите турбини, аеродинамичните канали и др. За оразмеряването им се използват уравненията на скоростта (5.36), уравнението за непрекъснатостта, респ. масовият дебит и адиабатният закон за разширяване на газовете, който дава връзката между налягането и плътността. Този въпрос както и теченията с високи свръхзвукови скорости се изучават подробно в газодинамиката.

### 5.8. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА ЗА КОЛИЧЕСТВОТО НА ДВИЖЕНИЕ

В инженерната практика теоремата за количеството на движение се прилага предимно за изследване на канални течения и най-често се търси силата върху каналните стени. В тези случаи контролният обем, през който се внася количество на движение, представлява определен участък от тръбата или канала, който може да бъде криволинеен и с променливо напречно сечение (фиг. 5.31). Всъщност контролната повърхнина се образува от



Фиг. 5.31

каналните стени на разглеждания участък на тръбата, входното напречно сечение  $f_1$  и изходното  $f_2$ , по които скоростта и налягането са съответно  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $p_2$  и  $V_2$ . Тогава в съответствие с уравн. (4.11) резултиращата сила се определя като

$$\vec{K} = q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1).$$

В случая резултантната сила е съставена от силите на натиск по сечение 1-1 и 2-2 — съответно  $P_1$  и  $P_2$ , силата, с която каналните стени въздействуват на флуида  $K_0$ , и масовата сила  $G$ , т. е.

$$\vec{K} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{K}_0 + \vec{G} = q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1). \quad (5.52)$$

Силата  $K_0$  включва тангенциалната сила от вътрешното триене при каналните стени  $T_0 = \int \tau_0 ds$  и силата на натиск от неравномерното разпределение на налягането по повърхнината  $S$  на стените  $p_n$ , характерна само за криволинейни течения  $P_0 = \int (p_n - p_0) dS$ , и следователно  $K_0 = T_0 + P_0$ .

Силата на натиск по входящото и изходящото сечение се определя със съответното надналягане, т. е.  $P_1 = (p_1 - p_0) f_1$  и  $P_2 = (p_2 - p_0) f_2$ . Тук налягането  $p_0$  се взема като относително ниво, защото се предполага, че то действа навсякъде около тръбата или канала и в повечето случаи е равно на атмосферното.

Очевидно за определяне на резултантната сила по (5.52) не е необходимо да се познават поотделно нейните съставни сили ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $K_0$ ,  $G$ ), а само параметрите на течението по крайните сечения ( $V_1$ ,  $p_1$  и  $V_2$ ,  $p_2$ ) и налягането  $p_0$  по контролната повърхнина извън тези сечения. В инженерната практика по-голям интерес представлява определянето на силата  $K_0$ , с която каналните стени въздействуват на флуида, или нейната реакция  $R$ , т. е. силата, с която флуидът въздейства върху каналните стени, за които се получава

$$-\vec{K}_0 = \vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + G + q(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \quad (5.53)$$

или в компонентна форма

$$\begin{aligned} R_x &= -K_{0x} = P_{1x} + P_{2x} + G_x + q(u_1 + u_2), \\ R_y &= -K_{0y} = P_{1y} + P_{2y} + G_y + q(v_1 - v_2), \\ R_z &= -K_{0z} = P_{1z} + P_{2z} + G_z + q(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (5.54)$$

При решаване на задачи от този вид се използват получените уравнения, като предварително се фиксират координатната система и контролната повърхнина. След това се определят параметрите  $V$ ,  $p$  и  $\rho$  по входящото и изходящото сечение на те-

чението в контролната повърхнина, налягането по нея извън сеченията  $p_0$  и масовата сила, а също така и техните проекции по съответните оси на избраната координатна система.

Получените уравнения илюстрират факта, че посредством уравнението на количеството на движението се намира силата, която действа върху произволен участък на тръбопровода или канала, без да се знае нищо за разпределението на скоростта и налягането вътре в пространството, ограничено от контролната повърхнина. Едновременно с уравнението за количеството на движение се използват и уравненията за непрекъснатостта и на Бернули, с които се намалява броят на неизвестните параметри, които фигурират в първото уравнение.

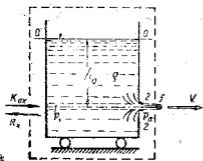
**Реакция на изтичащата струя.** Интерес представлява изтичането на струя от малък отвор във вертикалната стена на съд по фиг. 5.32, разположен на дълбочина  $h_0$ . Търси се силата  $R_x$ , която упражнява течността върху съда. Контролната повърхнина се образува от свободната повърхнина  $f_0$  на течността, по която скоростта е  $V_0=0$  и вътрешното налягане  $p_0=p_a$ , вътрешната повърхнина на съда и напречното сечение  $f$  на отвора по който скоростта е  $V$  и налягането  $p=p_a$ . От уравн. (5.35), след като се вземе под внимание, че  $u=V=\sqrt{2gh_0}$  ( $v=0, \omega=0$ ) и  $P_1=P_2=0$ , тъй като  $p_{1n}=p_{2n}=0$  и  $G_x=0$ , следва

$$R_x = -\rho f V^2 = -2\rho g h_0 f, \quad (5.55)$$

където знакът (-) показва, че реакцията  $R_x$  е надочена обратно на скоростта на изтичане.

Реакцията на изтичащи струи се използва за приваждане в

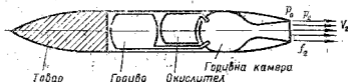
движение на тела. По този т. нар. реактивен принцип работят реактивните двигатели, които биват турбореактивни и ракетни. Характерно за първите е това, че при тях за окислител на горивото се използва кислородът от атмосферния въздух, докато при втория вид окислителят се подава от бутилки (резервоари) под налягане или се използва гориво, което съдържа окислителя в молекулата си, както е например случаят с барута. На фиг.



Фиг. 5.32

5.33 е показана схема на ракетата, в задната част на която е разположен ракетният двигател. Горивото, подавано от резервоара, изгаря в горивната камера, откъдето през специална дюза (от типа на Лавал) изгорелите газове изтичат с много го-

ляма скорост  $V_2$  и с масов дебит  $q$ . В случая за контролна повърхнина може да се избере вътрешната повърхнина на ракетата (двигателя) и изходното сечение  $f_2$ . Характерно тук е липсата на входно сечение (каквото има при турбореактивните двигатели) и



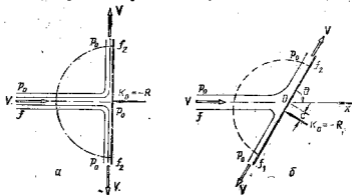
Фиг. 5.33

това, че налягането по сечението  $p_2$  може да е различно от налягането на несмутената външна флуидна среда, примерно атмосферния въздух, тъй че  $p_{2n} = p_2 - p_a \neq 0$ . Тогава от (5.54) за реакцията на изтичащата струя, която ще приведе ракетата в движение, се получава

$$R = -(qV_2 + f_2 p_{2n}). \quad (5.56)$$

Според получената зависимост реактивната сила е пропорционална на скоростта  $V_2$  и масовия дебит  $q$ . За да се намалява разходът на гориво и окислител, редиц. масовият дебит, конструкторите постигат увеличаване на реактивната сила с използване на големи скорости на изтичане.

**Натиск на струя върху стена.** При изтичане на струя срещу



Фиг. 5.34

стена (фиг. 5.34) тя се разлива по нея равномерно по всички направления и на известно разстояние от острата ѝ токовите линии стават успоредни на стената. Очевидно направлението на струята се изменя, което от своя страна ще доведе до съответно изме-

нение на количеството на движение и в посока на ос  $x$  ще се получи сила  $K_{0x}=K_0$ , с която стената ще въздейства върху флуида, чиято реакция е  $R=-K_0$ .

Ако този опит се провежда в свободна атмосфера, навсякъде по контролната повърхнина (прекъсваната линия на фигурата) налягането ще бъде едно и също, равно на атмосферното ( $p_0=p_a$ ). Тъй като гравитационната сила е нормална спрямо струята, от уравнението на Бернули се установява, че скоростите и на входа, и на изхода на контролната повърхнина остават еднакви.

Поради симетрия на течението реактивната сила  $R$  ще бъде нормална към стената и съответно

$$R = -\rho f V^2. \quad (5.57)$$

Нека сега стената е наклонена спрямо оста на изтичащата струя под ъгъл  $\theta$  (фиг. 5.34 б). Ако налягането по контролната повърхнина е  $p_0=p_a$  и няма загуба на кинетична енергия при отклонението, тогава отново от Бернулиевото уравнение следва, че отклонените скорости са същите както скоростта  $V$  на струята.

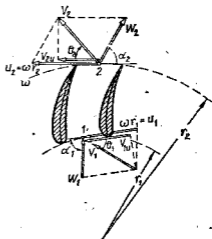
Посоката на реактивната сила  $R$  в този случай е също нормална спрямо стената. Това следва от липсата на тангенциални напрежения по стената (ако флуидът е приет за идеален) и следователно няма количествено изменение в тази посока. Дори и в случай на триене, ако скоростта в радиална посока все още би могла да се разглежда като равна, силата на триене от тангенциалните напрежения по стената ще бъде равна на нула и следователно може да се приеме, че в радиална посока няма обмен на количество на движение.

Тогава за нормалната към стената реактивна сила се получава

$$R = \rho f V^2 \sin \theta. \quad (5.58)$$

**Въртящ момент върху лопатъчно колело на турбомашина.** Типичен пример за приложение на теоремата на количеството на движение са турбомашините, които са предназначени за обмен на механична енергия с протичащия през тях флуид. В зависимост от това, дали флуидът отдава или получава енергия, турбомашините биват два вида: силови (турбини) и работни (помпи, компресори и вентилатори). В случая теоремата за момента на количеството на движение се прилага за флуидната маса в междуплатъчните канали на въртящото се с постоянна ъглова скорост  $\omega$  лопатъчно колело, където се извършва енергообменът. Обикновено задачата се свежда до определяне на обменената механична енергия, което се постига посредством пресмятането на въртящия момент на лопатъчното колело.

За илюстриране на това приложение се разглежда течение през лопатъчно колело на работна турбомашина (помпа или компресор) по фиг. 5.35. При установен режим на работа колелото се върти с постоянна ъглова скорост  $\omega$  например в посока, обратна на часовниковата стрелка. Флуидът след обръщане на посоката на движение от осова в радиална навлиза в междуплатъчните канали с относителна скорост  $W_1$ , респ. с постоянна площна скорост  $V_1 \times r_1$ . Абсолютната скорост на течението  $V$  в произволна точка на междуплатъчния канал спрямо неподвижна координатна система е векторна сума от относителната  $W$  и преносната  $U = \omega r$  скорост, т. е.  $\vec{V} = \vec{W} + \vec{U}$ , като нейната периферна компонента е  $V_u = V \cos \theta$ .



Фиг. 5.35

Въртящият момент, който лопатъчното колело упражнява върху флуида, може да се определи по уравн. (4.14)

$$M_k = M_{k0} = q (V_2 \times r_2 - V_1 \times r_1).$$

Векторните произведения в последното уравнение имат направление по оста на колелото и те могат да се представят в най-често използвания вид:  $\vec{V}_1 \times \vec{r}_1 = V_{1u} r_1$  и  $\vec{V}_2 \times \vec{r}_2 = V_{2u} r_2$ , където  $V_{1u} = V_1 \cos \theta_1$  и  $V_{2u} = V_2 \cos \theta_2$  и следователно

$$M_k = M_{k0} = q (V_{2u} r_2 - V_{1u} r_1). \quad (5.59)$$

В разглеждания случай моментите на силите на натиск по входящото и изходящото сечение са равни на нула ( $M_{P1} = M_{P2} = 0$ ), тъй като наляганята по тези сечения са колинеарни вектори на  $l$ . Моментът на масовата сила е също равен на нула ( $M_G = 0$ ), защото радиус-векторът на центъра на тежестта на флуидната маса в контролния обем (лопатъчното колело) е равен на нула, откъдето следва  $M_{k0} = M_k$ .

За отдаваната мощност на флуида следва

$$N = M_{k0} \omega = q (V_{2u} r_2 - V_{1u} r_1) \omega$$

или

$$N = q (V_{2u} U_2 - V_{1u} U_1). \quad (5.60)$$

Тази мощност, отнесена за единица флуидна маса, дефинира специфичната енергия  $H$ , която лопатъчното колело на турбомашината отдава на протичащия през него флуид:

$$H = \frac{N}{q} = V_{2u} U_2 - V_{1u} U_1. \quad (5.61)$$

Отдаваната на флуида специфична енергия  $H$  може да се определи и с уравнението на Бернули

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 + H = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2,$$

което в съответствие с уравн. (5.61) може да се запише още така

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + V_{2u} U_2 - V_{1u} U_1 = 0.$$

От скоростните триъгълници на фиг. (5.35) следват съотношенията:

$$V_1^2 = U_1^2 + W_1^2 - 2U_1 W_1 \cos \alpha_1,$$

$$V_2^2 = U_2^2 + W_2^2 - 2U_2 W_2 \cos \alpha_2,$$

$$V_{1u} = U_1 - W_1 \cos \alpha_1,$$

$$V_{2u} = U_2 - W_2 \cos \alpha_2.$$

След заместване на тези тригонометрични зависимости в модифицираното по-горе уравнение на Бернули скончателно се получава

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} \quad (5.62)$$

или при пренебрегване на разликата в геодезичните височини на крайните сечения на колелото

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}. \quad (5.63)$$

Получените уравнения (5.59) ÷ (5.63) са известни като уравне-

ния на Ойлер и написани в този вид са валидни за работните турбомашини. Те са приложими и за силовите турбомашини, в които флуидът отдава енергия на лопатъчното колело, като сега течението е насочено радиално от периферията навътре в колелото, крайните напречни сечения сменят местата си и уравненията от (5.40) до (5.63) променят знаците си. Трябва да се подчертае, че тези уравнения са основни в теорията на турбомашините и се наричат *турбинни уравнения на Ойлер*.

## VI. РАВНИННИ ПОТЕНЦИАЛНИ ТЕЧЕНИЯ

### 6.1. КОМПЛЕКСЕН ПОТЕНЦИАЛ

Сравнително най-простият и най-добре изученият вид установени безвихрови движения на идеалните флуиди са т. нар. *равнинни потенциални течения*. Те се характеризират с движение на флуидните частици по успоредни равнини, по които течението е едно и също. Следователно по нормалите към тези равнини параметрите на течението (скорост, налягане, плътност и др.) не се менят. Това дава основание равнинните течения да се разглеждат само в една от успоредните равнини, например равнината  $xOy$ , към която оста  $z$  е нормална. Тогава, приемайки, че параметрите на течението са функция само на координатите  $x$  и  $y$ , съгласно с уравн. (3.22) компонентите на скоростта  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  се изразяват посредством скоростния потенциал  $\phi(x, y)$ , както следва:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6.1 \text{ а})$$

$$\text{и съответно } \vec{V} = \text{grad } \phi \quad (6.1 \text{ б})$$

В този случай уравнението  $\phi(x, y) = \text{const}$  ще бъде *уравнението на екипотенциалните линии* в равнината  $xOy$ .

**Токова функция.** При двумерните равнинни течения се оказва възможно въвеждането на още една функция, която притежава аналогични на потенциала свойства. От уравнението за непрекъснатостта на равнинно течение на несвиваем флуид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6 \text{ 2})$$

Следва, че винаги може да се намери някаква непрекъсната функция  $\psi(x, y)$ , определена така, че

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6.3)$$

което тъждествено да удовлетворява уравн. (6.2), тъй като

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (6.4)$$

Може да се покаже, че уравнението на токовата линия  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$  представлява пълният диференциал на функцията  $\psi(x, y)$ , т. е.

$$u dy - v dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0$$

$$\text{или} \quad \psi(x, y) = \text{const}. \quad (6.5)$$

Очевидно функцията  $\psi(x, y)$  запазва постоянна стойност по дължина на токовите линии, поради което е наречена токова функция и следователно  $\psi(x, y) = \text{const}$  е уравнението на токовите линии.

От условието за безвихрово течение

$$\text{rot } V = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

се получава

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta \psi = 0,$$

което показва, че токовата функция удовлетворява уравнението на Лаплас, т. е. тя е също хармонична функция, както и потенциалната.

Физичният смисъл на функцията  $\psi(x, y)$  се изяснява от следното разглеждане върху флуиден слой с височина  $z=1$ , измерена по перпендикуляра към равнината на течението (фиг. 6.1). Обемният дебит през лицевия елемент  $df$  с дължина  $dl$  (височината  $dz$  е единица) е

$$dQ = V_n dl.$$

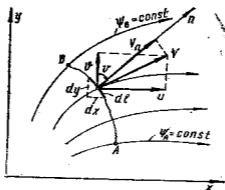
В случая нормалната компонента на скоростта се определя, както следва:

$$V_n = u \cos \theta + v \sin \theta.$$

Като се вземат под внимание тригонометричните зависимости

$$\cos \theta = \frac{dy}{dl}, \quad \sin \theta = -\frac{dx}{dl}.$$

за дебита се получава  $dQ = u dz - v dx$



Фиг. 6.1

а в съответствие с уравн. (6.3)

$$dQ = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi. \quad (6.6)$$

Следователно диференциалът на токовата функция е равен на дебита през елементарния лицев елемент  $df$ . За дебита на течението в токовия канал, ограничен от токовите повърхнини  $\psi_A$  и  $\psi_B$  (отнесен за единица височина на течението), следва изразът

$$Q = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A, \quad (6.7)$$

където  $\psi_B$  и  $\psi_A$  са стойностите на токовата функция в крайните точки на контура. Следователно обемният дебит на течението през произволен контур между две токови линии (повърхнини) се определя само от стойностите на токовата функция по тези линии и не зависи от формата на контура. Ако началната и край-

ната точка на този контур лежат на една и съща токова линия, дебитът през такъв контур е равен на нула (тъй като  $\psi_A = \psi_B$ ), което показва, че токовете повърхнини не пропускат флуид.

Скоростният потенциал  $\varphi(x, y)$  и токовата функция  $\psi(x, y)$  се наричат характеристични функции на течението. Характерно за тях е това, че докато потенциалната функция съществува само за безвихрови течения, токовата функция може да се въведе винаги, стига само течението да е двумерно.

**Комплексен потенциал.** Като се съпоставят изразите (6.1) и (6.3), се получава системата уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.8)$$

Равенствата (6.8) представляват известните условия на Коши-Риман, които определят съществуването на някаква аналитична функция на комплексната променлива  $F(z)$  от вида

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Аналитичната функция  $F(z)$  съдържа както потенциалната  $\varphi(x, y)$ , така и токовата функция  $\psi(x, y)$  на течението, поради което се нарича комплексен потенциал или характеристична функция на равнинните безвихрови течения.

Тъй като комплексният потенциал  $F(z)$  се определя само от положението на точката  $z$ , очевидно и производната ѝ ще се определя от положението на тази точка и няма да зависи от посоката на диференциране. Следователно

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{dF(z)}{dx} = \frac{dF(z)}{d(iy)}$$

или

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv = \bar{V}_* \quad (6.9)$$

Абсолютната скорост  $V$  в комплексната равнина (фиг. 6.2) се определя от израза

$$V = u + iv.$$

Вижда се, че производната на комплексния потенциал по комплексната променлива  $z$  е равна на огледалния образ на скоростния вектор спрямо реалната ос  $x$  и се нарича *имагинерно спряганата скорост*  $\bar{V}$ . Съгласно с фиг. 5.2 за компонентите на скоростта могат да се напишат зависимостите

$$u = V \cos \theta, \quad v = V \sin \theta,$$

откъдето за скоростта се получава

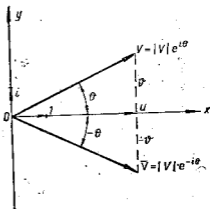
$$V = |V|(\cos \theta + i \sin \theta) = |V| e^{i\theta}$$

и съответно за имагинерно спрегнатата скорост

$$\bar{V} = |\bar{V}|(\cos \theta + i \sin \theta) = |\bar{V}| e^{-i\theta}. \quad (6.10)$$

При равнинните потенциални течения е възможно функциите  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  да разменят мястото си, като  $\varphi(x, y)$  стане токова функция, а  $\psi(x, y)$  — потенциална. Очевидно такава размяна ще дефинира течение, което е завъртяно на ъгъл  $\pm \frac{\pi}{2}$  спрямо първото, като неговият комплексен потенциал може да се получи от  $F(z)$  чрез умножаване с  $\pm i$ , т. е.  $F_1(z) = \pm iF(z) = \pm i\varphi \mp \psi = \varphi_1 + i\psi_1$ , тъй че  $\varphi_1 = \mp \psi$  и  $\psi_1 = \pm \varphi$ .

Използването на теорията на аналитичните функции на комплексната променлива  $z = x + iy$  облекчава значително изучаването на равнинните безвихрови течения. При това всяко равнинно течение може да бъде представено с някакъв комплексен потенциал и обратно — на определен вид комплексен потенциал съответствува някакво равнинно течение. Оттук следват два вида задачи: 1) по познат контур на обтеченото тяло и скоростта в безкрайно отдалечените точки от него да се намери съответният комплексен потенциал и 2) по зададен комплексен потенциал да се изучи движението, т. е. да се намерят функциите  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ , а следователно и скоростното поле. Втората задача е сравнително по-лесна и е разглеждана в някои от следващите характерни примери от хидродинамиката на комплексния потенциал.



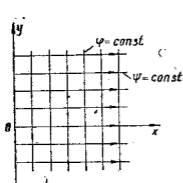
Фиг. 6.2

6.2. ПРИМЕРИ НА РАВНИННИ ПОТЕНЦИАЛНИ ТЕЧЕНИЯ

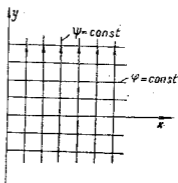
**Успоредно потенциално течение.** Комплексният потенциал на успоредното потенциално течение е от вида

$$F(z) = kz = k(x + iy). \quad (6.11)$$

При това са възможни случаите:  $k=a$ , където  $a$  е реално число;  $k=ib$  — имагинерно число, докато  $b$  е реално число и третият случай  $k=a+ib$  е комплексно число, като  $a$  и  $b$  са реални числа.



Фиг. 6.3



Фиг. 6.4

а. Ако  $k=a$  е реално число, от уравн. (6.11) се получава

$$F(z) = az = ax + iay.$$

Следователно  $\phi = ax$  и  $\psi = ay$ , откъдето еквипотенциалните линии  $\phi = ax = \text{const}$  са семейство прави линии, успоредни на имагинерната ос  $y$ , а токовете линии  $\psi = ay = \text{const}$  ще бъдат семейство прави линии, успоредни на реалната ос  $x$  (фиг. 6.3).

За скоростните компоненти на уравн. (6.1) се получава

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = a, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

При  $a > 0$  посоката на течението ще съвпадне с направлението на ос  $x$ . В случая  $u = a = V_0$  и комплексният потенциал за успоредното течение може да се запише във вида

$$F(z) = V_0 z, \quad (6.12)$$

където  $V_0$  е скоростта на успоредното течение.

б. В случай че  $k = -ib$  е имагинерно число, като  $b$  е реално число, за комплексния потенциал се получава

$$F(z) = -ibz = -ibx + by \quad (6.13)$$

и следователно  $\phi = by$  и  $\psi = -bx$ .

Тогава еквипотенциалните линии  $\phi = by = \text{const}$  са семейство

Прави линии, успоредни на ос  $x$ , а токовите линии  $\psi = -bx = \text{const}$  са прави, успоредни на ос  $y$  (фиг. 6.4).

Скоростните компоненти се определят по аналогичен начин

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b.$$

При  $b > 0$  посоката на течението ще съвпадне с направлението на имагинерната ос  $y$ .

В случая второто течение е идентично на първото, но завъртяно спрямо него на ъгъл  $\pi/2$ , като комплексният му потенциал е получен от този на първия чрез умножаване с числото  $-i$ .

в. Нека  $k = a - ib$  е комплексно число, където  $a$  и  $b$  са реални числа. Тогава комплексният потенциал приема вида

$$F(z) = (a - ib)z = ax + iay - ibx + by$$

или

$$F(z) = ax + by + i(ay - bx), \quad (6.14)$$

където  $\varphi = ax + by$  и  $\psi = ay - bx$  са съответно потенциалната и токовата функция. Скоростните компоненти се определят, както следва:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \quad \text{и} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b.$$

За  $a > 0$  и  $b > 0$  направлението на течението е определено с ъгъл  $\alpha = \text{arctg} \frac{b}{a}$  (фиг. 6.5), като

$$|V| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Уравненията на екипотенциалните и токовите повърхнини (линии) са съответно

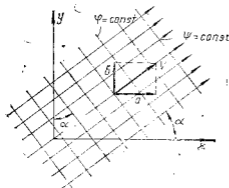
$$\varphi = ax + by = \text{const} \quad \text{или} \quad y = \text{const} - \frac{a}{b}x$$

$$\text{и} \quad \psi = ay - bx = \text{const} \quad \text{или} \quad y = \text{const} + \frac{b}{a}x.$$

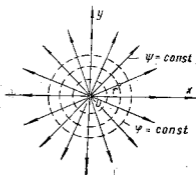
Получените равенства представляват уравненията на взаимноперпендикулярни прави, наклонени спрямо осите  $x$  и  $y$  съответно на ъгъл  $\alpha = \text{arctg} \frac{b}{a}$ .

Линеен източник и падина. Един друг вид равнинно потенциално течение се получава, ако комплексният потенциал е от вида

$$F(z) = a \ln z, \quad (6.15)$$



Фиг. 6.5



Фиг. 6.6

където  $a$  е реално число.

Като се изрази комплексната променлива  $z$  в полярни координати  $z = r e^{i\theta}$  ( $r$  е модул, а  $\theta$  амплитуда), се получава

$$F(z) = a \ln r e^{i\theta} = a \ln r + i a \theta. \quad (6.16)$$

Тогавя  $\phi = a \ln r$  и  $\psi = a \theta$ .

Еквипотенциалните и токовите линии, респ. повърхнини, определени с уравненията

$$\phi = a \ln r = \text{const} \quad \text{или} \quad r = \text{const}$$

$$\text{и} \quad \psi = a \theta = \text{const} \quad \text{или} \quad \theta = \text{const},$$

представяват съответно семейство концентрични окръжности (еквипотенциални повърхнинни кръгови цилиндри) с център в началото на координатната система, а токовите линии — семейство прави (токовите повърхнини — семейство равнини), преминаващи през началото на координатната система (фиг. 6.6).

За компонентите на скоростта се получава

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{a}{r} \quad \text{и} \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0.$$

Ако  $a > 0$ , скоростта  $V_r = V$  има радиално направление и картината на токовите линии ще изобразява течението на т. нар. *ли-*

неен (равнинен) източник (фиг. 6.6). Всъщност линейният източник е права, нормална спрямо равнината, която излъчва перпендикулярно на себе си флуид равномерно във всички радиални направления. При  $a < 0$  картината от токовите линии изобразява течението на т. нар. *линейна (равнинна) падина*, при която скоростта на течението е насочена от всички страни нормално към центъра на координатната система.

Характерно за източника и падината е наличието на особена точка  $r=0$ , в която скоростта е безкрайно голяма.

Обемният дебит на източника и падината, излъчван от единица дължина, се определя по израза

$$Q = \int_0^{2\pi} V_r r d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a,$$

откъдето  $a = Q/2\pi$  и следователно

$$F(z) = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (6.17)$$

и 
$$\varphi = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{и} \quad \psi = \pm \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

**Потенциален вихър** Ако комплексният потенциал на източника (6.15) се умножи с  $i$ , се получава

$$F(z) = ia \ln z \quad (6.18)$$

или 
$$F(z) = ia \ln re^{i\theta} = -a\theta + ia \ln r,$$

следователно  $\varphi = -a\theta$  и  $\psi = a \ln r$ , а уравненията на токовите и сквипотенциалните линии (повърхнини) са

$$\psi = a \ln r = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi = -a\theta = \text{const},$$

което представлява съответно семейство концентрични окръжности с център координатното начало и семейство прави, преминаващи през същото начало (фиг. 6.7). В случая е налице циркуляционно течение спрямо изолиран точков вихър или по-точно казано, на вихрова нишка, която съвпада с оста  $z$ .

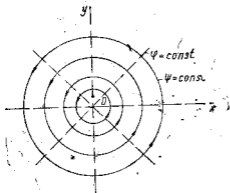
Скоростните компоненти на разглежданото циркуляционно течение са

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad V_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{a}{r},$$

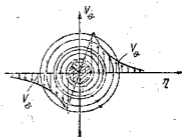
откъдето за циркулацията по произволно затворена токова линия (в случая затворен контур) се получава

$$\Gamma = \oint V_{\theta} ds = - \oint \frac{a}{r} r d\theta = -2\pi a.$$

Вижда се, че числото  $a$  приема определена стойност  $a = -\Gamma/2\pi$ .



Фиг. 6.7



Фиг. 6.8

и следователно комплексният потенциал на циркуляционното течение с циркулация  $\Gamma$  приема вида

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (6.19)$$

Така че  $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$  и  $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$ ,  
а скоростната компонента е

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (6.20 a)$$

откъдето следва

$$V_{\theta} r = \frac{\Gamma}{2\pi} = V_0 r = \text{const}. \quad (6.20 б)$$

Характерно за разглежданото течение е това, че всички флуидни частици се движат по концентрични окръжности с постоянна за дадената окръжност скорост. Такова движение е циркуляционно безвихрово движение. Строго казано, то е безвихрово навсякъде освен в особената точка (точковия вихър, респ. вихрова нишка), в началото на координатната система, поради което

се нарича още *потенциален вихър*. Доколкото произволната токова линия (токова повърхнина) може да се приеме за твърда граница, като се вземе в качеството на токова граница например окръжност с радиус  $r=R$  и се разглежда течението вън от тази окръжност, се получава чисто циркуляционно обтичане на безкрайно дълъг кръгов цилиндър с радиус  $R$ . Съответното разпределение на скоростта в областта вън от цилиндъра е показано на фиг. 6.8; направлението на скоростите се определя от знака на циркуляцията. Приема се  $\Gamma > 0$  в случая, когато въртенето на течността е в обратна посока на часовниковата стрелка.

Следователно течението, характеризиращо се с потенциала  $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ , определя чисто циркуляционно обтичане на кръгов цилиндър.

### 6.3. КОМБИНИРАНИ РАВНИННИ ПОТЕНЦИАЛНИ ТЕЧЕНИЯ

Важно свойство на токовата и потенциалната функция е това, че ако са известни тези функции за две или повече течения ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ ), тяхната сума определя ново потенциално течение с комплексен потенциал:

$$F(z) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i(\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n)$$

или 
$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + \dots + F_n(z). \quad (6.21)$$

Това свойство следва непосредствено от линейността на Лапласовото уравнение, което е, удовлетворено от разглежданите съставни потенциални и токови функции.

Обикновено комбинирането на равнинни потенциални течения довежда до формиране на по-сложни течения, срещани при това често в практическите задачи.

**Дипол.** Едно от често използваните елементарни течения, се получава при комбинация на източник с дебит  $Q$ , разположен в началото на координатната система, и падина със същия дебит, разположена на разстояние  $\Delta x$  от него (фиг. 6.9).

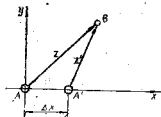
Комплексният потенциал на сумарното течение според уравн. (6.21) е

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} (\ln z - \ln z'). \quad (6.22)$$

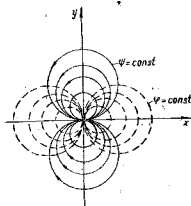
Ако разстоянието  $\Delta x$  започне да се стреми към нула, като дебитът  $Q$  запази постоянна стойност, падината ще поглъща излъчвания дебит от източника и равновесието няма да се наруши. Съществен интерес представлява обаче комбинацията, за която

при намаляване на  $\Delta x$  до нула дебитът започва да расте до безкрайност, така че произведението им остава винаги постоянна крайна величина, т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q \Delta x = a = \text{const.}$$



Фиг. 6.9



Фиг. 6.10

Такава съвкупност от източник и падина се нарича *дипол*, а константата  $a$  — *момент на дипола*. Следователно комплексният потенциал на дипола се определя от израза

$$F(z) = \lim \frac{Q \Delta x}{2\pi} \frac{\ln z - \ln z'}{\Delta x}$$

Тъй като при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta x$  може да се замени с  $dz$ ,  $Q \Delta x = a$  и  $\ln z - \ln z' = d \ln z$ , последният израз приема вида

$$F(z) = \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{d(\ln z)}{dz} = \frac{m}{z}, \quad (6.23)$$

където

$$m = \frac{a}{2\pi}$$

Оттук

$$F(z) = \frac{m}{r} e^{-i\theta} = \frac{m}{r} \cos \theta - i \frac{m}{r} \sin \theta$$

и следователно

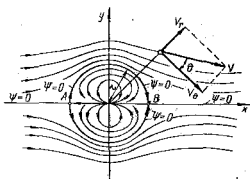
$$\varphi = \frac{m}{r} \cos \theta = m \frac{x}{x^2 + y^2}$$

и

$$\psi = \frac{m}{r} \sin \theta = m \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

В случая уравненията на екипотенциалните линии (повърхнини)  $\psi = \text{const}$  и токовите линии (повърхнини)  $\psi = \text{const}$  са от вида

$$x^2 + y^2 = C_1 x \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = C_2 y,$$



Фиг. 6.11

които описват семейство окръжности, преминаващи през началото на координатната система с центрове, съответно разположени по осите  $x$  и  $y$  (фиг. 6.10).

Безциркуляционно обтичане на кръгов цилиндър. Интересно течение се получава като резултат на сумиране на успоредно течение и дипол по фиг. 6.11, чийто комплексен потенциал е

$$F(z) = V_0 z + \frac{m}{z} = V_0 r e^{i\theta} + \frac{m}{r e^{i\theta}} \quad (6.24)$$

или 
$$F(z) = V_0 r (\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{m}{r} (\cos \theta - i \sin \theta).$$

За характеристичните функции на сумарното течение следва:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \left( V_0 + \frac{m}{r^2} \right) r \cos \theta = \left( V_0 + \frac{m}{x^2 + y^2} \right) x, \\ \psi(z) &= \left( V_0 - \frac{m}{r^2} \right) r \sin \theta = \left( V_0 - \frac{m}{x^2 + y^2} \right) y, \end{aligned} \quad (6.25)$$

където  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$ .

От условието  $\psi = \text{const}$  за уравнението на токовите линии се получава

$$\left(V_0 - \frac{m}{r^2}\right) y = \text{const},$$

като токовата линия, т. е. повърхнината, по която дебитът е равен на нула, е

$$\left(V_0 - \frac{m}{r^2}\right) y = 0.$$

Съгласно с получения израз тя може да се разглежда като съставена от два участъка: единият, определен с уравнението  $y=0$ , и другият

$$V_0 - \frac{m}{r^2} = 0, \text{ т. е. } r^2 = \frac{m}{V_0} = \text{const}.$$

И така токовата линия  $\psi=0$  се разклонява: първият ѝ клон представлява реалната ос, а вторият — окръжност с радиус

$$r = \sqrt{\frac{m}{V_0}}. \quad (6.26)$$

както е показано на фиг. 6.11. Всъщност течението се разделя на две области — външна и вътрешна, обхваната от мулевата цилиндрична токова повърхнината, в която се затваря течението на дипола, които могат да се разглеждат поотделно. Очевидно е, че течението във външната област не се изменя, ако вътрешната област се замени с твърдо тяло, което има форма на кръгов цилиндър. По такъв начин при комбинирането на успоредно течение с дипол се получава обтичане на кръгов цилиндър от успоредно потенциално течение.

Сега комплексният потенциал на обтечен кръгов цилиндър с радиус  $R$  от успоредно течение със скорост  $V_0$  (фиг. 6.12) се получава, като произволната величина  $m$  се замени със съответния ѝ израз по (6.26) в уравн. (6.24), т. е.

$$m = V_0 R^2,$$

тъй че

$$F(z) = V_0 z + \frac{V_0 R^2}{z} = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (6.27)$$

или 
$$F(z) = V_0 \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \theta + i V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) r \sin \theta.$$

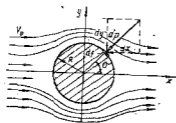
Тогава уравнението на токовите линии е

$$\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) r \sin \theta = \text{const.}$$

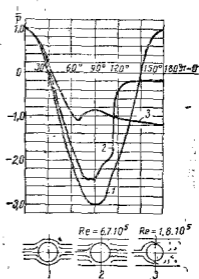
От уравнението на потенциалната функция

$$\varphi = V_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) r \cos \theta.$$

За компонентите на скоростта се получава



Фиг. 6.12



Фиг. 6.13

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad (6.28)$$

и

$$V_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta.$$

За  $r=R$  скоростните компоненти са съответно

$$V_r = 0 \quad \text{и} \quad V_\theta = -2V_0 \sin \theta. \quad (6.29)$$

Следователно скоростта по повърхнината на кръговия цилиндър, обтечен от успоредно безвихрово течение, се изменя по синусоида, при което за  $\theta=0$  и  $\theta=\frac{\pi}{2}$  тя е равна на нула, а при  $\theta=90^\circ$  и  $\theta=270^\circ$  скоростта достига максималната стойност  $V_\theta=$

$=2V_0$ . Точките  $A$  и  $B$ , в които скоростта е равна на нула, са всъщност критичните, т. е. *точките на заприщване*.

Налягането в произволна точка от повърхнината на цилиндъра се определя по Бернулиевото уравнение, приложено за нулевата токова линия,

$$p = p_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} \left( 1 - \frac{V^2}{V_0^2} \right) = p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta), \quad (6.30)$$

откъдето за коефициента на налягането се получава

$$\bar{p} = \frac{2(p - p_0)}{\rho V_0^2} = 1 - \frac{V}{V_0} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (6.31)$$

На фиг. 6.13 с крива  $I$  е показана получената по уравн. (6.31) зависимост  $\bar{p} = \bar{f}(\theta)$  за цилиндър, обтечен от успоредно безвихрово течение на идеален флуид. От фигурата се вижда, че при  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$ ,  $\bar{p} = 1$ , а при  $\theta = 90^\circ$  и  $\theta = 270^\circ$ ,  $\bar{p} = -3$ .

Резултантната сила може да се получи чрез интегриране по контура. Като се има предвид симетричното разпределение на налягането по повърхнината на цилиндъра, е видно, че по диаметрално разположените точки ( $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_1 + \pi$ ) налягането се запазва същото, а силите на натиск по съответните площни елементи се уравновесяват взаимно. Оттук следва, че резултиращата сила при обтичане на кръгов цилиндър от успоредно безвихрово течение на идеален флуид е нула. За пръв път този факт е бил установен теоретически от Ойлер (1745). Той може да се илюстрира по следния начин. Нека върху елементарната площ  $df = R d\theta \cdot l$  (разглеждането се прави за единица дължина на цилиндъра) е приложена елементарна сила на натиск  $dP = p df$  (фиг. 6.12), чиито проекции по  $x$  и  $y$  са съответно

$$dX = -p \cos \theta R d\theta,$$

$$dY = -p \sin \theta R d\theta,$$

По-нататък след заместване на  $p$  от уравн. (6.30) и интегриране се получава

$$X = -R \int_0^{2\pi} \left[ p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] \cos \theta d\theta = 0,$$

$$Y = -R \int_0^{2\pi} \left[ p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] \sin \theta d\theta = 0.$$

По-късно Даламбер (1953) обобщава този частен случай и за тела с произволна форма.

При обтичане на цилиндър от успоредно течение на реален флуид разпределението на налягането особено в задната част на цилиндъра е много по-различно от теоретичното, което се вижда на фиг. 6.13 от кривите 2 и 3. Едновременно тези криви показват, че с увеличаване на скоростта на несмутеното течение и по-специално числото на Рейнолдс ( $Re = \frac{2RV_0}{\nu}$ ) разпределението на налягането се доближава до теоретичното. Очевидно от несиметричното разпределение на налягането спрямо оста  $y$  (дългащо се на вътрешното триене на флуида) се появява сила на натиск, насочена по направление на течението. Следователно, когато телата са обтечени от реален флуид, винаги върху тях ще действува сила на натиск (сила на съпротивление), насочена по посока на течението. Това несъответствие на теоретичния резултат с действителността е наречено в хидродинамиката парадокс на Ойлер—Даламбер.

Циркулационно обтичане на кръгов цилиндър. В началото на XX век Н. Е. Жуковски е забелязал, че анализът, приведен за безциркулационното обтичане, е непълен, тъй като физически е възможно и циркулационно обтичане (вж. фиг. 6.7). Циркулационното обтичане на кръгов цилиндър се получава при едновременното му обтичане от успоредно безвихрово течение на идеален флуид и потенциален вихър, чийто център е разположен на оста на цилиндъра. Очевидно комплексният потенциал ще бъде сума от комплексните потенциали на съставните течения (6.27) и (6.19), а именно

$$F(z) = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad (6.32)$$

където знакът (+) пред второто събираемо съответствува на посоката на циркулацията по часовниковата стрелка.

Сега уравненията за потенциалната и токовата функция са

$$\varphi = V_0 \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (6.33)$$

$$\psi = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) r \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (6.34)$$

От потенциалната функция за скоростните компоненти се получава

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -V_0 r \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{r}. \quad (6.35)$$

Сравнително лесно може да се покаже, че течението е циркуляционно с циркулация, равна на циркулацията на потенциалния вихър, т. е.

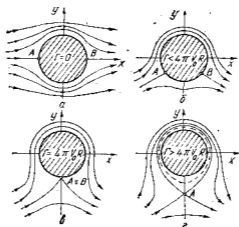
$$\oint V_{\theta} ds = - \int \left[ V_0 \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{r} \right] r d\theta = -\Gamma. \quad (6.36)$$

За разпределението на скоростта по повърхнината на цилиндъра, т. е. за  $r=R$ , от уравн. (6.35) следва

$$V_r = 0,$$

$$V_{\theta} = V = -2V_0 \sin \theta - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{R}. \quad (6.37)$$

Според уравн. (6.37) разпределението на скоростта е несиметрично спрямо реалната ос  $x$ . Разбира се, внасянето на циркуляционно течение е довело до съществени кинематични промени. Това може да се онагледява, като се намери местоположението на точките на заприщване. За целта скоростта  $V_{\theta}$  по уравн. (6.37) се приравнява на нула, в резултат на което се получава



Фиг. 6.14

$$\sin \theta_{кр} = - \frac{\Gamma}{4\pi V_0 R}. \quad (6.38)$$

Очевидно възможно е следното разположение на критичните точки. При  $\Gamma=0$  е налице безциркуляционно обтичане и  $\theta_{кр}=0$  и

$\frac{\pi}{2}$  (фиг. 6.14 а). При  $\Gamma < 4\pi V_0 R$  двете критични точки  $A$  и  $B$  са разположени по контура на цилиндъра симетрично спрямо ос  $y$  в диапазона  $A$  ( $180 < \theta < 270^\circ$ ) и  $B$  ( $270 < \theta < 360^\circ$ ) при избрания знак на циркулацията (фиг. 6.14 б).

Ако  $\Gamma = 4\pi V_0 R$  от (6.38) се получава  $\sin \theta_{кр} = 1$  или  $\theta_{кр} = 270^\circ$ . Това показва, че двете критични точки съвпадат една с друга ( $A = B$ ), като лежат на контура на цилиндъра на ъгъл  $\theta = 270^\circ$  (фиг. 6.14 в). Когато  $\Gamma > 4\pi V_0 R$ ,  $\sin \theta$  приема стойности, по-големи от единица, което е невъзможно. Това означава, че критичните точки напускат контура на цилиндъра, като точка  $A$  лежи извън него на отрицателната страна на имагинерната ос  $y$ , а втората критична точка  $B$  лежи също на ос  $y$ , като остава вътре в цилиндъра (фиг. 6.14 г).

За разлика от предишния случай тук част от флуида, ограничен от затворена токова повърхвина, циркулира около цилиндъра.

Разпределението на налягането по контура на цилиндъра се определя по уравнението на Бернули, приложено по нулевата токова линия, т. е.

$$p = p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} - \frac{\rho V_0^2}{2} \left( 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma}{\pi R V_0} \sin \theta + \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Gamma}{R^2 V_0^2} \right), \quad (6.39)$$

откъдето за коефициента на налягане следва изразът

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{\rho V_0^2} = 1 - \left( 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma}{\pi R V_0} \sin \theta + \frac{\Gamma}{4\pi^2 R^2 V_0^2} \right), \quad (6.40)$$

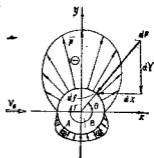
който е показан на фиг. 6.15 за  $\Gamma < 4\pi R V_0$ .

Характерна особеност на разглежданото течение е симетричността на скоростното поле и разпределението на налягането спрямо оста  $y$  и несиметричността им спрямо реалната ос  $x$ . Следователно при циркуляционно обтичане на цилиндър (или на тяло с произволна форма) проекцията на силата на натиск по реалната ос е равна на нула ( $X = 0$ ), докато проекцията му по имагинерната ос  $y$  е различна от нула ( $Y \neq 0$ ). Тя може да се определи от

$$dY = -p \sin \theta df = -p \sin \theta R d\theta$$

или

$$Y = -R \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta.$$



Фиг. 6.15

Като се замести за налягането  $p$  изразът от (6.39), се получава

$$Y = -R \int_0^{2\pi} \left[ \left( p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} \right) \sin \theta - \rho \frac{V_0^2}{2} \left( 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma}{\pi V_0 R} \sin^2 \theta + \frac{\Gamma}{4\pi^2 R^2 V_0^2} \sin \theta \right) \right] d\theta.$$

Тъй като интегралите на членовете в подинтегралния израз, в който фигурират  $\sin \theta$  и  $\sin^2 \theta$ , са равни на нула, различен от нула е само интегралът на третия член и следователно

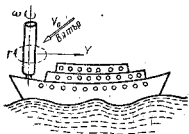
$$Y = \frac{\rho V_0 \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \rho V_0 \Gamma. \quad (6.41)$$

Полученият израз е частен случай от общата теорема на Жуковски, която важи за циркуляционно обтичане на произволен контур. Той показва, че при циркуляционното обтичане на цилиндър се появява сила, наречена *подемна сила*, насочена нормално към несмутеното течение. *Следователно за получаване на подемна сила на тела с цилиндрична или произволна форма, обтечени от успоредно потенциално течение, е необходимо да се създаде скоростно поле, при което циркуляцията по затворен контур, обхващащ тялото, да бъде различна от нула.*

За цилиндрични тела, обтечени от успоредно течение на реален флуид, това може да се осъществи чрез въртелливото им движение, при което поради *плепзаемостта по стените* и вътрешното триене реалният флуид в близката околност на цилиндъра преминава в един вид циркуляционно течение. По този начин се създават условия за циркуляционно обтичане и появяване на подемна сила. С ефекта за появяване на подемна сила при въртящи се цилиндрични тела, открит от Магнус (1852) и наречен по-късно на негово име, се обясняват много наблюдавани и при това интересни явления.

На този принцип се основава историческият опит на Флетнер за създаване на корабен двигател, т. нар. ротор на Флетнер, представляващ вертикален бързовъртящ се цилиндър, монтиран на палубата на кораба, който при наличие на вятър създава подемна двигателна сила, перпендикулярна на направлението на вятъра (фиг. 6.16). В случая успоредното течение е това на вятъра, а циркуляционното течение се създава от въртелливото движение на ротора. Макар че изпитванията на кораб с такъв двигател, проведени от А. Флетнер в Италия (1923), са потвърдили техническата годност на двигателя, той се е оказал неефективен, поради което не е намерил приложение.

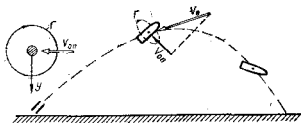
Ефектът на Магнус се наблюдава също така и при движението на въртящите се артилерийски снаряди. С него се изяснява отклонението на снарядите от траекторията им. В тези случаи успоредното обтичане със скорост  $V_0$  (фиг. 6.17) е създадено от постъпателното движение на снаряда по траектория, описвана от центъра на тежестта му, а циркуляционното течение — от въртеликовото движение на снаряда. Аналогичен ефект се наблюдава и при „завъртени“ (фалцови) футболни, тенисови и др. топки, при които интензитетът и посоката на завъртане създават съвършено неочаквани за партньора траектории.



Фиг. 6.16

Обикновено за тела с друга форма появяването на циркуляционното течение не се дължи на въртеликовото им движение. При тях само с подходящ избор на формата им (както е с носещите крила на самолета) в условията на успоредно течение могат да се създадат условия за циркуляционно обтичане и появяване на подемна сила (вж. гл. IV, т. 4.7).

Жуковски, използвайки модела на течението на идеален флуид, е предложил източникът на силовото въздействие на течението върху тялото да се търси в образуването на циркуляцията. Той пръв установява вихровата природа на подемната сила и зависимостта ѝ от циркуляцията на скоростта. На него също така принадлежи идеята (1905 г.), че в циркуляционното течение цилиндърът или крилото може да се замени с единичен вихър (или система от вихри). Тази идея на Жуковски впоследствие се оказва изключително подходяща за решаване на много практически задачи



Фиг. 6.17

не само в самолетостроенето, но също така в корабостроенето, турбиностроенето и др. През 1934 г. Келдиш и Франклем показват, че теоремата на Жуковски за подемната сила остава валидна и за свиваеми газове при подзвукови течения.

#### 6.4. ИЗСЛЕДВАНЕ НА РАВНИНИ ПОТЕНЦИАЛНИ ТЕЧЕНИЯ ЧРЕЗ КОНФОРМНО ИЗОБРАЖЕНИЕ

Както стана известно от досега разглежданите примери, изследването на обтечени тела от успоредни безвихрови течения на идеален флуид предполага познаване на комплексния потенциал на течението. Но тъй като непосредственото определяне на тази аналитична функция често е съпроводено с големи трудности, в много задачи комплексният потенциал се определя по косвен път с помощта на метода на конформното изображение, който поради предимствата си е намерил голямо приложение в хидродинамиката на потенциалните течения. Идеята е от познато общо решение на обтечени тела с проста форма да се определя комплексният потенциал на течението около тела с произволен контур, респ. със сложна форма. Това е възможно, ако е познато съответствието между изследвания контур и този приет за първообраз (еталон), с което именно се занимава конформното изображение.

Същността на метода на конформното изображение се състои в следното. Ако в областта  $D$  на комплексната равнина  $z(x, y)$  е зададена такава аналитична, т. е. диференцируема функция

$$\zeta = f(z), \quad (6.42)$$

която определя еднозначно комплексното число  $\zeta = \xi + i\eta$ , съвкупността на точките от областта  $D$  ще образува в равнината  $\zeta(\xi, \eta)$  нова област  $D_1$ . Следователно аналитичната функция  $\zeta = f(z)$  осъществява взаимно еднозначно изобразяване на областта  $D$  от комплексната равнина  $z$  в областта  $D_1$  на комплексната равнина  $\zeta(\xi, \eta)$ , поради което е възприето да се нарича *изобразителна функция*. В частния случай на всяка линия  $L$ , преминаваща през произволна точка  $z$ , ще съответствува линия  $L_1$ , преминаваща през съответната точка  $\zeta = f(z)$  (фиг. 6.18).

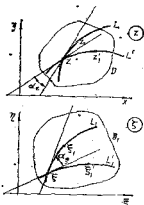
По условие аналитичната функция  $\zeta = f(z)$  има определена производна в точката  $z$ , разположена в областта  $D$ ,

$$f'(z) = \frac{d\zeta}{dz}. \quad (6.43)$$

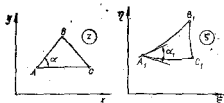
При това тя трябва да бъде така подбрана, че на точките  $z \rightarrow \infty$  да съответствуват точките  $\zeta \rightarrow \infty$ , като производната и в тези точки да е положителна.

Производната  $f'(z)$  е също така комплексно число, чийто модул  $|f'(z)|$  представлява мащабът на образите, а амплитудата му — ъгълът, на който те са завъртени спрямо  $dz$ . Оттук се вижда, че при изобразяване с аналитична функция от вида  $\zeta = f(z)$  се запазва подобие на безкрайно малките линеини елементи или фигури и еднаквост на ъглите във всички точки, в които производната е

различна от нула. Характерно за конформното изображение е и свойството постоянна разтегливост независимо от направлението, поради което фигурите с крайни размери в равнината  $\zeta(\zeta, \eta)$  не са подобни на първообразите им от равнината  $z(x, y)$  (фиг. 6.19).



Фиг. 6.18



Фиг. 6.19

и при подходящ избор на изобразителната функция те могат да се получат значително разтеглени (деформирани) и следователно различни по форма от тях.

Ако комплексният потенциал на течението в равнината  $z(x, y)$  е

$$F(z) = \varphi + i\psi,$$

при изразяване от изобразителната функция  $\zeta = f(z)$  на  $z$  като функция от  $\zeta$ , т. е.

$$z = f^*(\zeta),$$

се получава функцията

$$F(\zeta) = F[f^*(\zeta)] = \Phi + i\Psi, \quad (6.44)$$

която е аналитична функция от комплексната променлива  $\zeta = \zeta + i\eta$  в областта  $D_1$ . Следователно тя може да се разглежда като комплексен потенциал на течението в равнината  $\zeta$ , на която имагинерно спрегнатата скорост е

$$\bar{V}_\zeta = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = \frac{dF(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \bar{V}_z \frac{1}{f'(z)}. \quad (6.45)$$

От последния израз за абсолютните стойности (модулите) на скоростта  $V_\zeta$  се получава

$$|V_{\zeta}| = |V_z| \frac{1}{|f'(z)|}. \quad (6.46)$$

В безкрайно отдалечените точки  $\zeta \rightarrow \infty$  и съответно  $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{z \infty} &= \left| \frac{dF(z)}{dz} \right| = u - iv, \\ \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow \infty} &= k \end{aligned}$$

и следователно

$$V_{\zeta \infty} = \left( \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right)_{\zeta \rightarrow \infty} = k \bar{V}_{z \infty}. \quad (6.47)$$

Този резултат показва, че в безкрайно отдалечените точки на равнината  $\zeta$  скоростта на течението се различава от тази на равнината  $z$  с големината на константата, т. е.

$$|V_{\zeta}| = k |V_{z \infty}|.$$

Очевидно потенциалите на двете течения, пресметнати по конформно съответстващите линии, са еднакви

$$\oint (\zeta) = \int |V_{\zeta}| \cos \alpha_{\zeta} d\zeta = \int |V_z| \frac{1}{|f'(z)|} \cos \alpha_z |f'(z)| dz = \varphi,$$

тъй като в конформно съответстващите точки ъглите са еднакви, т. е.  $\alpha_{\zeta} = \alpha_z$ .

По аналогичен начин следва, че и циркуляциите по конформно съответстващите затворени контури са еднакви, т. е.

$$\Gamma_{\zeta} = \Gamma_z.$$

В зависимост от случая изобразителната функция може да бъде различна по вид. Най-прости са например преобразуванията на функцията от вида

$$\zeta = z + a, \quad \zeta = az, \quad \zeta = \frac{a}{z},$$

където  $a$  може да се разглежда като комплексно число. Много добри резултати са получени при използване за изобразителна функция на предложения от Н. Е. Жуковски краен ред

$$\zeta = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{a^2}{z} \right), \quad (6.48)$$

който представлява част от безкрайния ред

$$\zeta = f(z) = a_0 z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n}, \quad (6.49)$$

чието производна е

$$\zeta' = f'(z) = \frac{d\zeta}{dz} = a_0 - \frac{a_1}{z^2} - \dots - \frac{na_n}{z^{n+1}}. \quad (6.50)$$

За безкрайно отдалечените от началото точки на течението в равнината  $z(x, y)$ , т. е.  $z \rightarrow \infty$ , следва  $\zeta \rightarrow a_0 z$  и  $f'(z) = \zeta' \rightarrow a_0$ , което означава, че

$$V_{0\zeta\infty} = \frac{V_{z\infty}}{a_0}$$

и следователно двете течения в безкрайността имат еднакъв характер, като скоростта на течението в равнината  $\zeta(\xi, \eta)$  се различава по големина с множителя  $\frac{1}{a_0}$ . За изобразителната функция на Жуковски  $a_0 = \frac{1}{2}$  и следователно

$$V_{\zeta\infty} = 2V_{z\infty}.$$

**Примери за прости конформни преобразувания.** За нагледност са разгледани няколко сравнително прости конформни изображения при използване на изобразителна функция по уравнения (6.48). Като първообраз се взема обичането на кръгов цилиндър с радиус  $R=a$  от успоредно течение в равнината  $(x, y)$ .

*Пример 1.* От изобразителната функция

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{R^2}{z} \right)$$

при полагане  $z = R e^{i\theta}$  се получава изразът

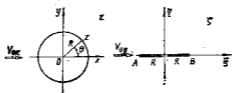
$$\zeta = \frac{R}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = R \cos \theta,$$

който показва, че точките на окръжността в равнината  $z(x, y)$  при изменението на  $\theta$  от 0 до  $2\pi$  лежат в равнината  $\zeta(\xi, \eta)$  по реалната ос  $\xi$  в границите  $-\xi=R$  до  $+\xi=R$ . Следователно посредством така избраната изобразителна функция конформният образ на окръжността с радиус  $R$  от равнината  $z(x, y)$  е отсечка

в равнината  $\zeta(\xi, \eta)$  с дължина  $l=2R$ , разположена на реалната ос  $\xi$  (фиг. 6.20).

Комплексният потенциал (6.27) на напречно обтечен кръгов цилиндър от успоредно течение със скорост  $V_0$  е

$$F(z) = V_0 z \left( z + \frac{R^2}{z} \right).$$



Фиг. 6.20

Би трябвало от изобразителната функция да се изрази  $z=f^*(\zeta)$  и да се замести в комплексния потенциал. В случая обаче това не е необходимо, тъй като  $z + \frac{R^2}{z} = 2\zeta$ , откъдето за комплексния потенциал на обтечената пластина в равнината  $\zeta(\xi, \eta)$ , която е конформен образ на цилиндъра, се получава

$$F(\zeta) = 2V_0 z(\zeta) = V_0 \zeta, \quad (6.51)$$

тъй като в безкрайно отдалечените точки скоростта  $V_0 \zeta = 2V_0 z$ .

Всъщност това е комплексният потенциал на успоредно течение, тъй като безкрайно тънката пластина, разположена по реалната ос, не внася никакви смущения в потенциалното течение.

*Пример 2.* Нека сега в изобразителната функция се положи  $a^2 = -R^2$ , т. е.

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( z - \frac{a^2}{z} \right) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{R^2}{z} \right), \quad (6.52)$$

тъй като  $a=R$ .

При  $z = R e^{i\theta}$  се получава изразът

$$\zeta = \frac{R}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = iR \sin \theta, \quad (6.53)$$

съгласно с който точките от окръжността при изменението на  $\theta$  от 0 до  $2\pi$  се разполагат по имагинерната ос в границите от  $-\eta = R$  до  $+\eta = R$ , т. е. конформният образ на окръжността от равнина

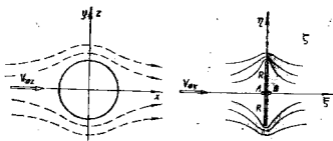
$z$  е отсечка в равнината  $\zeta(\xi, \eta)$  с дължина  $l=2R$ , разположена по имагинерната ос  $\eta$  (фиг. 6.2).

За определяне на комплексния потенциал на течението в равнината  $\zeta$  е необходимо от изобразителната функция да се изрази  $z=f^*(\zeta)$ , т. е.

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{R^2}{z} \right),$$

откъдето

$$z_{1,2} = \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 + R^2}. \quad (6.54)$$



Фиг. 6.21

Като се внесе изразът за  $z$  в комплексния потенциал (6.54), се получава

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= V_{0z} \left( z + \frac{R^2}{z} \right) = V_{0z} (\zeta + \sqrt{\zeta^2 + R^2}) + \frac{R^2}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + R^2}} = \\ &= 2V_{0z} \sqrt{\zeta^2 + R^2} \end{aligned}$$

или

$$F(z) = V_{0z} \sqrt{\zeta^2 + R^2}, \quad (6.55)$$

което е комплексният потенциал на течението около напречно обтечена пластина, чиято имагинерна спрегната скорост е

$$\bar{V}_\zeta = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = \frac{V_{0z} \zeta}{\sqrt{\zeta^2 + R^2}}. \quad (6.56)$$

Вижда се, че  $\bar{V}_\zeta = 0$  за  $\zeta = 0$ , т. е. точките на заприщване (от едната и другата страна на пластината) са разположени в началото на координатната система. За ръбовете на пластината  $\zeta = \pm iR$  следва

$$\bar{V}_c = \frac{V_{0c} R}{\sqrt{i^2 R^2 + R^2}} = \frac{V_{0c}}{\sqrt{-1+1}} = \infty.$$

Следователно скоростта там е безкрайно голяма с направление по оста  $\xi$ . Тъй като обтичането на ръбовете с безкрайно голяма скорост при реалните флуиди е физически невъзможно, течението непосредствено след тях е съпроводено с откъсване и вихрообразуване.

## VII. ДИНАМИКА НА РЕАЛНИТЕ ФЛУИДИ

За разлика от идеалните флуиди, в които действуват само масови и повърхностни сили на натиск, при движение на реалните флуиди се появяват и тангенциални сили, определени от вискозитета на флуида. Това обстоятелство налага динамиката на реалните флуиди да се занимава предимно с анализа на връзката между движението на флуидните частици и действащите върху тях сили и напрежения, включително и тези на вътрешно триене. Същевременно тя има за цел да изясни същността и характера на теченията на реалните флуиди и да даде зависимости за тяхното математично описание.

Изучаването на движението на реалните флуиди показва, че влиянието на вискозитета се изразява не само в появяване на тангенциални напрежения, но и в изменение на големината на нормалните напрежения в сравнение с тези на идеалните флуиди. Това обстоятелство усложнява много вида на диференциалните уравнения на Навие—Стокс за движението на реалните флуиди и създава понякога непреодолими трудности при тяхното интегриране. Ето защо в динамиката на реалните флуиди не винаги са възможни аналитични решения, поради което се използват и опитни резултати, въз основа на които се получават емпирични и полумемпирични зависимости.

### 7.1. ДИНАМИЧНО ПОДОБИЕ НА ФЛУИДНИТЕ ТЕЧЕНИЯ

В сегашното си състояние хидродинамиката все още не може да дава точни аналитични решения на теченията на реалните флуиди, особено на тези с по-сложни начални и гранични условия. В такива случаи най-често се прибегва или към приблизителни полумемпирични решения с въвеждане на опитни коефициенти, или към моделни изследвания при използване на теорията на дина-

мичното подобие. Разбира се, моделните изследвания се правят по различни поводи: за проверка и съпоставяне на теоретични резултати с действителността, за получаване на опитни коефициенти, необходими за полуемпиричните решения, или за определяне на хидродинамичните показатели и характеристики на елементи, машини и съоръжения, които не могат да се получат по теоретичен път, а познаването им е от съществено значение за тяхната работа в експлоатационни условия. Очевидно това чисто приложно значение на метода на моделиране далеч не изчерпва неговите предимства. Той се използва успешно също така и при теоретичното изучаване на сложни явления предимно в техния начален стадий, за който още не са познати аналитични решения на описващите ги закони или въобще няма математична постановка на задачата.

Смисълът на метода на моделиране се изразява главно в това, че по резултатите от опита върху модела може да се съди за явленията, които протичат в натурните условия при оригинала. В случая основателно възниква въпросът, какви трябва да са условията, при които се провежда опитът, така че получените резултати да бъдат пренесени успешно върху оригинала. Отговор на тези въпроси дават законите на механично подобие, чийто основоположник е Нютон, които сега са много добре изучени в механиката на флуидите.

*Две явления са физически подобни (еднакви), ако в съответните моменти от време в съответните им точки от пространството отношенията на характеризиращите ги едноименни физични величини са постоянни.* С други думи, величините в точките на едно явление могат в съответните моменти от време да се получат от едноименните им величини в съответните точки на другото явление чрез умножение с еднакви за всички точки множители, наречени *коефициенти или мащаби на подобие*. Това означава, че двете подобни физични явления се различават само по мащаба на величините и функциите, определящи техните количествени характеристики. Следователно еднаквостта на физичната природа на явленията е основен белег на механичното подобие.

За съществуване на механично подобие между две сравнявани течения е необходимо да бъдат задоволени следните условия.

1. **Геометрично подобие** — подобие на форма, размери или координати, което се изразява в еднаквост на отношенията между всички съответни размери и равенство на съответните ъгли. Ако  $l_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) са дължините (размерите) от едната уредба (оригинала), а  $l'_i$  — съответните им дължини от другата уредба, наречена модел, необходимо е

$$\frac{l_i}{l'_i} = C_i = \text{const.}$$

където  $C_l$  е *коэффициентът на геометрично подобие* за дължини, който показва колко пъти първата уредба е линейно по-голяма ( $C_l > 1$ ) или по-малка ( $C_l < 1$ ) от втората.

За съответните елементарни или крайни сечения и обеми на оригинала и модела може да се запише

$$\frac{t_i}{t_i'} = C_t^3, \quad \frac{V_i}{V_i'} = C_l^3.$$

2. *Кинематично подобие*, изразено в подобие на теченията, респ. движенията. Две течения са кинематично подобни, ако в съответните моменти от време отношението на скоростите на всички съответни флуидни частици е еднакво, а траекториите на тяхното движение са геометрично подобни, или кинематичното подобие се изразява в пропорционалност и успоредност на скоростните вектори в съответните точки на разглежданите течения, т. е. в геометричното подобие на скоростните полета.

Ако  $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) са скоростите в отделните точки на едното течение, а  $V_i'$  — скоростите в съответните точки на другото (моделното) течение, необходимо е

$$\frac{V_i}{V_i'} = C_V = \text{const},$$

където  $C_V$  е *коэффициентът на подобие за скоростите*. В геометрично и кинематично подобните течения може да се внесат още коэффициентите за ускорение  $C_a$  и време  $C_t$ , така че

$$\frac{a_i}{a_i'} = C_a = \text{const} \quad \frac{t_i}{t_i'} = C_t = \text{const}.$$

В случая коэффициентът  $C_t$  показва колко пъти явлението в първото течение протича по-бавно ( $C_t > 1$ ) или по-бързо ( $C_t < 1$ ) от това във второто.

При това всеки един от тези мащаби може да бъде изразен посредством койго и да е друг мащаб за дължина.

$$C_V = \frac{V}{V'} = \frac{l/l'}{l'/l'} = \frac{C_l}{C_t}, \quad C_t = \frac{C_l}{C_V}, \quad C_a = \frac{C_V}{C_t} = \frac{C_l}{C_t^2}.$$

3. *Динамично подобие*, изразено в подобие на маси и сили. Две течения са динамично подобни, ако масите на съответните частици или елементарни обеми са в еднакво отношение и ако са равни отношенията на едноименните сили, които в определена степен влияят на движението на частиците. Следователно

динамичното подобие предполага еднаквост на плътностите, а също така пропорционалност и успоредност на едноименните силови вектори в съответните точки. Това от своя страна означава геометрично подобие на силовите полета, реса. на съответните силови многоъгълници.

Ако за съответните едноименни сили  $K_i$ , плътности  $\rho_i$ , маси  $m_i$ , налягания  $p_i$  и коефициенти на вискозитета — динамичен  $\mu_i$  и кинематичен  $\nu_i$ , се въведат съответните коефициенти, следва:

$$\frac{K_i}{K_i} = C_K = \text{const}, \quad \frac{\rho_i}{\rho_i} = C_\rho = \text{const}, \quad \frac{m_i}{m_i} = C_m = \text{const},$$

$$\frac{p_i}{p_i} = C_p = \text{const}, \quad \frac{\mu_i}{\mu_i} = C_\mu = \text{const}, \quad \frac{\nu_i}{\nu_i} = C_\nu = \text{const}.$$

Когато  $\mu$  или  $\nu \neq \text{const}$ , трябва да се разглежда още и температурното подобие, тъй като те зависят от температурата.

Обикновено на движението на реалните флуиди оказват влияние масовите сили (най-често теглото), повърхностните сили на натиск и силите от вътрешно триене (вискозитетът). Ако в съответните точки на течението на оригинала и модела се наблюдава еднакво (постоянно) отношение на тези сили, подобие то е пълно. В случай че това условие не е изпълнено, т. е. ако не всички едноименни сили се намират в постоянно отношение, подобие то е частично. Когато не е възможно осъществяването дори и на частично подобие, се прибегва до т. нар. *условно подобие*, при което въз основа на резултатите от моделното изследване се съди за действителните условия не на основата на подобие между модела и оригинала, а на основата на общи закономерности за изменението на характерните явления в зависимост от избраните независими променливи. Тези закони могат да се изучат както по теоретичен път, така и чрез провеждане на системни опити.

На практика при частично подобие обикновено се определя една от силите в качеството на характерна за изучаваното течение и опитът се провежда така, че да се изключи влиянието на останалите като пренебрежимо малки. Също така трябва да се държи сметка, че при моделните изследвания често се нарушават граничните условия, което налага да се въвеждат съответните поправки относно границите на теченията, разработени с помощта на съществуващите теории.

Основна задача на теорията на хидродинамичното моделиране е осигуряването на подобие на явлениято, респ. течението. Същността на моделирането се състои в това, че с намаления (а понякога увеличения) модел се създава хидродинамично явление (течение), подобно на това, което трябва да съществува при ори-

сигнала. Освен това главното предимство на метода на моделиране е обобщаването на резултатите на единичния опит върху цял клас явления. Методът на моделиране осигурява сравнително рационална организация на изследване при значително намаляване на обема на експерименталната работа, на средствата и времето. Основните задачи на моделирането, от решаването на които зависи успехът на изследването, са определянето на най-важните от действащите в разглежданите течения сили и изборът на съответния критерий на частично подобие.

### Хидродинамично моделиране. Критерии на подобие

За да могат резултатите от моделното изследване да се пренесат върху оригинала, т. е. да съществуват постоянни коефициенти на подобие, необходимо е течението в модела да е динамично подобно на това в оригинала. Условието за това се дават от т. нар. *моделни закони*. За техните изводи съществуват различни методи, най-строгий от които се основава на Навие-Стоксовите диференциални уравнения за движението на реалните флуиди. Те се характеризират с това, че в тях компонентите на повърхностните и масовите сили фигурират като отделни членове. Условието за динамично подобие се плуочават, като тези уравнения се запишат в безразмерен вид. За нагледност се разглежда само едно от диференциалните уравнения на Навие-Стокс (4.23), например уравнението в проекции по ос  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u. \quad (7.1)$$

За да се напише уравнението в безразмерен вид, необходимо е всички величини, които влизат в него, да се обезразмерят чрез съответни характерни величини, например за несмутеното течение далеч пред обтеченото тяло ( $V_0, p_0$ ), а също така и с характерните величини на времето  $t_0$  и линейния размер  $l_0$ . Що се отнася до плътността  $\rho$  и земното ускорение  $g$ , те се приемат постоянни в областта на течението. Тогава  $\bar{x} = \frac{x}{l_0}$ ,  $\bar{y} = \frac{y}{l_0}$ ,  $\bar{z} = \frac{z}{l_0}$  са безразмерни координати,  $\bar{u} = \frac{u}{V_0}$ ,  $\bar{v} = \frac{v}{V_0}$ ,  $\bar{w} = \frac{w}{V_0}$  — безразмерни скорости,  $\bar{X} = \frac{X}{g}$  — безразмерна масова сила,  $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$  — безразмерно налягане и  $\bar{t} = \frac{t}{t_0}$  — безразмерно време. Очевидни са равенствата  $x = \bar{x}l_0$ ,  $y = \bar{y}l_0$ ,  $z = \bar{z}l_0$ ,  $u = \bar{u}V_0$ ,  $v = \bar{v}V_0$ ,  $w = \bar{w}V_0$ ,  $X = \bar{X}g$ ,  $p = \bar{p}p_0$ ,  $t = \bar{t}t_0$ , които се заместват в (7.1) и се получава

$$\frac{V_0}{l_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{V_0^2}{l_0} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) =$$

$$= g \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{p_0}{l_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{V_0}{l_0^2} \Delta \bar{u}. \quad (7.2)$$

Направените замествания не изменят размерността на отделните членове, която сега се определя от коефициентите пред безразмерните променливи. Те имат размерност на ускорение и могат да се интерпретират като сили, отнесени за единица маса от флуида. В случая  $\frac{V_0}{l_0}$  представлява *локалните инерционни сили*,  $\frac{V_0^2}{l_0}$  — *конвективните инерционни сили*,  $\frac{p_0}{\rho l_0}$  — *силите на натиск* (налягане),  $\nu \frac{V_0}{l_0^2}$  — *силите на вътрешно триене* и  $g$  — *гравитационните масови сили*.

Уравнението (7.2) може да се приведе в безразмерен вид, ако отделните му членове се разделят на един от коефициентите, например  $\frac{V_0^2}{l_0}$

$$\frac{l_0}{V_0 l_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} =$$

$$= g \frac{l_0}{V_0^2} \bar{X} - \frac{p_0}{\rho V_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\nu}{l_0 V_0} \Delta \bar{u}. \quad (7.3)$$

Както вече се каза, за динамично подобните течения трябва да съществува равенство на безразмерните коефициенти и на безразмерните свободни членове в описващите ги уравнения, които се наричат критерии на подобие. От (7.3) следва, че критериите за подобие на флуидните течения са следните:  $Sh = \frac{l_0}{V_0 l_0}$  — наречен *критерий (число) на Струхал*, който изразява отношението на конвективните към локалните инерционни сили и се има предвид само в неустановените течения;  $\frac{g l_0}{V_0^2} = \frac{1}{Fr}$ , респ.  $Fr = \frac{V_0^2}{g l_0}$ , *критерий на Фруд*, който изразяват отношението на инерционните към тегловните сили;  $Eu = \frac{p_0}{\rho V_0^2}$  — *критерий на Ойлер*, който изразява отношението на силите от налягане и конвективните инерционни сили;  $\frac{\nu}{l_0 V_0} = \frac{1}{Re}$ , респ.  $Re = \frac{l_0 V_0}{\nu}$  — *критерий на*

*Рейнолдс*, който изразява отношението на конвективните инерционни сили към силите от вътрешното триене.

Като се внесат тези критерии в уравн. (7.3), получава се безразмерното диференциално уравнение:

$$\begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\text{Fr}} \bar{X} - \text{Eu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{u}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Очевидно е, че за геометрично и динамично подобие на флуидните течения безразмерните диференциални уравнения на Навие—Стокс за движение на реалните флуиди ще бъдат еднакви с еднакви начални гранични условия, ако критериите Sh, Fr, Eu и Re запазват стойностите си, т. е. за да стане течението в модела динамично подобно на оригиналното, необходимо е

$$\text{Sh}' = \text{Sh}, \quad \text{Fr}' = \text{Fr}, \quad \text{Eu}' = \text{Eu}, \quad \text{Re}' = \text{Re}.$$

Според теорията на подобие то чрез умножаване или деление на критерии на подобие могат да се получат нови критерии. Такаъв е *критерият на Хаген*, който се получава от произведението на Eu и Re, т. е.

$$\text{Ha} = \frac{\rho_0}{\mu V_0} \frac{V_0 l_0}{\nu} = \frac{\rho_0 l_0}{\mu V_0} \quad \text{или} \quad \text{Ha} = - \frac{\rho dp/dl}{\mu V_0} \quad (7.5)$$

и изразява отношението на силите от налягане към силите на вътрешно триене. В уравн. (7.5)  $dp/dl$  представлява надлъжният градиент на течението. Броят на необходимите критерии обаче се запазва, тъй като производният критерий заменя единия от образувалите го.

### Анализ на критериите на динамично подобие

За пълното хидродинамично моделиране е необходимо да се спазва пълно подобие на теченията, т. е. равенство на всички критерии. На практика обаче това е невъзможно и се използва приблизително (частично) моделиране, при което подобие то се осигурява по критерий, който е най-характерен за даденото явление. Така например за стационарните процеси, респ. течения, числото на Струхал няма значение. За теченията без свободна повърхнина съществен е критерият на Рейнолдс, докато при хидро-

динамичното изпитване на турбомашините (турбини, помпи и др.) е необходимо равенство на числата  $Sh$  и  $Eu$ .

В най-общия случай за динамично подобие на установените течения на несвиваем реален флуид в условията на гравитационно силово поле е необходимо да се спазват само критериите на Рейнолдс и Фруд. Изборът на критериите при моделиране на теченията трябва да се прави много внимателно, като се обръща особено внимание на относителната важност на отделните сили във формирането на общата картина на течението.

Обикновено теченията на флуидите се извършват в условията на свободна повърхнина или без свободна повърхнина. Към теченията без свободна повърхнина се отнасят теченията в тръби и закрити канали, а също така и движението на тела в атмосферния въздух или в друга флуидна среда, запълваща големи (неограничени) пространства. Характерно за тези течения е това, че Архимедовата подемна сила винаги уравновесява теглото на флуидните частици, поради което тегловните сили не оказват влияние върху характера на течението — все едно флуидните частици се движат в условията на безтегловност. Това от своя страна показва възможността за пренебрегване на критериите на Фруд. Следователно две геометрично подобни установени течения на реален несвиваем флуид без свободна повърхнина са динамично подобни, ако са равни само числата на Рейнолдс, т. е.

$$Re = R'e, \quad \frac{l_0 V_0}{\nu} = \frac{l'_0 V'_0}{\nu}$$

В случай на еднороден флуид в моделното и оригиналното течение, т. е.  $\nu = \nu'$ , условието на динамично подобие приема вида

$$l_0 V = l'_0 V'$$

откъдето следва

$$V_0 = V_0 C_l$$

Последният израз показва, че моделното течение е подобно на оригиналното, ако характерната скорост в него, а следователно и всички съответни скорости, са толкова пъти по-големи от тези в оригиналното течение, колкото пъти размерите на модела са намалени спрямо тези на оригинала.

За динамично подобните течения по критериите на Рейнолдс сравнително лесно се определят мащабите на отделните величини — скорост, време, сила и др.

От условието  $Re = R'e$ , т. е.  $\frac{V_0 l_0}{\nu} = \frac{V'_0 l'_0}{\nu}$ , следва

$$C_V = \frac{V_0}{V_0'} = \frac{v l_0'}{v' l_0} = \frac{C_p}{C_l}, \quad C_l = \frac{C_l}{C_p} = \frac{C_l^2}{C_p^2},$$

$$C_K = \frac{T}{T'} = \frac{\rho v \int dV / dy}{\rho' v' \int dV' / dy} = C_p C_p C_V C_l = C_p C_V^2, \quad (7.6a)$$

ако  $v = v'$  и  $\rho = \rho'$ , тогава

$$C_V = \frac{1}{C_l}, \quad C_l = C_l^2, \quad C_K = 1. \quad (7.6 б)$$

Обикновено при реализиране на динамично подобие в теченията без свободна повърхвина има два независими пътя. Избира се или геометричният мащаб  $C_l$ , или флуидът в моделната уредба, при условие, че този в оригиналната е познат. При втория начин след избора на флуида се определят коефициентите  $C_p$  и  $C_p$  и по (7.6) — коефициентите  $C_l$ ,  $C_V$ ,  $C_l$ ,  $C_K$ , а въз основа на тях мащабите на всички останали величини.

При изучаването на флуидните течения Рейнолдсовото число може да се използва като мярка за съотношението на инерционните и вискозните сили. При големите стойности на  $Re$  влиянието на вискозните сили става пренебрежимо малко и следователно течението на реалния флуид се доближава по характер до това на идеалния, т. е. до потенциалното течение, с изключение на тясната област на течението край стената, т. нар. *граничен слой*. Когато Рейнолдсовите числа са малки, тогава инерционните сили стават пренебрежими спрямо силите от вътрешното триене. Следователно числото на Рейнолдс е и подходящ критерий за пренебрегване на вискозните или инерционните сили в Навие—Стоксовите диференциални уравнения, което е от съществено значение за тяхното интегриране.

При геометрично подобните течения със свободна повърхвина за осигуряване на динамично подобие е необходимо равенство на критериите на Фруд и Рейнолдс. Спазването на  $F'g = Fg$  довежда до зависимостта

$$\frac{V_0^2}{gl} = \frac{V_0'^2}{g'l'}, \quad C_V = \sqrt{C_g C_l}, \quad (7.7)$$

а спазването на  $R'e = Re$  — до зависимостта

$$C_V = \frac{C_p}{C_l}.$$

Тъй като отношението на скоростите и в двата случая трябва да бъде еднакво при разглеждане на две течения на повърхност-

та на земята и ограничена географска ширина ( $g=g'$  или  $C_g=1$ ) се получава

$$C_l = C_l^r. \quad (7.8)$$

Този израз дава връзката между мащабите на геометрично подобие и кинематичния вискозитет. Важда се, че изборът на флуида на моделното течение, когато този в оригиналното е известен, определя геометричния мащаб. Обратно, при избран геометричен мащаб трябва по уравн. (7.8) да се определи вискозитетът на флуида в моделната уредба, т. е. да се определи с какъв флуид трябва да се провеждат моделните изследвания. Предвид на ограничения диапазон на кинематичния вискозитет на флуидите, срещани в природата и използвани в промишлеността, такъв подбор на флуида в моделното течение практически е неосъществим. Следователно моделирането на течения с едновременно задоволяване на критериите  $Fr$  и  $Re$  се оказва практически невъзможно. Затова в практиката обикновено се запазва неизменен кинематичният вискозитет, като се осъществява равенство на един от критериите на подобие, което е най-съществено за дадения случай.

В някои течения със свободна повърхнина действието на вискозните сили е малко в сравнение с това на гравитационните сили и следователно тяхното моделиране може да се извърши само при спазване на критерия на Фруд. Този критерий има особено значение при изучаване на движението на тела по повърхността на вода, вълнови движения на водата в моретата и океаните, при водосливи и водопади, теченията на реките и в открити канали и др. Например при плъзгане на плавателни съдове и летателни апарати по свободна водна повърхнина се образуват вълни, чието действие върху тялото създава преобладаващата част както на съпротивителната сила, така също и на другите сили и моменти. Критерият на Фруд се използва също така и при течения с големи скорости, които се наблюдават при вертикалните маневри на самолети и други летателни апарати.

Ако при моделиране на динамично подобни течения се спазва само критерият на Фруд, за коефициентите на по-характерните величини се получава

$$C_V = \frac{C_l}{C_t} = \sqrt{C_g C_l}, \quad C_t = \sqrt{\frac{C_l}{C_g}}, \quad (7.9 \text{ a})$$

$$C_K = \frac{G}{G'} = \frac{\rho g W}{\rho' g' W'} = C_\rho C_g C_l^3,$$

а за случаите  $g=g'$  и  $\rho=\rho'$  следва

$$C_V = \sqrt{C_l}, \quad C_t = \sqrt{C_l}, \quad C_K = C_l^2. \quad (7.95)$$

По някога при моделиране на течения със свободна повърхнина по критерия на Фруд се прави корекция за влиянието на вискозитета. За тази цел се използват модели с различни геометрични мащаби, като резултатите за оригинала се получават посредством екстраполиране на резултатите от моделните изследвания. Тук често се срещат трудности при изясняване на вискозния ефект, който става по-силно изразен с намаляването на модела.

Обикновено теченията със свободна повърхнина, при моделирането на които се спазва числото на Фруд, са обект на корабната хидродинамика и земната хидравлика.

В много задачи на хидродинамиката (течения в тръби и канали, обтичане на тела и др.) скоростта и налягането в произволна точка на течението се определят еднозначно от  $Re$ . Следователно  $Eu$  в тези случаи не е критерий на подобие и неговата стойност напълно зависи от другите числа на подобие. Тази зависимост в най-общия случай може да се представи в безразмерния вид

$$Eu = f(Re, Fr, Sh), \quad (7.10)$$

който се нарича *критериално уравнение на течението* и има универсална валидност за геометрично подобни системи независимо от вида на флуида (но несвиваем нютонен флуид) и абсолютните стойности на участващите величини. В някои задачи стойността на специфичната енергия на налягане е зададена и не зависи еднозначно от динамичното налягане в произволните точки на течението. В такива течения  $Eu$  не зависи от другите критерии на подобие и неговото спазване е задължително. Това са теченията през турбомашините, при които скоростта в произволните точки зависи не толкова от  $Re$ , колкото от  $Eu$ .

Свиваемостта на флуидите, която при теченията с малки скорости се пренебрегва, оказва преобладаващо влияние по отношение на вискозните и гравитационните сили при теченията с големи скорости особено около и над звукови. За свиваемите флуиди критерият  $Eu$  може да се представи посредством израза за местната звукова скорост  $a^2 = k \frac{p}{\rho}$ , както следва:

$$Eu = \frac{p_0}{\rho V_0^2} = \frac{k p_0}{k \rho V_0^2} = \frac{a^2}{k V_0^2} = \frac{1}{k Ma}. \quad (7.11)$$

Следователно при газовите течения се появяват два допълнителни критерия:

$$\text{критерий на Поасон } k = C_p / C_v \quad (7.12 \text{ а})$$

$$\text{и критерий на Мах } Ma = V_0 / a. \quad (7.12 \text{ б})$$

Следователно за динамичното подобие на теченията на свиваемите флуиди е необходимо да се спазва равенството на критериите на Рейнолдс, Поасон и Мах.

Едновременното задоволяване на трите критерия обикновено е съпроводено с редица трудности. Установено е, че при една и съща температура динамично подобие по  $Re$  и  $Ma$  може да се реализира само ако скоростите на съпоставяните течения са еднакви, а плътността на флуида в течението на моделната уредба е толкова пъти по-голяма от тази на оригиналното течение, колкото пъти геометричните размери на модела са по-малки от тези на оригинала.

При високите скорости обикновено влиянието на вискозитета може да се пренебрегне и тогава е достатъчно изпълнение на подобие само по числото на Мах.

Критерият на Струхал се използва при неустановените и периодично повтарящите се процеси, като откъсване на течението от обтечени стени, вълнови трептения, сложни движения на флуидните частици (постъпателно и въртливо), периодично повтарящо се движение на витлата на самолетите и хеликоптрите, витлата на осовите турбомашини, корабните витла и др. При всички тези случаи частичното подобие с отчитане на периодичността на явленията изисква равенство на критерия  $Sh$  на съпоставяните течения.

За неустановените течения и периодичните процеси моделирането по  $Re$  и  $Sh$  обикновено се осъществява посредством подбора на съответния мащаб на времето. От условието  $Sh = Sh'$  следва

$$\frac{l}{Vt} = \frac{l'}{V't'} \quad \text{или} \quad C_V = \frac{V}{V'} = \frac{l'l'}{l't'} = \frac{C_l}{C_l'}$$

а от условието  $Re = Re'$

$$\frac{Vl}{\nu} = \frac{V'l'}{\nu'} \quad \text{или} \quad C_V = \frac{C_\nu}{C_l} = \frac{C_\mu}{C_\rho C_l}$$

като след приравняване на съответните мащаби, за скоростта се получава

$$C_l = \frac{C_l^2}{C_\nu} = \frac{C_\rho C_l^2}{C_\mu} \quad (7.13 \text{ а})$$

При един и същи флуид, в оригинала и модела, и една и съща температура  $\nu = \nu'$  ( $C_r = 1$ ), и следователно

$$C_t = C_t^2. \quad (7.13 \text{ б})$$

Когато числото на Струхал се използва при изследване (моделиране) на витла независимо от предназначението им, за характерна скорост се приема скоростта на несмутеното течение пред витлото, а за характерно време и дължина съответно  $t$  — времето за едно завъртане на витлото, и  $d$  — диаметърът на витлото. Тогава критерият на Струхал може да се запише

$$Sh = \frac{n_c d}{\nu} = \frac{1}{\lambda}, \quad (7.14)$$

където  $n_c$  е честотата на въртене на витлото, а  $\lambda$  — коефициентът на скоростта.

Всички основни коефициенти, характеризиращи работата на витлата, както например коефициентите на теглене, мощност и полезно действие (к. п. д.) са функция на числото  $Sh$ , респ. на коефициента на скоростта  $\lambda$ .

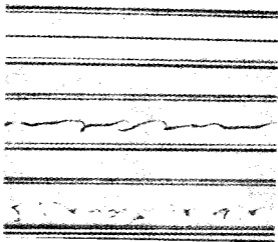
Критерият на Струхал има голямо значение за неустановените течения.

## 7.2. КЛАСИФИКАЦИЯ НА ТЕЧЕНИЯТА НА РЕАЛНИТЕ ФЛУИДИ

Както показва опитът, при движение на реалните флуиди в зависимост от относителната големина на инерционните и вискозните сили характерът на течението и разпределението на скоростта и налягането силно се различават. В механиката на флуидите това обстоятелство служи като основа на два основни принципа в класификацията на теченията на реалните флуиди и за тяхното аналитично изследване. Единият от тях се основава на разликата между ламинарните и турбулентните течения — двата възможни режима на движение, другият — на разликата между пълзящите течения и течението в граничния слой, които са крайните случаи на изява на ефекта на вискозитета.

Ламинарни и турбулентни течения. Още Хаген (1839) и Поазьой (1848) са забелязали признаци за съществуването на два различни вида течения на реалните флуиди. Малко по-късно (1883) този въпрос е бил изяснен от Рейнолдс, който нагледно и убедително показва съществуването на тези два вида течения с помощта на оцветена токова нишка от течението в права прозрачна тръба. Той доказва, че при малки скорости оцветената токова нишка се вижда като права ивица, успоредна на стените на ця-

лата дължина на тръбата (фиг. 7.1 а) и че течението има симетричен слоест характер, поради което е наречено ламинарно (от гръцката дума *lamina*—слой). С увеличаване на скоростта до достигане на някаква гранична стойност течението запазва



Фиг. 7.1

слоестия си характер. При по-нататъшно увеличаване на скоростта оцветената нишка първоначално загубва праволинейния си характер, започва да пулсира и да се разпада на регулярни вихри (фиг. 7.1 б), а на известно разстояние оцветената течност се разсейва по цялото напречно сечение на течението, като не остава дори и следа. Течението става определено пулсиращо със своеобразна вихрова природа и се нарича турбулентно (бурно смутено, вихрово).

Ламинарните течения имат слоест характер. При тях отделните слоеве се движат относително един спрямо друг, защото скоростта по напречното сечение е различна. Движението на флуиди се извършва без макроскопично размесване на частиците (с изключение на молекулната дифузия) от различните слоеве. Тези течения са възможни, когато вискозните тангенциални напрежения и съответните им тангенциални сили, които са породени от молекулния обмен на количество на движение на отделните слоеве на флуида, оказват преобладаващо влияние върху течението.

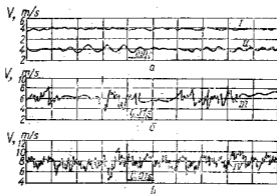
Турбулентните течения са неустановени, безпорядъчни, флукутиращи движения на реалните флуиди, характеризиращи се с хаотично макроскопично размесване на флуидните частици в напречно и надлъжно направление, което е съпроводено със съответни промени на тяхното количество на движение, обмен на импулси и следователно обмен на енергия. Тези течения са възмож-

ни, когато силите от вътрешното триене имат второстепенно значение в сравнение с инерционните и следователно не могат да възпрепятствуват стремежа на флуидните частици за хаотичното им движение и размесване.

Рейнолдс е установил, че нарушаването на слоестото течение и преминаването му в турбулентно се извършва винаги при една и съща стойност на отношението  $\frac{dV}{\nu}$ , наречено по-късно в негова чест *критично число на Рейнолдс* ( $Re_{кр}$ ). Например за течение в права цилиндрична тръба този преход от ламинарно в турбулентно течение се наблюдава при достигане на  $Re = \frac{dV}{\nu} = 2320$ .

Разбира се, той се извършва постепенно, като между ламинарния и турбулентния режим на течението съществува преходен, характеризиращ се с висока степен на неустойчивост. На фиг. 7.2 е показано изменението на локалните скорости във функция на времето при параметър  $Re$  на течение в цилиндрична тръба. При малките стойности на  $Re$  практически не се наблюдават пулсации на скоростта (крива I фиг. 7.2a), като внасянето на краткотрайни смущения довежда до появяване на регулярни пулсации на скоростта, които бързо затихват (крива II (фиг. 7.2a)). При  $Re=2000$  се наблюдават нерегулярни пулсации на скоростта, характерни за преходния режим (фиг. 7.2б). И при  $Re > 2500$  скоростта на течението има изразен нерегулярен пулсационен характер, дължащ се на интензивното взаимодействие на вихрите един с друг, типичен за турбулентното течение (фиг. 7.2в).

Преходът на ламинарно в турбулентно течение в права цилиндрична тръба в зависимост от началните условия (входящ учас-

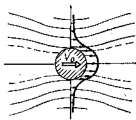


Фиг. 7.2

тък на тръбата, грапавини на стените и др.) настъпва и при големи числа на Рейнолдс. Колкото смущенията при входа в тръбата са по-малки, толкова по-големи са стойностите на  $Re_{кр}$ , които понякога могат да достигнат до  $Re_{кр} = 40\,000$  и повече. Такива

ламинарни течения обаче са неустановени, защото при малко смущение, макар и краткотрайно, те преминават в турбулентни. Споменатата неустойчивост се наблюдава при  $Re > 2320$ . Когато  $Re < 2320$ , теченията имат устойчив ламинарен характер, защото, ако се внесат смущения, които да доведат до турбулизиране, след премахване на смущенията теченията възстановяват ламинарния си характер. Ето защо стойността  $Re_{кр} = 2320$  се приема като граница на устойчивостта на ламинарните течения в прави кръгли тръби. За течения с некръгла форма на напречното им сечение  $Re_{кр}$  ще има по-различни стойности от тези на теченията в цилиндрични прави тръби. Числените стойности на  $Re_{кр}$  зависят от геометрията на теченията, характерните дължини и скорости, избрани за неговото определяне, а също така и от естеството на флуида, респ. от вискозитета му.

**Плъзящи течения.** Плъзящите течения се характеризират с много малки скорости на движение. Към тях могат да се отнесат обтичането на твърди тела при много бавното им движение във вода или други по-вискозни течности, обтичането на леки твърди частици или пращинки при подаването им във въздух, филтрационните движения на флуид (вода, нефт, газ и др.) през слой от дребнозърнеста среда от твърди частици или през порите на каменни, пясъчни и други земни пластове. Обикновено плъзящите течения се разглеждат като граничен случай на ламинарните течения, при които числото на Рейнолдс е много малко и в повечето случаи се приема равно на нула. Характерно за тях е това, че разпределението на скоростта и съотношението между градиента на налягането и масовите сили (предимно гравитационните) се определя само от предаването на тангенциалните напрежения от обтечените стени към вътрешността на течението. Следователно те се извършват в условията на сравнително големи вискозни сили, които влияят върху цялото поле на течението, респ. върху цялото пространство, заето от флуидната среда. Пример за плъзящо течение е показан на фиг. 7.3, която демонстрира бавно движение на сфера, паднала в силно вискозна течност. Вследствие на полепваемостта по стените и вътрешното триене течността е подложена на деформация, която се разпространява във всички направления от сферата, поради което този вид движение се нарича често деформационно течение.



Фиг. 7.3

**Граничен слой.** Съвременните представи за движението на реалните флуиди показват, че вследствие на свойството им полепваемост по стените и вътрешното триене винаги в непосредствена близост на обтечените стени съществува тясна област, в която

скоростта на флуидните частици се променя бързо от нула при неподвижната стена до пълната си стойност в течението извън споменатата област. В тази тясна област, наречена *граничен слой* (слой на триене), чиято дебелина намалява с увеличаване на Рейнолдсовото число, се съсредоточава главната част на изменението на скоростта по напречното сечение, докато извън нея, т. е. във вътрешното течение, изменението на скоростта е слабо. Наличието на силно изразен напречен градиент на скоростта довежда до значителни вискозни напрежения в граничния слой, които са най-големи при стената и намаляват с отдалечаването от нея. Извън граничния слой градиентът на скоростта бързо намалява, следователно бързо намаляват и вискозните тангенциални напрежения, поради което външното течение изпитва незначителното влияние на силите от вътрешното триене. Очевидно неговият характер ще се определя предимно от инерционните сили, а също така от налягането и масовите сили, чието действие до известна степен зависи от геометрията на твърдите граници. Това от своя страна дава основание течението във външната област да се разглежда като течение на идеален флуид, т. е. безвихрово (потенциално). Не стои така обаче въпросът с течението в граничния слой, в който силите от вътрешното триене са големи, но съизмерими на тях са и инерционните сили, тъй като в непосредствена близост до стената могат да се развият и големи ускорения. Ето защо при формиране на течението в граничния слой влиянието на вискозните и инерционните сили върху течението е съизмеримо.

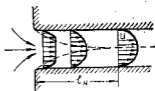
Характерен отличителен признак на граничния слой е едновременното съществуване на две граничещи една с друга области, в които по своята структура течението е различно: *вихрово* в граничния слой и *безвихрово* (потенциално) във външната област, което е толкова по-силно изразено, колкото по-голямо е Рейнолдсовото число. Разбира се, при малките числа на Рейнолдс такава разделяне на споменатите области би било невъзможно. Следователно картината на течението, респ. разположението на токовите линии във външното течение, трябва добре да съответствува на картината на потенциалното течение<sup>2</sup>. В случая обаче се наблюдава слабо изместване на токовите линии<sup>1</sup>, наложено от забавянето на течението в граничния слой, което е в съответствие с условията на непрекъснатостта (фиг. 7.4).

Течението в граничния слой може да бъде едномерно, двумерно, а при обтичане на тела с произволна форма и тримерно. Освен при обтичане на стени и тела с произволна форма граничен слой се образува и в теченията в тръби и канали. Например при течение на реален флуид между две успоредни стени край тях се развива граничен слой, чиято дебелина нараства по дължина на течението. На известно разстояние от началното сечение, т. е. в края на т. нар. начален участък, двата гранични слоя се

допират един в друг, след което по-нататък се установява равномерно течение, което в зависимост от числото  $Re$  има изразен ламинарен или турбулентен характер. Същото може да се каже и за теченията в тръби, където началният участък ще се раз-



Фиг. 7.4



Фиг. 7.5

простре до сечението, в което дебелината на граничния слой ще стане равна на радиуса на тръбопровода (фиг. 7.5).

Необходимо е да се подчертае, че при всички тези случаи за граничен слой може да става дума само в началния участък на течението, след който то става равномерно, стабилизирано ламинарно или турбулентно течение в тръби или канали в зависимост от това дали  $Re \leq Re_{кр}$ .

Граничният слой играе много важна роля в процесите на динамично (съпротивление, подъемна сила и др.) и термодинамично (топло- и масообмен) въздействие на течението на реалните флуиди с обтечени твърди тела.

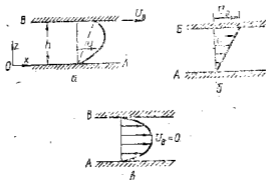
Докато ламинарното и турбулентното течение са двата възможни режима на движение на реалните флуиди, пълзящото течение и граничният слой са двата гранични случая на проява на реалността на флуидите, респ. на вискозитета. Обикновено пълзящото движение има място при филтрациите на течности с по-голям вискозитет или при течения с много малка скорост, а граничният слой — при флуидите с по-малък вискозитет. При това първото може да бъде само ламинарно, докато течението в граничния слой може да бъде както ламинарно, така и турбулентно.

Описаните видове течения, с изключение на пълзящото (което намира съществено приложение в земната хидравлика), са обект на по-детайлно изучаване в следващите глави.

### 7.3. ЛАМИНАРНИ ТЕЧЕНИЯ

При ламинарните течения поради слоестия им характер и малките числа на Рейнолдс влиянието на инерционните сили е пренебрежимо малко в сравнение с преобладаващото влияние на силите от вътрешното триене. Това дава основание за пренебрегване на инерционните сили в Навие-Стоксовите диференциални уравнения за движението на реалните флуиди, което създава значи-

телни улеснения при тяхното интегриране. Особено лесно е изследването на стабилизирани ламинарни течения на несвиваем флуид между успоредни стени, в тръби и канали, които се наблюдават след началния участък. Под *стабилизационно течение*



Фиг. 7.6

се разбира такова установено течение, при което скоростният профил в отделните напречни сечения по дължината му остава един и същи.

Ламинарно течение между равни успоредни стени. Разглежда се установено двумерно ламинарно течение между неограничени равни хоризонтални стени, едната от които (стената А) лежи в равнината  $xOy$ , а другата (стената В) отстои от нея на височина  $h$  и в най-общия случай се движи по направление на ос  $x$  с постоянна скорост (фиг. 7.6). Течението се извършва на слоеве, успоредни на стените, а скоростта на частиците навсякъде е успоредна на ос  $x$ , така че  $v=w=0$  и  $u \neq 0$ . Тъй като стените са неограничени а флуидът е еднороден и изотропен, очевидно е че течението във всяка равнина, успоредна на равнината  $xOz$ , трябва да изглежда тъждествено, което означава, че скоростта на течението не зависи от координатата  $x$ . Следователно  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  и съответно  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ .

При тези условия, като се пренебрегнат инерционните сили, диференциалните уравнения на Навие—Стокс (уравни. 4.23) по направления  $x$  и  $z$  могат да се запишат във вида

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (7.15)$$

като компонентите на масовата сила на гравитационното силово поле са

$$X=Y=0 \text{ и } Z=-g.$$

След интегриране на второто уравнение на системата (7.15) се получава

$$p + \rho gz = \text{const},$$

което съответствува на закона на хидростатичното налягане във флуид, намиращ се в условията на гравитационно силово поле.

Очевидно  $\frac{dp}{dx}$  не зависи от  $z$  и може да се запише като  $\frac{dp}{dx}$ .

Тогава от първото уравнение на системата (7.15) следва зависимостта

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} z^2 + C_1 z + C_2$$

и при спазване на граничните условия  $u=0$  при  $z=0$  и  $u=V_B$  при  $z=h$  се получава изразът

$$u = \frac{U_B z}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (hz - z^2), \quad (7.16)$$

който дава *разпределението на скоростта* по напречното сечение.

За дебита на течението, ограничено от двете стени, следва

$$Q = \int_0^h u df = \int_0^h u b dz = bh \left[ \frac{U_B}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^2 \right], \quad (7.17)$$

където  $df = b dz$ , респ.  $f = bh$ ,

и за средната по сечение скорост се получава

$$u_m = \frac{Q}{bh} = \frac{U_B}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^2. \quad (7.18)$$

Ако от последното уравнение се определи надлъжният градиент от налягането

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{6\mu}{h^2} (V_B - 2u_m) \quad (7.19)$$

и се замести в урав. (7.16) се получава друга разновидност на израза за разпределението на скоростта

$$u = \frac{U_B}{h} z - \frac{3}{h^3} (U_B - 2u_m)(hz - z^3). \quad (7.20)$$

Интерес представлява определянето на тангенциалното напрежение  $\tau_{zx}$ , за което съгласно с уравн. (4.18) се получава

$$\tau_{zx} = 2\mu e_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

или

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \mu U_B \left[ 1 - 3 \left( 1 - 2 \frac{U_m}{U_B} \right) \left( 1 - 2 \frac{z}{h} \right) \right]; \quad (7.21)$$

и за тангенциалното напрежение при стените съответно при  $z=0$

$$\tau_{zx_{z=0}} = \mu \frac{U_B}{h} \left[ 1 - 3 \left( 1 - 2 \frac{u_m}{U_B} \right) \right]$$

и при  $z=h$

$$\tau_{zx_{z=h}} = \mu \frac{U_B}{h} \left[ 1 + 3 \left( 1 - 2 \frac{U_m}{U_B} \right) \right].$$

В случая  $\tau_{zx_{z=h}} > \tau_{zx_{z=0}}$ , което е очевидно от по-големия градиент на скоростта при стената  $B$ .

Ако за разглежданото течение се приеме, че има свободна повърхнина, успоредна на координатната равнина  $xOz$ , т. е.  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , се получава моделът на ламинарно течение между успоредни прави стени на Кует (фиг. 7.6 б). От уравн. (7.16) и условието  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  за разпределението на скоростта се получава

$$u = \frac{U_B}{h} z, \quad (7.22)$$

а за тангенциалните напрежения

$$\tau_{zx} = \mu \frac{U_B}{h},$$

което е постоянна величина по цялото напречно сечение, включително и при стените.

В случай че стената  $B$  е неподвижна ( $U_B=0$ ), се получава двумерно ламинарно течение между неподвижни успоредни пра-

ви стени на Поазьой (фиг. 7.6в). По аналогичен начин за разпределението на скоростта по напречното сечение при  $U_B=0$  се получава

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (hz - z^2). \quad (7.23)$$

От условието  $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h}{2} - 1\right)$  се вижда, че максималната скорост съответствува на  $z=h/2$  и се определя от

$$u_{\max} = -\frac{h^2 dp}{8\mu dx}. \quad (7.24)$$

Що се отнася до средната скорост, тя може да се определи от израза

$$u_m = \frac{Q}{bh} = -\frac{b}{hb} \frac{dp}{dx} \int_0^h u dz = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (7.25)$$

където  $b \rightarrow \infty$  е широчината на стените.

Очевидно  $u_m = \frac{2}{3} u_{\max}$ .

Този резултат може да се запише още така:

$$u_m = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{h^2}{12\mu} p \right) = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}. \quad (7.26)$$

Той показва, че полето на местната средна скорост съответствува на някакво въображаемо потенциално течение на идеален флуид със скоростен потенциал  $\varphi_m = -\frac{h^2}{12\mu} p$ .

От уравн. (7.25) за  $\frac{dp}{dx}$  следва изразът

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{12\mu}{h^2} u_m, \quad (7.27)$$

откъдето за разпределението на скоростта по напречното сечение се получава

$$u = \frac{6}{h^2} (hz - z^2) u_m = \frac{6Q}{bh^2} \left( z - \frac{z^2}{h} \right). \quad (7.28)$$

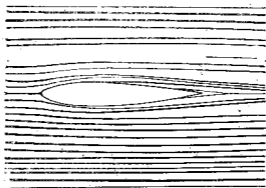
и за тангенциалните напрежения

$$\tau_{zx} = \frac{6\mu}{h^2}(h-2z)u_m = \frac{6\mu Q}{bh^2}\left(1-2\frac{z}{h}\right). \quad (7.29)$$

Последната зависимост показва, че тангенциалните напрежения се изменят по линеен закон, като в средата на напречното сечение ( $z = \frac{h}{2}$ )  $\tau_{zx} = 0$ , а по стените ( $z=0$ ) и ( $z=h$ )

$$\tau_{zx_0} = \pm \frac{6\mu}{h} u_m. \quad (7.30)$$

**Апарат на Шау.** Полученото уравнение показва, че съществува аналогия между установеното ламинарно течение между успоредни стени и безвихровото течение на идеален флуид. Тази аналогия често се използва за демонстрация на равнинно потенциално обтичане на произволен контур (цилиндър, самолетно крило и др.) с помощта на реален флуид. На този принцип е построен апаратът на Шау, който създава възможност за моделиране на течения между успоредни близкостоящи прозрачни плочи, между които се поставя и обтеченият контур. За визуализиране на токовите линии в ламинарното течение се вкарват оцветени тънки струи, които формират токовата картина на плоско потенциално течение. На фиг. 7.7 е показано обтичането на крилен профил от успоредно безциркуляционно течение. Трябва да се отбележи, че токовите картини при разглежданата аналогия са толкова по-ясно изразени, колкото по-малко е числото на Рейнолдс, респ. колкото по-малко е разстоянието между плочите.



Фиг. 7.7

**Филтрационни течения.** Филтрационните течения през порести среди са близко до механизма на теченията на реалните флуиди през сравнително тънки процепи между две успоредни стени. Обикновено те се извършват под действието на гравитационните

масови сили, т. е. теглото на флуидните частици. Характерни за този вид течения са средните стойности на компонентите на скоростта, дефинирани като дебит, който протича през единица лице от нормално ориентираните сечения към координатните оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В средата на XIX век френският хидравлик Дарси въз основа на опита установява връзката между средните стойности на скоростните компоненти на филтрационното движение и налягането, която по същество е обобщение на зависимостта за ламинарните течения между успоредни стени (7.23), а именно

$$u_m = -k \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_m = -k \frac{\partial p}{\partial y}, \quad w_m = -k \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (7.31)$$

където  $k$  е коефициент на филтриране, който зависи от порите на средата и естеството на флуида, т. е.

$$k = \frac{gc}{\nu}.$$

В случая  $c$  е коефициент на порьозност на средата и зависи само от геометричната форма на порите.

Законът на Дарси представлява пространствено усредняване да движението на вискозните флуиди по случайно ориентираните и разнобразни по форма пори на филтриращите среди и за строго определените движения на тези флуиди през тънки процепи между успоредни стени.

От уравнението за непрекъснатостта на осреднените скорости

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} + \frac{\partial w_m}{\partial z} = 0$$

при спазване на (7.31) се получава по отношение на налягането уравнението на Лаплас

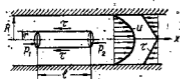
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \Delta p = 0, \quad (7.32)$$

Коеето показва, че сега налягането играе роля на потенциал.

Филтрационните течения се извършват при много малки скорости на движение—няколко сантиметра в секунда, а понякога и по-малки, т. е. при много малки Рейнолдсови числа. Те са обикновено теченията на подпочвените води, движението на водата под язовирните стени и около кладенци, движението на нефта в земните пластове, теченията през филтри от наслоен зърнест материал и др., чиято теория е изучена много добре.

Ламинарно течение в цилиндрична тръба. Разглежда се установено развито ламинарно течение в хоризонтална цилиндрична

тръба по фиг. 7.8, което настъпва след началния участък; скоростните му профили остават по-нататък непроменени и токовете линии са успоредни прави на оста на тръбата, така че окръжната (азимутната) му скоростна компонента  $V_{\theta} = 0$ , радиалната  $V_r = 0$ , осовата  $u = V$  и статичното налягане не се мени по радиуса  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ . Следователно развитото ламинарно течение е осово симетрично и могат да се приложат Навиер-Стоксовите диференциални уравнения (4.25) и (4.26).



Фиг. 7.8

Вижда се, че второто и третото диференциални уравнения на системата (4.25) отпадат и съгласно с гореизложеното първото ѝ уравнение се преобразува във вида

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx}$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (7.33)$$

По-нататък от първото интегриране на (7.33) се получава

$$r \frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1,$$

а от второто

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (7.34)$$

Константите  $C_1$  и  $C_2$  в получения израз се определят от граничните условия:  $u = 0$  за  $r = R$ , където  $R$  е радиусът на цилиндричната тръба и там поради полепваемостта на флуида по стената  $u = 0$  и  $\frac{du}{dy} = 0$  за  $r = 0$ , понеже поради осовата симетрия на течението скоростта има максимум;  $\mu$  и  $\frac{dp}{dx}$  са зададени константи. След заместване на константите  $C_1$  и  $C_2$  от уравн. (7.34) за разпределението на скоростта по напречното сечение се получава<sup>a</sup> зависимостта

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2), \quad (7.35 \text{ a})$$

Или

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2), \quad (7.35 \text{ б})$$

където в съответствие с фиг. 7.8  $\Delta p = (p_1 - p_2)$ .

Вижда се, че скоростният профил представлява квадратна парабола с максимум в средата на тръбата за  $r=0$ , който има големина

$$u_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2. \quad (7.36)$$

Като се положи за лицев елемент от напречното сечение на тръбата  $df = 2\pi r dr$ , за дебита на течението се получава от (7.35) изразът

$$Q = \int u df = 2\pi \int_0^R u r dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (7.37)$$

а за средната скорост

$$V_m = u_m = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{l}, \quad (7.38)$$

следователно  $u_m = 1/2 u_{\max}$ .

От уравн. (7.38) може да се определи падът на налягането

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l} = \frac{8\mu}{R^2} u_m = \frac{8\mu}{\pi R^4} Q \quad (7.39)$$

и следователно за скоростта на напречното сечение се получава окончателният израз

$$u = 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) u_m = \frac{2Q}{\pi R^4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (7.40)$$

Като се познава разпределението на скоростта, от условието за тангенциалните напрежения следва зависимостта

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{4\mu}{R^2} u_m r = -\frac{4\mu Q}{\pi R^4} r. \quad (7.41)$$

Следователно те се менят линейно с радиуса, както е показано на фиг. 7.8, и имат най-голяма стойност по стените, т. е.

при  $r=R$ ,  $\tau_0 = -\frac{4\mu}{R} u_m$  или  $\tau_0 = \frac{4\mu}{\pi R^3} Q$  и  $\tau = \tau_0 r/R$ .

Ако в уравнението за дебита (7.37) вместо  $R$  се запише  $\frac{d}{2}$ , се получава изразът

$$Q = -\frac{\pi}{128\mu} \frac{dp}{dx} d^4 = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta p}{l} d^4, \quad (7.42)$$

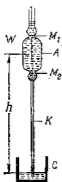
който потвърждава закона на Хаген—Поазой, поради което и останалите уравнения носят тяхното име.

Уравненията на Хаген—Поазой имат много добро съответствие с действителността (опита), което служи за косвено потвърждение на правилността на направените допускания при решаване на Навие-Стоксовите уравнения и избора на граничните условия. Разбира се, получените уравнения са валидни след началния участък на ламинарните течения в цилиндрични тръби.

**Капилярен вискозиметър.** Уравнението за дебита (7.42), записано във вида

$$\mu = \frac{\pi}{128} \frac{\Delta p}{lQ} d^4 = \frac{\pi}{8Q} \frac{\Delta p}{l} R^4,$$

е използвано като основа за опитно определяне на коефициента на вискозитета на флуидите. Ако например се реализира ламинарно течение през тръба с малък диаметър  $d$  при позната разлика в налягане  $\Delta p$  на определена дължина  $l$ , чрез измерване на дебита може да се определя коефициентът на вискозитета на флуида. На този принцип е построен т. нар. капилярен вискозиметър на Фогел-Осак, чийто основен елемент е капилярната тръбичка, снабдена с резервоар, показана на фиг. (7.9). В случая  $R$  и  $l$  са съответно радиусът и дължината на капилярата. Тъй като силите от триене се преодоляват от теглото на течността,  $\Delta p$ , което сега е равно на нула (налягането по свободната повърхнина в резервоара на капилярата  $p_1$  и долния резервоар, в който тя е потопена,  $p_2$  са равни), се заменя с произведението  $\rho gh$ . Дебитът се определя, като се измери времето  $t$ , за което флуидът изтича от резервоара на капилярата с обем, определен с бележите  $M_1$  и  $M_2$ , т. е.



Фиг. 7.9

$$Q = \frac{W}{t}.$$

Тогава

$$\mu = \frac{\pi \rho g h}{8 W l} R^4 t$$

или

$$v = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\pi g h}{8 W l} R^4 t = kt, \quad (7.43)$$

където  $k$  е константата на капиларата. Предвид обстоятелството, че течението не е установено и развито ламинарно ( $h$  се мени, има начален участък), константата  $k$  се определя опитно чрез течности с познат вискозитет и стойността ѝ се отбелязва върху капиларата.

**Начален участък на ламинарно течение в тръби и канали.** Обикновено установеното развито ламинарно течение в тръби и канали се наблюдава на известно разстояние от началното им сечение, т. е. след  $t$  нар. начален участък. Характерно за този участък е, че скоростният профил на ламинарното течение се мени с разстоянието  $x$  от началото му по показания на фиг. 7.10 начин. Всъщност в него постепенно се формира ламинарното течение, докато то приеме характер на установено развито ламинарно течение. Ако входът в тръбата е оформен плавно, разпределението на скоростта в началното сечение е почти еднакво:  $u = u_m$ . От началното сечение нататък под влиянието на вискозните сили и полепваемостта по стената започва преразпределение на скоростта по напречното сечение (фиг. 7.10). Скоростта на флуидните частици в областта край стената, респ. граничния слой, се забавя, което от своя страна довежда до увеличаване на скоростта на частиците в средната област, тъй като дебитът остава непроменен. Дебелината на граничния слой постепенно нараства, докато стане равна на радиуса на тръбата, след което се установява стабилизирано (развито) ламинарно течение с параболичен



Фиг. 7.10

скоростен профил. Участъкът от тръбата, в който разпределение то на скоростта се изменя от разпределението, което тя има в началното сечение, до разпределението, съответстващо на параболичния режим, се нарича *начален участък на ламинарното*

течение. В съответствие с теорията и опита неговата дължина зависи главно от Рейнолдсовото число. Обикновено тя се определя по формулата на Шилер

$$\frac{l_n}{d} = 0,03 \text{ Re} \quad (7.44a)$$

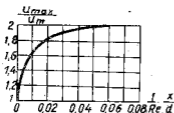
и по-често по формулата на Бусинеск

$$\frac{l_n}{d} = 0,065 \text{ Re}, \quad (7.44б)$$

която има по-добро съответствие с действителността.

Според Прандтл установеното стабилизирано ламинарно течение започва от сечението, в което максималната скорост стане два пъти по-голяма от средната, т. е.  $u_{\max} = 2u_m$ . На фиг. 7.11 е показана зависимостта  $\frac{u_{\max}}{u_m} = f\left(\frac{l}{\text{Re} \cdot d} \cdot \frac{x}{d}\right)$  по дължината на началния участък на цилиндрична тръба, получена по опитен път. Вижда се, че  $\frac{u_{\max}}{u_m} = 2$  едва при  $\frac{l_n}{d} \geq 0,065 \text{ Re}$ .

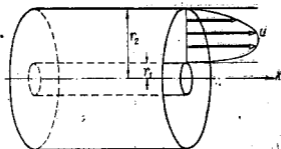
Началният участък се характеризира с по-голям градиент на скоростта особено в началото на тръбата, поради което стойността на тангенциалното напрежение например при стената  $\tau_0$  е най-голямо в началното сечение, след което постоянно намалява, като в края на началния участък приема стойност, определена по закона на Хаген—Поазой, която по-нататък остава постоянна. Що се отнася до надлъжния градиент на налягането в началния участък, той също е по-голям. Това се обяснява с по-големите вискозни сили, чието действие трябва да се преодолява от енергията на налягане, а също така и поради нарастването на кинетичната енергия, вследствие на увеличаването на скоростта в средните области. Обикновено падът на налягането в началния участък е с  $\Delta p' = 1,16 \frac{\rho u_m^2}{2}$  по-голям, отколкото за същата дължина на развитото ламинарно течение.



Фиг. 7.11

Както се вижда от формулата на Бусинеск, дължината на началния участък е сравнително голяма. Например при  $\text{Re} = 2000$ ,  $l_n = 130d$  и отчитането на споменатите особености на течението в началния участък при различни конкретни задачи придобива съществено практическо значение особено при къси тръбопроводи.

Ламинарно течение между два коаксиални цилиндъра. Теоретичното изследване на ламинарното течение между два коаксиални безкрайно дълги цилиндри се извършва по аналогичен начин на ламинарно течение в цилиндрична тръба, като се изле-



Фиг. 7.12

зе от диференциалните уравнения на Навие-Стокс. В случая може да се използва направо полученият след интегриране израз (7.34)

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

От граничните условия (фиг. 7.12)

$$u = 0, \text{ когато } r = r_1$$

$$\text{и } u = 0, \text{ когато } r = r_2,$$

за интеграционните константи се получава съответно

$$C_1 = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1}, \quad C_2 = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1} \ln r_1 - r_1^2 \right].$$

Тогава уравнението за оската скорост е

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[ (r_2^2 - r_1^2) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1} \ln \frac{r}{r_1} \right], \quad (7.45)$$

а за тангенциалните напрежения

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} r - \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r \ln r_2/r_1}. \quad (7.46)$$

Първият член от дясната страна на получения израз е иденти-

чѐн с този на ламинарно тѐчение с цилиндрична вътрѣба, докато вторият член изразява ефекта на новата геометрия. Благодарение на тази нова геометрия наклонът  $\frac{du}{dr}$  се мести от едната страна на другата. Но това не означава, че тангенциалните напрежения на двете стени имат противоположни посоки. Те са в една и съща посока и за да се премахне тази трудност,  $r$  трябва да се счита като радиална дистанция, измерена в посока на стената.

Масовият дебит на течението може да се определи посредством интегриране, както следва:

$$q = 2\pi\rho \int_{r_1}^{r_2} ur dr,$$

$$q = \frac{\pi\rho}{8\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1} + r_1^2 - r_2^2 \right). \quad (7.47)$$

Нагледно изследване на влиянието на радиусите на цилиндричната върху разпределението на скоростта е възможно, ако (7.45) се запише във вида

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r_1^2 \left[ \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 - 1 - \frac{\left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1}{\ln r_2/r_1} \ln \frac{r}{r_1} \right].$$

По-нататък изразът  $\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r_1^2 = k_1$ , който има измерение на скорост, се отбелязва с  $k_1$ , отношението на радиусите на цилиндричната върху с  $\frac{r_2}{r_1} = \eta_0$ , а  $\frac{r}{r_1} = \eta$ . Това дава възможност изразът за скоростта да се представи в безразмерен вид, както следва:

$$\frac{u}{k_1} = \frac{\eta_0^2 - 1}{\ln \eta_0} \ln \eta - \eta^2 + 1. \quad (7.48)$$

По аналогичен начин за тангенциалните напрежения по (7.46) се получава

$$\tau = \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} r_1 \left[ 2 \frac{r}{r_1} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r r_1 \ln r_2/r_1} \right]$$

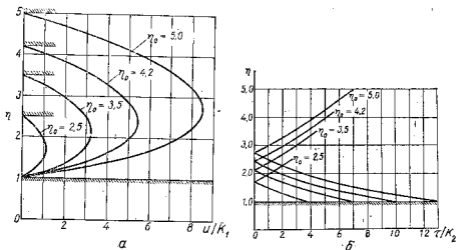
или, изразявайки

$$k_2 = \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} r_1,$$

следва изразът

$$\frac{\tau}{k_2} = \frac{\eta_0^2 - 1}{\eta \ln \eta_0} - 2\eta. \quad (7.49)$$

Безразмерните зависимости за скоростта и тангенциалното напрежение са показани съответно на фиг. 7.13 а, б, където за па-



Фиг. 7.13 а, б

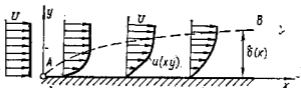
раметър е приета величината  $\eta_0$ . Вижда се много добре, че по цилиндричните повърхнини, по които стойността на тангенциалното напрежение е равна на нула, скоростта има максимални стойности.

#### 7.4. ГРАНИЧЕН СЛОЙ

Както е изложено в т. 7.2, при теченията на реалните флуиди вследствие на свойствата им полепваемост и вътрешно триене винаги в непосредствена близост на обтечени стени в една тясна област, наречена *граничен слой*, скоростта намалява бързо от стойността си в потенциалното течение до стойност нула при стените (ако те са неподвижни). Поради малката му дебелина в него напречният градиент на скоростта има големи стойности, тъй че въпреки голямото Рейнолдсово число на течението в него вискозните сили стават сравними с инерционните. Следователно пренебрегването на вискозитета в отдалеченото от стената течение не може да се приложи за граничния слой. Това именно

налага при изследване на граничния слой да се държи сметка за силите на вътрешно триене.

На фиг. 7.14 е показано приблизително разпределение на скоростта в граничния слой на равнинно течение край стена, която



Фиг. 7.14

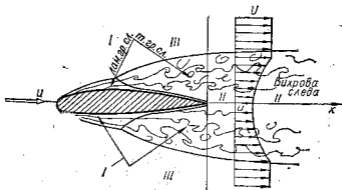
е в покой, където за нагледност линейният мащаб по ос  $y$  е силно увеличен. Линията  $AB$ , която разделя граничния слой от външното течение, е геометрично място на дебелината на граничния слой  $\delta(x)$ . Тя се дефинира като разстояние от стената  $\delta$ , на което скоростта  $u$  се различава от скоростта на външното течение  $U$  с около 1%, т. е.  $u_{y=\delta} = 0,99 U$ . Очевидно такова определение има само условен характер, тъй като преходът от  $u$  към  $U$  е асимптотичен и липсва отличителна точка за външната граница на граничния слой, което затруднява точното определяне на дебелината му.

В направление на течението по дължина на обтечената стена дебелината на граничния слой се ограничава, като външната му граница не съвпада с токовите линии, респ. с токовата повърхнина, и частиците от външното течение непрекъснато проникват в него. В резултат на това при малки Рейнолдсови числа (неголеми скорости на външното течение и дължина на обтечената стена) течението в граничния слой може да запази ламинарен характер по цялата дължина на стената. При по-големи скорости обаче течението в граничния слой запазва ламинарен характер само на известна дължина от началото на стената  $x_d$ , на която съответствува т. нар. критично число на Рейнолдс  $Re_{кр} = \frac{Ux_d}{\nu}$ ;

след нея то преминава в турбулентно. Разбира се, съществува преходна област, в която течението има както ламинарен (частта на граничния слой в близост до стената), така и турбулентен характер (в останалата му част). След преходната област, която е сравнително къса, се развива устойчив турбулентен граничен слой, придружен винаги с много тънък слой при стената, в който течението запазва ламинарен характер, откъдето е получил името *ламинарен подслой* (фиг. 7.15). При обтичане на прави стени критичното число на Рейнолдс се движи в границите  $Re_{кр} \approx 5 \cdot 10^5$  до  $1 \cdot 10^6$  и следователно дължината, до която съществува ламинарният граничен слой, е

$$x_d = \frac{Re_{кр} \nu}{U}$$

Големината на  $Re_{кр}$ , респ.  $x_d$ , е в пряка зависимост от формата на обтеченото тяло, т. е. от закона за изменението на скоростта на външното течение  $U(x)$ , от степента на различните



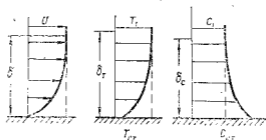
Фиг. 7.15

смущения в него, от градивните на стените и др. Има например случаи, когато ламинарен граничен слой или преходна област по обтечената стена въобще да не съществува.

След обтеченото тяло граничният слой, образуван по горната и долната му повърхнина, преминава в т. нар. *аеродинамична* или *вихрова следа*. Последната се характеризира с интензивно размесване на флуидните частици с тези на външната област, в резултат на което на известно разстояние след обтеченото тяло настъпва изравняване на скоростта по цялото напречно сечение на течението и изчезване на вихровата следа. Следователно при обтичането на тела, включително и прави стени, се наблюдават три области: граничен слой, вихрова следа и външно течение (фиг. 7.16). В съответствие с Нютоновия закон за вътрешното триене в граничния слой и вихровата следа, където градиентът на скоростта е голям, вискозните сили не могат да се пренебрегнат дори и при флуиди с малък вискозитет. Извън граничния слой и следата, където градиентът на скоростта е малък или равен на нула, силите на вътрешното триене могат да се пренебрегнат, т. е. флуидът да се смята за идеален и движението му да се изследва с помощта на Ойлеровите диференциални уравнения. Що се отнася обаче до граничния слой и вихровата следа, флуидът трябва да се разглежда като реален и движението му е подчинено на Навие—Стоксовите диференциални уравнения.

Често във флуидните течения по аналогия на скоростното поле може да се говори за съществуване на температурно поле и кон-

центрация на веществото при наличие на дифузия. Тогава, ако температурата на тялото или концентрацията на веществото по него са различни от тези в течението, в близост до стената съществува област, в която ще се наблюдава съответно изменение на температурата  $T$  или концентрацията  $c$  от стойността им при стената до стойността им в течението (фиг. 7.16). Тази област се нарича съответно *температурен* или *дифузионен граничен слой*.



Фиг. 7.16

В случая по аналогия на динамичния граничен слой може да се говори за *топлинна* или *дифузионна аеродинамична следа* зад обтечено тяло. В най-общия случай тези три гранични слоя могат да съществуват едновременно, независимо че са различни по своя характер.

Условни дебелини на граничния слой. Очевидно е, че дебелината  $\delta$  не може да бъде установена точно поради асимптотичния преход на скоростта в граничния слой към тази на външното течение и следователно тя няма точен количествен смисъл. Ето защо в теорията на граничния слой се въвеждат други условия (интегрални) дебелини на слоя, а именно *дебелина на изместване* (стеснение)  $\delta^*$ , *дебелина на загуба на импулса*  $\delta^{**}$  и *дебелина на загуба на енергия*  $\delta^{***}$ .

Забавянето на течението в граничния слой довежда до съответно изместване на токовите линии, респ. токовите повърхнини, необходимо за задоволяване на уравнението на непрекъснатостта (тъй като токовите линии са линии на постоянен дебит). Нека линията  $AB$  да бъде токова линия на външното течение, където точка  $B$  е разположена на разстояние  $\delta$  от стената (фиг. 7.17 *a*). Разбира се, ако стената е обтечена от идеален флуид, същата токова линия ще бъде успоредна на нея, т. е. линията  $AB'$ . Следователно при течение на реален флуид токовата линия  $AB$  е изместена навътре на разстояние  $\delta^*$ . Тогава от уравнението за непрекъснатостта следва

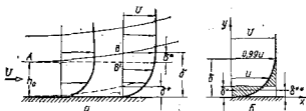
$$q = \rho h_0 U = \rho \int_0^{\delta} u dy,$$

тъй като  $h_0 = \delta - \delta^*$

$$(\delta - \delta^*)U = \int_0^{\delta} u dy$$

или

$$\delta^*U = \delta U - \int_0^{\delta} u dy = \int_0^{\delta} (U - u) dy,$$



Фиг. 7.17

откъдето

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (7.50)$$

По същество дебелината на изместване  $\delta^*$  е разстоянието, на което се изместват токовите линии на външното течение вследствие на образуването на граничен слой. Тя е кинематична величина, която характеризира намаляването на дебита на течението през напречното сечение на граничния слой, обусловено от неговото стесняващо въздействие. Ето защо се нарича още *дебелина на стеснение*. Все едно, ако външното течение запазва скоростта си  $U$  чак до стената (както би било при идеален флуид), дебитът му щеше да се увеличи спрямо този на действителното течение с  $\delta$

$$\rho \int_0^{\delta} (U - u) dy.$$

За да се запази тогава действителният дебит, следва стената да се измести навътре в течението, т. е. последното да се стесни на разстояние  $\delta^*$  (фиг. 7.17 б), така че

$$\rho \delta^* U = \rho \int_0^{\delta} (U-u) dy \quad \text{и} \quad \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

Дебелината на изместване играе съществена роля в съвременните методи за изучаване на теченията на реалните флуиди при големи Рейнолдсови числа: външното течение се обработва както безвихрово (потенциално), като навсякъде контурът на тялото е изместен навън с местната стойност на  $\delta^*$ .

Намаляването на скоростта на навлизащите в граничния слой флуидни частици довежда до намаляване на количеството на движение на течението, определено по израза

$$\rho \int_0^{\delta} u(U-u) dy,$$

което е равно на импулса на силите от триене в граничния слой. Този дефицит на количеството на движение спрямо течението на идеален флуид може да се разглежда като равен на количеството на движение на флуидни частици от външното течение, които преминават за единица време през напречно сечение с дебелина  $\delta^{**}$  със скорост  $U$ , така че

$$\rho U^2 \delta^{**} = \rho \int_0^{\delta} u(U-u) dy$$

и следователно

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (7.51)$$

Масата на флуида в граничния слой загубва част от своята кинетична енергия, равна на

$$\rho \int_0^{\delta} u(U^2 - u^2) dy.$$

Тогава дебелината на загуба на енергия е

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy. \quad (7.52)$$

Всъщност тя представлява дебелината на въображаем слой от външното течение, който се движи със скорост  $U$  и има кинетична енергия, равна на загубената кинетична енергия в граничния слой за преодоляване на действието на вискозните сили.

В теорията на граничния слой често се използва и т. нар. *формпараметър*  $H$ , дефиниран с отношението

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}. \quad (7.53)$$

Изучаването на граничния слой допринася за правилното анализиране на редица важни хидро- и веродинамични явления, като образуването на вихрова следа, откъсването на течението от обтечени стени, определянето на силите от триене по повърхнината на обтечените тела и др. Анализът на движението в граничния слой довежда до решаване на сложни диференциални уравнения. Идеята за съществуването на граничния слой е дадена от Жуковски (1890), като теоретичната му основа е положена от Прандтл (1904) и по-късно развита от Карман, Блазиус, Шлихтинг и др., а в СССР от Лейбензон, Кочин, Голубев, Лойцянский, Дородницин и др. Сега теорията на граничния слой представлява обемист клон на хидродинамиката. По-нататък са изложени с възможно най-простите средства само основите на теорията на граничния слой, които изясняват най-важните феномени и изчислителни методи. По-големи подробности могат да се намерят в специалната литература, например (17, 18, 34).

## 7.5. ЛАМИНАРЕН ГРАНИЧЕН СЛОЙ

Диференциални уравнения на течението в граничния слой. При изследване на течението в граничния слой трябва да се държи сметка за съизмеримостта на вискозните и инерционните сили в него. Вземайки под внимание, че порядъкът на вискозните сили, отнесени към единица обем, е  $\mu \frac{U}{\delta^2}$  (по формулата  $\frac{\tau}{\delta} = \mu \frac{du}{dy} \frac{1}{\delta}$ ), а този на инерционните сили  $\rho \frac{U^2}{l}$  (съответствие с израза  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ ), след приравняването им се получава

$$\mu \frac{U}{\delta^2} \sim \rho \frac{U^2}{l},$$

оттук  $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu l}{U}}$

$$\text{или } \bar{\delta} = \frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (7.54)$$

където  $\text{Re} = \frac{Ul}{\nu}$ , а знакът  $\sim$  означава приблизително равния порядък на величините. Получената зависимост показва, че дебелината на граничния слой е пропорционална на  $\sqrt{\nu l}$ , респ.  $\sqrt{\nu x}$  (в случай че  $l$  се замени с координатата  $x$ ), а безразмерната величина  $\delta/l$  е обратно пропорционална на  $\sqrt{\text{Re}}$ . Следователно с увеличаване на Рейнолдсовото число  $\delta$  ще намалява и когато  $\text{Re} \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

Точното изследване на ламиарния граничен слой се извършва с помощта на диференциалните уравнения на Навие—Стокс. За равнинно течение в равнината  $xu$  се използват първите две уравнения от системата (4.23), които за установено течение при изоставане на масовите сили и поради  $W=0$  преминават във вида

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Поради малката дебелина на граничния слой скоростната компонента  $u$  се мени най-силно в напречно направление, така че  $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$  и членът  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в първото уравнение може да се пренебрегне. От друга страна, напречната скоростна компонента  $v$  и производните ѝ по  $x$  и  $y$  са малки и могат също да се пренебрегнат. Тогава системата диференциални уравнения (7.55) съвместно с уравненията за непрекъснатостта приема вида

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Получената система диференциални уравнения за изследване на граничния слой за пръв път е съставена от Прандтл (1904) и е известна под неговото име. Тя трябва да се интегрира при гранични условия за  $y=0$ ,  $u=v=0$  и за  $y=\delta$

$$u = U(x, y).$$

От второто уравнение на системата (7.56) се вижда, че налягането не се мени по дебелината на граничния слой и остава същото както във външното течение. Така да се каже потенциалното течение налага налягането си на граничния слой. Това дава основание налягането да се приеме като известна функция, зависеща само от надлъжната координата  $x$ . Като известна функция се приема също така и скоростта на потенциалното течение —  $U(x)$ , с която от първото уравнение на системата (7.56) се определя надлъжният градиент на налягането  $\frac{\partial p}{\partial x}$ . За целта при граничните условия  $y = \delta$ ,  $u = U$ ,  $v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  поради малките стойности на двата множителя членът  $v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  е също така много малък и следователно

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (7.57)$$

Този резултат следва непосредствено и от уравнението на Бернули, приложено за външното течение, разглеждано като течение на идеален флуид.

Като се вземе под внимание изразът за  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , диференциалните уравнения на Прандтл за установено течение на несвиваем флуид в граничния слой приемат вида

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.58)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

При решаване на уравненията на Прандтл в началното напречно сечение  $x = x_0$  трябва да бъде зададено разпределението на скоростта  $u(x_0, y)$ . Следователно задачата се свежда до изследване на развитието на зададения начален профил на надлъжните скоростни компоненти при зададено тангенциално напрежение.

Получените диференциални уравнения на Прандтл са приложими и за обтичане на криви стени, които имат плавно очертан контур и радиус на кривина много голям в сравнение с дебелината на граничния слой. Тогава оста  $x$  се полага по контура на обтечената стена в посока на течението с начало обикновено предната точка на заприщване (особената точка), където  $U=0$ , а оста  $y$  — нормално към стената във всяка нейна точка, считайки  $y=0$  по повърхнината ѝ.

Числено решение на ламинарен граничен слой по надлъжно обтечена пластина. Най-простият пример за прилагане на уравненията на граничния слой е обтичането на тънка плоча от установеното течение на несвиваем реален флуид. В случая може да се приеме, че  $U = \text{const}$  и  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , в резултат на което диференциалните уравнения на системата (7.56) приема вида

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (7.59)$$

за които граничните условия са: на стената  $y=0$ ,  $u=v=0$  и за  $y=\delta$ ,  $u=U$ .

Решаването на тези уравнения е извършено за пръв път от Блазиус (1908) при приемане на афинност на скоростното поле в граничния слой. Това означава, че профилът на скоростта остава подобен в отделните напречни сечения по дължина на течението, при което безразмерният скоростен профил  $\frac{u}{U} = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\eta)$  е еднакъв за всички напречни сечения, т. е. функцията  $\frac{u}{U} = F(\eta)$  остава еднаква за всяко  $x$ .

Като се вземе под внимание функционалното съотношение  $\delta \propto \sqrt{\frac{x}{\text{Re}}}$ , за безразмерната променлива  $\eta = \frac{y}{\delta}$  се получава

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{x\sqrt{\text{Re}}} = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}.$$

По-нататък за интегриране на уравнението за непрекъснатостта се въвежда токова функция от вида

$$\psi = \sqrt{\nu x U} f(\eta),$$

където  $f(\eta)$  е безразмерна токова функция. Тогава за скоростните компоненти се получават съответните изрази

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = U f'(\eta), \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U \nu}{x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)]. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Като се заместят стойностите за скоростните компоненти в първото уравнение на Прандтл, се стига до обикновеното диференциално уравнение от трети ред, което има вида

$$-\frac{U^2}{2x} \eta f' f'' + \frac{U^2}{2x} (\eta f' - f) f'' = \nu \frac{U^2}{x\nu} f''',$$

или след съответно опростяване се получава

$$f f'' + 2f''' = 0, \quad (7.61)$$

чието решение трябва да задоволява граничните условия:

$$\text{за } \eta = 0 \rightarrow f = 0 \quad \text{и} \quad f' = 0, \quad \text{за } \eta \rightarrow \infty \rightarrow f = 1.$$

Търсеното решение може да се представи в ред, на който за удобство се придава следният вид:

$$f(\eta) = \frac{a^3}{2!} \eta^2 + \frac{A_3}{3!} \eta^3 + \frac{A_4}{4!} \eta^4 + \dots + \frac{A_n}{n!} \eta^n. \quad (7.62)$$

Вижда се, че е изпълнено граничното условие  $f(\eta) = 0$ , когато  $\eta = 0$ . Коефициентът  $a^3 = f''(0)$  е интеграционна константа, подлежаща на определяне, а  $A_3, A_4, \dots$  трябва така да се подберат, че уравн. (7.61) да се задоволява при произволни стойности на  $\eta$ . За определянето на  $A_3$  и  $A_4$  редът (7.62) се поставя в (7.61), след което сумата от коефициентите пред еднаквите стойности на  $\eta$  се приравнява на нула. Намерените по този начин изрази за  $A_3$  и  $A_4$  се внасят в степенния ред (7.62) и се получава

$$f(\eta) = a \left[ \frac{1}{2!} (a\eta)^2 - \frac{1}{2 \cdot 5!} (a\eta)^5 + \frac{11}{4 \cdot 8!} (a\eta)^8 - \right. \\ \left. - \frac{375}{8 \cdot 11!} (a\eta)^{11} + \frac{27897}{16 \cdot 14!} (a\eta)^{14} \dots \right] = a F(\xi),$$

където

$$\xi = a\eta.$$

По-нататък следва

$$f'(\eta) = a^2 F'(\xi).$$

Численото пресмятане показва убедително, че при  $\eta \rightarrow \infty$  функцията  $F'(\xi)$  се стреми към стойността  $F'(\xi) = 2,0854$ . Тогава,

като се вземе под внимание граничното условие  $\eta \rightarrow \infty f' = 1$ , се получава

$$a^2 = \frac{1}{2,0854},$$

откъдето  $f''(0) = a^3 = 0,322$ .

Предвид на обстоятелството, че теорията на граничния слой се отнася предимно за големите числа на Рейнолдс ( $Re = \frac{Ux}{\nu}$ ), полученият резултат не е валиден за малките  $Re$ , т. е. за малките стойности на  $x$ , респ. предния край на обтечената плоча (стена).

Като се извършват пресмятанията за различните стойности на  $\eta$ , могат да се намерят съответните стойности за  $f'(\eta) = \frac{u}{U}$ , които са дадени в табл. 7.1.

Таблица 7.1

$\eta$	$f'(\eta) = \frac{u}{U}$	$\eta$	$f'(\eta)$	$\eta$	$f'(\eta)$	$\eta$	$f'(\eta)$
0	0,0000	1,6	0,5168	3,2	0,8761	4,8	0,9878
0,2	0,0664	1,8	0,5748	3,4	0,9018	5,0	0,9915
0,4	0,1328	2,0	0,6298	3,6	0,9233	5,2	0,9942
0,6	0,1989	2,2	0,6813	3,8	0,9411	5,4	0,9962
0,8	0,2647	2,4	0,7290	4,0	0,9555	5,6	0,9975
1,0	0,3298	2,6	0,7725	4,2	0,9670	5,8	0,9984
1,2	0,3938	2,8	0,8115	4,4	0,9759	6,0	0,9990
1,4	0,4563	3,0	0,8460	4,6	0,9827		

Полученото решение дава възможност с помощта на (7.50) и (7.51) да се определят зависимостите за

$$\delta^{**} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad (7.63 \text{ а})$$

$$\delta^* = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (7.63 \text{ б})$$

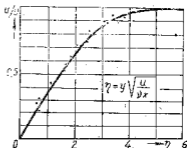
За дебелината на граничния слой  $\delta$ , дефинирана от условието  $u=0,99 U$ , както се вижда от таблицата, може да се запише

$$\delta = 3 \delta^* = 5,2 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (7.63 \text{ в})$$

Всъщност изборът на дебелината  $\delta$  носи условен характер, поради което при сравняване на точността на един или друг метод на пресмятане както помежду им, така и с опита, следва да се оценява или непосредственото разпределение на скоростта, или на тангенциалните напрежения  $\tau$ . На фиг. 7.18 е изобразен безразмерният скоростен профил

$\frac{u}{U} = f(\eta)$  по данните от табл. 7.1 и съпоставен с опита. Вижда се много добро съответствие с изключение на малките стойности на  $\eta$ .

Полученото решение дава възможност да се намери израз за определяне на тангенциалното напрежение по обтечената стена. От зависимостта



Фиг. 7.18

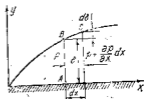
$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \sqrt{\frac{U^3}{\nu x}} f'(0)$$

следва

$$\tau_0 = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}} \quad (7.63 \text{ г})$$

## 7.6. ПРИБЛИЗИТЕЛЕН МЕТОД ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ГРАНИЧНИЯ СЛОЙ

**Импулсно уравнение на граничния слой.** Точното изследване на граничния слой чрез интегриране на Прандтловите уравнения (7.56) и (7.58) за най-общо разпределение на скоростта  $U(x)$  по дължината на обтечената стена е свързано със значителни затруднения. Това обстоятелство е наложило да се търсят други, макар и по-малко точни, но значително по-прости методи, най-разпространените от които се основават на теоремата за количеството на движение, от която следва т. нар. импулсно уравнение на граничния слой.



Фиг. 7.19

Изводът може да се извърши чрез приложение на теоремата за количеството на движение върху елементарен участък от граничния слой. Разглежда се елементарен флуиден обем, ограничен от контролната повърхнина  $ABCO$  (фиг. 7.19), където  $AD$  е твърдата граница, разположена на ос  $x$ ,

$BC$  — външната граница на граничния слой, а  $AB$  и  $CD$  са две близки напречни сечения, разположени едно от друго на разстояние  $dx$ . Разглеждането се прави на широчина  $l$  по направление, перпендикулярно на чертежа.

Очевидно през сечение  $AB$  за единица време ще втича масата  $\rho \int_0^{\delta} u \, dy$ , а през сечението  $CD$  за същото време ще изтича ма-

сата  $\rho \int_0^{\delta} \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy$ , чиято разлика е

$$\rho dx \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u \, dy \right], \quad (7.64)$$

на която ще съответствува нарастване на количеството на движение, отнесено за единица време по направление на ос  $x$ :

$$\rho dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 \, dy. \quad (7.65 \text{ а})$$

От уравнението за непрекъснатостта за несвиваем флуид следва, че през външната граница  $BC$  за единица време трябва да втече в разглеждания обем маса флуид, която е равна на разликата, определена с уравн. (7.64), като нейното количество на движение, отнесено за единица време, ще бъде

$$\rho U dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u \, dy. \quad (7.65 \text{ б})$$

Следователно общата промяна на количеството на движение за единица време по направлението на ос  $x$  е

$$\rho dx \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 \, dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u \, dy \right],$$

която трябва да е равна на сумата от силите, действащи върху разглеждания флуиден обем в същото направление.

Силите на натиск по стените  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  в направление на ос  $x$  са съответно

$$p \delta, p d \delta \text{ и } - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) (\delta + d\delta),$$

чиято резултатна е  $\delta \frac{\partial p}{\partial x}$ . По стените на участъка  $AD$  действа силата на триене  $-\tau_0 dx$ . Тогава в съответствие с теоремата за количеството на движение следва равенството

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - \rho U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0, \quad (7.66)$$

което всъщност е интегралното съотношение за установено течение в граничния слой на несвиваем флуид.

Като се вземе под внимание уравн. (7.57), съгласно с което

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho U \frac{\partial U}{\partial x},$$

и за  $\delta = \int_0^{\delta} dy$  уравн. (7.66) може да се запише още във вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy - \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^{\delta} U dy = -\frac{\tau_0}{\rho}. \quad (7.67)$$

Съвременният запис на интегралното съотношение може да се получи, ако вторият интеграл на (7.67) се представи във вида

$$U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = \int_0^{\delta} U \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^{\delta} \frac{\partial U u}{\partial x} dy - \int_0^{\delta} u \frac{\partial U}{\partial x} dy,$$

като след заместване

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} (Uu - u^2) dy + \frac{\partial U}{\partial x} U \int_0^{\delta} (U - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho}$$

ИЛИ

$$-\frac{\partial}{\partial x} U^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + \frac{\partial U}{\partial x} U \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{\tau_0}{\rho},$$

откъдето

$$-\frac{\partial}{\partial x} U^2 \delta^{**} + U U' \delta^* = \frac{\tau_0}{\rho}.$$

След диференциране на първия член на уравнението и съответно преобразуване се получава окончателният запис на импулсното уравнение:

$$\frac{d \delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} (2 + H) \delta^{**} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}, \quad (7.68)$$

където  $H = \delta^* / \delta^{**}$ .

До същия резултат се стига посредством интегриране по  $y$  на диференциалните уравнения на Прандтл за граничния слой (7.58).

Както се вижда, уравн. (7.68) изразява съотношението между тангенциалното напрежение по обтечената стена  $\tau_0$  и условните дебелини на граничния слой за установено равнинно течение на несвиваем флуид. То е получено за първи път от Карман (1921) и се нарича *интегрално съотношение на Карман*. Тъй като за тангенциалното напрежение  $\tau_0$  не е поставяно условие, импулсното уравнение може да се използва освен за ламинарен, също така и за турбулентен граничен слой. Това е допустимо дотогава, докато импулсният поток (секундното количество на движение), обусловен от турбулентността, е малък в сравнение с потока на количеството на движение, определен от осреднената скорост на течението.

Диференциалното уравн. (7.68) е неопределено, тъй като съдържа три неизвестни  $\delta^*$ ,  $\delta^{**}$  и  $\tau_0$ , които от своя страна са функции на разпределението на скоростта  $u = f(x, y)$  и дебелината на граничния слой  $\delta = f(x)$ , като скоростта на външното течение се приема за зададена. Решението е сравнително просто, ако се използва еднопараметричен скоростен профил. Методите за многопараметрично изследване на ламинарен граничен слой изложени подробно в [16].

Приблизително решение на ламинарен граничен слой по надлъжно обтечена стена. Като пример за приложение на импулсното уравнение на граничния слой се разглежда сравнително простият случай — надлъжно обтичане на безкрайно тънка платина. За този случай диференциалното уравнение (7.68) се оп-

ростява значително, защото по външната граница на слоя скоростта на потенциалното течение е независима от  $x$ , т. е.  $U = \text{const}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$

и следователно то приема вида

$$U^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}$$

За безразмерния скоростен профил на ламинарния граничен слой може да се използва прилаганата от Карман и Полхаузен функция

$$f(\eta) = \frac{u}{U} = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots + a_n \eta^n, \quad (7.69)$$

където  $\eta = \frac{y}{\delta}$  и  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  са постоянни коефициенти, които се определят от граничните условия. При това за определянето на един коефициент на полинома е необходимо едно гранично условие. Следователно броят на членовете в полинома трябва да съответствува на броя на граничните условия. Обикновено полиномът се избира до третия или четвъртия член.

За изясняване на хода на пресмятането за функцията на безразмерния скоростен профил се приемат първите три члена на полинома:

$$\frac{u}{U} = f(\eta) = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2.$$

В случая за определяне на коефициентите  $a_0, a_1$  и  $a_2$  са необходими три гранични условия:

1. При стената  $y = 0$ , респ.  $\eta = 0$ ,  $u = 0$ , респ.  $f(\eta) = 0$ , откъдето се получава  $a_0 = 0$ .
2. На външната граница на слоя, където  $y = \delta$ , респ.  $\eta = 1$ ,  $u = U$  и  $f(\eta) = 1$ , откъдето

$$a_1 + a_2 = 1.$$

От условието  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} = \frac{U}{\delta} \left[\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\right]_{\eta=1} = 0$  следва

$$a_1 + 2a_2 = 0.$$

Тогава от последните две уравнения

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1 + 2a_2 = 0$$

се получава  $a_1 = 2$  и  $a_2 = -1$  и следователно

$$f(\eta) = \frac{u}{U} = 2\eta - \eta^2$$

или

$$\frac{u}{U} = 2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

От получената зависимост  $u = f(y)$  се определят стойностите на условните дебелини на граничния слой и тангенциалното напрежение при стената, както следва:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{1}{3} \delta,$$

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{2}{15} \delta,$$

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 2\mu \frac{U}{\delta}$$

Тогава импулсното уравнение приема вида

$$\frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx} = 2 \frac{\mu}{\rho U \delta}, \quad \delta d\delta = 15 \frac{\nu}{U} dx,$$

откъдето

$$\delta^2 = 30 \frac{\nu x}{U} + \text{const}$$

или

$$\delta = 5,48 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

$$\text{респ. } \frac{\delta}{x} = \frac{5,48}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (7.70 \text{ а})$$

В случая  $\text{const} = 0$ , което следва от граничното условие  $\delta = 0$ , когато  $x = 0$  и  $\text{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$  е местната стойност на Рейнолдсовото число.

Що се отнася до условните дебелини на ламинарния граничен слой и тангенциалното напрежение при стената, те се определят по съответните зависимости

$$\delta^* = 1,827 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

$$\delta^{**} = 0,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

$$\tau_0 = 0,361 \rho U \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \quad (7.70 \text{ б})$$

или

$$\tau_0 = \frac{0,361}{\sqrt{Re_x}} \rho U^2.$$

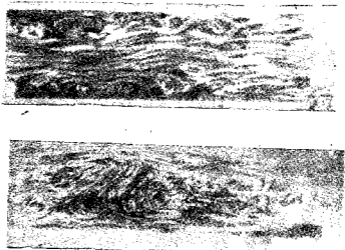
Получените резултати могат успешно да се използват за приблизително пресмятане на граничния слой на тънки профили или други подобни елементи.

## 7.7. ТУРБУЛЕНТНИ ТЕЧЕНИЯ

Турбулентните течения са най-често срещаните в природата и практиката. Турбулентни са разнообразните движения на въздуха в атмосферата, теченията на водата в каналите, реките, моретата и океаните, флуидните течения в тръбопроводи, в турбомашини, в различните промишлени устройства и съоръжения, обтичането на самолети, автомобили, кораби и др., теченията при вентилирането на мини, сгради, промишлени обекти и т. н. В последно време представляват интерес турбулентните течения на плазмите в различните технически устройства, а също така и турбулентните течения в астрофизиката, в космическите облаци, около звездите и др. С други думи, турбулентността буквално ни заобикаля и в природата, и в техническите устройства, свързани с течението на течностите и газовете. Ето защо нейното изучаване безусловно е много важна практическа инженерна задача.

**Механизъм за турбулентните течения.** Докато ламинарните течения имат слоест характер и в тях съществува закономерност в изменението на отделните им хидродинамични величини (скорост, налягане, температура и др.), турбулентните течения се характеризират с нерегулярно изменение на тези величини в пространството и времето, съпроводено с хаотично, интензивно размесване на флуидните частици и съответно предаване на количе-

ството на движение и импулси. За получаване на нагледна представа за турбулентните течения на фиг. 7.20 е показана токова снимка на турбулентно канално течение, получена от Никурадзе с фотографска камера, която се движи с течението.



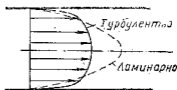
Фиг. 7.20 а, б

След преминаване на ламинарното течение в турбулентно движението на флуидните частици става значително по-сложно, като слоестият характер на течението се нарушава и изчезва. От стените на тръбата се откъсват флуидни маси (молове), които се движат не само в направление на основното течение, но и нормално по него, като едновременно извършват и вихрово движение. Тези флуидни маси попадат във вътрешността на течението и довеждат до размесване между областите на различно разстояние от стените на тръбата, което е несравнимо по-силно от молекулната дифузия, съществуваща и в ламинарното течение. В резултат на главното движение по направление на тръбата се налага и напречно (вторично) движение, перпендикулярно на главното. Траекториите на частиците се получават вече сложни преплетени в резултат на тяхното хаотично движение в различните направления и с различни изменящи се с времето скорости, като едновременно с постъпателното им преместване те извършват и въртеливо движение.

Напречното пренасяне на флуидните маси (молове) в резултат на възникналата моларна дифузия е съпроводено със загуби на тяхната кинетична енергия, при което част от механичната енергия на течението преминава в топлинна. Разбира се, това преминаване е много сложно. Първоначално част от механичната енер-

гия на основното течение преминава в механична енергия на размесваните големи флуидни маси. Последната преминава в механична енергия на размесване на по-малките флуидни малове, получени от разпадането на големите и т. н., докато енергията на собственото движение на най-малките флуидни маси, получени от разпадането на молекулите, преминава непосредствено в топлина. Този процес се нарича *дисипация на механичната енергия*.

Вследствие на интензивния обмен на количеството на движение и импулси разпределението на скоростта в напречното сечение на турбулентното течение се получава по-равномерно в сравнение с ламинарното течение (фиг. 7.21). Това от своя страна представлява сравнително по-малък скоростен коефициент на неравномерност  $\alpha$ , който при големите Рейнолдсови числа клони към единица. Само в област при стената има силно изразен напречен градиент на скоростта, много по-голям от този при ламинарното течение, на който очевидно ще съответствава и по-голямо тангенциално напрежение при стената. Последното от своя страна обуславя по-голям пад в налягане, който при турбулентни течения, в тръби и канали е пропорционален на втората степен от дебита, докато при ламинарните течения падът на налягане е пропорционален на първата степен от дебита. В същото време обаче турбулентността дава възможност да се преодоляват повишените налягания в закъснителните течения, които се срещат при обтечени крила, лопатки на турбомашините, течения в дифузори и др. Турбулентността спомага за забавяне на откъсването на граничния слой, респ. на течението от обтечения контур, подобрява по този начин обтичането и следователно намалява загубите на енергия.



Фиг. 7.21

Турбулентните течения притежават също така голяма способност за предаване на топлина и пасивни примеси, пренасяне на витаещи частици и др. Благодарение на вътрешната им нееднородност те притежават способност да разсейват преминаващите през флуида звукови и електромагнитни вълни и довеждат до флукутация (трепене) на техните амплитуди и фази.

Поради преобладаващото им разпространение в природата и техниката и извънредно сложния им характер от десетилетия насам турбулентните течения са обект на сериозни задълбочени теоретични и експериментални изследвания. Въпреки постигнатите успехи обаче не може да се твърди, че е изградена теория, която изяснява всички феномени и техните закономерности. По тези именно съображения по-нататък са изложени по възможно най-краткия начин онези явления и закономерности на турбулент-

ните течения, които могат да се смятат за достатъчно изяснени и намират практическо приложение.

**Възникване на турбулентността.** При докритичните Рейнолдсови числа в ламинарните течения се наблюдават преходни явления, изразени в появяването на кратковременни пулсации с голяма честота в резултат на своеобразни турбулентни завихряния, които понякога запълват цялото сечение на тръбата, но в неголеми участъци от нея. По-късно Шилер (1934) свързва това явление с редуващи се образувания на големи вихри по вътрешните стени на тръбата, предимно в началото ѝ, които се откъсват и попадат във вътрешността на течението, където се разрушават и разпадат. Многочислените опити показват недвусмислено, че критичното число на Рейнолдс, при което настъпва преходът от ламинарно в турбулентно течение, не зависи само от диаметъра на тръбата и вискозитета на флуида, а също така и от условията, респ. смущенията, които се появяват във флуидното течение, особено в мястото на втичане в тръбопровода. Именно тези условия обуславят големия диапазон на критичното число на Рейнолдс ( $Re_{кр} = 2320$  до  $40\,000$  и повече). Установено е, че  $Re_{кр}$  в голяма степен зависи от степента на смущенията в ламинарното течение, т. е. от началната турбулентност, която в основни линии се определя от условията на входа в тръбата.

Може да се твърди убедително, че абсолютно установени ламинарни течения в тръби и канали няма. Винаги в тези течения поради наличност на грапавини по вътрешните стени, локални издатъци и ръбове и недостатъчна плавност на входа, а също така и външни вибрации съществуват смущения, характеризирани се с редки пулсации на скоростта, чийто произход частично е свързан с образуването на вихри. Интензивността на тези смущения може да бъде и по-голяма, но вследствие на малката им повърхнина те не могат да изменят ламинарния характер на течението. При малките  $Re$  появлите се смущения се отнасят от течението и затихват под амортизиращото действие на вътрешното триене. При нарастване на  $Re$  и особено в момента на достигане на  $Re_{кр}$  ламинарното течение става чувствително към смущенията, неустойчиво, в резултат на което то скокообразно преминава в турбулентно. Колкото по-големи са интензитетът, мащабът и честотата на смущението, толкова по-малки са и стойностите на  $Re_{кр}$ .

Теченията на реалните флуиди могат да бъдат турбулентни не само в тръби и канали, а също така и в граничния слой, който се образува при обтечени твърди тела. В този случай числото на Рейнолдс се определя посредством дебелината на граничния слой  $\delta$  и скоростта на несмутеното външно течение, т.е.

$$Re = \frac{U\delta}{\nu}.$$

Често поради обстоятелството, че  $\delta = f(x)$  числото  $Re$  се определя с дължината  $x$  на контура на обтеченото тяло, измерена от предната точка на заприщване, т. е.

$$Re = \frac{Ux}{\nu}$$

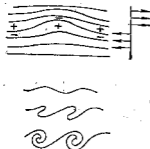
Обикновено при малки  $x$  граничният слой е сравнително тънък и течението в него е ламинарно. С надебеляването на граничния слой обаче по дължина на обтечения контур, докато  $\delta$  достигне определена стойност, която съответствува на някаква критична стойност на Рейнолдсовото число ( $Re_{кр}$ ), течението на граничния слой от това място нататък преминава в турбулентно. Числото  $Re_{кр}$  има различни стойности в зависимост от това, как е оформена носовата (предната) част на обтеченото тяло. Така например за обтечена пластина, чиято носова част е с ръбове или добре закръглена, течението в граничния слой се запазва ламинарно до стойности на числото  $Re = \frac{u l}{\nu}$  съответно  $Re = 6,5 \cdot 10^5$  и  $Re = 3 \cdot 10^6$ , където  $l$  е дължината на пластината.

Турбулентността възниква също така и при движение на два слоя с различни скорости, което се наблюдава след задния ръб на обтечени крила, лопатките на направляващите апарати и на лопатъчните колела на турбомашините или при обтичането на тела с остри ръбове, което е съпроводено с откъсване на течението и вихрообразуване (фиг. 7.22). При всички тези случаи първоначално се появява повърхнина, която разделя слоевете с различни скорости. Обикновено в резултат на някакви смущения от случайни външни причини или смущения, носени от флуида по разделителната повърхнина, се образува вълна с малка амплитуда. Това от своя страна създава условия за увеличаване на скоростта над изпъкналата част на вълната и намаляване на скоростта под нея (фиг. 7.23), което следва от уравнението за непрекъснатостта. В съответствие с уравнението на Бернули следва, че над гребена на вълната налягането ще се понижи спрямо това на несмутеното течение, а под гребена ще се увеличи, което ще доведе до появяване на напречен градиент на налягането, стремящ се да увеличи амплитудата на вълната. По-нататък следва разпадане на вълната на отделни вихри, които слагат началото на турбулентното течение. Този процес се наблюдава и при турбулентните струи, които се разпространяват в условията на неподвижна среда или слътно течение от същия флуид с друга скорост. Количествен анализ на неустойчивостта на разделителната повърхнина е направен от Хелмхолц (1868), Ламб (1932) и Ландау Лифшиц (1953). Разбира се, при реалните флуиди, които имат вискозитет, плъзгането на два слоя един спрямо друг поради различната им скорост е невъзможно. При тях

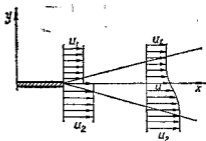
вместо разделителна повърхнина се появява първоначално тънка преходна област, в която скоростта се изменя от скоростта на единия слой до тази на другия (фиг. 7.24). Следователно в тази преходна област скоростният профил има S-образна форма поради асимптотичния му преход към скоростта на двата слоя.



Фиг. 7.22



Фиг. 7.23



Фиг. 7.24

От казаното следва, че турбулентността възниква и съществува в теченията с напречен градиент на скоростта, който е възможен при теченията на реалните флуиди край твърди стени или при движение на флуидни области с различни скорости, каквито са случаите на струйните течения. Ако турбулентността се генерира в течения край твърди стени, се нарича *пристенна турбулентност*, а ако се генерира от напречен градиент, създаден в резултат на разликата в скоростите на две или повече течения, респ. флуидни области, се нарича *свободна турбулентност*.

## Кинематика на турбулентните течения

Вследствие на интензивното вихрообразуване флуидните частици при турбулентните течения описват сложни траектории, а местните скорости и налягания не се запазват постоянни дори и в случаите, когато дебитът на течението не се мени с времето. Те се изменят много често и много неравномерно с времето. Тези изменения, наречени *пулсации* съответно на скоростта и налягането, са най-характерен признак на турбулентността. Следователно турбулентните течения са неустановени, като само при съответни условия могат да се запазят квазистационарни. Макар и в повечето случаи (каквито са теченията в тръби и канали) пулсациите на скоростта да са сравнително малки по отношение на средната по дебит скорост на течението, те имат изключително значение за развитието на течението. Пулсационното движение може да се разглежда като собствено движение на флуидните маси (молове), което се налага на основното осреднено течение. Очевидно е, че при турбулентните течения може да се говори за мигновени скорости в отделните точки на скоростното поле, които всеки момент се менят неравномерно по големина и посока.

В повечето случаи турбулентните течения могат да се разглеждат като установени по средна стойност течения, при които за продължителен интервал от време  $\Delta t = t_2 - t_1$  мигновената скорост  $V(x, y, z, t)$  има във всяка пространствена точка постоянна по време средна стойност, определена по израза

$$\bar{V} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V dt. \quad (7.71)$$

В тези случаи се оказва целесъобразно турбулентното течение да се разглежда като съставено от осреднено по време движение и пулсационно (флукуационно) движение, т. е.

$$V = \bar{V} + V', \quad (7.72 \text{ а})$$

където  $V'$  е скоростта на пулсационното движение. На фиг. 7.25 е показана типична крива за изменението на мигновената скорост с времето на квазистационарното турбулентно течение.

При тримерно разглеждане за скоростните компоненти може да се запише

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad (7.72 \text{ б})$$

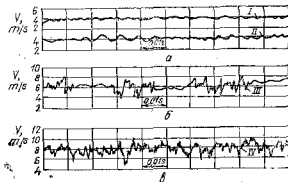
при което

$$\bar{V} = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2} \quad \text{и} \quad V' = \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}.$$

По аналогия на скоростта за налягането, плътността и температурата в произволна точка на течението може да се запише:

$$p = \bar{p} + p', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad T = \bar{T} + T'. \quad (7.72 \text{ в})$$

Тъй като пулсациите на скоростта имат както положителен,



Фиг. 7.25

така и отрицателен знак, средните им по време стойности са равни на нула, т. е.

$$\bar{V}' = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V' dt = 0,$$

$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = 0.$$

При осредненото разглеждане винаги трябва да се взема дълъг интервал от време  $\Delta t = t_2 - t_1$ , така че осреднената стойност на скоростта, респ. компонентите ѝ, да не зависи от времето.

За големината на скоростните пулсации се съди по техните средноквадратични стойности, които са мярка за интензитета на турбулентността. Те се определят по изразите

$$\bar{u'^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u'^2 dt,$$

$$\bar{v'^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v'^2 dt, \quad (7.73)$$

$$\overline{w'^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} w'^2 dt.$$

Интензитетът на турбулентността може в отделни случаи да бъде много различен и се изразява чрез т. нар. *степен на турбулентност*, която се определя по формулата

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}. \quad (7.74 \text{ а})$$

Ако и в трите направления пулсациите са еднакви  $u' = v' = w'$ , налице е изотропна турбулентност, за която

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{V}. \quad (7.74 \text{ б})$$

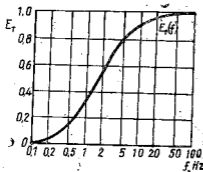
Средната кинетична енергия на турбулентността (пулсационното движение), отнесена за единица маса, се определя по израза

$$\overline{E}_m = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}). \quad (7.75)$$

При турбулентните течения колебанията на скоростта имат различна големина и времетраене, поради което променливото движение в турбулентността може да се смята като резултирало от вълнови движения с различни честоти и дължини на вълните. От друга страна, според опростената представа турбулентността е резултат от хаотично движение на флуидни молекули с различни големина. Малките елементи преминават през разглежданата пространствена точка за по-кратко време и предизвикват високочестотни (късовълнови) трептения, докато големите предизвикват нискочестотни (дълговълнови) трептения, но с по-голям интензитет. Тогава, като се вземе под внимание, че пулсационното движение през цялото време извлича енергия от основното движение, която вследствие на триенето преминава в топлина, от съществено значение е познаването на спектралното разпределение на енергията във функция на отделните честоти. Нека с  $f$  се означава честотата в една произволна точка, а с  $d\overline{E}_m(f)$  промяната на кинетичната енергия на пулсационното движение, съответстваща на безкрайно малко изменение на честотата  $df$ . В случая отношението

$$E(f) = \frac{d\overline{E}_m(f)}{df}$$

дефинира величината  $E(f)$ , чиято зависимост от честотата, изразен на графически, дава спектралното разпределение на енергията на пулсационното движение (фиг. 7.26), поради което се нарича *енергиен спектър*. Очевидно е, че интегралът на енергийния спектър по целия диапазон на честотата, която има място при турбулентните течения, ще определя средната кинетична енергия на турбулентността



Фиг. 7.26

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= \int_0^{\infty} \bar{E}(f) df = \\ &= \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}). \end{aligned} \quad (7.76)$$

Както вече се изтъкна, турбулентността има вихров произход и пренасянето на маси, импулси и енергия се осъществява от флуидни маси (молове). От това следва, че пулсациите по различните направления независимо от техния случаен характер са статистически свързани. Тази връзка се характеризира с коефициентите на корелация между надлъжните и напречните пулсации на скоростта в една и съща точка, т. е.

$$R_{uv} = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{v'^2}}}, \quad R_{uw} = \frac{\overline{u'w'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{w'^2}}}; \quad (7.77)$$

$$\text{където } \overline{u'v'} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u'v' dt \text{ и } \overline{u'w'} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u'w' dt$$

са осреднените по време произведения на пулсационните съставки на скоростта. Всъщност коефициентите на корелация дават указание за взаимодействието между отделните молове, които образувания, придвижвания и разпадания могат да се разглеждат като случайни събития. Обикновено тяхната стойност се мени в границите от 0 до 1. Първата стойност съответствува на случай на отсъствие на взаимодействие между моловете, т. е. отсъствие на връзка между скоростните пулсации, докато стойността 1 изразява здрава връзка между тях.

## Динамика на турбулентните течения

Динамичната задача на турбулентните течения е аналогична на ламинарните течения, а именно: при зададени граници на течението за всяка точка в пространството му да се определят скоростта, тангенциалното напрежение и налягането. За разлика от ламинарните течения турбулентните имат по-сложна структура, изразена главно в пулсацията на всички хидродинамични величини и последвалата от това постоянна нестационарност на полето на течението, което прави невъзможно непосредственото използване на Навие-Стоксовите диференциални уравнения за движението на реалните флуиди. Приблизителното решаване на задачата е станало възможно с въведеното от Рейнолдс допускане турбулентните квазистационарни течения да се описват чрез полето на осреднената по време скорост, респ. чрез скаларните ѝ компоненти  $\bar{u} = \bar{u}(x, y, z)$ ,  $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$  и  $\bar{w} = \bar{w}(x, y, z)$ , тъй като по начало липсва информация за скоростните пулсации  $u' = u'(x, y, z)$ ,  $v' = v'(x, y, z)$  и  $w' = w'(x, y, z)$ , която засега може да се получи само по опитен път.

Очевидно в турбулентните течения голямо значение придобиват съпротивителните сили от изменението на скоростните пулсации и съответните изменения на количествата на движение, предизвикани от интензивното преместване на флуидните маси от един слой в друг. В случая частиците попадат от слой с по-голяма скорост в слой с по-малка скорост или обратно, получават изменение на своето количество на движение поради забавяне или увеличаване на скоростта им до изравняването ѝ с тази на заобикалящата ги флуидна среда. Това именно взаимодействие при изравняване на скоростите е причина за появяването на допълнителни съпротивителни сили. Следователно физичният модел за изясняване на допълнителните турбулентни напрежения се основава на разглеждането на пулсационния обмен на количествата на движение между флуидните частици при тяхното флукутиращо движение.

За определяне на турбулентните напрежения се разглежда за простота квазистационарно течение с направление на осреднената скорост по оста  $x$  (фиг. 7.27), която лежи по обтечена стена, така че аналогично на условията за граничния слой  $\bar{u} = \bar{u}(y)$  е монотонно нарастваща функция, а  $\bar{v} = \bar{w} = 0$ .

Ако през някакъв лицев елемент  $df$ , разположен успоредно на ос  $x$ , от слой 1 за време  $dt$  премине с пулсационна скорост  $v'$  в слой 2 флуидният обем с маса  $\rho v' df dt$  (поради по-малката му скорост от осреднената скорост на окръжаващите го частици), той ще доведе до появяване на пулсационна скорост  $u' \approx \Delta \bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1$ , насочена в обратна посока на движението. В резултат на взаимодействието му с околната флуидна среда, която се движи

по-бързо, този флуиден обем ще получи ускорение и съответно нарастване на количеството на движение  $-\rho u' v' df dt$ , което, отнесено за единица време, може да се интерпретира като допълнителна тангенциална сила:

$$dX' = \tau'_{yx} df = -\rho u' v' df.$$

Оттук за допълнителното тангенциално напрежение при осредняване по време се получава

$$\tau'_{yx} = -\rho \overline{u' v'}. \quad (7.78)$$

Това е равносилно, че слой 1 посредством преминалния флуиден обем въздейства на слоя 2 със силата  $dX'$ , респ. допълнителното тангенциално напрежение  $\tau'_{yx}$ , насочена срещу движението. Отрицателният знак пред произ-

веденнието  $\rho \overline{u' v'}$  се получава от отрицателния знак на пулсацията  $v'$ . В случая положителната пулсация  $v'$  довежда до отрицателна пулсация  $u'$  и обратно, при отрицателна пулсация  $v'$  по ос  $x$  се появява положителна пулсация  $u'$  и следователно винаги произведението  $u' v'$  ще бъде с отрицателен знак.

От друга страна, разглежданият мол при движението си със скорост  $v'$  до попадането му в слоя 2 притежава по направление на ос  $y$  секундно количество на движение  $\rho v'^2 df$ , което изцяло се поглъща от околната флуидна среда. Това от своя страна е равносилно на появяване на мигновена сила на натиск

$$dY' = -\rho v'^2 df,$$

обуславяща съответната пулсация на налягането в това място, респ. на допълнително нормално напрежение

$$\frac{dY'}{df} = \sigma'_y = -\overline{\rho v'^2}. \quad (7.79)$$

По подобен начин могат да се определят за тримерно течение и останалите турбулентни напрежения, които както вискозните образуват свой тензор, т. е.

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{yx} & \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{zy} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho \overline{u'^2} & \rho \overline{u' v'} & \rho \overline{u' w'} \\ \rho \overline{u' v'} & \rho \overline{v'^2} & \rho \overline{v' w'} \\ \rho \overline{u' w'} & \rho \overline{v' w'} & \rho \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (7.80)$$

Тези напрежения възникват в резултат на турбулентното пулсационно движение и се наричат *допълнителни (привидни) напрежения на турбулентните течения*. Те са осреднени по време величини, квадратични спрямо пулсационните съставки на скоростта, и не зависят от вискозитета на флуида.

При извода на Навие—Стоксовите уравнения тези напрежения трябва да се прибавят съответно към вискозните и системата (4.23) за квазиустановено турбулентно течение преминава във вида

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \nu \Delta \bar{u} - \left( \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right), \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \nu \Delta \bar{v} - \left( \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} \right), \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \nu \Delta \bar{w} - \left( \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (7.81)$$

и уравнението за непрекъснатостта

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (7.82)$$

Тези диференциални уравнения са получени от *Рейнолдс* и носят неговото име. При решаването им по отношение на осреднените скоростни компоненти е необходимо да се задоволяват същите гранични условия, както и за действителните скорости при ламинарните течения. Това означава, че всички компоненти на скоростта, включително и пулсационните им съставки, трябва да са равни на нула по обтечните стени, ако същите са неподвижни. Според последното тензорът на привидните турбулентни напрежения (7.80) при стената става равен на нула и следователно там ще действуват само вискозните (нютоновите) напрежения. Всъщност това се наблюдава в ламинарния подслой при стената, в който всяко турбулентно течение има поведение на ламинарно течение. Неговата дебелина обикновено е много малка и понякога трудно може да се измери. Въпреки това обаче ламинарният

подслой, съпътстващ винаги турбулентните течения, оказва решаващо влияние на развитието му и особено на тангенциалното напрежение при стената, което е определящо за съпротивлението от триене. В непосредствена близост до ламинарния подслой започва преходна област, в която вече са възможни пулсациите на скоростта и появяване на турбулентните напрежения, съизмерими с вискозните (молекулярните). След преходната област в направлението към вътрешността на течението турбулентните (молекулярните) тангенциални напрежения са много по-големи от вискозните. Всъщност оттук започва напълно изразеното турбулентно движение в граничния слой или в тръбопроводите и каналите.

Очевидно е, че урavn. (7.78) не е годно за практическо използване, тъй като функциите от времето, по които се менят  $u'$  и  $v'$ , са непознати. Прандтл (1925) е предложил произведенното  $u'v'$  да се замени с осреднената по време скорост  $\bar{u}$ , като за целта внася т. нар. път на размесване  $l$ , който флуидните кълба изминават в напречно направление на основното осреднено течение, докато чрез разпадане и размесване със заобикалящия ги флуид те загубват своята индивидуалност. От корелационните изследвания се установява, че  $l$  е от порядъка на големината на вихровите молове (кълбата). Необходимо е да се допълни обаче, че едновременно с напречното преместване вихровите молове изминават в посока на основното течение много по-дълъг път отколкото в напречно направление.

Нека се приеме, че вихров мол, възникнал в слоя на равнинното течение (фиг. 7.28), разположен от стената на разстояние  $y-l$  и притежаващ скорост  $\bar{u}_{(y-l)}$ , се премества с пулсационна скорост  $v' > 0$  на разстояние  $l$  в направление, перпендикулярно на главното течение. Съгласно със скоростния профил на фиг. 7.28 в новото място скоростта на вихровия мол е по-малка от тази на околната среда с

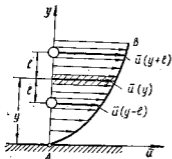
$$\Delta u_1 = \bar{u}_y - \bar{u}_{(y-l)} = \left( \frac{du}{dy} \right) l.$$

По аналогичен начин вихров мол от слоя  $y+l$ , попадащ в слоя  $y$ , има в новото място по-голяма скорост от тази на околната флуидна среда с

$$\Delta \bar{u}_2 = \bar{u}_{(y+l)} - \bar{u}_y = \frac{d\bar{u}}{dy} l,$$

при което

$$v' < 0.$$



Фиг. 7.28

В разглеждания случай разликите в скоростта  $\Delta \bar{u}_1$  и  $\Delta \bar{u}_2$ , породени от напречното движение, могат да се разглеждат като надлъжни турбулентни пулсации, чиято осреднена по време стойност е

$$|\bar{u}'| = \frac{1}{2} \left( |\Delta \bar{u}_1| + |\Delta \bar{u}_2| \right) = l \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right). \quad (7.83 \text{ а})$$

Ако се приеме, че напречните пулсации са от същия порядък,

$$|\bar{v}'| = kl \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|, \quad (7.83 \text{ б})$$

където  $k$  е коефициент на пропорционалност.

Както бе изтъкнато, осредненото по време произведение  $\bar{u}'\bar{v}'$  е различно от нула и е винаги определено. То може да се запише още така:

$$\bar{u}'\bar{v}' = -R_{uv} |\bar{u}'| |\bar{v}'|,$$

където  $R_{uv}$  е фактически коефициентът на корелация, определен по (7.77), който винаги е по-голям от нула и по-малък от единица ( $0 < R_{uv} < 1$ ). Като се заместят в последното равенство изразите за  $|\bar{u}'|$  и  $|\bar{v}'|$  със съответните им от (7.83 а) и (7.83 б), то приема вида

$$\bar{u}'\bar{v}' = -R_{uv} kl^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

$$\text{или } \bar{u}'\bar{v}' = -l'^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2,$$

където  $l'^2 = R_{uv} kl^2$  включва всички постоянни величини. Всъщност  $l'$  е пропорционално на  $l$ , но често се приема като път на размесване, който и без това е неизвестна величина и се определя опитно. Окончателно за турбулентните тангенциални напрежения се получава изразът

$$\tau_x = \rho l'^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (7.84)$$

Изводът на (7.84) е, общо взето, правилно изграден, но съдържа редица силно опростени предпоставки. С него неопределените затруднения при използването на (7.78) са премахнати, но за величината  $l$  липсват зависимости от общ вид.

Формулата на Прандтл (7.84) се използва с успех за пресмятане на турбулентни течения по дължината на, обтечени стени (тръби, канали, пластини и др.), а също така за случаите на т. нар. свободна турбулентност, т. е. за турбулентни течения, неограничени от стените, или при всички случаи, при които е възможно да се установи зависимостта  $l=f(y)$ . При турбулентните течения край стените пътят на размесване се оказва пропорционален на разстоянието от стената, т. е.

$$l=ay, \quad (7.85 \text{ а})$$

а за течение със свободна турбулентност,

$$l=ab, \quad (7.85 \text{ б})$$

където  $b$  е широчината на турбулентната област.

Във всички тези случаи константата  $a$  се определя по опитен път. За обтечена стена (пристенна турбулентност)  $a=0,4$ , а за свободни струи (свободна турбулентност)  $a=0,27$ .

За турбулентните течения в най-общия им вид, където е невъзможно априорното предсказване на зависимостите за пътя на размесване, подходът на Прандтл има ограничена приложимост.

Карман е използвал по-друг модел, съгласно с който турбулентното течение се различава от точка в точка само по мащабите на дължини и време. При такова разположение, което е в съответствие със законите на динамично подобие, той въвежда израза

$$\tau_T = \rho a^2 \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^4}{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)}, \quad (7.86 \text{ а})$$

където  $a$  е универсална константа. Полученият от Карман резултат е еквивалентен на съотношението

$$l = a \frac{du/dy}{d^2u/dy^2}. \quad (7.86 \text{ б})$$

Опитът показва обаче, че  $a$  не е напълно универсална константа и за различните течения тя се мени в известни граници.

Съгласно с хипотезата на Бусинеск привидното тангенциално напрежение може да се определя по формула, структурно аналогична на закона на Нютон за тангенциалните вискозни напрежения,

$$\tau_T = A \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2, \quad (7.87)$$

където  $A = \rho l^2 \frac{d\bar{u}}{dy}$  и тъй като той има измерение на динамичния коефициент на вискозитета  $\mu$ , се нарича коефициент на турбулентен или *вихров вискозитет*. За разлика от  $\mu$   $A$  не е параметър на флуида, променлив е в пространството на турбулентното течение и с изключение на непосредствената близост до обтечени стени е несравнимо по-голям от  $\mu$ .

Общото тангенциално напрежение на двумерно турбулентно течение се определя като сума от вискозното  $\tau_v$  и привидното турбулентно  $\tau_t$  напрежение, т. е.

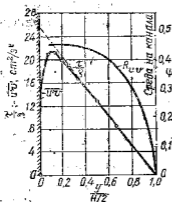
$$\tau = \tau_v + \tau_t = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} + A \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (7.88)$$

Ако по аналогия на молекулярния вискозитет се въведе понятието кинематичен коефициент на вихровия вискозитет  $\epsilon = \frac{A}{\rho} = \frac{m^2}{s}$ , за турбулентните напрежения се получава още изразът

$$\tau_t = \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (7.89)$$

Нагледна представа за изменението на тангенциалното напрежение по напречното сечение на успоредно течение в канал се получава от фиг. 7.29. С плътна линия е показана измерената по опиген път зависимост  $\bar{u}'^2 = f\left(\frac{y}{H/2}\right)$ , а с прекъсвана линия — зависимостта  $\frac{\tau}{\rho} = f\left(\frac{y}{H/2}\right)$ , получена посредством разпределението на налягането независимо от измерените пулсации. Разликата между ординатата на двете криви дава изменението на вискозното тангенциално напрежение. На фиг. 7.29 е показано много добре как във вътрешността на течението общото тангенциално напрежение се определя само от турбулентното напрежение, което се изменя по линеен закон, докато в средата на канала  $\left(\frac{y}{H/2} = 1\right)$  то приема стойност, равна на нула. Към стената обаче след достигане на своя максимум  $\left(\tau_{t \max} \text{ за } \frac{y}{H/2} = 0,1\right)$  турбулентното напрежение започва бързо да намалява, докато при стената, където турбулентните пулсации изчезват, то става равно на нула. В това място обаче, респ. в ламинарния подслой, вискозното напрежение нараства бързо, като при стената то приема максималната си стойност  $\left(\text{в случая } \frac{\tau_v}{\rho} = 26 \text{ cm}^2/\text{s}^2\right)$ .

На същата фигура е показано изменението,  $\psi$ , на коефициента на корелация  $R_{uv}$  между напречната и надлъжната пулсация на скоростта в една и съща точка. Коефициентът на корелация приема максимална стойност в диапазона  $0 < \frac{y}{H/2} < 0,4$  и стойност нула в средата на канала ( $\frac{y}{H/2} = 1$ ).



Фиг. 7.29

**Турбулентна топлопроводност и дифузия.** В турбулентните течения вследствие на интензивното размесване на флуидните частици освен пренасяне на количество на движение се извършва също така пренасяне на топлина, а при дифузионните течения и твърди примеси. Ако отнесеното към единица обем съдържание на такива величини е пространствено променливо, флуидните вихри, идващи от места с по-високо съдържание, изнасят повече отколкото флуидните вихри, идващи от места с по-ниско съдържание, връщат. Така например, ако температурата в различните точки на полето на течението не е еднаква, флуидните

вихри, излизащи от местата с по-висока температура, ще изнасят повече топлина отколкото идващите в тези места флуидни вихри с по-ниска температура ще внасят. В резултат ще настъпи пренасяне на топлина от местата с по-висока температура към местата с по-ниска температура, който процес се нарича *турбулентна топлопроводност*. По аналогия на (7.87) може да се запише

$$Q = c_p A_T \frac{dT}{dy} = c_w \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \frac{d\bar{T}}{dy}, \quad (7.90)$$

където  $Q$  е пренасящата топлина при турбулентното размесване, падаща се на единица площ и време;  $\bar{T}$  — променливата в пространството осреднена по време температура;  $c_p$  — специфичният топлинен капацитет при постоянно налягане;  $A_T$  — *коефициентът на турбулентната топлопроводност*.

Ако течението пренася твърди примеси с концентрация  $c$ , при турбулентното размесване в единица време и през единица площ се пренася маса от тези примеси

$$M = A_c \frac{d\bar{c}}{dt} = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \frac{d\bar{c}}{dt}, \quad (7.91)$$

където  $A_c$  е коефициентът на турбулентна дифузия.

Механизмът на пренасяне на топлина и твърди примеси не е напълно аналогичен на механизма на пренасяне на количество на движение. Ето защо стойностите на коефициентите  $A$ ,  $A_T$  и  $A_c$  не са еднакви. Съгласно с опитни данни може приблизително да се приеме  $\frac{A_T}{A} = 1,4 \div 2$  и  $\frac{A_c}{A} = 1,2 \div 1,4$ .

## 7.8. ПРИСТЕННА ТУРБУЛЕНТНОСТ

Пристенна се нарича турбулентността, която се генерира в теченията на реалните флуиди край твърди стени, характеризиращи се с напречен градиент на скоростта. Обикновено тя се наблюдава при течения в тръби и канали и в граничния слой на обтечените тела. Основната задача е да се намери разпределението на осреднената по време скорост в направление, напречно на турбулентното течение край права стена, като получените резултати се използват както за течение в тръби и канали, така и за турбулентните течения в граничния слой на обтечените тела.

От физична гледна точка течението край стена може да се разглежда като съставено от две рязко различаващи се една от друга области по структура: тънка пристенна област с ламинарно течение, наречена ламинарен подслой с дебелина  $\delta_0$ , в който отсъствуват добавъчните привидни напрежения, и област с напълно оформено турбулентно течение с преобладаващо действие на привидните турбулентни напрежения. Бързото намаляване на силите от вътрешното триене с отдалечаване от стената позволява да се приеме и съществуването на тънка преходна област, в която вискозните и турбулентните напрежения са съизмерими и извън нея вискозните напрежения могат да се пренебрегнат като много малки в сравнение с турбулентните.

За ламинарния подслой на турбулентното течение край права стена, разположена в равнината  $xOz$  (фиг. 7.30) с направление на ос  $x$  и скоростни компоненти  $v=w=0$ ,  $u \neq 0$  и  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , което се извършва в гравитационно силово поле  $X=0$ ,  $Y=-g$ ,  $Z=0$ , Навие—Стоксовите уравнения приемат вида

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

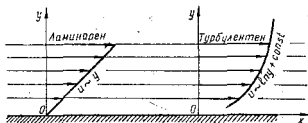
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g.$$

От интегрирането на второто уравнение се получава

$$p + \rho gy = \text{const},$$

което показва, че хидростатичното налягане остава постоянно по напречното сечение на ламинарния подслой.

От интегрирането на първото уравнение следва изразът



Фиг. 7.30

$$u = C_1 y + C_2,$$

за които константи от граничните условия за  $y = 0$ ,  $u = 0$ ,  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_0}{\mu}$  се получава  $C_2 = 0$  и  $C_1 = \frac{\tau_0}{\mu}$ . Следователно

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{y}{\nu},$$

където  $\tau_0$  е вискозното напрежение на триене при стената.

Според получената зависимост изменението на скоростта в ламинарния подслой е линейно, а в съответствие с условието  $\frac{\partial u}{\partial y} = \text{const}$  вискозното напрежение на триене в отделните слоеве е постоянно и равно на напрежението на триене при стената  $\tau_0$ , т. е.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0 = \text{const}.$$

Ако се въведе понятието динамична скорост  $V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  (за което дава основание размерността на тази величина m/s), изразът за разпределението на скоростта в ламинарния подслой може да се запише в безразмерен вид

$$\frac{u}{V_*} = \frac{V_* y}{\nu}. \quad (7.92)$$

Логаритмичен закон за профила на скоростта. За турбулент-

ната област от уравнения на Рейнолдс (7.81) за турбулентно течение край стена се получава

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) &= 0, \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

От второто уравнение след интегриране по  $y$  следва изразът

$$p + \rho gy + \rho \overline{v'^2} = \text{const},$$

според който разпределението на налягането по напречното сечение се различава от хидродинамичното  $p + \rho gy$  със стойността на привидното нормално напрежение  $\rho \overline{v'^2}$ , което е сравнително малко, но в някои по-специални случаи влиянието му може да се окаже съществено.

Първото уравнение на Рейнолдс може да се запише още така:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau_T}{\partial y} = 0,$$

а след интегриране

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_T = C_3.$$

От условието при  $y = \delta_0$ ,  $\tau_T = 0$  следва

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta_0} = \tau_0 = C_3,$$

откъдето

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_T = \tau_0 = \text{const}. \quad (7.93)$$

По-нататък, като се вземе под внимание, че след тънката преходна област вискозното напрежение е пренебрежимо малко, в съответствие с уравн. (7.87) и (7.93) може да се запише равенството

$$\tau_T = \rho l^2 \left( \frac{d \bar{u}}{dy} \right)^2 = \tau_0 = \text{const}$$

или

$$\frac{v_x}{\rho} = V_*^2 = l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2,$$

откъдето  $\frac{du}{V_*} = \frac{dy}{l}$ . (7.94)

От последното уравнение, като се положи съгласно с хипотезата на Прандтл (7.85 а)  $l = ay$  и се извърши интегриране, се получава т. нар. *логаритмичен закон за разпределение на скоростта в турбулентната област*:

$$\frac{u}{V_*} = \frac{1}{a} \ln y + C, \quad (7.95)$$

който може да се използва успешно и в случаите на по-сложни турбулентни течения край стени и в граничния слой на обтечени тела.

От граничното условие при  $y = \delta_0$ ,  $u = u_n$  за константата  $C$  на уравни. (7.95) може да се запише изразът

$$C = \frac{u_n}{V_*} - \frac{1}{a} \ln \delta_0,$$

а от уравни. (7.92)

$$\frac{u_n}{V_*} = \frac{V_*}{v} \delta_0 = \alpha \quad \text{и} \quad \delta_0 = \alpha \frac{v}{V_*}.$$

Следователно за константата  $C$  се получава

$$C = \alpha - \frac{1}{a} \ln \alpha \frac{v}{V_*} = \alpha - \frac{1}{a} \ln \alpha - \frac{1}{a} \ln \frac{v}{V_*},$$

т. е.  $C = B - \frac{1}{a} \ln \frac{v}{V_*}$ ,

където  $B = \alpha - \frac{1}{a} \ln \alpha$ .

След като изразът за константата се замести в уравни. (7.95), то приема окончателния си безразмерен вид

$$\frac{u}{V_*} = \frac{1}{a} \ln \frac{yV_*}{v} + B, \quad (7.96)$$

където  $a$  и  $B$  са безразмерни константи, които се определят по опитен път. Разбира се, те имат известна разлика в стойностите си за течения в тръби и канали и теченията в граничния слой.

Предвид направените допускания при извода на (7.96) включи-

телно и приемането  $\tau = \text{const}$  и обстоятелството, че  $a$  не е абсолютна универсиална константа на даден вид течение, същото уравнение може да се прилага предимно за ограничена зона в турбулентната област, разположена недалеч от обтечената стена. За по-големи разстояния от стената в турбулентната област, където основно значение имат добавъчните турбулентни напрежения, скоростният профил се описва много точно с т. нар. закон за дефицита (разликата) на скоростта. Той е бил получен в резултат на опитите да се приложи логаритмичният закон по уравн. (7.96) за по-големи разстояния от стената, например при течения в тръби до  $y=R$ , а при течения в граничния слой — до  $y=\delta$ . Тогава, като се вземат под внимание тези гранични условия, се получава

$$\frac{u_{\max}}{V_*} = \frac{1}{a} \ln \frac{RV_*}{y} + B,$$

което, извадено от уравн. (7.96), довежда до израза

$$\frac{u_{\max} - u}{V_*} = -\frac{1}{a} \ln \frac{y}{R} \quad (7.97 \text{ а})$$

и съответно за течението в граничния слой

$$\frac{U - u}{V_*} = -\frac{1}{a} \ln \frac{y}{R} \quad (7.97 \text{ б})$$

В случая  $u_{\max}$  е максималната скорост на течението в тръби и канали, а  $U$  — скоростта на външното течение при граничния слой.

Уравненията (7.96) и (7.97) са известни като универсален логаритмичен закон за разпределение на скоростта в турбулентните течения, тъй като те остават валидни в широк интервал на Рейнолдсовите числа предимно при големите им стойности, които са по-често срещани в практиката.

Степенен закон за профила на скоростта. В резултат на многобройни опитни изследвания на турбулентни течения край стени при различни Рейнолдсови числа е намерена друга, полуемпирична зависимост

$$\frac{u}{V_*} = C \left( \frac{yV_*}{\nu} \right)^n, \quad (7.98)$$

известна като степенен закон за разпределение на скоростта. В случая  $C$  е константа, която се определя по опитен път.

Степенният закон може да се представи в сравнително много по-прост вид, като се запише за  $y=R$ , ( $\delta$ ) и  $u=u_{\max}$ , ( $U$ )

$$\frac{u_{\max}}{V_*} = C \left( \frac{R V_*}{y} \right)^n$$

и се намери отношението на (7.98) с получения израз, откъдето за течение в тръба

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left( \frac{y}{R} \right)^n \quad (7.99 \text{ а})$$

и за течение в граничния слой

$$\frac{u}{U} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^n. \quad (7.99 \text{ б})$$

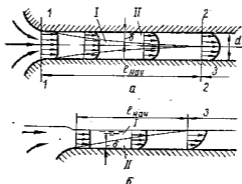
Недостатъкът на споменатия закон е неговата неуниверсалност, тъй като степенният показател  $n$  запазва постоянна стойност за по-малък интервал на  $Re$ . Но като се познават различните му постоянни стойности за съответните интервали на  $Re$ , степенният закон може да се прилага с голяма точност за широк интервал на Рейнолдсовото число.

## 7.9. ТУРБУЛЕНТНИ ТЕЧЕНИЯ В ТРЪБИ И КАНАЛИ

**Турбулентни течения в гладки тръби.** Аналогично на ламинарните течения при турбулентните течения в тръби и канали също така съществува начален участък, характеризиращ се с непрекъснато изменение на скоростното поле по дължина на течението (фиг. 7.31). След началния участък то приема характерна развито турбулентно течение с неизменена форма на профила на осреднената по време скорост в отделните сечения с упоредни токови линии и постоянен надлъжен градиент на налягането. Дължината на началния участък при турбулентните течения е различна и е в пряка зависимост от положението на прехода на граничния слой от ламинарен в турбулентен. Разбира се, и при тях граничен слой има само в началния участък. Съгласно с опитните изследвания на Никурадзе дължината на началния участък на турбулентните течения в тръби е около  $l_n = (25 \div 40) d$ , а според опитите на Кирсен  $l_n = 50 \div 100 d$ .

Въз основа на редица опитни изследвания и анализ на получените резултати е установено, че изменението на осреднената по време стойност по напречното сечение на развитото турбулентно течение в тръби и канали е подчинено на универсалния логаритмичен закон. За турбулентно течение в кръгли тръби при  $Re = \frac{u_m d}{\nu}$  от критичната му стойност до  $Re = 3,24 \cdot 10^6$  Нику-

радше е намерил числени стойности за универсалните константи, както следва:  $a=0,4$ ,  $\alpha=11,5$  и съответно  $B=5,5$ . По такъв начин универсалният логаритмичен закон за скоростта (7.96) за течения в тръби може да се запише във вида



Фиг. 7.31

$$\frac{u}{V_*} = 2,5 \ln \frac{V_* y}{\nu} + 5,5, \quad (7.100 \text{ а})$$

а с използване на десетични логаритми

$$\frac{u}{V_*} = 5,75 \lg \frac{V_* y}{\nu} + 5,5 \quad (7.100 \text{ б})$$

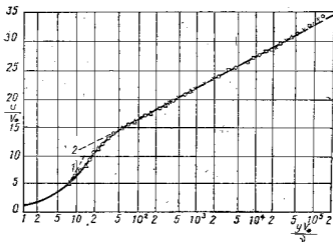
и

$$\frac{u_{\text{max}}}{V_*} = 5,75 \lg \frac{V_* R}{\nu} + 5,5. \quad (7.100 \text{ в})$$

На фиг. 7.32 е показано опитно определенният скоростен профил  $\frac{u}{V_*} = f\left(\frac{V_* y}{\nu}\right)$  на турбулентно течение в кръгла тръба на Рейнолдсовите числа в диапазона  $Re = 4 \cdot 10^3 \div 3,2 \cdot 10^6$ , като е използван логаритмичен мащаб по абсцисата. На същата фигура с плътната линия 1 е показано разпределението на скоростта в ламинарния подслой, получено по (7.92), а с линията 2 разпределението на скоростта в турбулентната област, получена по (7.100). Вижда се, че теоретичните резултати нямат покритие с експерименталните данни в интервала  $4 < \frac{V_* y}{\nu} < (30 \div 70)$ , който съответствува на преходната област, където вискозните и турбулентните напрежения са от същия порядък. Това от своя страна показва, че ламинарният подслой се разпространява до  $\frac{V_* y}{\nu} \leq 4$ , откъдето за дебелината му се получава

$$\delta_0 = 4 \frac{y}{V_*}$$

Що се отнася до турбулентната област, според опитните данни тя започва от  $\frac{V_* y}{\nu} > (30 \div 70)$ . Интерес представлява въпросът докъде е валиден логаритмичният закон по (7.100). Очевидно



Фиг. 7.32

той има съответствие с опита до  $\frac{V_* y}{\nu} \approx 5 \cdot 10^4$ , след което се наблюдава известно отклонение на опитните точки нагоре от кривата 2. Това се дължи на влиянието на разликата в движението на флуидите в кръглите тръби от разглеждания опростен модел на плоско течение край безгранична равна стена. Разбира се, за скоростта във вътрешната част на течението е валиден универсалният логаритмичен закон за дефицита на скоростта (7.97)

$$\frac{u_{\max} - u}{V_*} = -2,5 \ln \frac{y}{R}. \quad (7.101 \text{ а})$$

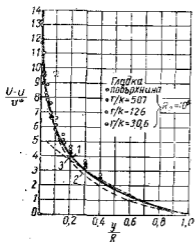
или с десетични логаритми

$$\frac{u_{\max} - u}{V_*} = -5,75 \lg \frac{y}{R}. \quad (7.101 \text{ б})$$

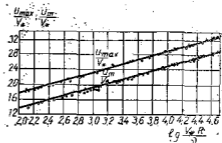
откъдето

$$\frac{u}{V_*} = \frac{u_{\max}}{V_*} + 5,75 \lg \frac{y}{R} = \frac{u_{\max}}{V_*} + \frac{1}{2,5} \ln \frac{y}{R}. \quad (7.102)$$

На фиг. 7.33 е показана зависимостта  $\frac{u_{\max} - u_c}{V_*} = f\left(\frac{y}{R}\right)$ , получена по (7.101) и съпоставена с резултатите от опита. Добро съответствие се наблюдава след  $\frac{y}{R} > 0,2$ , което определя границите на валидност на двата логаритмични закона.



Фиг. 7.33



Фиг. 7.34

От съществено значение е познаването на средната скорост, която се определя от

$$u_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{2\pi \int_0^R u r dr}{\pi R^2} = 2 \int_0^1 u \left(1 - \frac{y}{R}\right) d \frac{y}{R}.$$

Като се внесе в интеграла изразът за скоростта по уравн. (7.102), се получава

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{V_*} &= \frac{u_{\max}}{V_*} + \frac{2}{2,5} \int_0^1 \ln \frac{y}{R} \left(1 - \frac{y}{R}\right) d \left(\frac{y}{R}\right) = \\ &= \frac{u_{\max}}{V_*} - 3,75 \end{aligned} \quad (7.103 \text{ а})$$

ИЛИ

$$\frac{u_m}{V_*} = 5,75 \lg \frac{V_* R}{\nu} + 1,75. \quad (7.1036)$$

Този резултат за връзката между средната и максималната по оста на тръбата скорост се потвърждава от опита, както това се вижда от фиг. 7.34. При турбулентните течения отношението между максималната и средната по сечение скорост е в зависимост от числото на Рейнолдс и се мени за  $Re = 5 \cdot 10^3 \div 3 \cdot 10^6$  съответно в границите  $\frac{u_{max}}{u_m} = 1,3 \div 1,15$ . Следователно с увеличаването на  $Re$  средната скорост все повече се доближава до максималната, докато при ламинарните течения тя е винаги  $\frac{u_{max}}{u_m} = 2$ .

Въпреки голямата му точност и универсалност практическото използване на логаритмичния закон за скоростния профил на турбулентните течения в кръгли тръби е съпроводено със значителни трудности. Те са свързани предимно с определянето на динамичната скорост  $V_*$ , което предполага познаване на тангенциалното напрежение при стената (то е функция на  $Re$ ). Значително по-проста и многоудобна за практиката е формулата (7.99), изразяваща степенния закон за разпределението на скоростта:

$$\frac{u}{u_{max}} = \left( \frac{y}{R} \right)^n.$$

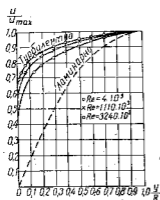
В табл. 7.2 са показани получените от Никурадзе стойности за показателя  $n$  за турбулентно течение в кръгла тръба.

Таблица 7.2

Re	$4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^6$
$n$	1/6	1/6,6	1/7	1/8,8	1/10
$\frac{u_m}{u_{max}}$	0,791	0,806	0,817	0,853	0,865

От таблицата се вижда, че е възможно за всяко число на Рейнолдс да се подбере подходяща стойност на показателя  $n$ , така че да се получи скоростен профил, който да съответствува най-добре на действителността. На фиг. 7.35 е показана получената от Никурадзе зависимост  $\frac{u}{u_{max}} = f\left(\frac{y}{R}\right)$  при параметър  $Re$ , респ.  $n$ . На същата фигура за сравнение е показан и параболичният про-

Фил на скоростта на ламинарно течение в цилиндрична тръба. Турбулентният профил на скоростта е значително по-запълнен, което е по-силно изразено при по-големите числа на Рейнолдс. Често в инженерната практика, когато не се изисква голяма пре-



Фиг. 7.35



Фиг. 7.36

цизност в границите на  $Re=10^4$  до  $10^5$ , за степения показател може да се приеме стойността  $n=1/7$ .

Посредством степения закон за разпределението на скоростта сравнително лесно може да се определи средната по сечение скорост, респ. отношението ѝ към максималната скорост:

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{u_{\max}} &= 2 \int_0^1 \frac{u}{u_{\max}} \left(1 - \frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) = \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{y}{R}\right)^n \left(1 - \frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Резултатът от пресмятането при различните стойности на показателя  $n$  е даден също в табл. 7.2.

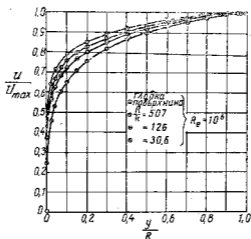
Турбулентни течения в грапави тръби. Зависимостите, получени досега за разпределението на скоростта, се отнасят за турбулентно течение в тръби с идеално гладки стени. В практиката обаче обикновено се използват тръби с неравномерна грапавина на стените (фиг. 7.36), която в експлоатационни условия вследствие на различните корозионни и други въздействия се увеличава с течение на времето. При това в турбулентните течения  $\tau_0$  нараства приблизително с квадрата на скоростта, така че при увеличаване на скоростта ламинарният подслой изтънява. Това обстоятелство е от съществено значение за взаимовлиянието

между турбулентното течение и неизбежните грапавини по обтечената стена, които при известни условия разрушават ламинарния подслой и започват да оказват съществено влияние върху течението в тръбата. Нещата са особено прегледни при т. нар. *равномерна грапавост* — наличие на грапавини с еднаква височина  $k$  и еднаква форма. Установено е, че когато  $k < \delta_0$ , което съответствува на граничното условие  $0 < \frac{V_* k}{\nu} < 4$ , грапавините не оказват влияние на течението и стената се нарича *хидравлично гладка*. За  $k \approx \delta_0$ , което съответствува на граничното условие  $4 < \frac{V_* k}{\nu} < 70$  и се постига при увеличаване на скоростта, върховете на грапавините са с тенденция да се показват извън ламинарния подслой в турбулентното течение. Течението започва да упражнява върху тях сили от найягъне в посока на скоростта си, които увеличават влиянието на пристенните тангенциални напрежения  $\tau_0$  и стената престава да е хидравлично гладка. За  $\delta_0 < k$ , съответстващо на граничното условие  $\frac{V_* k}{\nu} > 70$ , грапавините се подават значително извън ламинарния подслой и са източници на допълнително смущаване (турбулизиране) на течението, в резултат на което изчезва всякакво влияние на вискозитета и стената става *хидравлично грапава*.

Тъй като дебелинага на подслоя е функция на Рейнолдсовото число, като намалява с увеличаването му, следва, че споменатите режими ще съществуват до определени числа на Рейнолдс и ще се заменят в последователен ред с неговото увеличаване. Следователно в една и съща тръба се наблюдава следното. Първоначално при много малки Рейнолдсови числа течението е ламинарно, след което преминава в течение в хидравлично гладки тръби. С по-нататъшното увеличаване на  $Re$  настъпва момент, в който  $k \approx \delta_0$  и малко по-късно при по-големи стойности на  $Re$  се получава  $k > \delta_0$  и течението преминава в течение в хидравлично грапави тръби. При какво число на Рейнолдс ще настъпи преминаването на течението от течение в хидравлично гладки в хидравлично грапави тръби, това ще зависи от големината на относителната гладкост  $d/k$ . Колкото  $d/k$  е по-голямо за дадена тръба, толкова споменатият преход ще настъпи при по-големи  $Re$ . Следователно в две тръби с еднаква грапавина на стените, но с различен диаметър преходът ще настъпи при по-голям  $Re$  за тръбата с по-голям диаметър, която в случая ще има по-голяма относителна гладкост  $d/k$ .

При турбулентните течения в хидравлично грапави тръби скоростният профил е по-изпълнен и с по-голям напречен градиент при стената, което се дължи на допълнителното турбулизиращо въздействие на обтечените грапавини. На фиг. 7.37 са показани в безразмерен вид четири скоростни профила: един за хидравлично гладки тръби и три за тръби с различна относителна грапавина при режим на развита хидравлична грапавост.

Резултатите от многобройните опитни изследвания са показали възможността за успешното използване на степенния закон при теченията в тръби с грапави стени, където степенният показател  $n$  е функция само на относителната грапавина  $n = f\left(\frac{k}{a}\right)$ .



Фиг. 7.37

При теченията в хидравлично гладки тръби той зависи само от  $Re$ , а за преходния режим  $n = f(Re, d/k)$ .

Що се отнася до разпределението на пътя на размесване по широчината на тръбата, той се подчинява на същите закономерности както при гладки стени, т. е.

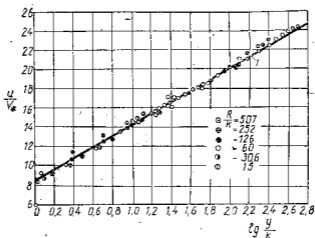
$$l = ay = 0,4 y.$$

Това от своя страна подсказва възможността за приложение и на логаритмичния закон за разпределението на скоростта. Сега обаче е очевидно, че уравн. (7.96) няма валидност при хидравлично грапава стена, тъй като в него фигурира кинематичният вискозитет. Явно е, че в израза за интеграционната константа  $C$  в (7.95) дължината  $\nu/V_*$  трябва да се замени с характерната за хидравлично грапава стена височина  $k$  на грапавините. Тогава  $C = B - \frac{1}{a} \ln k$  и уравн. (7.96) преминава във вида

$$\frac{u}{V_*} = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{k} + B. \quad (7.104)$$

От съпоставянето на получения израз с резултати от опита (фиг. 7.38) се установява много добро съответствие с действи-

тълността, ако константата приеме стойността  $B=8,5$ . Следователно за развито турбулентно течение в хидравлично грапави тръби универсалният логаритмичен закон за скоростния профил, получен от Никурадзе, приема окончателен вид



Фиг. 7.38

$$\frac{u}{V_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k} + 8,5, \quad (7.105 \text{ a})$$

респ.

$$\frac{u_{\max}}{V_*} = 5,75 \lg \frac{R}{k} + 8,5. \quad (7.105 \text{ б})$$

Като се вземе под внимание, че съгласно със (7.103 а)  $\frac{u_m}{V_*} = \frac{u_{\max}}{V_*} - 3,75$ , за средната скорост се получава

$$\frac{u_m}{V_*} = 5,75 \lg \frac{R}{k} + 4,75. \quad (7.106)$$

За вътрешността на течението се използва логаритмичният закон за дефицита на скоростта, който е еднакво валиден за турбулентните течения в хидравлически гладки и грапави тръби.

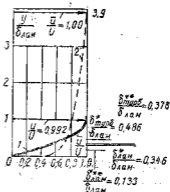
## 7.10. ТУРБУЛЕНТЕН ГРАНИЧЕН СЛОЙ

Обикновено обтичането на тела от реален флуид, особено при по-големи числа на Рейнолдс, е съпроводено с образуване на граничен слой. При гладки повърхнини на обтечени тела първоначално той е ламинарен и когато  $Re$  надвиши определена критична стойност, т. е. когато се появят определени условия, ламинарният слой загубва своята устойчивост и преминава в турбулентен (вж. т. 7.4), характеризиращ се с много сложна структура на течението в него.

Турбулентността с присъщия ѝ интензивен масообмен се разпространява бързо във външното течение, като увеличава флуидни частици от него, в резултат на което се образува много по-дебел граничен слой от предшестващия го ламинарен. От друга страна, масообменът довежда до нарастване на скоростта към стената, като скоростният профил става по-запълнен от този при ламинарния граничен слой. Едва в непосредствена близост до стената скоростта бързо намалява, пулсациите изчезват и течението се запазва ламинарно. Този характер на изменение на скоростта на турбулентното течение в граничния слой е показан много добре на фиг. 7.39, където за сравнение е дадено и разпределението на скоростта в ламинарен граничен слой (кривата I).

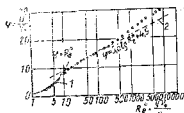
Граничният слой също може да се раздели условно на две основни области — ламинарен (вискозен) подслой с почти линейно разпределение на скоростта, в който се проявяват само вискозните сили на триене, и област на турбулентно течение с преобладаващото действие на турбулентните напрежения. Между тези две области е разположена сравнително тънка преходна област, в която ламинарното течение се нарушава, характеризира се с максимални надлъжни пулсации на скоростта и най-интензивно генериране на турбулентността. Тя се нарича още „буферна“ зона и в нея вискозните напрежения са съизмерими с привидните турбулентни напрежения.

В края на турбулентната област при прехода на граничния слой към външното течение пулсациите на скоростта са сравнително малки. Разбира се, външното течение е също слабо турбулизирано, но се разглежда като потенциално при сравнението му със силно изразената турбулентност в граничния слой. Макар осреднената скорост на граничния слой  $\bar{u} = \bar{u}(y)$  да преминава много плавно към скоростта на външното течение, външ-



Фиг. 7.39

ната граница на граничния слой е силно деформирана и мени своето положение с времето. Това се дължи на активното редуване на турбулизирани флуидни частици, които преминават във външното течение, с не турбулизирани флуидни частици, които преминават дълбоко в турбулентната област. Ако в тази преходна област се измерят скоростните пулсации, се вижда, че в една и съща точка те имат периодичен характер — ту се появяват, ту изчезват. Очевидно течението в граничния слой е твърде сложно, поради което досега количествените закономерности са все още малко изучени. Това от своя страна е наложило да се използват сравнително груби представи за граничния слой, като се строят за него опростени емпирични модели, а движението на флуида в него да се описва с прости количествени съотношения. Многобройните изследвания в последно време показват, че профилът на скоростта в напречните сечения на граничния слой се различава от този на турбулентното течение в тръби и канали.



Фиг. 7.40

На фиг. 7.40 се вижда скоростен профил на турбулентно течение в граничния слой край равна гладка стена в безразмерни координати  $\frac{u}{V_*}$  и  $\frac{V_* y}{\nu}$ , като последната е изразена в логаритмичен мащаб. Това разпределение на скоростта е получено въз основа на многочислени опити, като осреднените резултати са нанесени на фигурата с кръгчета. На същата фигура с кривата 1 е отбелязана зависимостта по (7.92) за скоростния профил в ламинарния подслой, което има много добро съответствие с експеримента до  $\frac{V_* y}{\nu} < (5 \div 8)$ . За турбулентната област в близост до стената, разположена непосредствено след междинната (буферната) зона, се оказва възможно използването на логаритмичния закон за разпределението на скоростта, ако в уравн. (7.96) за съответните константи се приемат стойностите  $\alpha = 0,41$  и  $B = 4,9$ . Тогава логаритмичният закон приема вида

$$\frac{u}{V_*} = 5,6 \lg \frac{V_* y}{\nu} + 4,9. \quad (7.107)$$

Полученият израз има много добро покритие с резултатите от опита (което се вижда на фиг. 7.40 — крива 2) за т. нар. пристенна турбулентна област, разположена в границите

$$(30 \div 70) < \frac{V_* y}{\nu} < 1000;$$

респ. за външната ѝ граница, за която приблизително  $\frac{y}{\delta} < 0,15$ . По-нататък в турбулентната област се наблюдава отклонение на експерименталните точки нагоре от кривата 2. Това отклонение настъпва толкова по-рано, колкото по-малко е числото  $Re$ ; например  $\frac{V_* y}{\nu} = 100$  за  $Re = 10\,000$  и  $\frac{V_* y}{\nu} = 1000$  за  $Re = 16\,000$ . За външната област на граничния слой, съответстваща на външната му преходна област с потенциалното течение, т. е. за  $y/\delta > 0,45$ , профилят на скоростта може да се определя със задоволителна точност по логаритмичния закон за дефицита на скоростта:

$$\frac{U-u}{V_*} = -5,75 \lg \frac{y}{\delta}. \quad (7.108)$$

Що се отнася до участъка на граничния слой, разположен на разстояние  $\frac{y}{\delta} < 0,45$ , тази формула допуска известно отклонение от експерименталните резултати, което е по силно изразено при по-малки числа на Рейнолдс.

Оказва се, че скоростният профил в граничния слой не може да се опише с единствена логаритмична формула. За да се обхване частта от граничния слой, разположена между

$$0,15 < \frac{y}{\delta} < 0,45,$$

в последно време са намерили приложение две други логаритмични формули, които представляват известната корекция на уравн. (7.108) и имат вида

$$\frac{U-u}{V_*} = -5,6 \lg \frac{y}{\delta} + 2,5, \quad (7.109)$$

валидна за  $\frac{y}{\delta} < 0,2$

и 
$$\frac{U-u}{V_*} = -8,6 \lg \frac{y}{\delta}, \quad (7.110)$$

валидна за  $\frac{y}{\delta} > 0,15$ .

Тези две формули са еднакво приложими както за гладки, така също и за грапави стени в широк интервал на Рейнолдсовото число, което им придава универсален характер.

Очевидно между турбулентното течение в граничния слой и в

тръби има известно сходство, но и известна разлика. Сходството се състои в еднаквото разпределение на скоростта в ламинарния подслой и в пристенната турбулентна област, което се описва от съответните еднакви зависимости: линейната — уравн. (7.92), и логаритмичната. Не стои така обаче въпросът за външната област на граничния слой и централната част на тръбата, където съпоставените течения са различни. Главната причина е в това, че за разлика от теченията в тръби външната преходна област на граничния слой граничи с несмутеното потенциално (външно) течение, което има много малък (пренебрежим) турбулентен интензитет. Тя има много хаотична структура вследствие на силно изразеното редуване и взаимно проникване на турбулизирани и нетурбулизирани флуидни маси. Пулсациите във външната област на граничния слой обаче са малки, докато в средата на тръбата са големи. Слабите пулсации довеждат до по-бързо нарастване на скоростта в граничния слой и следователно до по-малки дебелини на слоя. Всичко това оказва своето въздействие на процеса на турбулентния обмен и на формирането на скоростния профил. В същия момент може да се отбележи, че при турбулентното течение в тръби осреднената скорост не зависи от надлъжната координата и скоростният профил се запазва един и същи по дължина на течението, което не е в сила за турбулентното течение в граничния слой. За определяне на разпределението на скоростта в напречните сечения на турбулентния граничен слой се използва също така степенният закон по уравн. (7.98). В случая за степенния показател  $n$  се приема, че зависи сравнително слабо от Рейнолдсовото число и е равен приблизително на  $1/7$ , а за коефициента  $C=8,74$ , така че

$$\frac{u}{V_*} = 8,74 \left( \frac{V_* y}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (7.111)$$

Този израз посредством  $V_*$  дава връзката между разпределението на скоростта и тангенциалното напрежение при стената  $\tau_0$  и е изходна зависимост при изследване на турбулентния граничен слой на обтечени тела.

Когато задачата се свежда до определяне само на скоростния профил, сравнително по-удобна е формулата (7.99 б), като се приеме  $n=1/7$ , т.е.

$$\frac{u}{U} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (7.112)$$

**Импулсно уравнение на турбулентния граничен слой.** За изследване на турбулентния граничен слой се прилага най-често приблизителното импулсно уравнение (7.68), което важи както за ламинарни, така и за турбулентни гранични слоеве. За разлика от

ламинарния граничен слой връзката между скоростния профил и пристенното тангенциално напрежение се дава от степения или логаритмичния закон или емпирични зависимости, получени по опитен път.

Сравнително най-просто се решава задачата за турбулентен граничен слой на надлъжно обтечена пластина, където скоростта на външното течение е  $U = \text{const}$ . Следователно  $\frac{dU}{dx}$  и интегралното уравнение на Карман (7.68) ще приеме същия вид както при ламинарния граничен слой

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

В съответствие със степения закон (7.112) за дебелината на импулсните загуби се получава

$$\begin{aligned} \delta^{**} &= \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = \\ &= \frac{7}{72} \delta. \end{aligned} \quad (7.113)$$

Що се отнася до тангенциалното напрежение, то може да се определи със задоволителна точност със степения закон (7.98) респ. (7.111), както следва:

$$\frac{u}{V_*} = c \left(\frac{7V_*}{v}\right)^n$$

На границата на слоя с външното течение, т. е. при  $y = \delta$ , уравнението приема вида

$$\frac{u}{V_*} = C \left(\frac{\delta V_*}{v}\right)^n = C \left(\frac{\delta U}{v}\right)^n \left(\frac{V_*}{U}\right)^n,$$

откъдето, като се има предвид равенството  $\frac{\tau_0}{\rho} = V_*^2$ , се получава

$$\left(\frac{V_*}{U}\right)^{n+1} = \left(\frac{\tau_0}{\rho U^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{C} \left(\frac{\delta U}{v}\right)^{-n}$$

или

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{1}{C^{\frac{2}{n+1}}} \left( \frac{\delta U}{\nu} \right)^{-\frac{2n}{n+1}}$$

По-нататък, ако за степенния показател се приеме  $n=1/7$  и  $C=8,74$ , последният израз добива вида

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,0225 \left( \frac{\delta U}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (7.114 \text{ а})$$

или

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,0225 (Re_\delta)^{-1/4}, \quad (7.114 \text{ б})$$

където  $Re_\delta = \frac{\delta U}{\nu}$ .

След определянето на  $\delta^{**}$  и  $\frac{\tau_0}{\rho U^2}$  импулсното уравнение може да се запише, както следва:

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left( \frac{\delta U}{\nu} \right)^{-1/4}$$

В случая интегрирането може да се извърши при граничното условие  $\delta=0$ , когато  $x=0$  (което означава, че турбулентният граничен слой започва от началото на пластината), а именно:

$$\delta = 0,37x \left( \frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/5} = 0,37x (Re_x)^{-1/5}, \quad (7.115 \text{ а})$$

откъдето

$$\delta^* = 0,0481 \left( \frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot x = 0,13 \delta \quad (7.115 \text{ б})$$

и

$$\delta^{**} = 0,036x \left( \frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/5} \quad [(7.115 \text{ в})]$$

Съгласно с получените изрази условните дебелини на турбулентния граничен слой са пропорционални на  $x^{4/5}$ . Очевидно е, че те нарастват по дължина на течението много по-бързо, отколкото при ламинарен граничен слой, в който това нарастване е пропорционално на  $x^{1/2}$ .

Като се познава дебелината на граничния слой за тангенциал-

ното напрежение по повърхнината на обтечената пластина, се получава изразът

$$\tau_0 = 0,0288 \rho U^2 \left( \frac{Ux}{\nu} \right)^{-1/5} = 0,0288 \rho U^2 (Re_x)^{-1/5}. \quad (7.116)$$

В съответствие с приетото гранично условие ( $x=0, \delta=0$ ) при интегрирането на импулсното уравнение получените формули (7.115) и (7.116) са валидни за обтечени пластини (равни стени), за които граничният слой е турбулентен още от началото им. Те имат добро съответствие с опита за  $Re_x = 5 \cdot 10^5 \div 5 \cdot 10^7$ .

Сравнително по-добър резултат се получава, особено за по-големи Рейнолдсови числа, ако при решаването на импулсното уравнение (7.68) за тангенциалното напрежение се използва чисто емпиричният закон на Фолкнер от вида

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,00655 (Re^{**})^{-1/6}, \quad (7.117)$$

където  $Re^{**} = \frac{U \delta^{**}}{\nu}$ .

Очевидно импулсното уравнение ще приема вида

$$\frac{d \delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,00655 (Re^{**})^{-1/6}.$$

Ако се положи същото гранично условие  $\delta^{**}=0$ , когато  $x=0$ , след интегриране се получава

$$\delta^{**} = 0,0153x (Re_x)^{-1/7} \quad (7.118 \text{ а})$$

и  $\tau_0 = 0,01315 \rho U^2 (Re_x)^{-1/7}. \quad (7.118 \text{ б})$

Тези изрази, валидни за обтечена пластина (стена), имат много добро покритие с действителността за  $Re = 10^7 \div 10^9$ .

Разбира се, за тангенциалното напрежение  $\tau_0$  съществуват и други емпирични зависимости. От тях сравнително точна е *формулата на Шулиц-Грунов*

$$\tau_0 = \frac{0,185 \rho U^2}{(\lg Re_x)^{2,58}}, \quad (7.119)$$

която има валидност за числата на Рейнолдс в границите  $10^5 \leq Re \leq 10^9$ .

Степенният закон може да бъде обобщен и за случаи на обтечени грапави стени. Решение за установена хидравлична грапавост, т. е. когато  $\frac{\tau_0}{\rho U^2}$  не зависи от Рейнолдсовите числа, а са-

мо от местната относителна грапавина на стената, е дадено от Дробленков (1955). Като се приеме условно за относителната гладкост  $\frac{\delta^{**}}{k}$  и се използва за тангенциалното напрежение степеният закон от вида

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,0031 \left( \frac{\delta^{**}}{k} \right)^{-1/6}$$

импулсното уравнение за турбулентния граничен слой е

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = 0,0031 \left( \frac{\delta^{**}}{k} \right)^{-1/6}$$

Полученото диференциално уравнение се интегрира сравнително лесно в границите  $\delta^{**}=0$ , когато  $x=0$ , в резултат на което се получава

$$\delta^{**} = 0,008x \left( \frac{x}{k} \right)^{-1/7} \quad (7.120 \text{ а})$$

и за останалите параметри

$$\delta = 0,824 x \left( \frac{x}{k} \right)^{-1/7}, \quad (7.120 \text{ б})$$

$$\delta^* = 0,13 \delta = 0,107 x \left( \frac{x}{k} \right)^{-1/7}, \quad (7.120 \text{ в})$$

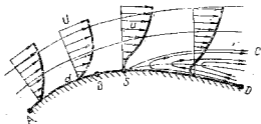
$$\tau_0 = 0,00695 \rho U^2 \left( \frac{x}{k} \right)^{-1/7}. \quad (7.120 \text{ г})$$

#### 7.11. ОТКЪСВАНЕ НА ТЕЧЕНИЯТА ОТ ОБТЕЧЕНИ СТЕНИ И ВИХРООБРАЗУВАНЕ

При канални течения в дифузори участъци или обтичане на криволинейни повърхнини в основното (външното) течение се появява надлъжен градиент на скоростта и налягането, поради което понякога могат да възникнат качествено нови явления, които не биха били възможни в безградиентните течения. В тези случаи обикновено се наблюдава явлението откъсване на течението от обтечените повърхнини и вихрообразуване (фиг. 7.41), което изменя съществено закона за разпределението на скоростта и налягането в основното течение.

Механизмът на явлението откъсване на течението, определено

от реалността на флуида, е различен от този на инерционното откъсване при обтичане на остри ръбове или внезапни издатини по стените, което може да се наблюдава при безвихровите течения на идеалните флуиди.



Фиг. 7.41

При обтичане на криволинейни контури по фиг. 7.41 от потенциално течение в участъка  $AB$  скоростта нараства, а налягането в съответствие с уравнението на Бернули намалява. По-нататък в участъка  $SD$  скоростта намалява, а налягането нараства. Такова разпределение на налягането ще има и в граничния слой, тъй като то не се различава от това на външното течение, което е и в съответствие с условията  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ . Всъщност граничният слой се формира под влияние на външното течение, което например налага и налягането си. Той от своя страна оказва обратно влияние върху външното течение, качествено изразено с дебелината на изместване  $\delta^*$ .

Очевидно съотношението между скоростта и налягането във външното течение се определя от уравнението на Бернули и кинетичната енергия на частиците на флуида е достатъчна, за да осигури тяхното движение и в закъснителния участък на течението, т. е. срещу нарастващото налягане. В същия момент обаче триенето в граничния слой довежда до бързо намаляване на кинетичната енергия на флуидните частици в него. Тогава при достатъчно големи стойности на градиента  $\frac{\partial p}{\partial x}$  те могат на известно разстояние в закъснителната област да изразходват наличната си кинетична енергия, спират се и под действието на силите на налягане придобиват дори и обратно движение, докато външното течение поради по-голямата си енергия продължава първоначалното си движение. Тъй като се натрупват все повече и повече спрели частици, от тях се образува един вид клин, който отделя външното течение от стената. Това именно явление се нарича откъсване на граничния слой, схематично илюстрирано на фиг. 7.41.

Теорията на граничния слой позволява по математичен път да

се обясни същността на явлението откъсване на течението и вихрообразуване. От диференциалното уравнение на Прандтл за граничния слой уравн. (7.56) при  $y=0$ , където  $u=v=0$ , се получава

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

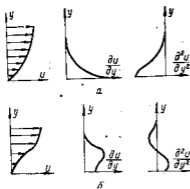
Следователно кривината на скоростния профил в близост до стената се определя преди всичко от надлъжния градиент на налягането. Получава се така, че на всяка промяна на знака на градиента на налягане съответствува промяна на кривината на профила на скоростта. В ускорителният участък на течението, където  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$  и съответно

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} < 0,$$

поради монотонния характер на профила на скоростта производната

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

по цялата дебелина на граничния слой, както е показано на фиг.



Фиг. 7.42

7.42 а. За закъснителния участък на течението, в който стойността на втората производна на скоростта по  $y$  при стената е също по-голяма от нула,

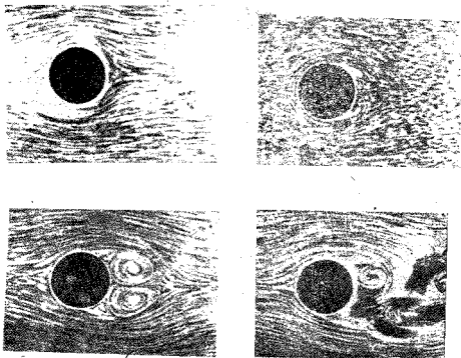
$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} > 0.$$

Но тъй като на известно разстояние  $x$  от стената  $y \leq \delta$  тя винаги е по-малка от нула, следва да се очаква, че вътре в граничния слой обезателно ще има място, в което стойността ѝ ще бъде равна на нула, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

както е показано на фиг. 7.42 б. Следователно, винаги когато  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ , в скоростния профил ще се появи инфлексна точка, гео-

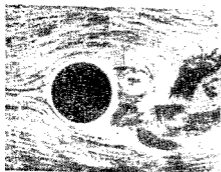
метричното място на която е нулевата токова линия на откъснатото от стената течение (линията  $SC$  на фиг. 7.41). Това показва, че в близост на стената съществува обратно течение. Точката от стената  $S$ , която е разположена на границата между правото (ос-



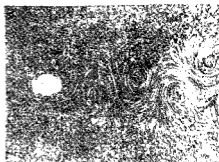
Фиг. 7.43 а, б, в, г

новното) и обратното течение, се приема за точка на откъсване на граничния слой. В нея е изпълнено условието  $u=0$  или  $\frac{du}{dy}=0$ . Обратното течение се характеризира със сравнително малка скорост и рязко намаляване на тангенциалното напрежение, а дори и с промяна на неговия знак. Обикновено точката на откъсване е разположена след т.  $B$ , в която налягането има минимална стойност, респ.  $\frac{dp}{dx}=0$ . На фиг. 7.43 са показани кино снимки, направени в последователни моменти от време на течение около задния край на обтечено закръглено тяло. Първата снимка вляво дава картината на течението в момента непосредствено след започването му. Вижда се появяването на обратно течение в зародиша му около задната точка на заприщване. На следващата снимка обратното течение се придвижва напред срещу направлението на основното течение, като дебелината на граничния

слой е значително нараснала. На третата снимка (фиг. 7.43 в) личи ясно вече образувалият се не малък вихър, който в следващата снимка (вдясно) е станал още по-голям. По-нататък този вихър сѐ откъсва и се отнася от основното течение, на негово



Фиг. 7.44



Фиг. 7.45

място се образува друг и по този начин се формира вихрова област, която преминава зад тялото във вихрова следа. Последната се вижда много добре на фиг. 7.44. На известно разстояние от обтечения цилиндър във вихровата следа се образува правилно редуване на вихри, въртящи се вляво и вдясно (фиг. 7.45). Този ефект е изучен първоначално от Карман (1912), поради което вихровата следа зад обтечения цилиндър, образувана от последователното редуване на вихри, се нарича *Карманов вихров път*.

Отсъствието на граничния слой и образувалата се след обтеченото тяло вихрова следа довежда до изместване на основното течение и токовите линии в него, а заедно с това до съответно изменение при разпределението на скоростта и налягането. В резултат във вихровата област и в следата непосредствено след тялото налягането, наложено от външното течение, става по-малко, отколкото ако течението беше без триене и откъсване. По-ниженото налягане в случая е причина за т. нар. съпротивление от налягане на обтеченото тяло или съпротивление от форма, тъй като неговата големина се определя от широчината на вихровата следа, която от своя страна е функция на формата на тялото.

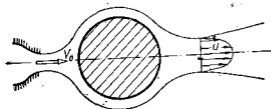
Положението на точката на откъсване по повърхнината на обтеченото тяло теоретично може да бъде определено само посредством точното решаване (интегриране) на диференциалните уравнения на граничния слой. Както показват теорията и опитът, откъсването на граничния слой се извършва приблизително по направление на допирателната към контура в точката на откъсване, чието местоположение зависи от  $Re$ , кривата на контура и вида на течението (ламинарно или турбулентно). Обикновено

откъсването на граничния слой е далеч от предната точка на заприщване (носовата част) на тялото, разбира се в зоната на закъснителното течение, където граничният слой вече е станал турбулентен. Колкото по-голяма е степента на турбулентност на течението в граничния слой, толкова по-интензивно се извършва обмяната на количеството на движение между флуидните частици от него и външното течение, което довежда до увеличаване на скоростта в близост на стената и намаляване на опасността за откъсване, като точката на откъсване се измества назад. Може да се твърди, че при иначе еднакви други условия точката на откъсване на турбулентния граничен слой лежи в посока на течението зад тази на ламинарния граничен слой. С увеличаване на Рейнолдсовото число, което води до увеличаване на степента на турбулентност, точката на откъсване ще се измести назад. Това от своя страна намалява напречното сечение на вихровата област и следователно съпротивлението от форма. При тези случаи точката на откъсване  $S$  е разположена след точката на прехода от ламинарен в турбулентен граничен слой, който ефект е по-силно изразен с нарастването на  $Re$ , респ. на скоростта на външното течение. Има случаи обаче, при които откъсването може да настъпи преди турбулизирането на граничния слой. В някои литературни източници теченията с ламинарно откъсване се наричат подкритични, а с турбулентно откъсване — надкритични.

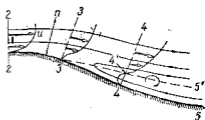
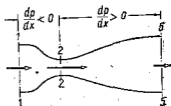
Ако контурът на обтеченото тяло има малка кривина с плавно очертане, което създава условие за слабо закъснително течение, откъсване на граничния слой няма да има. Такива са телата с добра обтекаема форма или както се казва, с добра аеродинамична форма. Очевидно е, че възможностите за откъсване на течението от обтечени тела изчезват, когато налягането по дължина на течението остава постоянно. Това много добре се наблюдава при обтичане на криволинейни контури, включително и цилиндрични, от тънка плоска струя с дебелина например от порядъка на диаметъра на цилиндъра (фиг. 7.46). Тъй като по външната граница на струйното течение действа едно и също налягане (налягането на околната флуидна среда), струята обтича цилиндъра без откъсване на граничния слой. Този случай е разновидност на т. нар. *ефект на Куанда* (1910), който се изразява в прилепване на струя към близкостоящи към нея стени.

Явлението откъсване и вихрообразуване се среща и в дифузорните участъци на теченията в тръбопроводи и канали, където съществуват условия за конвективни закъснителни течения (фиг. 7.47). Ако флуидът е несвиваем в конфузорния участък, разположен между сеченията  $1-1$  и  $2-2$ , течението е ускорително и очевидно се извършва в условията на отрицателен градиент на налягането. В този участък срещу силите на триене са насочени нарастващото количество на движение и силите на на-

тиск, което е равносилно на даване тласък, респ. енергия на флуидните частици в близост до стената. В резултат тяхната скорост нараства, скоростният профил в близост до стената става по-изпълнен, като че ли течението е без триене, потенциално.



Фиг. 7.46



Фиг. 7.47



Фиг. 7.48

Този ефект е най-силно изразен в най-тесното течение. В дифузорния участък обаче картината на течението се променя много. Течението преминава в закъснително в условията на нарастване на налягането по дължината му, т. е.  $\frac{dp}{dx} > 0$ . Колкото разширението на канала е по-голямо, толкова по-голямо е нарастването на налягането в посока на движението. Сега силата на триене на каналните стени и резултантната сила на натиск са насочени срещу движението, вследствие на което настъпва откъсване на те-

чението от каналните стени и вихрообразуване, чийто механизъм е аналогичен на този при обтечените тела. В мястото на откъсване течението заема малка част от напречното сечение на дифузора. Това се вижда много добре на фиг. 7.48, на която е показана снимка на течението в дифузорен участък с много голям ъгъл на разширение, при който откъсването е започнало непосредствено след най-тясното сечение.

Поради намаляването, а понякога и обръщането на посоката на тангенциалните напрежения в зоната след откъсване на течението на пръв поглед може да се създаде впечатление, че явлението откъсване и вихрообразуване е свързано с намаляване на съпротивлението на обтечените тела или на дифузорните участъци на каналните течения. В действителност това не е така, защото за откъсване на течението и образуването на вихри се изразходва флуидна енергия, която при по-нататъшното им разпадане и изчезване преминава (дисипира) в топлина. Тази загуба на механична енергия се изразява в съпротивление срещу каналните течения и движещите се във флуида тела, поради което откъсването е нежелано, вредно явление. Ето защо в инженерната практика съществува стремеж да се премахва или най-малко да се ограничава откъсването на теченията и свързаното с него вихрообразуване.

Най-просто от физична гледна точка средство за възпрепятстване или премахване на откъсването е дивергентните участъци на течението край стените да бъдат с по-малък ъгъл на разширение и следователно с малък надлъжен градиент на налягането. При обтечените тела това се постига чрез създаване на т. нар. аеродинамична форма, при която тялото е заоблено в челната (носвата) си част, а след максималната си дебелина се стеснява на по-голямо разстояние постепенно и по възможност завършва с остър ръб (фиг. 7.49). В каналните течения откъсването се избягва, като преминаването към по-големи напречни сечения се реализира от дифузорни участъци с ъгъл на разширение, по-малък от  $12^\circ$  до  $14^\circ$ .

Познати са също така и други по-ефективни средства за въздействие върху граничния слой. Някои от тях, намерили успешно приложение, почиват на увеличаването по изкуствен начин на скоростта на флуидните частици в пристенния слой, което на практика се осъществява по два начина: чрез продухване или изсмукване на слой от уморените частици. Продухването на пристенния слой се осъществява с помощта на тънки струни от същия флуид, които изтичат непосредствено пред точката на откъсване през процепа тангенциално към повърхнината по направление на основното течение (фиг. 7.50). По този начин на уморените частици се подава допълнителна енергия, тяхната скорост се увеличава и следователно откъсването или се забавя, или се премахва въобще.

Изсмукването на граничния слой се реализира, като непосредствено пред точката на откъсване през процеп в стената се изсмуква умореният граничен слой и на негово място се формира нов граничен слой от дошлите от вътрешността на течението



Фиг. 7.49



Фиг. 7.50



Фиг. 7.51



Фиг. 7.52

флуидни частици, които имат по-голяма енергия и могат да преодолеят без откъсване следващия закъснат участък. При необходимост изсмукването се прилага неколкостранно, с което става възможно да се реализират течения без откъсване в дълги дифузорни участъци и при това с голям ъгъл на разширение. В последно време се правят успешни опити за приложение на непрекъснатото изсмукване с помощта на дискретни отвори или създаване на порьозни стени, през които изсмукването се извършва много по-ефективно. На фиг. 7.51 е показано изсмукване на граничен слой на обтечено симетрично крило през процеп, разположен на горната му повърхнина недалеч от задния ръб. Експериментът показва, че изсмукването допринася за увеличаване на подемната сила, а също така и за изместване назад на точката на прехода от ламинарен в турбулентен граничен слой, което от своя страна влияе за намаляване и на съпротивлението от триене. На фиг. 7.52 е показана снимка на течение в силно разширяващ се канал при двукратно изсмукване на пристенния слой. Вижда се как течението се извършва без откъсване и се получава такава картина, която съответствува на течението на идеален флуид.

Съществуват и други средства за управление на граничния слой, например чрез привеждане на обтечената стена в движение

по посока на течението. Този начин обаче е свързан с големи конструктивни затруднения. Сега се провеждат експериментални изследвания относно управлението на граничен слой с вихри и електродинамични средства, които все още представляват научен интерес.

## VIII. ТЕЧЕНИЯ СЪС СЪПРОТИВЛЕНИЯ

Течението на реалните флуиди в тръби и канали, а също така край повърхнините на обтечени тела винаги е съпроводено с възникване на съпротивление срещу движението, което бива два вида: *съпротивление от триене* и *местно съпротивление*, респ. съпротивление от форма. Съпротивлението от триене се определя от тангенциалното напрежение  $\tau_0$ , което стените упражняват върху флуида срещу движението му, посредством полепналите по тях флуидни частици. То се появява в правите участъци на каналните течения или по повърхнината на обтечените тела обикновено до точката на откъсване на течението. Местните съпротивления в каналните течения или съпротивлението от форма на обтечените тела са резултат от откъсване на течението и вихрообразуване в дифузорните му участъци или в други местни препятствия и смущения. За непрекъснатото преодоляване на съпротивлението флуидът изразходва част от механичната си енергия, която преминава необратимо в топлина. Вследствие на необратимостта на процеса тази енергия не е възстановима и еквивалентната ѝ топлинна енергия по принцип е неизползуваема за полезни цели, поради което се нарича загубена механична енергия.

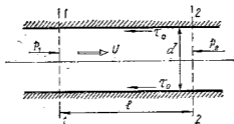
Съпротивлението съществува както при ламинарните, така и при турбулентните течения в тръби и канали, при движението на тела във флуид, а също така и в струйните течения. Разбира се, то е нежелано явление в практиката и неговото намаляване е много важна инженерна задача, която предполага добро познаване на изчислителните методи за определянето му.

### 8.1. СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА ТЕЧЕНИЕ В ПРАВА ТРЪБА С ПОСТОЯННО НАПРЕЧНО СЕЧЕНИЕ

Разглежда се развито ламинарно или турбулентно течение в права тръба с постоянно напречно сечение с диаметър  $d$ . Изследва се участъкът между напречните сечения 1—1 и 2—2 (фиг. 8.1),

които отстоят едно от друго на разстояние  $l$ . От уравнението на Бернули, приложено за две сечения по токовата линия на реален флуид, следва

$$\frac{\rho u_{1m}^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho u_{2m}^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + p_3,$$



Фиг. 8.1

където  $p_3$  е изразходваната механична енергия на флуида за преодоляване на съпротивлението от триене в участъка между сеченията 1—1 и 2—2. Тъй като за хоризонтална тръба с постоянен диаметър средните по сечението скорости са равни ( $u_{1m} = u_{2m}$ ) и  $z_1 = z_2$ , от Бернулиевото уравнение следва равенството

$$p_3 = p_1 - p_2. \quad (8.1)$$

Следователно при равномерно установено движение на реален флуид в хоризонтална тръба с постоянно напречно сечение изразходваната флуидна енергия за преодоляване на съпротивлението от триене е за сметка само на енергията на налягане, в резултат на което налягането намалява по дължина на течението.

Очевидно в разглеждания случай резултантната сила на натиск

$$P = (p_1 - p_2) \frac{\pi d^2}{4}$$

е движещата сила, която единствено уравновесява силата от триене при стената  $X = \tau_0 \pi d l$ .

От условието  $P = X$  следва

$$p_3 = p_1 - p_2 = 4\tau_0 \frac{l}{d} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]. \quad (8.2a)$$

Прието е  $p_3$  да се нарича загуба на налягане и представлява от

несената към единица флуиден обем загубна енергия за преодоляване на съпротивителното действие на  $\tau_0$ . Загубната енергия може да се отнесе и към единица маса и да се бележи с  $H_3$ , така че

$$H_3 = \frac{p_3}{\rho} = 4\tau_0 \frac{l}{\rho d} = 4 \frac{l}{d} \frac{\tau_0}{\rho} . \quad (8.2 \text{ б})$$

Определянето на  $\tau_0$  по теоретичен път е възможно за ламинарните течения, но също и за турбулентните, където чрез  $V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  тангенциалното напрежение при стените подлежи на опитно определяне. Това е наложило да се намерят емпирични или полуемпирични зависимости за пресмятане на загубите на енергия от триене и за да бъдат универсални, са изградени въз основа на теорията на подобие. За равномерно течение в права тръба, което е без свободна повърхнина, при съобразяване на параметъра  $\frac{d}{k}$  (относителна гладкост) като условие за геометрично подобие критериалното уравнение на Ойлер (7.10) може да се запише във вида

$$Eu = f \left( Re, \frac{d}{k} \right) .$$

Като се използва средната скорост  $u_m$  по напречното сечение, Ойлеровият критерий може да се напише така:

$$Eu = \frac{p_3}{\rho u_m^2 / 2} .$$

Тъй като по уравн. (8.2)  $p_3$  е пропорционално на  $\frac{l}{d}$ , от критериалното уравнение се получава

$$p_3 = \lambda \left( Re, \frac{d}{k} \right) \frac{l}{d} \rho \frac{u_m^2}{2} , \quad (8.3 \text{ а})$$

където

$$Re = \frac{du_m}{\nu}$$

или в размерност  $m$

$$\frac{p_3}{\rho g} = h_3 = \lambda \frac{l}{d} \frac{u_m^2}{2g} . \quad (8.3 \text{ б})$$

В получения израз (8.3)  $\lambda$  е коефициент на тръбното хидравлично съпротивление, наричано още линейно съпротивление, тъй като е пропорционално на дължината на разглеждания участък на тръбата. В най-общия случай коефициентът  $\lambda$  е функция на Рейнолдсовото число и грапавините на стената, респ. относителната гладкост  $d/k$ , т. е.

$$\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{d}{k}\right).$$

Получената зависимост (8.3) има универсален характер и може успешно да се използва както за ламинарни, така и за турбулентни течения.

### Зависимости за определяне на коефициента $\lambda$

По-нататък задачата е да се определи функцията  $\lambda$  с аргумент  $\text{Re}$  и параметър  $\frac{d}{k}$ . От съпоставянето на (8.2) и (8.3) между коефициента на линейно съпротивление  $\lambda$  и пристенното тангенциално напрежение  $\tau_0$  се получава зависимостта

$$\lambda = \frac{8\tau_0}{\rho u_m^2}, \quad (8.4)$$

която по-нататък при използване на връзката между тангенциалното напрежение и разпределението на скоростта служи като основа за определяне на коефициента  $\lambda$ .

Ламинарно течение. При ламинарните течения за коефициента на линейно съпротивление от (7.41) се получава изразът

$$\lambda = \frac{8\tau_0}{\rho u_m^2} = \frac{8}{\rho u_m^2} \frac{8\nu \rho u_m}{d},$$

откъдето

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (8.5)$$

Следователно при ламинарните течения коефициентът  $\lambda$  зависи само от Рейнолдсовото число.

Турбулентни течения в хидравлично гладки тръби. За турбулентни течения в хидравлично гладки тръби Блазиус е предложил степенния закон за съпротивлението.

$$\lambda = \frac{a}{(\text{Re})^m},$$

който съответствува много добре на степенния закон за разпределението на скоростта.

Числените стойности на константата  $a$  и показателя  $m$  са еднозначно свързани със стойностите на показателя  $n$  и за  $\text{Re} = 2,3 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^4$  те са съответно  $a = 0,316$  и  $m = 0,25$ , откъдето за  $\lambda$  се получава

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (8.6)$$

По-универсален е логаритмичният закон за съпротивлението, който съответствува на логаритмичния закон за профила на скоростта. Като се вземе под внимание уравн. (8.4), се получава изразът

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\lambda}{8} u_m^2 = V_*^2 \quad \text{или} \quad \frac{u_m}{V_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}},$$

който, заместен в уравн. (7.10з б), довежда до зависимостта

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{u_m}{V_*} = 5,75 \lg \frac{RV_*}{\nu} + 1,75$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,02 \lg \frac{RV_*}{\nu} + 0,615. \quad (8.7)$$

Много по-точни са формулите на Никурадзе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{RV_*}{\nu} + 0,5 \quad (8.8)$$

и на Прандтл

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8, \quad (8.9)$$

които имат много добро съответствие с действителността за турбулентно течение в хидравлично гладки тръби до  $\text{Re} = 3 \cdot 10^6$ , а дори и повече.

Получените изрази (8.6), (8.7) и (8.8) доказват, че и при течения в хидравлично гладки тръби коефициентът на линейно съпротивление зависи само от  $\text{Re}$ . Тези изрази обаче дават зависимостта  $\lambda = f(\text{Re})$  в неявен вид, което създава известни труд-

ности при пресмятането на коефициента  $\lambda$ . Ето защо Никурадзе предлага друга, сравнително точна и по-удобна за използване полуемпирична формула

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{(\text{Re})^{0,237}} \quad (8.10 \text{ а})$$

за Коцаков

$$\lambda = \frac{1}{(1,81 \lg \text{Re} - 1,5)^2} \quad (8.10 \text{ б})$$

Турбулентни течения в хидравлично грапави тръби. В съответствие с логаритмичния закон за разпределение на скоростта, респ. уравн. (7.106) и (8.4), може да се запише равенството

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5,75 \lg \frac{d}{2k} + 4,75$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{d}{2k} + 1,7. \quad (8.11 \text{ а})$$

Въз основа на данни от опита Никурадзе коригира полученния израз, като предлага формулата

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{d}{2k} + 1,74. \quad (8.11 \text{ б})$$

За преходната област между хидравлически гладката и грапавата област последната зависимост приема вида

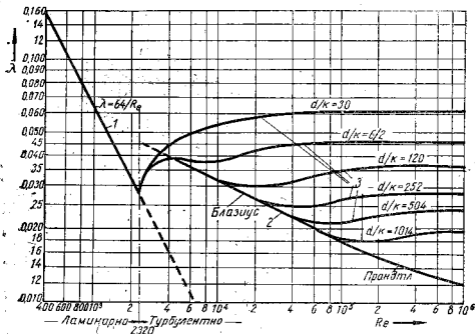
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left( \frac{d}{2k} \right) = f \left( \frac{kV_*}{\nu} \right). \quad (8.11 \text{ в})$$

Друга формула, която може да се използва също за преходната област, е формулата на Калемброк

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[ \frac{2k}{7,4d} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right]. \quad (8.12)$$

Опитно определяне на коефициента на линейно съпротивление. Коефициентът  $\bar{\lambda} = f \left( \text{Re}, \frac{d}{k} \right)$  е изследван опитно от Ни-

курадзе (1933), който е нагрпявал изкуствено тръбната стена чрез полепване на пясъчни зърна с еднаква големина  $k$  и форма (равномерна грапавост). Измерил е  $p_3$  в зависимост от  $u_m$  и по (8.3) е определял коефициента  $\lambda$ . Резултатите са показани на



Фиг. 8.2

Фиг. 8.2 в логаритмични координатни мащаби, чрез които степенните функции от вида  $\lambda = aRe^n$  преминават в линейни.

Низходящата права  $\lambda = \frac{64}{Re}$  (кривата 1) се отнася за ламинарните течения, които по принцип съществуват за  $Re < 2320$ . При  $Re \approx 2320 \div 3000$  настъпва преход на ламинарно в турбулентно течение, при който  $\lambda$  рязко нараства с увеличаване на  $Re$ , като остава също така независим от грапавината. След завършване на прехода от ламинарно в турбулентно течение характерът на кривата  $\lambda = f(Re)$  е различен в зависимост от относителната гладкост  $\frac{d}{\kappa}$ . В турбулентната област кривата Блазиус—Прандтл (кривата 2) се отнася за хидравлично гладки тръби, като формулата на Блазиус (8.6) има добро съответствие за  $Re < 5 \cdot 10^4$ , а за по-големите стойности на  $Re$  — формулата на Прандтл (8.9).

При турбулентните течения в хидравлично грапави тръби ( $\kappa > \delta_0$ ) тангенциалното напрежение при стената  $\tau_0$  се увеличава и  $\lambda$  започва да нараства с  $Re$  и клони асимптотично към  $\lambda = const$ ,

съответстващо на хидравлически грапавото състояние, респ. на параметъра  $\frac{d}{k}$ . Това са семейството криви 3, които дават стойността на коефициента  $\lambda$  за турбулентното течение в хидравлично грапави тръби, при което съпротивлението е пропорционално само на квадрата на скоростта и в този смисъл семейството криви 3 дефинират т. нар. *квадратна област* на линейното съпротивление.

От графиката се вижда съществуването на преход от течение в хидравлично гладки към течение в хидравлично грапави тръби, при който се наблюдава леко изкривяване на семейството криви при сливането им с кривата 2. Този преход за различните стойности на параметъра  $\frac{d}{k}$  се извършва при различните  $Re$  и следователно една и съща тръба при едни условия може да бъде хидравлично гладка, а при други хидравлично грапава. В преходната област коефициентът  $\lambda$  зависи както от  $Re$ , така също и от  $\frac{d}{k}$ , т. е. тя се характеризира с т. нар. *смесено триене*. Разбира се, споменатият преход зависи от условията на течението и по-специално от дебелината на ламинарния подслоя, който вече, както е известно, намалява с увеличаване на  $Re$ .

Графично представените резултати на Никуралде, както и уравненията (8.11) вадат за равномерна по големината и геометрията грапавост. В този случай при изгъняването на вискозния подслой с увеличаване на  $Re$  върховете на всички грапавини излизат едновременно от него, с което се предизвиква видима граница за края на хидравлично гладката област. Използуваните обаче в техниката материали за изработване на тръби се различават един от друг не само по средната височина на грапавината  $k$ . Опитът показва, че дори при една и съща средна грапавина тръби от различен материал имат различни стойности на коефициента  $\lambda$  в зависимост от формата, гъстотата, разположението на грапавините и т. н. Отчитането на тези фактори практически е невъзможно, което е наложило въвеждането на понятието *еквивалентна грапавост*. Тя представлява височината на равномерни грапавини, които имат същия коефициент на съпротивление  $\lambda$  както тръбите с естествени грапавини. Следователно еквивалентната грапавина на тръби от различен материал не се определя с непосредствено измерване на височината на грапавините, а чрез хидравлични измервания на съпротивлението и използването на (8.11 б). В табл. 8.1 са дадени определени по този начин средни стойности на  $k$  за различни видове тръби, употребявани в техниката.

На фиг. 8.3 е показана зависимостта  $\lambda = f\left(Re, \frac{d}{k}\right)$  за тръби с естествена грапавост, получена от Г. А. Мурун. В нея с прекъс-

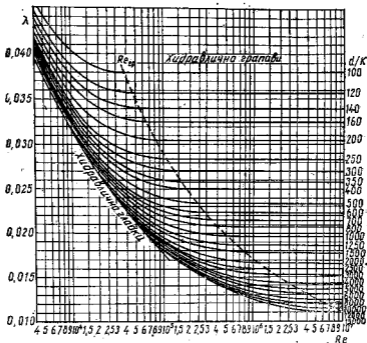
Таблица 8.1

Материал	Състояние на тръбите	$\lambda$ , mm
Изтеглени тръби от стъкло, мед, месинг, бронз, алуминий и леки сплави, пластмаси и др.	Нови, технически гладки	0—0,015
Заварени стоманени тръби	Нови Умерено ръждясали Силно корозирали	0,05—0,10 0,15—0,20 до 3
Галванизирани стоманени тръби	Нови	0,12—0,15
Чугунени тръби	Нови, измазани с цимент или асфалт Нови неизмазани Ръждясали Силно ръждясали	до 0,12 0,25 до 1,5 до 3
Азбесто-циментови тръби (стернит и др.)	Нови	до 0,1
Бетонни тръби и канали	Нови, стоманобетон с грижливо загладена замазка Нови, центрофугиран бетон със загладена замазка Нови, без замазка Канали от стоманобетон със загладена замазка след дългогодишна експлоатация	до 0,15 0,15 0,2—0,8 0,2—0,3 и повече

вана линия е отбелязана границата между преходната област и хидравлично грапавата. Характерно тук е, че преходът от хидравлично гладката област към преходната не става внезапно както при опитите на Никурадзе. Обикновено за квадратичната област коефициентът  $\lambda$  се отчита от графики от вида на показаната на фиг. 8.3, която се отнася за стоманени тръби. Тъй като съществува известна несигурност за абсолютно точното определяне на коефициента  $\lambda$ , налага се известно разумно преоразмеряване. Предвид и на обстоятелството, че при експлоатиране грапавините на тръбните стени се увеличават по височина, коефициентът може да бъде определен и по графиката на Никурадзе, като относителната гладкост се определя с помощта на еквивалентната грапавост по табл. 8.1.

Изложената методика за изчисляване на загубите на налягане се отнася за течения в кръгли прави тръби в участъка на раз-

вито ламинарно или турбулентно течение. За определянето на загубите от триене в началния участък трябва да се съобрази по-големият пад на налягане за единица дължина в посока на движението в сравнение с този в развитото течение в съответствие



Фиг. 8.3

с изложеното в т. 7.3 за ламинарно течение и т. 7.9 за турбулентно.

В практиката се използват и канали с некръгло сечение. Както е известно, при турбулентните течения пристенното тангенциално напрежение  $\tau_0$  се влияе главно от условията в близост на стената и практически не зависи от формата на напречното канално сечение. Тогава равенството на съпротивителната сила  $X = \Pi \tau_0$  и силата на натиск  $P = p_0 f$  може да се запише така:

$$p_0 f = \Pi \tau_0$$

или

$$p_0 = \frac{\Pi}{f} \tau_0 = 4 \frac{l}{d_h} \tau_0, \quad (8.13)$$

където  $\Pi$  е периметърът на сечението;  $f$  — лицето на сечението;  $d_h = \frac{4f}{\Pi} = 4r_h$  е т. нар. хидравлически диаметър, който е равен на

четири пъти хидравличен радиус, дефиниран с отношението

$$r_h = \frac{\pi}{f}$$

Тогава за пресмятане на линейното съпротивление може да се използва уравн. (8.3), като в него  $d$  се замени с  $d_h$  и съответно  $\frac{d}{k}$  с  $\frac{d_h}{k}$  и  $Re = \frac{u_m d_h}{\nu}$ , което приема вида

$$p_s = \lambda \frac{l}{d_h} \rho \frac{u_m^2}{2} \quad (8.14)$$

При ламинарните течения обаче формата на напречното сечение оказва известно влияние върху съпротивлението, за което се внася корекция във формулата за коефициента  $\lambda$  посредством множителя  $n$ , т. е.

$$\lambda = n \frac{64}{Re} \quad (8.15)$$

Стойностите на корекционния множител  $n$  за правоъгълно сечение със страни  $a$  и  $b$  са дадени в табл. 8.2.

Таблица 8.2

$a/b$	1	1,25	1,5	2	3	4	4	10
$n$	0,889	0,898	0,9191	0,971	1,066	1,14	1,19	1,3

### Хидравлично съпротивление в открити канали

Намерените зависимости могат да се приложат и за равномерни течения в открити канали или когато течността изпълва частично тръбата, т. е. за течения със свободна повърхнина, която най-често граничи с атмосферата. В такива случаи обикновената повърхнина (намокреният периметър) на напречното сечение се пресмята само от онези части на каналните стени, които се намират в допир с течността (намокрените части). Свободната повърхнина не се взема под внимание, тъй като се предполага, че там не действуват тангенциални напрежения срещу движението на течността.

Тъй като навсякъде по свободната повърхнина налягането е еднакво (най-често атмосферното) и средната скорост по всяко напречно сечение е една и съща (предполага се, че сечението на

канала е непроменено), загубената енергия може да се компенсира само за сметка на потенциалната енергия на флуида, т. е. от намаляването на геодезичната височина  $z$ . Ето защо, за да има равномерно течение, откритият канал е наклонен по посока на течението. От (8.3) следва

$$h_3 = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = z_1 - z_2 = \lambda \frac{l}{d_h} \frac{u_m^2}{2g}. \quad (8.16 \text{ а})$$

Получената зависимост показва, че на разстояние  $l$  по дължината му каналът трябва да намали геодезичната си височина с  $\Delta z = z_1 - z_2$ . Оттук следва

$$\frac{\Delta z}{l} = i = \frac{\lambda}{d_h} \frac{u_m^2}{2g}, \quad (8.16 \text{ б})$$

където  $i$  се нарича *наклон на канала*, тъй като  $i = \frac{\Delta z}{l} = \sin \alpha$ ;  $\alpha$  — ъгълът, който каналът сключва с хоризонталата.

За практически изчисления на загубите коефициентът  $\lambda$  може да се определи например по (8.10). Като се пресметне  $u_m$  от (8.16 б), се получава т. нар. формула на Шези (1755), която е намерила голямо приложение в строителната хидравлика:

$$u_m = \sqrt{\frac{4r_h}{\lambda} 2gi} = c \sqrt{r_h i}, \quad (8.17)$$

където  $c = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ .

За коефициента  $c$  са получени много експериментални данни за квадратичната област, когато коефициентът  $\lambda$  не зависи от  $Re$ . В 1889 г. Манинг е предложил формулата, в която скоростта на течението се изразява чрез някакъв параметър на градината, а също така чрез хидравличния радиус  $r_h$  и наклона  $i$ , т. е.

$$u_m = \frac{1}{k} Re^{2/3} i^{1/2}, \quad (8.18)$$

където  $k$  е еквивалентната граавост.

Като се сравни полученият израз с формулата на Шези, се вижда, че

$$c = \frac{1}{k} r_h^{1/6}.$$

Тази формула е получена в резултат на измервания в канали с различна грапавина на стените и напречни сечения при достатъчно големи Рейнолдсови числа, които да съответствуват на условията за течение в хидравлично гладки тръби.

## 8.2. МЕСТНИ СЪПРОТИВЛЕНИЯ

Местните съпротивления и свързаните с тях загуби на механична енергия се появяват във всички тръбопроводни елементи, при които течението е съпроводено с откъсване и вихрообразуване. Например входът в тръбопроводи, разширенията и стесненията при прехода от един диаметър в друг, колената, които изменят посоката на течението, разклоненията, дроселните устройства и т. н. са източници на допълнителни хидравлични загуби, които се наричат *местни съпротивления*. Разбира се, и тук има съпротивление на триене, но вследствие на сравнително малката дължина на споменатите тръбопроводни елементи то е много малко спрямо вихровото съпротивление, поради което най-често само последното е предмет на определяне.

Загубите от местно съпротивление се пресмятат по формулата на Вайсбах

$$p_{м.с} = \zeta \frac{\rho u_m^2}{2} \quad (8.19)$$

където  $\zeta$  е коефициентът на местно съпротивление, а  $\rho \frac{u_m^2}{2}$  — динамичното налягане, за определянето на което при тръбопроводни елементи с различни лица на входящото и изходящото напречно сечение да се използва средната скорост  $u_m$  по изходното напречно сечение.

Како се има предвид подобие то на явленията в различните тръбопроводни и канални елементи на местно съпротивление и данните от опитни измервания, загубите на механична енергия, респ. коефициентът на местно съпротивление, зависят от числото на Рейнолдс, относителната гладкост  $\frac{d}{k}$  и най-вече от геометричната форма на елемента. Влиянието на Рейнолдсовото число върху коефициента на местно съпротивление е забележимо при малки стойности на  $Re$  и в случаите, когато то оказва влияние на положението на точката на откъсване на течението. При турбулентните течения с по-големи  $Re$  влиянието му върху коефициента на местно съпротивление е много малко и се пренебрегва.

Коефициентът на местно съпротивление може да се опреде-

ли аналитично само в някои случаи. Обикновено определянето му се извършва по опитен път, като стойностите му се дават в зависимост от характерен геометричен параметър в таблица или графика, която се намира в наръчниците и справочниците по хидродинамика или хидравлика.

Понякога местните съпротивления могат да се изразят с еквивалентната дължина  $l_{ек}$  на тръбопроводен участък, чието съпротивление на триене има същата стойност, т. е.

$$\zeta \frac{\rho u_m^2}{2} = \lambda \frac{l_{ек}}{d} \frac{\rho u_m^2}{2},$$

където

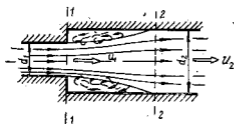
$$l_{ек} = \zeta \frac{d}{\lambda} \text{ или } \frac{l_{ек}}{d} = \frac{\zeta}{\lambda}. \quad (8.20)$$

Получената зависимост позволява по сравнително лесен начин да се сравняват за дадена тръбопроводна система загубите на енергия от местни съпротивления със загубите на енергия от линейни съпротивления.

Основните видове местни съпротивления могат условно да се разделят на няколко групи: местни съпротивления от промяна на големината на скоростта (респ. сечението), от промяна на направление на скоростта вследствие на разделяне или сливане на течения, а също така вследствие на наличието на устройства за регулиране и управление на течението.

### Местни съпротивления от промяна на напречното сечение

Към този вид местни съпротивления обикновено се отнасят внезапните разширения и стеснения, конвергентните и дивергентните участъци на течението,



Фиг. 8.4

а също така входният и крайният участък на тръбопроводите. Типичен пример на елемент на местно съпротивление е внезапното разширение на тръбопровод от диаметър  $d_1$  на диаметър  $d_2$  (фиг. 8.4). Както показват наблюденията, течението се откъсва още от ръба на мя-

стото на разширение и по-нататък в широката част на тръбопровода то се движи във форма на струя, като пространството между нея и тръбната стена е запълнено от вихрова област и циркуляционно движение. Струята постепенно се разширя-

ва, като едновременно се размесва с флуидните частици от вихровата област и на известно разстояние  $l \approx 10 d_2$  тя заема цялото напречно сечение, откъдето течението приема характер на равномерно установено течение в тръба или канал.

Определянето на загубите от вихровото движение при внезапно разширение може да стане с Бернулиевото уравнение, приложено за реален флуид, и уравнението за количеството на движение в проекция по ос  $x$  (надлъжна ос на елемента), приложено за контролния обем, ограничен от сеченията 1-1 и 2-2 и тръбната стена с диаметър  $d_2$ . За загубите на налягане на разглеждания участък от уравнението на Бернули се получава

$$\frac{\rho u_{m1}^2}{2} + p_1 = \frac{\rho u_{m2}^2}{2} + p_2 + p_{м.с.}$$

или

$$p_{м.с.} = \frac{\rho}{2}(u_{m1}^2 - u_{m2}^2) + (p_1 - p_2).$$

Понеже проекцията на масовата сила по ос  $x$  е равна на нула, а силата на триене е сравнително малка и може да се пренебрегне, уравнението за количеството на движение приема вида

$$R_x = q(u_{m1} - u_{m2}) + \frac{\pi d_2^2}{4}(p_1 - p_2) = 0$$

или

$$p_1 - p_2 = -\rho u_{m2}(u_{m1} - u_{m2}),$$

където

$$q = \rho u_{m2} \frac{\pi d_2^2}{4}.$$

Полученият израз, заместен в уравнението за загубното налягане, довежда до зависимостта

$$p_{м.с.} = \frac{\rho}{2}(u_{m1}^2 - u_{m2}^2) - \rho u_{m2}(u_{m1} - u_{m2})$$

или

$$p_{м.с.} = \frac{\rho u_{m2}^2}{2} \left( \frac{u_{m1}}{u_{m2}} - 1 \right)^2.$$

Като се вземе под внимание уравнението за непрекъснатостта,

съгласно с което  $\frac{u_{m1}}{u_{m2}} = \frac{f_2}{f_1}$ , изразът за загубите на местно съпротивление приема вида

$$p_{м.с} = \left( \frac{f_2}{f_1} - 1 \right)^2 \frac{\rho u_{m2}^2}{2} = \zeta \frac{\rho u_{m2}^2}{2},$$

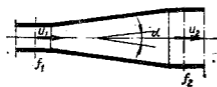
където  $\zeta = \left( \frac{f_2}{f_1} - 1 \right)^2$ . (8.21)

Получената по аналитичен път формула (8.21) се потвърждава много добре от опита, особено при по-големите числа на Рейнолдс. Това показва, че загубите от триене по стените в смесителния участък на елемента внезапно разширение са действително малки в сравнение със загубите от генериране и дисипация на турбулентност при разширяване на течението. В табл. 8.3 са дадени стойностите на коефициента на местно съпротивление  $\zeta$  в зависимост от характерния геометричен параметър  $f_2/f_1$ .

Таблица 8.3

$f_2/f_1$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5	6
$\zeta$	0,04	0,06	0,36	0,64	1,0	2,25	4,0	6,25	9,0	16	25

Ако диаметърът  $d_2$  стане много голям, налице е случай на изтичане на струя в неограничено пространство, запълнено от същата флуидна среда. Тогава, ако коефициентът на местно съпротивление  $\zeta$  се отнесе към скоростта  $u_{m1}$ , т. е.



Фиг. 8.5

$$p_{м.с} = \zeta' \frac{\rho u_{m1}^2}{2},$$

където

$$\zeta' = \left( 1 - \frac{f_1}{f_2} \right)^2,$$

при  $d_2 \rightarrow \infty$  се получава  $\zeta' = 1$ , което означава, че цялата кинетична енергия  $\frac{\rho u_{m1}^2}{2}$  на изтичащата струя се губи, както е случай при свободните струи.

Съпротивленията от този вид могат да се намалят значително, ако внезапното разширение се замени с конусен дифузор (фиг. 8.5), при който за ъгли на разширение  $\alpha < 8^\circ$  може практически да

се избегне откъсването на течението и вихрообразуването. Аналогично на (8.21) коефициентът на местно съпротивление на дифузори се определя по полуемпиричната зависимост

$$\zeta = k \left( \frac{f_2}{f_1} - 1 \right), \quad (8.22)$$

в която числото  $k$  зависи от ъгъла на разширение по табл. 8.4.

Таблица 8.4

$\alpha^\circ$	2,	10	15	20	25	30	40	60	90	180	
$k$	0,18	0,13	0,16	0,27	0,43	0,62	0,81	1,03	1,21	1,12	1,0

Вижда се, че енергийните загуби имат минимум за  $\alpha \approx 5^\circ$  и че няма смисъл от употребата на дифузори с по-голям ъгъл на разширение от  $\alpha = 30^\circ$ .

При дифузори откъсването на течението е толкова по-бързо колкото по-голямо е числото на Рейнолдс. Това се вижда от табл. 8.5, където са показани максималните стойности на ъгъла на разширение  $\alpha$  (при който все още няма откъсване) в зависимост от  $Re$  за дифузори с кръгло, правоъгълно и квадратно напречно сечение.

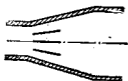
Таблица 8.5

$Re$	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$
$\alpha_{\max}$	$10^\circ$	$8,5^\circ$	$7,5^\circ$	$6,5^\circ$

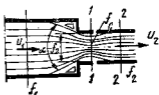
Съпротивлението на дифузори с по-голям ъгъл на разширение може да се намали посредством използването на познатите вече средства—продухване или изсмукване на пристенния слой или с използване на вътрешни конични повърхнини с по-малък ъгъл на разширение и по-малка дължина от тази на дифузора (фиг. 8.6).

Течението в т. нар. внезапно стеснение е показано на фиг. 8.7. Характерно за него е това, че то продължава да се свива и след острия ръб, като на известно разстояние напречното му сечение приема минимална стойност, след което започва разширяване, аналогично на внезапното разширение. При него съществува вих-

рообразуване както пред, така и след стеснението. Докато предният вихър е „затворен“ и почти не се отнася от течението и следователно не увеличава забележимо съпротивлението, задните вихри се отнасят от течението и на тяхно място се образуват но-



Фиг. 8.6



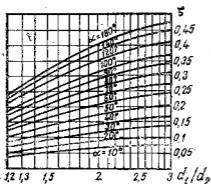
Фиг. 8.7

ви. Ето защо може с известно приближение да се приеме, че загубите на енергия се получават предимно в зоната на разширение на течението от сечението 1—1 до 2—2, разположена след най-тясното сечение 1—1. Тези загуби аналогично на внезапното разширение се определят по израза

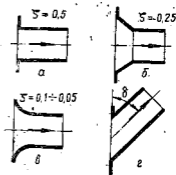
$$p_{м.с} = \left( \frac{u_{m1}}{u_{m2}} - 1 \right)^2 \frac{\rho u_{m2}^2}{2} = \zeta \frac{\rho u_{m2}^2}{2}, \quad (8.23)$$

където

$$\zeta = \left( \frac{u_{m1}}{u_{m2}} - 1 \right)^2 = \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)^2. \quad (8.24)$$



Фиг. 8.8

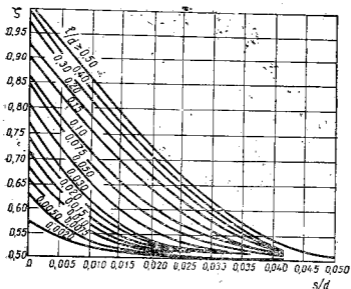
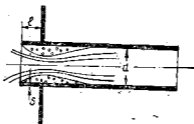


Фиг. 8.9

В случая коефициентът на напречна контракция  $\epsilon = \frac{f_2}{f_1}$  се определя по получената по опитен път полуемпирична зависимост

$$\epsilon = 0,62 + 0,38 \left( \frac{f_2}{f_1} \right)^3. \quad (8.25)$$

В действителност коефициентът  $\zeta$  е малко по-голям вследствие на съпротивлението пред стеснението. Той зависи главно от отношението  $\frac{d_1}{d_2}$ , респ.  $\frac{f_1}{f_2}$ , и опитно определените му стойности могат да се отчетат от графиката на фиг. 8.8 за  $\alpha = 180^\circ$ .

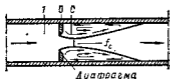


Фиг. 8.10

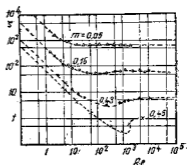
Съпротивленията от този вид могат да се намалят, ако внезапното стеснение се замени с плавно стесняващ се участък—конфузор, с ъгъл на стеснение  $\alpha$  (фиг. 8.8). Стойностите на коефициента на местно съпротивление  $\zeta$  са дадени на фиг. 8.8 в зависимост от  $d_1/d_2$  и ъгъл  $\alpha$ ; кривата  $\alpha = 180^\circ$  се отнася за внезапно стеснение по фиг. 8.6.

Когато сечението  $f_1$  стане много по-голямо от  $f_2$ , се получава внезапно стеснение, което съществува при втичането в тръби и канали от сравнително големи съдове. Съпротивлението на втичане може да се намали, когато входният участък се оформи като

конус или като се заобли по дъга от окръжност или лемниската, с което вихрообразуването и напречната контракция може да се избегнат почти напълно и съпротивлението практически е само от триене. На фиг. 8.9 са показани различни конструктивни ва-



Фиг. 8.11



Фиг. 8.12:

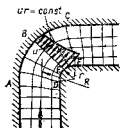
риантите на входен участък на тръбопровод. За случая  $a_1^2 \zeta = 0,5$ , за  $b$   $\zeta = 0,25$ , за  $c$   $\zeta = 0,1 \div 0,5$ , а за случай  $z \zeta = 0,5 \div 0,3 \cos \alpha + 0,2 \cos^2 \alpha$ . За входен участък, оформен като устие на Борд (фиг. 8.10), коефициентът  $\zeta$  се определя по графиката на същата фигура.

За определяне на коефициента на местно съпротивление на бленда (диафрагма) по фиг. 8.11, респ. фиг. 5.23, може да се използва опитно определената зависимост  $\zeta = f(Re)$ ; показана в логаритмичен мащаб на фиг. 8.12. В случая  $Re = \frac{u_m d_1}{\nu}$ , а  $m = f_0 / f_1$  е площното съотношение на напречните сечения на диафрагмата и тръбопровода с диаметър  $d_1$ . Вижда се, че за малки  $Re$  функциите  $\zeta = f(m, \lg Re)$  са линейни, от което следва, че в тази област  $\zeta \sim u_m$  и очевидно преобладават вискозните сили. След една преходна област, в която инерционните сили стават забележими при по-нататъшното увеличаване на  $Re$ ,  $\zeta \rightarrow \text{const}$  течението става турбулентно и  $p_0 \sim u_m^2$ .

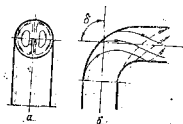
#### Местни съпротивления от промяна на направлението на течението

Съществуват тръбопроводни елементи, които променят направлението на течението, например колена, ъглови вентили и др. На фиг. 8.13 е показана потенциалната токова картина на течението в коляно с ъгъл на отклонение на течението  $\vartheta = 90^\circ$ . В областта на кривите токови линии в съответствие с уравн. (4.30) налягането се увеличава в радиално направление, а скоростта по уравнението на Бернули съответно намалява. Всъщност тя се изменя в радиално направление по закона на потенциалния вихър (6.206), т. е.  $\omega r = \text{const}$ . Вследствие на това в участъка  $AB$  на външната стена

и участъка  $EF$  на вътрешната съществуват конвективно закъснителни течения, следователно и условия за откъсване или вихрообразуване, което води до съответно вихрово съпротивление. Нарастването на налягането в радиално направление от своя страна



Фиг. 8.13



Фиг. 8.14

на става причина за появяване на вторично течение. В случая частиците на флуида в близост на стената от външната страна започват да се придвижват по периферията към вътрешната страна от по-голямото към по-малкото налягане, където се срещат и насочват към централната част на основното течение (фиг. 8.14). Появилото се по този начин вторично течение се отнася от основното, в резултат на което се образуват два противоположни въртящи се около надлъжни оси вихъра. На фиг. 8.14 с плътни линии са показани абсолютните токови линии в близост до стената, а с прекъсвани — в средата на течението. Поради вътрешното триене в следващия участък след коляното двата вихъра загубват въртеливото си движение и съответната дисипирана енергия представлява загубата на механична енергия от вторично течение.

Местното съпротивление на коляното, включващо вихровите загуби и тези от вторичното течение, зависи преди всичко от радиуса на кривина  $R$  и ъгъла на отклонение  $\delta$  на коляното. То може да се пресмята със задоволителна точност по формулата на Вайсбах

$$\zeta = \left[ 0,139 + 0,163 \left( \frac{d}{R} \right)^{3,5} \right] \frac{\delta}{90}, \quad (8.26)$$

където  $d$  е диаметърът на тръбата. Формулата (8.26) важи за  $d \leq 2R \leq 5d$ .

В табл. 8.6 са дадени стойностите на коефициента  $\zeta$  в зависимост от отношението  $\frac{d}{R}$  и ъгъла  $\delta$ .

Таблица 8.6

$d/R$ \ $\delta$	20°	60°	90°	120°	160°	190°
0,2	0,029	0,087	0,132	0,175	0,223	0,263
0,4	0,03	0,091	0,133	0,183	0,244	0,276
0,6	0,035	0,105	0,158	0,211	0,281	0,316
0,8	0,046	0,136	0,206	0,274	0,365	0,412
1,0	0,055	0,196	0,294	0,392	0,522	0,588
1,2	0,098	0,294	0,440	0,587	0,782	0,880
1,4	0,117	0,441	0,661	0,881	1,175	1,332
1,6	0,217	0,651	0,977	1,302	1,736	1,954
1,8	0,312	0,937	1,408	1,875	2,500	2,816
2,0	0,439	1,318	1,978	2,636	3,515	3,950

За криви тръби с правоъгълно напречно сечение и с отношение на страните  $\frac{a}{b} \leq 2$  коефициентът на местно съпротивление се изчислява по формулата

$$\zeta = \left[ 0,124 + 0,274 \left( \frac{a}{R} \right)^{3,5} \right] \frac{\delta}{90} \quad (8.27)$$

Стойностите на коефициента  $\zeta$  в зависимост от отношението  $\frac{a}{R}$  при ъгъл  $\delta = 90^\circ$  са дадени в табл. 8.7.

Таблица 8.7

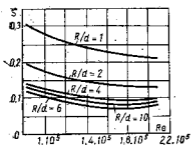
$a/R$	0,2	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
$\zeta$	0,124	0,135	0,25	0,64	1,54	3,23

Както показва опитът, коефициентът на местно съпротивление на кривите участъци на тръбите освен от параметрите  $d/R$  и ъгъл  $\delta$  зависи и от числото на Рейнолдс. Тази зависимост е забележима при ламинарните течения и при турбулентните течения в хидравлично гладки тръби (фиг. 8.15), докато при турбулентните течения в хидравлично грапави тръби тя е пренебрежимо малка (фиг. 8.16).

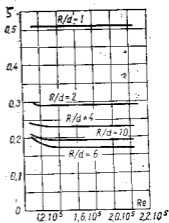
Според резултати от опитни изследвания минимално местно съпротивление се получава, когато радиусът на кривина на средната линия на кривия участък (коляното) е около  $R = (7 \div 8) d$  или при криви участъци с постепенно намаляване на сечението им в посока на течението. При по-големи диаметри на тръбите спазването на това отношение довежда до много големи размери

на коляното, поради което се използват колена с направляващи лопатки по фиг. 8.17.

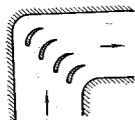
За тръбопроводи с внезапно отклонение на течението под ъгъл  $\delta$  (фиг. 8.18) коефициентът на местно съпротивление се изчислява по формулата



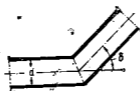
Фиг. 8.15



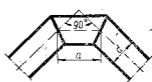
Фиг. 8.16



Фиг. 8.17



Фиг. 8.18



Фиг. 8.19

$$\zeta = 0,946 \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2,05 \sin^4 \frac{\delta}{2} \quad (8.28)$$

В табл. 8.8 са дадени стойностите на коефициента в зависимост от ъгъл  $\delta$ .

Таблица 8.8

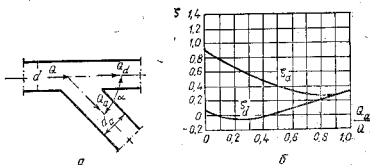
$\delta$	20	40	60	80	90	100	120	140	160
$\zeta$	0,04	0,14	0,364		0,984	1,26	1,86	2,43	2,85

При двойно коляно (фиг. 8.19) стойността на коефициента  $\zeta$  се дава от табл. 8.9 в зависимост от отношението  $a/d$ .

$a/d$	0,71	0,943	1,42	1,86	2,56	3,72	6,23
гладки стени	0,507	0,35	0,26	0,29	0,356	0,356	0,40
гравави стени	0,51	0,415	0,377	0,39	0,43	0,46	0,44

Местни съпротивления при разделяне и събиране на теченията.

Елементите, които се използват за разделяне и събиране на



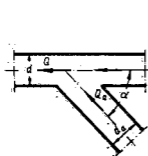
Фиг. 8.20

теченията, се наричат *тройници*. При тях се изчисляват две съпротивления: за правия участък с коефициента  $\zeta_a$  и за отклонения с  $\zeta_d$ . Опитите показват, че в турбулентната област коефициентите  $\zeta_a$  и  $\zeta_d$  не зависят от числото  $Re$ , а практически само от отношението на дебитите  $Q_a/Q$ . Стойностите на коефициентите на местно съпротивление за разделяне на течението по фиг. 8.20 а са дадени на фиг. 8.20 б. Както се вижда, в интервала  $0,05 \leq Q_a/Q \leq 0,45$  коефициентът  $\zeta_d$  има отрицателни стойности. Това означава, че в посочения интервал правото течение увеличава енергията си, което очевидно може да стане само за сметка на отклоненото течение. За събиране на две течения под ъгъл  $\alpha = 45^\circ$  (фиг. 8.21 а) коефициентите на съпротивление са дадени на фиг. 8.21 б.

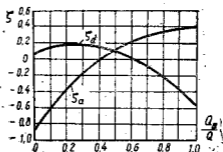
Местни съпротивления в регулиращите органи и арматури

В тръбопроводните системи се използват най-разнообразни по конструкция и предназначение регулиращи устройства и арматури като шибъри, кранове, дросели, клапи, вентили и др. Обикновено коефициентът на местно съпротивление на течението през тези елементи се изразява в зависимост от техен характерен геометричен параметър.

Стойностите на коефициента на местно съпротивление за шибър в кръгла тръба (фиг. 8.22) са дадени в табл. 8.10, а за дроселна клапа в кръгла тръба (фиг. 8.23) в табл. 8.11.



а

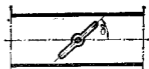


б

Фиг. 8.21



Фиг. 8.22



Фиг. 8.23

Таблица 8.10

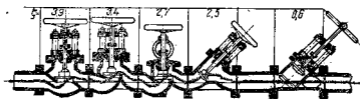
$x/d$	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
$f_x/f$	0,948	0,856	0,74	0,61	0,466	0,315	0,16
$\zeta$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17	97,8

Таблица 8.11

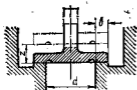
$\delta^\circ$	5	15	30	45	60	75	90
$\zeta$	0,24	0,90	3,90	18,7	118	760	

Стойностите на коефициента  $\zeta$  за изобразените видове вентили (фиг. 8.24) при напълно отворено положение са дадени на фигурата.

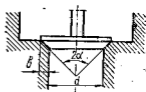
При клапаните без долна направляваща част (фиг. 8.25) коефициентът на местно съпротивление  $\zeta$  се определя по формулата



Фиг. 8.24



Фиг. 8.25



Фиг. 8.26

$$\zeta = A + B \left( \frac{d}{z} \right)^2, \quad (8.29)$$

където  $d$  е диаметърът на гнездото и  $z$  — височината на повдигане на клапана.

Според изследванията на Бах

$$A = 0,55 + \frac{4(b - 0,1 d)}{d} \quad \text{и} \quad B = 0,15 \div 0,16.$$

Формулата важи за  $z = (0,1 \div 0,25) d$  и  $b = (0,1 \div 0,25) d$ .

За конусен клапан по фиг. 8.26 при ъгъл  $2\delta = 90^\circ$  коефициентът се определя по формулата

$$\zeta = 2,6 - 0,8 \left( \frac{d}{z} \right) + 0,14 \left( \frac{d}{z} \right)^2, \quad (8.30)$$

където  $z$  е височината на повдигането; зависимостта важи за  $z = (0,1 \div 0,25) d$  и  $b = 0,1 d$ .

Много често в промишлената аеродинамика и вентилационната техника се използват мрежи за успокояване на течението в камери или като предпазно средство на вентилаторите от попадане

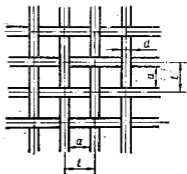
на твърди частици и др. Филтрите от мрежа са също така елементи на местно съпротивление, на което коефициентът  $\zeta$  се определя в зависимост от характерен геометричен параметър. Последният обикновено се изразява с отношението на широчината  $a$  на светлия отвор и стъпката  $t$  на мрежата ( $a/t$ ) по фиг. 8.27. За често употребяваните в практиката мрежи с квадратни отвори коефициентът на местно съпротивление  $\zeta$  се определя със задоволителна точност по формулата на Н. С. Краснов:

$$\zeta = -\frac{92-78m}{Re_a} + 0,7(1,5-m), \quad (8.31)$$

в която  $m = \left(\frac{a}{t}\right)^2$  е коефициент на

светлия отвор на мрежата и  $Re_a = \frac{a u_m}{\nu}$ .

В случая числото на Рейнолдс се определя с широчината на светлия отвор  $a$ , като  $u'_m = \frac{u_m}{m}$  е средната скорост през светлия отвор на мрежата, а  $u_m$  — средната скорост в канала пред мрежата.



Фиг. 8.27

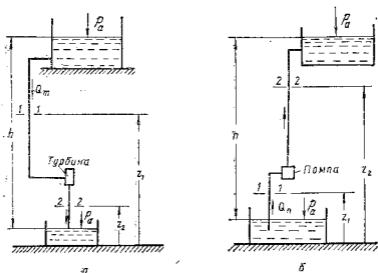
### 8.3. ПЪЛНО СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА ТРЪБОПРОВОД

Основната задача при проектиране на тръбопроводни системи е да се осъществи транспортирането на определен дебит флуид при минимален разход на енергия. Това от своя страна задължава конструктора да пресмята общия баланс на енергията за определен контролен обем, а в повечето случаи за цялата тръбопроводна система, така че загубите на енергия плюс остатъчната енергия да са равни на разполагаемата енергия. Очевидно като основно уравнение за енергийния баланс може да се използва уравнението на Бернули. Същото, приложено за две сечения 1-1 и 2-2 на тръбопроводна система, в участъка между който е включена например хидравлична турбомашина — турбина (фиг. 8.28 а) или помпа (фиг. 8.28 б), може да се запише, както следва:

$$\frac{\rho u_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho u_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 \pm \Delta p + \sum p_{31-2}. \quad (8.32)$$

В случая  $\Delta p$  е обменената с флуида специфична механична енергия, като знакът (+) е за силова машина (турбина), а знакът (-) — за работна машина (помпа, вентилатор, компресор).

Ако сеченията 1—1 и 2—2 са съответно сеченията на свобод-



Фиг. 8.28

ните повърхнини на горен и долен резервоар, отстоящи една от друга на височина  $h$ , в които скоростта е приблизително равна на нула  $u_1 = u_2 = 0$ , а налягането е  $p_1 = p_2 = p_a$ :

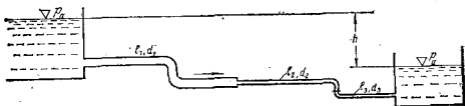
$$\text{за помпа} \quad \Delta p_n = \rho g h + p_3 \text{ или } h_n = h + h_3; \quad (8.33 \text{ а})$$

$$\text{за турбина} \quad \Delta p_T = \rho g h - p_3 \text{ или } h_T = h - h_3. \quad (8.33 \text{ б})$$

Вижда се, че обменената специфична енергия на помпата и течността е предназначена за транспортирането на определен дебит от течността на височина  $h$  и за преодоляване на свързаното с това транспортиране пълно хидравлично съпротивление на тръбопроводната система. За силовите машини разполагаемият пад се изразходва за преодоляване на пълното хидравлично съпротивление на тръбопроводната система, като останалата част се отдава от флуида на турбината и посредством съответен генератор се превръща в електрическа енергия. При вентилаторите, чието предназначение е да транспортират газове, въздух и други, които имат малка плътност, обикновено отдаваната на флуида енергия се изразходва само за преодоляване на пълните хидравлични съпротивления на тръбопроводната система, т. е.

$$\Delta p_a = p_a. \quad (8.33 \text{ в})$$

От всички тези случаи се вижда, че задачата на инженера се свежда до определяне на общите (пълните) хидравлични съпротивления на тръбопроводните системи, които по начина на пресмятането им се разделят на прости и сложни тръбопроводи.



Фиг. 8.29

**Прости тръбопроводи.** Прости се наричат тръбопроводите без разклонения. Те могат да се състоят от много последователни участъци с различни диаметри и дължини. В най-общия случай простият тръбопровод съединява два резервоара с различни нива и различни или еднакви налягания (фиг. 8.29) или представлява смукателния и нагнетателния участък на вентилационна уредба без разклонения. Ако броят на отделните линейни участъци се отбележи с  $n$ , които имат диаметри и дължини съответно  $d_i$ ,  $l_i$  (където  $i=1$  до  $n$ ), а броят на местните съпротивления в един участък е  $k$  с коефициенти на местно съпротивление съответно  $\zeta_j$  (където  $j=1$  до  $k$ ), за пълното съпротивление на такъв прост тръбопровод може да се запише

$$p_a = \sum_{i=1}^n \left[ \lambda \frac{l}{d} + \sum_{j=1}^k \zeta_j \right] \frac{\rho u_m^2}{2}; \quad (8.34 \text{ а})$$

и в метри течностен стълб

$$h_a = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum_{j=1}^k \zeta_j \right) \frac{u_m^2}{2g} \right]; \quad (8.34 \text{ б})$$

Като се вземе под внимание уравнението за непрекъснатостта, съгласно с което  $u_m = \frac{4Q}{\pi d^2}$ , (8.34) получава вида

$$p_a = \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \lambda \frac{l}{d^5} + \frac{1}{d^4} \sum_{j=1}^k \zeta_j \right) \right] \rho Q^2; \quad (8.35 \text{ а})$$

$$h_3 = \frac{8}{g \pi^2} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \lambda \frac{l}{d^5} + \frac{1}{d^4} \sum_{j=1}^k \zeta_j \right) \right] Q^2. \quad (8.356)$$

Полученият израз (8.35) представлява зависимостта на пълното съпротивление от дебита на течението. Трябва да се има предвид, че коефициентите  $\lambda_i$  и  $\zeta_i$  зависят чрез Рейнолдсовото число от дебита.

Уравнение (8.35) дава възможност за решаване на още две задачи. Едната от тях е определянето на дебита при зададен пад на налягането, респ. общото съпротивление  $p_3$ , дължина  $l$  и диаметър  $d$  на тръбопровода, като за целта (8.35) се записва във вида

$$Q = \sqrt{\frac{p_3}{0,81 \rho \sum_{i=1}^n \left( \lambda \frac{l}{d^5} + \frac{1}{d^4} \sum_{j=1}^k \zeta_j \right) }}. \quad (8.36)$$

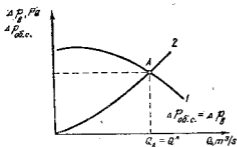
В случая обаче пресмятането е затруднено, тъй като определянето на коефициента  $\lambda_i$  предполага познаване на  $Re$ , т. е. на дебита  $Q$ . Обикновено задачата се решава по метода на последователните приближения. Най-напред в първо приближение се използва квадратичният закон за съпротивлението, според който коефициентът на линейно съпротивление  $\lambda$  не зависи от  $Re$ , а след това въз основа на получения дебит се прави проверка за получената стойност на коефициента  $\lambda$ . В случай че отклонението е голямо, се пресмята с осреднената стойност на коефициента  $\lambda$ .

Другата задача е определяне на диаметъра на тръбопровода  $d_i$  по предварително зададени дебит  $Q$ , пад на налягане (общо съпротивление) и дължина на тръбопровода  $l_i$ . Задачата обаче е много по-сложна, тъй като остават неизвестни както относителната гладкост  $d/k$ , така също и Рейнолдсовото число. Обикновено този вид задачи се решават по графичен път. Като се зададат различни диаметри  $d_i$  по (8.36), се пресмятат съответните стойности на дебита  $Q$  и се изразява графически зависимостта  $Q=f(d)$ , от която се определя диаметърът, който съответствува на зададения дебит  $Q$ .

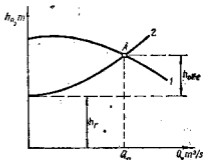
**Характеристика на тръбопровод.** Функцията  $p_3=f(Q)$ , респ.  $h_3=f(Q)$ , по уравн. (8.35) се нарича *съпротивителна характеристика* на тръбопровода. В турбулентните течения за хидравлически грапавата област  $\lambda$  и отчасти  $\zeta$  са константи, не зависят от  $Re$  и характеристиката се изразява с квадратна парабола. За другите случаи (ламинарни течения и течения в хидравлично гладки тръби) коефициентът  $\lambda$  зависи от  $Re$ , т. е. от  $Q$ , и съпротивителната характеристика на тръбопровода, която има по-

друг характер, се получава посредством съответни пресмятания за достатъчни стойности на дебита  $Q$ .

Характеристиката на тръбопровода е необходима за установяване на взаимодействието (съвместната работа) между течението в



Фиг. 8.30



Фиг. 8.31

тръбопровода и включената към него хидравлична машина. Тя дава възможност да се прави подходящ избор на споменатия вид машина за проектираната тръбопроводна система. Нека например с кривата 1 на фиг. 8.30 се изрази зависимостта  $\Delta p_g = f(Q)$ , т. е. характеристиката на вентилатор, където  $\Delta p_g$ , Pa е специфичната му енергия, отнесена за единица обем от флуида, а с кривата 2 — зависимостта  $p_g = f(Q)$ , т. е. съпротивителната характеристика на тръбопровода, към който е монтиран вентилаторът. Тогава точката на пресичане (A) на двете криви определя съвместната работа на вентилатора с тръбопровода. Тя показва, че вентилаторът може да транспортира през тръбопровода само дебита  $Q^*$ , тъй като пълното съпротивление при този дебит е равно на специфичната енергия на вентилатора, съответстваща на същия дебит. В практиката обикновено дебитът  $Q^*$  е предварително зададен и следователно въз основа на характеристиката на проектирания тръбопровод (крива 2) се търси вентилатор, който да може да преодолява пълното съпротивление на тръбопровода при този дебит, т. е. характеристиката му да се пресича с крива 2 в точка, чиято абсциса е зададеният дебит  $Q^*$ .

При помпите например трябва да се държи сметка и за потенциалната енергия, която тя отдава на транспортирания флуид (течност). В случая съпротивителната характеристика на тръбопроводната система се нанася над геодезичната височина  $h_r$  (фиг. 8.31) и се получава кривата 2, която се съпоставя с характеристиката на помпата (кривата 1) за определяне на дебита на транспортирания флуид.

Съпротивленията на тръбопроводите водят до загуба на хидравлична енергия. Ако за даден тръбопровод  $H_s = \frac{p}{\rho} = gh_s$ , е

общата загуба на специфична енергия, всеки килограм маса от флуида изразходва за преодоляване на съпротивлението  $H_3$ , J/kg механична енергия и за поддържане на течение с масов дебит  $q$ , kg/s е необходима мощността

$$N_3 = qH_3 = Qp_3, \text{ W.} \quad (8.37)$$

Ако на пример се отнася за тръбопровод на водна турбина, използваемата хидравлична мощност на последната става с  $N_3$  по-малка от разполагаемата. При помпена или вентилационна уредба енергийните загуби се покриват от мощността на двигателя. Вижда се следователно, че намаляването на съпротивленията на тръбопроводите представлява важна технико-икономическа задача. Това се постига в най-общия случай чрез намаляване на съпротивленията в правите участъци и на местните съпротивления. В правите участъци на тръбопроводите, чиято дължина е известна, съпротивлението в тях според (8.3) може да се намалява чрез намаляване на коефициента  $\lambda$  или чрез увеличаване на диаметъра на тръбопровода  $d$ . Намаляването на коефициента на линейно съпротивление  $\lambda$  може да стане за сметка на намаляване на грапавините на стените, т. е. с увеличаване на относителната гладкост. Предвид обаче на експлоатационните условия, които променят (обикновено увеличават) грапавостта, това средство не се е оказало надеждно. Много по-ефективно средство за намаляване на съпротивлението от триене е увеличаването на диаметъра, тъй като същото намалява при иначе еднакви други условия с петата степен на диаметъра. Що се отнася до намаляването на местните съпротивления, за тях трябва да се вземат под внимание съответните указания в т. 8.2.

**Сложни тръбопроводи.** Сложни се наричат тръбопроводите с разклонения, които могат да започнат от една или няколко последователни възлови точки и отново да се събират в обща тръба или въобще да не се събират. Те са много разнообразни, поради което е невъзможно да се дадат обобщаващи методи за изследването им. Разгледани са някои по-типични случаи.

*Тръбопровод с непрекъснато разпределено изтичане по дължината.* Това са тръбопроводи (фиг. 8.32), при които на известна дължина  $l$  частта от общия дебит  $Q_0$  равномерно изтича от много отвори (отклонения), наредени последователно едно след друго на еднакви разстояния. Останалата част от общия дебит  $Q_n = Q - Q_0$  продължава да тече в главния тръбопровод към други участъци.

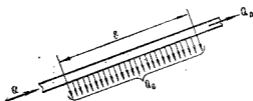
При пресмятане и измеряване на тръбопроводи от този вид се приема, че изтичането става непрекъснато и равномерно по цялата дължина на участъка  $l$  с интензивност  $Q'_0$ ,  $\text{m}^3/\text{s.m}$  на един линеен метър.

Следва, че

$$Q_0 = Q_0 L$$

Загубите от линейни съпротивления на участъка с дължина  $l$  се изчисляват по зависимостта

$$p_3 = 0,81 \rho \lambda \frac{l}{d^5} \left( Q_0 + \frac{Q_0^2}{3} + Q_0 Q_0 \right) \quad (8.38 \text{ а})$$



Фиг. 8.32

В частния случай на изтичане, т. е. само през дискретните отвори ( $Q_0 = 0$ ), при което  $Q_0 = Q$ , се получава

$$p_3 = 0,81 \rho \lambda \frac{l}{d^5} \frac{Q^2}{3} \quad (8.38 \text{ б})$$

Този израз показва, че при непрекъснатото изтичане загубите от линейно съпротивление в участъка с дължина  $l$  са три пъти по-малки отколкото при транзитното преминаване на същия дебит през този участък. Ако през отворите флуидът изтича в камера или в атмосферата, което често се среща във вентилационната техника, към съпротивлението, получено по (8.38), трябва да се прибави като загуба и динамичното налягане на изтичащата през отворите струя. Тогава, ако  $d_0$  е диаметърът на отворите, скоростта на изтичане през един отвор е

$$u_0 = \frac{4Q}{l \pi d_0^2}$$

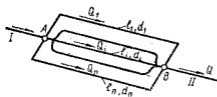
и следователно

$$p'_3 = \zeta \frac{\rho u_0^2}{2} = 0,81 \rho \frac{Q^2}{l^2 d_0^4}$$

откъдето  $p_{3l} = 0,81 \rho \left( \lambda \frac{l}{3d^5} + \frac{1}{l^2 d_0^4} \right) Q^2$  (8.38 в)

Разбира се, това са само загубите от линейно съпротивление на участъка с дължина  $l$  и местното съпротивление при изтича-

нето. Към него трябва да се прибави общото съпротивление на тръбопровода до разглеждания участък, за да се намери по този начин общото съпротивление на цялата тръбопроводна система.



Фиг. 8.33

Тръбопровод с успоредни отклонения. Много често общ тръбопровод се разклонява в няколко тръбопровода (фиг. 8.33), които се съединяват отново или не се съединяват. В тези случаи  $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$  и хидравличните загуби са еднакви в отделните участъци, т. е.

$$p_{a1} = p_{a2} = \dots = p_{an},$$

където

$$p_s = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum_{j=1}^k \zeta_j \right) \frac{\rho u_m^2}{2} \right]_i.$$

Съществуват два вида задачи. При зададен пад на налягане да се определи дебитът или при зададен дебит да се определи падът. За целта се използва следната система уравнения:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$$p_{a1} = 0,81 \rho \lambda_1 \frac{l_1'}{d_1^5} Q_1^2$$

$$p_{an} = 0,81 \rho \lambda_n \frac{l_n'}{d_n^5} Q_n^2$$

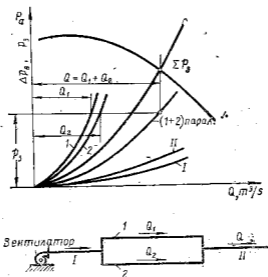
$$p_{зоб} = p_s' + p_{zi} + p_s'',$$

(8.39)

където  $l_i' = l_i + l_{iек}$ ,  $p_s'$  са общите загуби в тръбопровода до разклонението;  $p_{zi}$  — общите загуби в един от успоредните клонове и  $p_s''$  — общите загуби в изходящия тръбопровод II.

Системата може да се реши аналитично или графично с последователни приближения. Коэффициентът на линейното съпротивление  $\lambda$  се подбира ориентировъчно, като се смята, че течението е в квадратичната област, където  $\lambda$  не зависи от Re. След като се намери ориентировъчната стойност за дебита, решението се повтаря, въз основа на което се получава по-точна стойност

за дебита  $Q$ ; респ.  $p_s$ . Графичното решение се изпълнява по следния начин (фиг. 8.34). Намира се за всеки участък функционалната зависимост  $p_{s,i} = f(Q)$  и се сумират кривите на успоредните участъци съгласно с уравнението  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ . Към получената



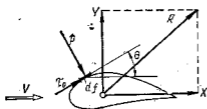
Фиг. 8.34

резултантна крива се прибавят кривите на загубите на входящия и изходящия тръбопровод. Получава се кривата  $\Sigma p_s = f(Q)$ , чието пресечна точка с характеристиката на турбомашината определя общия дебит през системата. Пресечната точка на вертикалната линия  $Q = \text{const}$  със сумарната крива на успоредните участъци дава възможност да се определи дебитът  $Q_i$  във всеки участък [пресечните точки на хоризонталата  $p_s = \text{const}$  с кривите  $p_i = f(Q)$ ].

Обикновено в климатичната и вентилационната техника липсва общият тръбопровод след разклоненията. От друга страна, там често се появява въпросът за еднакво подаване на дебит през отделните отклонения, което се осигурява, когато отклоненията имат еднаква характеристика.

#### 8.4. СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА ОБТЕЧЕНИ ТЕЛА

Опитът показва, че при обтичане на телата от реален флуид те винаги изпитват динамично въздействие на тангенциални и нормални сили. Тангенциалните сили резултират от тангенциалните



Фиг. 8.35

напряжения, определени от вискозитета на флуида и напречния градиент на скоростта в граничния слой, а нормалните от налягането, което се променя по дължина на обтечената повърхнина вследствие на динамичните ефекти от наличието на граничния слой и формата на обтеченото тяло. Векторната сума от тангенциалните и нормалните повърхностни сили, взети по цялата повърхнина на обтеченото тяло, представлява т. нар. *обща хидродинамична или аеродинамична сила*  $R$  (фиг. 8.35), с която флуидът въздейства върху обтеченото тяло.

Компонентата на аеродинамичната сила в направлението на относителната скорост на обтичане на тялото  $V_0$  се нарича хидродинамично или аеродинамично съпротивление  $X$ , а компонентата, която е перпендикулярна на относителната скорост  $V_0$ , респ. скоростта на несмутеното течение, се нарича *подемна сила*  $Y$ . Докато силата на съпротивление съществува винаги при обтичането на телата от реален флуид, подемната сила е присъща само на някои частни случаи на обтичане, характеризирани се с наличие и на циркуляционно течение около тялото независимо от това, дали течението е на реален или на идеален флуид.

Както силата на съпротивление, така и подемната сила включват компоненти, свързани с триенето и налягането. За общата сила на съпротивление може да се запише

$$X = T_x + P_x, \quad X = X_{\tau_0} + X_p, \quad (8.40 \text{ а})$$

където

$$X_{\tau_0} = T_x = \int \tau_0 \cos \theta \, df,$$

$$X_p = P_x = \int p \sin \theta \, df. \quad (8.40 \text{ б})$$

Очевидно първият интеграл на (8.40 б) представлява съпротивлението от триене, а вторият интеграл — съпротивлението от налягане, което в голяма степен зависи от формата на тялото и за-

това се нарича още *съпротивление от форма*. Обикновено телата с добра обтекаема форма имат много малко съпротивление от форма в сравнение със съпротивлението от триене. За разлика от тях при телата с недобра обтекаемост, които създават условия и за откъсване на течението, съпротивлението от триене е пренебрежимо малко спрямо съпротивлението от форма.

За разлика от съпротивлението от триене образуването на съпротивлението от налягане не е очевидно, тъй като елементарните натиски  $p \sin \theta df$  по задната стесняваща се част на тялото имат обратен знак на тези по предната разширяваща се част и могат да се уравновесяват, какъвто е винаги случаят при безциркуляционното потенциално обтичане на тела с идеален флуид, т. нар. парадокс на Ойлер—Даламбер; това означава, че интегралът от (8.40 б) се анулира

Физичната същност на съпротивлението от налягане при реалните флуиди се обяснява с граничния слой, който по задната част на тялото, където съществува конвективно закъснително течение, наддебелява по-бързо в посока на течението отколкото по предната част на тялото. Съгласно с теорията и опита основното свойство на граничния слой е да предава без изменение на обтечената повърхнина налягането на външното течение. В същия момент обаче той въздейства на външното течение, като довежда до изместване на токовите линии в него със стойността на дебелината на изместване  $\delta^*$ , която от своя страна е функция на дебелината на граничния слой. В резултат на това изместване и съответно приближаване на токовите линии налягането във външното течение, а следователно и по обтечената повърхнина, особено в задната част на тялото, ще стане по-малко от налягането, което би съществувало в отсъствие на граничния слой, т. е. при течение на идеален флуид. Следователно елементарните натиски  $p \sin \theta df$  по задната стесняваща се част на обтеченото тяло няма да могат да уравновесяват тези по предната част, ака че интегралът (8.40 б) става по-голям от нула, което убедително показва появяването на съпротивлението от налягане. Същото нараства много, ако обтичането е придружено с откъсване на течението и вихрообразуване, защото тогава изместването и приближаването на токовите линии във външното течение е най-силно изразено. От друга страна, то е силно зависимо от Рейнолдсовото число, като с увеличаването му намалява и при много големи  $Re$  и течение без откъсване съпротивлението от форма става пренебрежимо малко.

Съпротивление от налягане от друг вид се появява при движение на тела по повърхнината на течности, които образуват около себе си повърхностни вълни. Нарича се *вълново съпротивление* и е от особено значение за съпротивлението на кораби и други плаващи съдове.

Определянето на съпротивлението на движещи се във флуид

тела е важна инженерна задача за различни бързоходни превозни средства, като самолети, ракети, кораби, влакове, автомобили и др., както и за лопатките на флуидните турбомашини (гурбини, помпи, вентилатори и т. в.).

Изследването на съпротивлението на обтечени тела се извършва предимно по опитен път. Както е изложено по-нататък, усъвършенствването на теорията на граничния слой дава възможност в много случаи да се прилагат с успех и теоретични средства.

За определяне на пълното съпротивление чрез моделни опити е създадена зависимост, която е изградена въз основа на теорията на подобие. За целта може да се използва критериалното уравнение на Ойлер (7.10), от което за установени течения отпада критерият на Струхал  $Sh$ . Очевидно той не се изменя, ако се умножи и раздели на лицето на характерна за обтеченото тяло повърхнина, т. е.

$$Eu = \frac{p_0 \bar{f}}{\rho V_0^2 f} = \frac{X}{\rho V_0^2 f},$$

и силата  $X = pf$  да се смята за съпротивление. Тогава уравн. (8.40 а) може да се преобразува във вида

$$X = C_x f \frac{\rho V_0^2}{2}, \quad (8.41)$$

където в най-общия случай  $C_x = f(Re, Fr, Ma, \text{форма})$  е т. нар. *коэффициент на съпротивление*, а  $f$  е лицето на най-голямата проекция на тялото в равнина, перпендикулярна на направлението на скоростта  $V_0$ , с изключение на обтечени пластини и крила, където  $f$  е контурната площ на пластината или крилото.

При движения на тела във флуид без свободна повърхнина освен формата на тялото върху съпротивлението оказват влияние и инерционните, и вискозните сили. Следователно

$$C_x = \bar{f}(Re, \text{форма}),$$

където  $Re = \frac{V_0 l}{\nu}$ , а  $l$  — характерната дължина на тялото.

Разбира се, при отчитане на геометричния фактор трябва да се има предвид не само геометрията на тялото, включително и графините на неговата повърхнина, но също така и геометричните съотношения между границите на течението и тялото. Така например съпротивлението на сфера, която пада в тръби или басейн, запълнени с една и съща течност, ще бъде различно. При теченията, в които преобладаваща роля играе топлообме-

нът, в зависимостта за  $C_x$  освен критерия на Рейнолдс трябва да влязат нови безразмерни параметри, отчитащи термодинамичните свойства на флуидната среда.

Когато телата се движат по свободната повърхнина или близо до разделителната повърхнина между два флуида, на съпротивлението от триене или т. нар. вълново съпротивление оказват влияние също и гравитационните сили. При тези случаи трябва да се държи сметка и за критерия на Фруд, т. е.

$$C_x = f(Fr, Re, \text{форма}).$$

С увеличаване на дълбочината спрямо свободната повърхнина влиянието на гравитационните сили намалява и движението може да се разглежда в условия на течение без свободна повърхнина.

Влиянието на свиваемостта на флуида е много съществено при движението на телата или обтичането им с големи скорости, особено ако те се приближават до звуковата скорост или я надвишават. При високите подзвукови скорости съпротивлението зависи от  $Re$  и  $Ma$ , т. е.

$$C_x = f(Ma, Re, \text{форма}),$$

като при надзвуковите скорости влиянието на вискозните сили се пренебрегва.

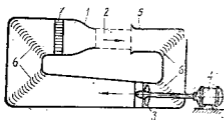
В (8.41) динамичното налягане се определя със скоростта на несмутеното течение далеч пред обтеченото тяло (когато то е неподвижно) или със скоростта на движение на тялото, ако движението се извършва в неподвижна флуидна среда. Често при втория случай обтичането се изучава при обръщане на движението. Приема се, че тялото е неподвижно, а флуидната среда се движи с неговата скорост, което е равносилно обтичането да се разглежда спрямо координатната система, свързана с тялото. Трябва да се отбележи обаче, че принципът на обръщане на движението по отношение на съпротивлението трябва да се прилага много внимателно предвид на разликата в интензитета на турбулентността при двата вида обтичане, което може значително да измени съпротивлението на тялото.

## 8.5. ОПИТНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА СЪПРОТИВЛЕНИЕТО НА ОБТЕЧЕНИ ТЕЛА

В съответствие с принципа на обръщане на движението експерименталното изследване на обтечени тела се извършва или по метода, при който тялото се движи в покоящ се флуид, или по метода, при който тялото е неподвижно и се обтича от флуидното течение. Вторият метод има по-голямо предимство, тъй като

измерителните уреди са в покой, докато при първия метод те трябва да се движат с тялото.

Най-широко приложение за изследване на силите на обтечени тела в относително движение са намерили т. нар. аеродинамични канали или тръби, които пред-



Фиг. 8.36

ставяват главният: опитна уредба на съвременните аеродинамични лаборатории. Те имат за задача да създават равномерни въздушни течения (по-рядко и от други газове) в работната им част, в която се поставят и изпитват телата. Обикновено аеродинамичните канали биват под-

звукови (нискоскоростни и високоскоростни) с отворена или затворена работна част, и над-

звукови. На фиг. 8.36 е показано схематично устройството на нискоскоростен аеродинамичен канал с отворената работна част 2. Осовият вентилатор 3 служи за привеждане в движение на въздуха в канала и за покриване на енергийните загуби на течението в него. Той се задвижва от електродвигателя 4, чиято честота на въртене, а с нея и скоростта на течението могат да се изменят безстъпално в широки граници. Дифузорът, разположен между смукателя 5 и токоизправителя 7, е предназначен за преобразуване на част от кинетичната енергия на въздушното течение в енергия на налягане, за да се намалят загубите от линейни и местни съпротивления. За намаляване на загубите от местно съпротивление в колелната и от вихрообразуване, с което се увеличава равномерността на течението, служат лопатъчните решетки 6. Конфузорът 1, в който е токоизправителят 7 или други приспособления, е предназначен да намалява турбулентността и да увеличава скоростта, като създава равномерно скоростно поле на течението в работната част 2. В нея се поставят изследваните тела, след което течението постъпва отново в канала през смукателя 5. Аеродинамични канали от този вид се строят с напречно сечение на работната им част до няколко десетки квадратни метри и скорости до около 150 m/s.

Срещат се и аеродинамични канали със затворена работна част, чиято конструкция принципно не се различава от показаната на фиг. 8.36. Те изразходват по малко енергия, но затвореният работен участък затруднява експериментирането. Понякога се използват канали със затворена работна част, в която въздухът е сгъстен и поради повишената му плътност има по-малък вискозитет  $\nu$ , така че при същата скорост се постигат по-големи Рейнолдсови числа. Срещат се и канали, които използват вода,

т. нар. *водни канали*, и най-често се използват за изследване на корабни витла.

Основното съоръжение на аеродинамичните канали е аеродинамичната везна, с която през време на опита се определят аеродинамичните сили и моменти. Везните се различават по броя на измерваните компоненти на пълната аеродинамична сила и пълния аеродинамичен момент, като биват едно-, дву-, три-, четири- и шесткомпонентни. Разбира се, за опитното изследване на пълното съпротивление е достатъчна еднокомпонентна везна.

Окачването на изследвания модел на везната се прави по подходящ начин, съобразен с конструкцията ѝ. Скоростта се мери най-често със скоростомерна тръба. С помощта на везната при съответната скорост на обтичане, респ.  $Re$ , се измерва директно силата на пълното съпротивление на обтеченото тяло. Въз основа на последната се определя коефициентът на съпротивление

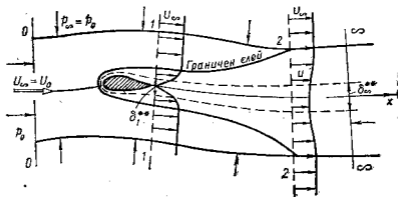
$$C_x = \frac{2X}{\rho V_0^2}, \quad (8.42)$$

чиито стойности, получени във функция на  $Re$ , могат да бъдат използвани за тела, геометрично подобни на изследвания модел. При това е възможно изследването на съпротивлението на обтечени тела с най-разнообразна форма, което е едно от големите предимства на този вид експериментално изследване.

Освен аеродинамичните канали се използват също така и водни басейни, предназначени предимно за моделни изследвания на кораби и др. Обикновено тези канали са с големи размери: дължина до неколкостотин метра, широчина 20 m и повече и дълбочина няколко метра. При тях не се използва принципът на обръщане на движението, а изследването се провежда, като флуидната среда е неподвижна, а тялото се движи по дължина на канала. Обикновено моделът се окачва на количка, която се движи по специален релсов път. Върху нея е монтирана измерителна апаратура, предимно механични или електрични динамометри за измерване на съпротивителната сила и някои нейни компоненти, включително и вълновото съпротивление. В преобладаващите случаи изследванията се провеждат при спазване предимно на закона за динамично подобие на Фруд.

За опитното определяне на пълното съпротивление на надлъжно обтечени тела без огкъсване на гравичния слой и при достатъчно големи Рейнолдсови числа може да се използва успешно импулсният метод. За целта се разглежда обтичането на крило от равнинно течение на реален флуид със скорост  $V_\infty = V_0$  (фиг. 8.37). Характерно тук е това, че зад обтеченото тяло се образува аеродинамична следа, наречена още *спътна струя*, скоростта в която е по-малка от тази на външното течение. Вследствие на турбулентния обмен на флуидните

частици от следата с тези на външното течение спътната струя увеличава скоростта си и се разширява. Докато непосредствено след обтеченото тяло скоростният профил и налягането в аеродинамичната следа се различават значително от тези на несмутеното



Фиг. 8.37

ното външно течение, на известно разстояние тази разлика почти изчезва. Следата се характеризира със загуба на количество на движение и е свързана по този начин със съпротивлението на обтеченото тяло.

За определяне на пълната сила на съпротивление, с която флуидът въздейства на обтеченото тяло в направление на надлъжната ос  $x$  (фиг. 8.37), се използва теоремата за количеството на движение. В случая контролната повърхнина се приема образувана от напречните сечения 0-0 и 2-2, които стоят достатъчно далеч пред и след тялото, за да бъде налягането по тях постоянно, и равно на налягането по успоредните на несмутеното течение равнини 0-2 и 0-2, които са разположени също достатъчно далеч от тялото. Разглеждането се прави на единица ширина от обтеченото тяло, което дава основание полученият коефициент да се нарича *коефициент на профилно съпротивление*. Нека параметрите на течението на входното 0-0 и изходното 2-2 сечение на контролната повърхнина да бъдат съответно  $p_0$  и  $p_2$ , пълното налягане  $p_{п0}$  и  $p_{п2}$  и скоростта  $U$ , а извън сеченията по контролната повърхнина  $U = U_0$ ,  $p = p_0$  и  $p_n = p_{п0}$ . В случая използването на теоремата за количеството на движение, респ. уравн. (5.36), предполага познаването на разпределението на скоростта в сечение 2-2 (фиг. 8.37). Тъй като измерването на скоростта в това сечение, което е далеч зад обтеченото тяло, е свързано с известни неудобства от експериментален характер, се използва сечение 1-1, разположено близко до тялото. Параметрите на течението в сечение 1-1 могат да се приемат, както следва:  $p_1 \neq p_0$

$u_1 \neq U_\infty = U_0$  и при пренебрегване на загубите от вихровите процеси в аеродинамичната следа  $p_{1n} = p_{2n}$ . Като се вземе под внимание и уравнението за непрекъснатостта  $u_1 df_1 = u_2 df_2$ , импулсното уравнение може да се запише във вида

$$X = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 (U - u_2) dy,$$

откъдето за коефициента на пълното съпротивление следва зависимостта

$$C_x = \frac{2x}{l \rho U^2} = \frac{2}{l} \int \frac{u_1}{U} \left(1 - \frac{u_2}{U}\right) dy. \quad (8.43)$$

Скоростите  $U$ ,  $u_1$  и  $u_2$ , изразени по начина

$$U = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_{n0} - p_0)}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_{n1} - p_0)}, \quad u_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_{n1} - p_1)}$$

и заместени в (8.43), довеждат до израза

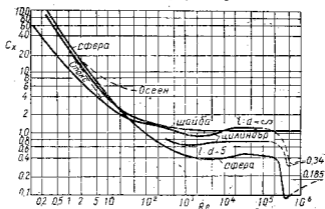
$$C_x = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{p_{n1} - p_1}{p_{n0} - p_0}} \left[1 - \sqrt{\frac{p_{n1} - p_0}{p_{n0} - p_0}}\right] dy. \quad (8.44)$$

Изложеният метод е известен в аеродинамиката като опростен метод за определяне на пълното съпротивление на обтечено тяло. Той дава добри резултати, когато сечение  $I-I$  се избере на подходящо разстояние зад тялото. Например за крило сечение  $I-I$  трябва да е разположено след задния ръб на крилото на разстояние, не по-малко от  $0,1l$ . Тогаво грешката за определяне на  $C_x$  е най-малка и не надвишава 5%. Този метод може да се използва успешно за определяне на пълното съпротивление на тела със сравнително добра обтекаема форма.

### Някои резултати на хидродинамичното съпротивление на тела с различна форма

На фиг. 8.38 са показани опитните резултати за няколко добре проучени тела, които освен при много малки Рейнолдсови числа се обтичат с откъсване на гравичния слой и вихрообразуване и при тях преобладава съпротивлението от налягане. За такива случаи коефициентът на съпротивление  $C_x$  се определя

само въз основа на опитни изследвания. Характерно за телата с недобра обтекаема форма е, че разположението на точката на откъсване, което е в пряка зависимост от Рейнолдсовото число, оказва изключително влияние върху съпротивлението от форма,



Фиг. 8.38

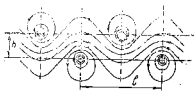
а следователно и върху пълното съпротивление. Например за обтечен цилиндър при  $Re < 0,5$  зависимостта  $C_x = f(Re)$  е почти линейна и се описва със закона на Стокс:

$$C_x = \frac{8\pi}{Re(2 - \ln Re)} \quad (8.45)$$

При  $Re > 5$  настъпва откъсване на ламинарния граничен слой, като съгласно с данни от опита точката на откъсване е по контура на цилиндъра на ъгъл  $\theta = 90^\circ \div 94^\circ$ . При  $5 < Re < 50$  в областта на откъснатото течение след тялото се появяват два вихъра, зад които следва изгънат вихров слой, като течението в образувалата се следва зад цилиндъра е ламинарно независимо от откъсването на граничния слой. С увеличаване на Рейнолдсовото число  $60 < Re < 5000$  вълните в следата растат по амплитуда и се навиват в дискретни вихри, както е показано на фиг. 7.45. Вихрите зад цилиндъра вече не са разположени стабилно. Те се образуват и откъсват периодично ту от едната, ту от другата страна, като се нареждат в две редици и образуват т. нар. карманов вихров път (улица), както е показано на фиг. 8.39. Това явление е изследвано подробно от Карман, а по-късно от Долапчиев и др. С увеличаване на Рейнолдсовото число  $5 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$  течението в граничния слой след точката на откъсване и във вихровата следа преминава изцяло в турбулентно. Ламинарният характер на течението в граничния слой се запазва само в началото на контура на цилиндъра почти до точката

на откъсване. В този диапазон на  $Re$  коефициентът на пълното съпротивление запазва почти постоянна стойност  $C_x=1,2$ .

Когато течението в граничния слой [в околността на точката на откъсване стане турбулентно, настъпва твърде интересно явление. Точката на откъсване, а още повече турбулизирането на граничния слой преди нея, се премества напред и идва момент, когато течението в граничния слой още от началото му преминава в турбулентно, което съответствува на  $Re=10^5$ . Турбулизирането на граничния слой създава условия за интензивно размесване на



Фиг. 7.39

флуидните частици по слоя с тези на външното течение. Това определя увеличаването на кинетичната енергия на граничния слой, което в крайна сметка довежда до рязко изместване на точката на откъсване назад по контура на цилиндъра ( $\theta=50\div 60^\circ$ ), силно намаляване на аеродинамичната следа, а следователно и до намаляване на коефициента на пълното съпротивление. Числото на Рейнолдс, което съответствува на този преход на ламинарния граничен слой в турбулентен, се нарича критично. То зависи главно от степента на турбулентност на течението и гравитината на стените на цилиндъра.

Върху съпротивлението на обтечения цилиндър оказва влияние и дължината му  $b$ . С намаляването ѝ съпротивлението също намалява поради това, че около свободните краища настъпва течение в посока от по-високото налягане по челната част към по-ниското налягане по задната част на цилиндъра, известно намаляване на разликата на тези налягания и понижаване на съпротивлението от форма.

Спрямо пълното съпротивление обтечената сфера показва подобни свойства на цилиндъра. Това се вижда убедително от графиката на фиг. 8.38, която дава зависимостта  $C_x=f(Re)$  в широк диапазон на Рейнолдсовото число. Тук също се различават трите режима на течение: пълзящо, турбулентна следа и ламинарен граничен слой (фиг. 8.40 а) и турбулентна следа с изцяло турбулентен граничен слой (фиг. 8.40 б). Всъщност известна разлика спрямо обтечен цилиндър се наблюдава в първия режим, т. е. при малки числа на Рейнолдс  $Re \leq 50$ . Стокс в резултат на интегриране на диференциалните уравнения на Навие-Стокс при пренебрегване на инерционните сили за пълното съпротивление получава зависимостта

$$X=3\pi\mu V_0$$

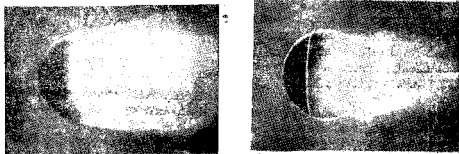
и

$$C_x = \frac{24}{Re} \quad (8.46)$$

която има добро съответствие с опита за  $Re \leq 0,5$ . За  $Re \leq 1$  Озеен (1910) предлага зависимостта

$$C_x = \frac{24}{Re} \left(1 - \frac{3}{16} Re\right). \quad (8.47)$$

Тези уравнения намират приложение в инженерната практика

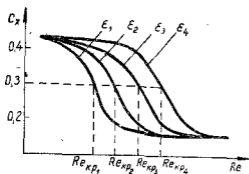


Фиг. 8.40 а, б

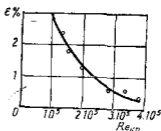
при изследване на движението на малки капки или твърди сферични частици в газова среда. Те важат и с приближение за съпротивлението на несферични твърди частици и са от особено значение за прахоулавянето и прахоотделянето от въздух, димни газове и др.

За останалите два режима картината на обтичане е аналогична на тази на цилиндър, като стойностите на коефициента на пълното съпротивление са по-малки. С нарастване на Рейнолдсовото число кривата за  $C_x$  е низходяща до достигане на стойността  $C_x = 0,4$ , след която до настъпване на критичното обтичане коефициентът  $C_x$  се изменя незначително. След турбулизиране на граничния слой, т. е. след настъпване на критичното обтичане,  $C_x$  намалява до около 0,1 и по-нататък асимптотично се приближава до граничната стойност  $C_x = 0,185$ . Опитите показват, че критичното Рейнолдсово число зависи силно от грапавината на повърхнината на сферата и турбулентността на външното течение, т. нар. *начална турбулентност*. Колкото последната е по-голяма, толкова по-рано настъпва критичното обтичане. Прито е степента на турбулентност в на течението да се определя от числото на Рейнолдс  $Re_{кр}$ , за което коефициентът на съпротивление на обтечена гладка сфера има стойност  $C_x = 0,3$ . На фиг. 8.41 са показани стойностите на коефициента  $C_x$  на сферата, получени от изследвания в различни лаборатории и следователно при различна начална турбулентност, чиято степен се определя по графиката  $\epsilon = f(Re_{кр})$  (фиг. 8.42). Тази зависимост е получена посредством измерване на турбулентността в отделните аеродинамични канали с помощта на термоанемометри.

На фиг. 8.38 е показано  $C_x$  при напречното обтичане на диск (шайба). При много малки  $Re$ , когато течението е ламинарно, коефициентът на съпротивление нараства до много големи стойности. С нарастването на  $Re$  коефициентът  $C_x$  бързо намалява, като за  $Re >$



Фиг. 8.41



Фиг. 8.42

Стойности на коефициента  $C_x$

Таблица 8.12

Форма	Размери	$S$	$C_x$
Кръгъл цилиндър с ос, разположена перпендикулярно към направлението на течението		$DH$	0,68
Полусфера — чашка		$\frac{\pi D^2}{4}$	1,42
Полусфера — чашка		$\frac{\pi D^2}{4}$	0,34
Конус — полусфера		$\frac{\pi \cdot D^2}{4}$	0,16
Конус — полусфера		$\frac{\pi \cdot D^2}{4}$	0,088
Ротационно тяло с обтекаема форма		$\frac{\pi D_{\max}^2}{4}$	0,05

$> 4 \cdot 10^3$  приема постоянна стойност  $C_x = 1,2$ . Това се обяснява с обстоятелството, че точката на откъсване е фиксирана от остъроръбестата периферия (инерционното откъсване) и съществува само съпротивление от форма, тъй като пристенните тангенциални напрежения нямат проекции по посока на течението. Подобен резултат се наблюдава и при напречно обтечена пластина, теченията около остъроръбести тела, например обтичане на сгради от вятър и др., при които след определена стойност на  $Re$  съпротивлението престава да зависи от него, т. е. течението става автомоделно по  $Re$ . В табл. 8.12 са дадени стойностите на коефициента на пълно съпротивление на някои дву- и тримерни симетрични тела, чийто контур е често използван в практиката.

### 8.6. ПРЕСМЯТАНЕ НА ХИДРОДИНАМИЧНОТО СЪПРОТИВЛЕНИЕ ЧРЕЗ ГРАНИЧНИЯ СЛОЙ

Определянето на хидродинамичното съпротивление по аналитичен път е възможно при обтичане на тела без откъсване на граничния слой и с достатъчно големи Рейнолдови числа. Очевидно това са симетричните тела с добра обтекаема форма, чиято ос на симетрия е разположена успоредно на скоростта на несмутеното течение. При тези случаи токовите линии на средненото по време движение обикновено са успоредни на надлъжната ос на симетрия. Това от своя страна определя симетрично разпределение на напреженията по повърхнината на обтечените тела спрямо направлението на движение, в резултат на което подемната сила ще бъде равна на нула. Обтичането на тези тела се характеризира с пренебрежимо малко съпротивление от налягане и следователно коефициентът на съпротивление може да се пресмята въз основа на тангенциалното напрежение  $\tau_0$ , определено по теорията на граничния слой.

Надлъжно обтечена равна пластина. При едностранно обтечена пластина за силата на съпротивление може да се запише

$$X = \int \tau_0 df = b \int_0^l \tau_0 dx = C_x f \frac{\rho U^2}{2}, \quad (8.48)$$

$$C_x = \frac{2}{\rho U^2} \int_0^l \tau_0 dx,$$

където  $df = b dx$  е лицевият елемент на обтечената пластина, а  $b$  и  $l$  са съответно нейната ширина и дължина.

От израза за пристенното тангенциално напрежение (7.63 г) се получава

$$C_x = \frac{4 \cdot 0,332}{\rho U^2} \sqrt{\rho \mu U^3} = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{Ul}{\nu}}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} \quad (8.49)$$

Уравнението (8.49) представлява законът на Блазиус за съпротивлението на пластина, който е валиден само за ламинарния граничен слой, т. е. за  $Re = \frac{Ul}{\nu} < (0,5 \div 1) \cdot 10^6$ . За турбулентния граничен слой от израза за пристенните тангенциални напрежения (7.116) следва

$$C_x = \frac{2}{\rho U^2} \int_0^l 0,0288 \rho U^2 \left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/5} dx = \frac{0,074}{Re_x^{0,2}} \quad (8.50)$$

Тази зависимост е валидна за обтечени тела, при които граничният слой е турбулентен още от началото им. Тя има добро съответствие с опита за  $Re = 5 \cdot 10^5 \div 5 \cdot 10^7$ . За по-големи  $Re$  може да се използва успешно зависимостта за тангенциалните напрежения по Фолкнер (7.118 б), според която

$$C_x = \frac{2}{\rho U^2} \int_0^l 0,01315 \rho U^2 Re_x^{-1/7} dx = 0,0307 Re_l^{-1/7} \quad (8.51)$$

Въз основа на универсалния логаритмичен закон за турбулентния скоростен профил са създадени полуемпирични зависимости, валидни за цялата турбулентна област. От този вид са формулите на Прандтл—Шлихтинг

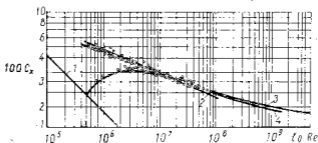
$$C_x = 0,455 (\lg Re)^{-2,58} \quad (8.52)$$

и формулата на Шулиц—Грунов

$$C_x = 0,427 (\lg Re - 0,407)^{-2,64} \quad (8.53)$$

На фиг. 8.43 в логаритмичен мащаб са показани получените зависимости  $C_x = f(Re)$ , съпоставени и с опита. Кривата 1 изразява закона на Блазиус (8.49) за ламинарен граничен слой, а кривите 2, 3 и 4 се отнасят за турбулентния граничен слой. Вижда се, че при еднакви  $Re$  стойностите на  $C_x$  при изцяло турбулентен слой са значително по-големи от тези при изцяло ламинарен

слой. От друга страна, зависимостта  $C_x=f(\text{Re})$  (8.50), показана с кривата 2, има добро съответствие с опита при по-големи  $\text{Re}$ , но в границите  $\text{Re}=5 \cdot 10^5-10^7$ , докато уравненията (8.52) и (8.53), на които съответствуват кривите 3 и 4, са за много по-голям диапазон на Рейнолдсовото число.



Фиг. 8.43

При обтичане на пластини (стени) с грапави повърхнини за определяне на коефициента на съпротивление  $C_x$  може да се използва успешно зависимостта за  $\tau_0$  по (7.120г) и следователно

$$C_x = \frac{2}{\rho l U^2} \int_0^l 0,00695 \rho U^2 \left(\frac{x}{k}\right)^{-1/7} dx$$

или

$$C_x = 0,0162 \left(\frac{l}{k}\right)^{-1/7}. \quad (8.54)$$

Надлъжно обтечени двумерни симетрични тела. Определянето на пълното съпротивление на надлъжно обтечени двумерни симетрични тела без откъсване на граничния слой и при достатъчно големи Рейнолдсови числа се извършва с импулсия метод. В случая на обтечено тяло по фиг. 8.37, където е фиксирана контролната повърхнина и са определени съответно параметрите на течението по нея, ако се приеме, че  $p_2=p_0$ , съгласно с теоремата за количеството на движение за пълното съпротивление се получава

$$X = \rho U \int_{-\infty}^{+\infty} u dy - \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = \rho U^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \rho U^2 \delta^{**},$$

(8.55)

където  $\delta^{**}$  е дебелината на загуба на импулса в сечението на следата 2-2, за което се прие, че е безкрайно отдалечено от обтеченото тяло. От последното уравнение за коефициента на профилното съпротивление следва

$$C_x = \frac{2X}{\rho U^2 l} = \frac{2\delta^{**}}{l} \quad (8.56)$$

Тъй като непосредственото определяне на  $\delta_{\infty}^{**}$  е невъзможно, полученият израз в този вид не може да се използва за определяне на коефициента  $C_x$ . Теорията на граничния слой дава възможност за определяне на дебелината на импулсната загуба най-много в края на обтеченото тяло, т. е. на  $\delta_1^{**}$  (фиг. 8.37). Ето защо трябва да се намери приблизителна зависимост между  $\delta_1^{**}$  и  $\delta_{\infty}^{**}$ , което може да бъде постигнато по теоретичен и експериментален път. За тази цел се използва импулсното уравнение на Карман за граничния слой, което, приложено за аеродинамичната следа (при липса на стена), има следния вид:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{2}{U} \frac{dU}{dx} \delta^{**} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \delta^* = 0.$$

Полученият израз може да се раздели на  $\delta^{**}$  и да се интегрира по  $x$  в границите от задния ръб на обтеченото тяло (сечение 1-1) до  $\infty$  след него, както следва:

$$\ln \frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_1^{**}} = \ln \frac{U_1^2}{U_{\infty}^2} - \int_{x_1}^{\infty} \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \frac{U'}{U} dx.$$

За пресмятането на интеграла, който фигурира в последното уравнение, в следата трябва да се познава зависимостта

$$\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = H = f(x).$$

Ако се приеме, че надлъжният градиент на налягането е сравнително малък поради неголямата дебелина на обтеченото тяло, формпараметърът  $H$  може да се запише с осреднената му стойност

$$H_m = \frac{1}{2} (H_1 + H_{\infty}).$$

Тогава, като се замести  $H$  със съответния израз и се извърши интегрирането, се получава

$$\ln \frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_1^{**}} = \ln \frac{U_1^2}{U_{\infty}^2} - \frac{1}{2} (H_1 - H_{\infty}) \ln \frac{U_{\infty}}{U_1}$$

или

$$\frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_1^{**}} = \left( \frac{U_1}{U_{\infty}} \right)^{2 + \frac{1}{2} (H_1 + H_{\infty})}$$

Тази зависимост, поставена в (8.51), довежда до следната приблизителна формула за общото (профилното) съпротивление:

$$C_x = \frac{2\delta_1^{**}}{l} \left( \frac{U_1}{U_{\infty}} \right)^{2 + \frac{1}{2} (H_1 + H_{\infty})} \quad (8.57)$$

Ако се приеме, че в безкрайно отдалеченото след тялото сечение  $2-2$  скоростта  $u$  в спътната струя се приближава към скоростта на външното течение  $U$ , тогава логично е за  $x \rightarrow \infty$   $\Delta u = U - u$  да бъде малка величина. В такъв случай, ако в (7.51) вместо  $u$  се внесат  $U - \Delta u$  и се пренебрегне квадратът на малката величина.  $\Delta u$ , същото приема вида

$$\delta_{\infty}^{**} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U - \Delta u}{U} \left( 1 - \frac{U - \Delta u}{U} \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{U - \Delta u}{U} - \frac{U^2 - 2U\Delta u + \Delta u^2}{U^2} \right) dy$$

или

$$\delta_{\infty}^{**} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta u}{U} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U - u}{U} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy = \delta_{\infty}^{**}$$

От условието  $\delta_{\infty}^{**} = \delta_{\infty}^{*}$  следва, че  $H_{\infty} = 1$ . Стойността на форм-параметъра  $H_1$  в края на крилото зависи от характера на обтичането и се изменя в границите  $H_1 = 1,8 \div 1,4$  за надлъжно обтечена плоча или много тънък профил и  $H_1 = 1,8 \div 2$  за дебели профили.

Макар че в края на тялото обратното влияние на граничния слой е най-силно изразено, все пак скоростта  $U_1$  в това място не се различава много от скоростта на несмутеното външно те-

чение. Следователно отношението  $\frac{U_1}{U_\infty}$  не се различава много от единица, поради което неточността при определянето на степенния показател може съществено да повлияе на получения резултат от пресмятането. Възприето е да се взема  $H_1=1,4$ , в резултат на което (8.5) преминава в известната формула на Скв ай р Юнг:

$$C_x = 2 \left( \frac{U_1}{U_\infty} \right)^{3,2} \frac{\delta_1^{**}}{l} \quad (8.58)$$

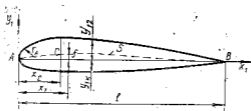
която дава добро съвпадение на резултатите с опита. Тук  $\delta_1^{**}$  представлява сумата от дебелините на импулсната загуба по горната и долната повърхнина на тялото, които са различни при несиметричен контур.

### 8.7. ОБТИЧАНЕ НА КРИЛА С КРАЙНА ДЪЛЖИНА

Както е известно (т. 6.3), подемната сила се появява само при едновременното обтичане на телата от успоредно и циркуляционно течение. При реалните флуиди последният вид течение се формулира или посредством въртливо движение на телата (ефект на Магнус), или с подходящ избор на формата им. В практиката и живота голям интерес представляват онези несиметрични тела, чиято форма е подбрана специално така, че при обтичането им от успоредно течение на реален флуид да се създава подемна сила, която при това да бъде значително по-голяма от силата на съпротивление. Обикновено това са носещите крила, главният конструктивен елемент на самолетите, които чрез подемната си сила уравновесяват тяхното тегло и осъществяват летенето. Носещите крила намират приложение и при бързоходните плаващи съдове, витлата на самолетите и корабите, в различните турбомашини и др.

Напречното сечение на крилото се нарича *профил на крилото*, който се характеризира с добра обтекаема форма. В различните сечения профилите на крилото могат да бъдат различни по форма, размери и ориентация. Като характерни геометрични параметри на крилния профил (фиг. 8.44) могат да се отбележат следните:  $A$  — предна точка на профила;  $B$  — задна точка на профила. Отсечката  $l$ , която съединява най-отдалечените точки на профила, т. е. предната и задната точка на профила, се нарича *хорда на профила*. Обикновено координатите на контура на профила се задават в правоъгълна координатна система, едната ос на която съвпада с хордата, а началото ѝ лежи в предната точка на профила. В тази координатна система  $(x_1, y_1)$  уравнениата

на горния и долния контур на профила съответно имат вида  $y_{12}=f(x_1)$  и  $y_{1k}=f(x_1)$ . Линията  $S$ , която разделя на две равни части разстоянието между гърба (изпъкналата част) и корема (вдлъбнатата част) на профила, се нарича *средна* или *скелетна*



Фиг. 8.44

линия. Разстоянието на най-отдалечената ѝ точка до хордата се нарича максимална изкорубеност или кривина  $f_{\max}$ . Най-голямото разстояние между гърба и корема, мерено по права, перпендикулярна на хордата, се нарича дебелина на профила  $d_{\max}$ .

Често големините на геометричните параметри се свеждат към дължината  $l$  на хордата и се изразяват чрез безизмерните отношения:  $\bar{f} = \frac{f_{\max}}{l}$  — относителна изкорубеност;  $\bar{d} = \frac{d_{\max}}{l}$  — относителна дебелина;  $\bar{x}_f = \frac{x_f}{l}$ ,  $\bar{x}_d = \frac{x_d}{l}$  — относителни разстояния, които обикновено се дават в проценти. Стойността на  $\bar{x}_d$  за подзвуквите самолети е (25—30)%, а в свръхзвуквите (40—50)%. Координатите на контура на профила ( $y_{12}$ ,  $y_{1k}$ ,  $x_1$ ) се отнасят също спрямо хордата, както и радиусите на кривина на предната част (носа)  $r_A$  и на задната част (ако там има кривина)  $r_B$  на профила.

Величините  $b$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{x}_d$ ,  $\bar{x}_f$ ,  $r_A$ ,  $r_B$  са основни геометрични параметри на профила, от които зависят неговите аеродинамични качества и характеристики. За крило с крайна дължина  $L$  като характерен геометричен параметър се въвежда и т. нар. *относителна разпереност*  $\lambda = \frac{L}{l}$ . Понякога се употребяват крила с променлива по дължината (разпереността) им хорда, чийто контур може да бъде трапецовиден, елиптичен и др. Тогава относителната разпереност се дефинира с отношението

$$\lambda = \frac{l}{l^2} = \frac{L}{l_m},$$

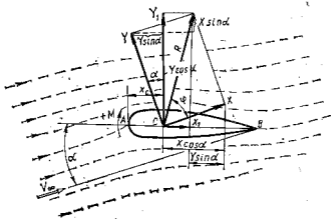
където  $f = Ll_m$  е лицето на контура, респ. площта на крилото, а  $l_m$  — средната му хорда. За подзвуквите самолети обикновено

относителната разпереност се изменя в границите  $\lambda=6 \div 12$ , а за надзвуките  $\lambda=2 \div 3$ . Относителната дебелина на профилите на крилата и лопатките на витлата е в границите  $\bar{d}=(3 \div 4) \div (20 - 25)\%$ , като гънките профили са разположени в краищата им и в крилата на надзвуките самолети. Относителната кривина на съвременните крилни профили обикновено е  $\bar{f} < 2\%$ .

Ъгълът, който хордата склучва с направлението на движението на крилото, респ. скоростта на несмутеното течение  $V_\infty$ , се нарича *ъгъл на атака* или *ъгъл на втурване*  $\alpha$ .

#### Аеродинамични сили и моменти

При обтичане на крило от реален флуид се появяват сила на съпротивление  $X$  и подемна сила  $Y$ , чиято резултантна е общата аеродинамична сила, с която флуидът въздействува на крилото (фиг. 8.45). Появяването на подемната сила  $Y$  може да се обясни с приближаването (сгъстяването) на токовете линии в областта на течението над крилото и раздалечаването на токовете линии под крилото. Това довежда до повишаване на скоростта и съответно намаляване на налягането по гърба на крилото, а в областта на течението под крилото, особено в предната част, намаляване на скоростта и увеличаване на налягането. Следователно спрямо статичното налягане  $p_0$  в несмутеното течение по гърба на крилото съществува подналягане, а по корема — надналягане, в резултат на което се появява подемната сила  $Y$ . Как-



Фиг. 8.45

то подемната сила, така и съпротивлението ще бъдат толкова по-големи, колкото по-силно е изразено споменатото сгъстяване и раздалечаване на токовете линии, т. е. колкото по-силно е нарушена симетрията на токовата картина на обтеченото крило,

която се постига предимно с увеличаване на изгънатостта на профила или с увеличаване на ъгъла на атака. Тези два начина са еквивалентни един на друг и крило, което е изкорубено дори и при ъгъл на атака  $\alpha=0$ , ще създава подемна сила, която кри-

лото със симетричен профил може да създаде само при определен положителен ъгъл на атака.

Произходът на подемната сила може да се обясни и като резултат от обтичането му от успоредно течение със скорост  $V_0$  и циркуляционно течение, което се формира вследствие на появяването на начален вихър в задния ръб на крилото (вж. т. 4.7).

На фиг. 8.46 е показано разпределението на налягането по повърхнината на крило, изразено чрез коефициента на налягане  $\bar{p} = \frac{2(p-p_0)}{\rho V_0^2}$ , където  $p$

е статичното налягане в произволни точки по контура на крилото, а  $p_0$  — статичното налягане в несмутеното течение. Очевидно, докато надналягането под крилото достига най-много динамичното налягане на несмутеното течение, и то само в точката на заприщ-

ване, където  $\bar{p}=1$ , подналягането по гърба на крилото достига много по-големи абсолютни стойности, например

до около  $\bar{p}=-3,8$ . Това от своя страна подсказва, че подемната сила резултира главно от подналягането по гърба на крилото.

В съответствие с теоремата на Жуковски подемната сила на обтечените крила се определя също така по израза (6.41).

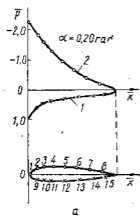
За пресмятането на подемната сила и профилното съпротивление се използват често аналогичните на (8.41) зависимости

$$Y = C_y f \frac{\rho V_0^2}{2} \quad (8.59)$$

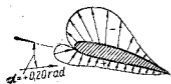
и 
$$X = C_x f \frac{\rho V_0^2}{2}, \quad (8.60)$$

където  $f$  е контурната площ на крилото,  $C_y$  — коефициентът на поддържане и  $C_x$  — коефициентът на съпротивление.

Моментът на пълната аеродинамична сила спрямо предния ръб на крилото  $M_z$  се нарича *надлъжен момент* или момент на тангажа. Той се приема за положителен, ако се стреми да завърти крилото в посока на увеличаване на ъгъла на атака, и от-



а



Фиг. 8.46

рицателен — в обратна посока. Пресмятането на надлъжния момент се извършва по аналогична формула

$$M_z = C_m f l \frac{\rho V_0^2}{2}, \quad (8.61)$$

където  $C_m$  е коефициент на момента.

В аеродинамиката на крилото често се използват две координатни системи: скоростна  $(x, y, z)$  и свързана  $(x_1, y_1, z_1)$ . В скоростната координатна система ос  $x$  съвпада с направлението на скоростта  $V_0$ , ос  $y$  е перпендикулярна на нея и лежи в равнината на симетрия на самолета, а ос  $z$  е надлъжната ос на крилото. При решаване на плоски равнинни задачи компонентите на пълната аеродинамична сила в скоростната координатна система са силата на съпротивление  $X$  и подемната сила  $Y$ , а в свързаната координатна система —  $X_1$  и  $Y_1$ , наречени съответно тангенциална и нормална сила. Връзката между тези компоненти е, както следва (фиг. 8.45):

$$Y_1 = Y \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad C_{y_1} = C_y \cos \alpha + C_x \sin \alpha \quad (8.62)$$

$$\text{и} \quad X_1 = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \quad C_{x_1} = C_x \cos \alpha - C_y \sin \alpha.$$

Интерес представлява също така определянето на местоположението на приложната точка на пълната аеродинамична сила, т. нар. център на натиск  $C$ . Ако с  $x_c$  се отбележи разстоянието от центъра на натиск до предния ръб на крилото (фиг. 8.45), може да се запише равенството

$$Y_1 x_c = M_z,$$

където

$$x_c = \frac{M_z}{Y_1} = \frac{C_m f l \rho V_0^2 / 2}{C_{y_1} f \rho V_0^2 / 2} = \frac{C_m l}{C_y \cos \alpha + C_x \sin \alpha} \quad (8.63)$$

За симетричните профили местоположението на центъра на натиск е постоянно, докато за несиметричните профили с изменение на ъгъла на атака той се измества по хордата или по нейното продължение от минус безкрайност до плюс безкрайност.

За оценка на аеродинамичните свойства на профила се използва т. нар. *качество на профила*  $k$ , което се дефинира с отношението

$$k = \frac{Y}{X} = \frac{C_y}{C_x}. \quad (8.64)$$

От фиг. 8.45 следва, че тази величина представлява тангесът от ъгъла на наклона на пълната аеродинамична сила  $R$  към направлението на скоростта на несмутеното течение  $V_0$ , т. е.

$$k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Както се вижда от (8.64), колкото по-малко е пълното съпротивление от подъемната сила при даден ъгъл на атака, толкова по-голямо е качеството на профила.

### Аеродинамични коефициенти

Безизмерните коефициенти  $C_y$ ,  $C_x$ ,  $C_m$  и  $k$  са основни аеродинамични коефициенти на профила на крилото. Обикновено те се определят по опитен път в аеродинамичен канал чрез директно измерване с аеродинамична везна на силите и моментите, като за пресмятането им се използват съответните формули (8.59) ÷ (8.61). По принцип изследването се извършва върху модели на крила с разпереност  $\lambda=5$  или  $\lambda=6$  за различни ъгли на атака и числа на Рейнолдс и Мах. Обикновено аеродинамичните коефициенти зависят от формата на профила, ъгъла на атака  $\alpha$  и критерите на подобие  $Re$  и  $Ma$ , а също така и от степента на турбулентност и са еднакви за динамично подобните течения.

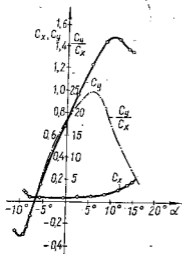
За даден профил при зададени стойности на  $Re$  и  $Ma$  изменението на ъгъла на атака довежда до интензивно изменение на аеродинамичните коефициенти на профила. На фиг. 8.47 са показани зависимостите  $(C_y, C_x, k) = f(d)$ , т. нар. *разгънати поляри* при малки скорости на обтичане, когато влиянието на свиваемостта на газа може да се пренебрегне. Най-голямата стойност на коефициента  $C_y$  определя критичния ъгъл на атака  $\alpha_{кр}$ . При ъгъл на атака  $\alpha=0$  съвременните профили с неголяма дебелина и кривина вече имат някаква, макар и малка подъемна сила. За тях ъгълът, съответстващ на нулева подъемна сила а следователно и на минимално съпротивление, е неголям ( $\alpha = -1 \div -3^\circ$ ), а за симетричните профили  $\alpha=0$ .

При ъгъл на атака  $\alpha > \alpha_{кр}$  настъпва откъсване на граничния слой от горната повърхнина на крилото, в резултат на което след него се образува силно развита турбулентна следа. Това довежда до рязко намаляване на подъемната сила и увеличаване на пълното съпротивление.

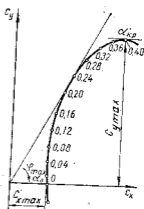
На практика важно значение има зависимостта  $C_y = f(C_x)$  при параметър ъгъла на атака  $\alpha$  (фиг. 8.48), която се нарича *поляра от първи род*.

Ако мащабите на осите  $C_y$  и  $C_x$  при построяване на полярата са избрани еднакви, векторът, който съединява началото на координатната система с произволна точка на полярата, представя

Лява по големината и направление коефициентът на пълната аеродинамична сила, съответстваща на даден ъгъл на атака  $\alpha$ . Ъгълът на атака, който съответствува на максималното качество  $k_{\text{max}}$  на профила, се получава в допирателната точка на танген-



Фиг. 8.47



Фиг. 8.48

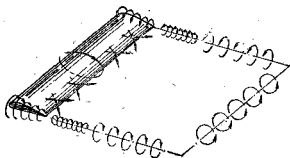
тата, прекарана през началото на координатната система към поларата на профила. Обикновено мащабът по ос  $C_x$  се избира 5–10 пъти по-голям от този по ос  $C_y$ .

### Индуктивно съпротивление

Обтичането на крило с безкрайна дължина (размерност) има равнинен характер, т. е. то е еднакво във всички напречни сечения по дължината му, които са успоредни на равнината на симетрия ( $yx$ ) на крилото. Това от своя страна обуславя и еднакво разпределение на налягането по повърхнината на крилото в тези сечения. При крила с крайна дължина обтичането им има не равнинен, а пространствен характер, особено в близост до краищата му, което оказва влияние на разпределението на налягането по цялата повърхнина на крилото. Тези изменения на налягането довеждат до формиране на вторично течение по направление, успоредно на разпереността, насочено от по-голямото към по-малкото налягане, като под крилото е в посока към краищата му, а над крилото — в обратна посока (фиг. 8.49). Сумирането на вторичното течение с основното довежда до такава картина, при която по горната повърхнина (гърба) на крилото токовите линии са насочени от предния му ръб навътре към равнината на си-

метрия, а по долната повърхнина (корема), обратно, от равнината на симетрия към краищата му (фиг. 8.49). Вторичното течение обтича краищата на крилото на направление отдолу нагоре, т. е. от по-голямото към по-малкото налягане. В резултат на взаимодействието на вторичното течение с постъпателното се образуват т. нар. *вихрови шнури* (свободни вихри), които имат начало от задния ръб на крилото и остават след него в основното течение. Фактически вторичното течение създава пелена от свободни вихри по цялата разпереност на крилото, като този ефект е най-силно изразен в краищата му. Теоретичният анализ и опитът показват, че вихровата пелена след крилото е неустойчива, като на известно разстояние след крилото тя се свива в два мощни вихрови шнура (фиг. 8.49).

Като следствие от вторичното течение разпределението на подъемната сила се изменя от максималната ѝ стойност в средата на крилото до нула в краищата му. Разбира се, възникването на подъемната сила е вследствие на изменението на количеството на движение на флуида във вертикално направление, на което съответствува отклонение (изкривяване) на основното течение надолу. Отклонението започва далеч пред крилото, като нараства постепенно по посока на течението. То се обуславя от системата свободни вихри, които в съответствие със закона на Био-Савар индуцират някакво скоростно поле в околжаващата крилото флуидна маса. Индуцираната по този начин от свободните вихри скорост  $V_y$  в равнината на крилото е насочена вертикално надолу и се изменя както по разпереността на крилото, така и по хордата му. Скоростта  $V_y$  се събира геометрично със скоростта на несмутеното



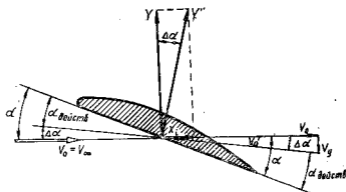
Фиг. 8.49

течение  $V_0$  и се създава течение, чиито токови линии се изкривяват надолу. В произволно сечение на крилото (фиг. 8.50) резултантната скорост  $\vec{V}_0 = \vec{V}_0 + \vec{V}_y$  сключва със скоростта  $V_0$  ъгъл  $\Delta\alpha$ , който е мярка за отклонението, като е най-голям в

краищата му. Средният ъгъл на отклонение на течението може да се определи от отношението

$$\operatorname{tg}(\Delta\alpha_m) = -\frac{V_{my}}{V_0},$$

където  $V_{my}$  е средната по дължина на крилото индуцирана скорост.



Фиг. 8.50

Тъй като ъгълът  $\Delta\alpha_m$  е малък, може да се запише

$$\operatorname{tg}(\Delta\alpha_m) = \Delta\alpha_m = -\frac{V_{my}}{V_0}.$$

Това отклонение на течението фактически намалява ъгъла на атака, както следва:

$$\alpha_{действ} = \alpha - \Delta\alpha_m.$$

Тогава в съответствие с теоремата на Жуковски на крилото трябва да действа подемна сила  $Y'$ , която е перпендикулярна на вектора  $V_0$ . По определение обаче подемната сила е перпендикулярна на скоростта на несмутеното течение и в случая тя ще бъде компонентата на  $Y'$  по ос  $y$ , т. е.

$$Y = Y' \cos(\Delta\alpha_m).$$

Проекцията на  $Y'$  по ос  $x$ , респ. по направлението на  $x$ ,

$$X_l = Y' \sin \Delta\alpha_m = Y (\operatorname{tg} \Delta\alpha_m) = Y \frac{V_{my}}{V_0}$$

представлява допълнителната сила на съпротивление и се нарича *индуктивно съпротивление*.

Несъмнено отклонението на течението и индуктивното съпротивление ще зависят от разпределението на подемната сила по крилото, а също така и от формата му в план. Следователно при обтичане на крилни профили с крайна дължина от реален или идеален флуид в резултат на свободните вихри, стичащи се от крилото, се появява т. нар. индуктивно съпротивление, което не е свързано с вискозитета на флуида, а с наличието на подемната сила.

Вихровата теория, която е много добре разработена, дава възможност да се пресмятат както отклонението на течението, така и индуктивното съпротивление на крила с произволна форма. Например за крила с елиптичен закон за разпределение на циркуляцията по разпереността му индуцираната скорост се изразява като

$$V_{my} = \frac{1}{\pi\lambda} C_y V_0,$$

откъдето за коефициента на индуктивното съпротивление се получава

$$C_{xi} = \frac{X_i}{f \frac{\rho V_0^2}{2}} = \frac{Y \frac{V_{my}}{V_0}}{f \rho \frac{V_0^2}{2}} = \frac{1}{\pi\lambda} C_y^2. \quad (8.65)$$

Ако разпределението на циркуляцията по разпереността на крилото се отличава от елиптическия закон, във формулата (8.65) следва да се постави множителят  $(1 + \Delta)$ , при което за правоъгълни крила  $\Delta < 0,15$ . За крила с елиптично разпределение на циркуляцията  $\Delta = 0$  и следователно те имат най-малко индуктивно съпротивление. От друга страна, индуктивното съпротивление намалява с увеличаване на относителната разпереност  $\lambda$ . Често за избягване или намаляване на индуктивното съпротивление в краищата на крилата се поставят перпендикулярни плоскости

В реалните флуиди освен индуктивното съпротивление крилата изпитват още съпротивление  $C_{xp}$ , което е сумата от съпротивлението на триене и форма ( $C_{xp} = C_{xt} + C_{xf}$ ). Следователно коефициентът на пълно съпротивление на крилата с крайна дължина може да се представи със сумата

$$C_x = C_{xt} + C_{xf} + C_{xi}. \quad (8.66)$$

## IX. ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ

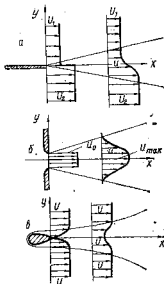
### 9.1. СВОБОДНА ТУРБУЛЕНТНОСТ

Свободна се нарича турбулентността, която се генерира от напречен градиент на скоростта, създаден в резултат на разликата на скоростите на две или повече течения. Очевидно тя се, отнася предимно до онези турбулентни, т. нар. струйни течения при които липсват обтечени стени и при по-големи Рейнолдсови числа и вискозни напрежения. Характерно за свободната турбулентност е, че тя води началото си от разделителни повърхнини, чието разпадане предизвиква турбулентно размесване между две еднакво насочени течения с различни скорости, едното от които може да има и скорост нула. В резултат на турбулентното размесване между две течения настъпва масообмен, т. е. напречно пренасяне на количеството на движение, топлина и примеси, като се формира област, наречена *струен турбулентен граничен слой*, характеризиращ се с непрекъснато разпределение на скоростта, температурата и концентрацията на примеси. При много малки числа на Рейнолдс струйният граничен слой може да бъде ламинарен, но това са много редки случаи, които за техническите задачи имат по-малко значение и не са обект на по-нататъшно разглеждане.

Съществуват различни разновидности на течения със свободна турбулентност, които могат да се подредят в няколко по-характерни случая (фиг. 9.1).

а. *Турбулентно размесване между две течения с еднакво направление, но различна големина на скоростта.* То се характеризира с появяване още в началото на съприкосновение на двете течения на разделителна повърхнина, която е неустойчива. Вследствие на турбулентното размесване тази разделителна повърхнина се разрушава бързо, като се образува гранична област с интензивен турбулентен масообмен, чиято ширина нараства по посока на движението.

б). *Свободна турбулентна струя*, която изтича през отвор в стената или през дюза в еднородна неподвижна флуидна сре-



Фиг. 9.1

да. Вследствие на турбулентността струята се размесва частично с околната флуидна среда, като се получава гранична област, аналогична на предшествувания случай. Очевидно с отдалечаване от изходното сечение дебитът на струята ще нараства, като тя ще се разширява за сметка на намаляването на скоростта ѝ.

в. *Спътната струя*, която се образува зад движещо се в неподвижен флуид тяло или аеродинамична следа след неподвижно тяло, обтечено от флуидно течение. Характерно за този случай е това, че в относителното течение скоростта на спътната струя (следата) е по-малка от тази на заобикалящото я течение, което е съпроводено със съответна импулсна загуба, определяща хидродинамичното съпротивление на тялото. В резултат на турбулентния обмен с външното течение широчината на следата се увеличава с отдалечаване от тялото, като разликата между скоростта на външното течение и тази на следата намалява до окончателното ѝ изчезване, което се наблюдава на голямо разстояние след тялото.

Анализът на свободната турбулентност е сравнително по-лесен от този на пристенната турбулентност. Разбира се, това се дължи на обстоятелството, че вискозните (молекулните) тангенциални напрежения са обикновено пренебрежимо малки в сравнение с турбулентните (молярните) тангенциални напрежения в цялото скоростно поле на течението, докато при пристенната турбулентност трябва да се държи сметка и за вискозните напрежения при стената в ламинарния подслой.

Обикновено свободните турбулентни течения, респ. струйните течения, както и теченията в граничния слой се разглеждат с малка широчина на зоната на размесване в сравнение с тяхната дължина. Приема се, че надлъжният градиент на скоростта е малък в сравнение с напречния. Тези предположения и приемания са направени още от Прандтл с оглед на известни опростявания в уравненията за движение. Следователно за установено двумерно течение на еднороден несвиваем флуид в случай на свободна турбулентност уравненията за движение и непрекъснатостта остават същите, както и уравненията на Прандтл за граничния слой с нулев градиент на налягане, а именно:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_r}{\partial y}, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (9.2)$$

където  $\tau_r$  означава тангенциалното напрежение, обусловено от турбулентното (привидното) триене. В уравн. (9.1) членът, отчитан налягането, е пренебрегнат, защото в свободните турбулент-

ни течения може да се приеме в първо приближение, че налягането е постоянно в цялата област на течението.

За да се създаде възможност за интегриране на системата уравнения (9.1) и (9.2), е необходимо да се намери връзката на турбулентните напрежения с величините, които характеризират главното движение. Засега това е възможно с полуемпиричната зависимост

$$\tau_T = A \frac{\overline{du}}{dy} = \rho l^2 \frac{\overline{du}}{dy} \frac{d\overline{u}}{dy},$$

която е предложена от Прандтл, който приема, че моделът на турбулентното течение е основан на пренасянето на количествата на движение. Той използва тази зависимост и при свободната турбулентност, т. е. при турбулентните струйни течения в т. нар. стара теория.

Бусинеск предлага друга разновидност за  $\tau_T$ :

$$\tau_T = \rho \varepsilon \frac{d\overline{u}}{dy},$$

където

$$\varepsilon = l^2 \frac{d\overline{u}}{dy}$$

е коефициент на привидния кинематичен вискозитет, който се приема постоянен по цялата широчина на зоната на размесване и следователно зависи само от надлъжната координата  $x$ .

По-късно Прандтл предлага за случая на свободна турбулентност  $l \sim \delta$  или  $l = \beta \delta$ , където  $\beta$  е коефициент на пропорционалност и се определя от опита и  $\frac{d\overline{u}}{dy} = \alpha \frac{u_{\max}}{\delta}$ . Тогава се получава

$$\varepsilon = \beta^2 \delta^2 \alpha \frac{u_{\max}}{\delta} = \alpha \beta^2 \delta u_{\max} = k \delta u_{\max}$$

и за турбулентно размесване на две течения

$$\varepsilon = k \delta (u_{\max} - u_{\min})$$

или

$$\tau_T = \rho \varepsilon \frac{d\overline{u}}{dy} = \rho k \delta u_{\max} \frac{d\overline{u}}{dy} \quad (9.3 \text{ a})$$

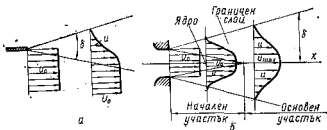
и съответно

$$\tau_T = \rho k \delta (u_{\max} - u_{\min}) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (9.3 \text{ б})$$

където коефициентът  $k$  обединява коефициентите  $\alpha$  и  $\beta$  и се определя по опитен път. Полученият израз за  $\tau_T$  е известен като нова формула на Прандтл за тангенциалните напрежения при свободна турбулентност. Тя има много добро съответствие с опита и довежда до известни удобства при интегрирането на споменатите диференциални уравнения.

## 9.2. СВОБОДНИ ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ

Свободните турбулентни струи (фиг. 9.2) са сравнително най-добре изученият вид струйни течения. При тях скоростта в изходното начално сечение има определена големина и разпределение (профил) в зависимост от условията на движението им до това сечение. Разбира се, най-прост е случаят, когато скоростта на струята в началното сечение е постоянна по големина и направление по цялото сечение, т. е.  $V_0 = \text{const}$ . Непосредствено след изтичане на струята започва интензивен масообмен с околната флуидна среда, който се обуславя от привидните тангенциални напрежения. Вследствие на тези напрежения периферните флуидни частици на струята са възпрепятствувани в движението си, а частиците от околната среда се привеждат в движение или ускоряват движението си. За това допринася също така и началната турбулентност на струята. Под действието на напречните пулсации на скоростта флуидните частици от струята увличат в движение (ежектират) частиците от околната среда. В резултат на това увличане и размесване се създава струйният турбулентен



Фиг. 9.2

граничен слой, който непрекъснато наддебелява по дължина на течението. А това от своя страна довежда до увеличаване както на широчината на струята, така и на флуидната маса на струйното течение.

Непосредствено след изтичането на струята от дюзата във вътрешността ѝ се образува т. нар. *потенциално ядро*, в което скоростта и разпределението ѝ се запазват такива, каквито са били в началното сечение. Всъщност потенциалното ядро е разположено между вътрешните граници на струйния граничен слой. Характерно за него е и това, че широчината му постепенно намалява по дължина на струйното течение и при струя с ограничени размери на началното ѝ сечение на известно разстояние от него тя става равна на нула. Сечението, в което широчината на ядрото става равна на нула, се нарича *преходно сечение*. То разделя струйното течение на два участъка: начален — разположен между началното и переходното сечение, и основен — разположен след переходното сечение.

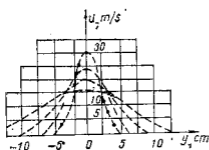
Началният участък е характерен с това, че в него се формира скоростното поле на струйното течение. В него се наблюдава наличие на ядро на постоянни скорости и заобикалящ го струен граничен слой, докато основният участък представлява само струен граничен слой. Понякога се говори и за преходен участък, разположен между началния и основния участък, който има сравнително малка дължина. Тъй като в него се наблюдава също само граничен слой, често той се разглежда заедно с основния участък, особено в последно време.

В основния участък разширението на струйното течение продължава. Независимо от увеличаване на флуидната маса на струята вследствие на турбулентното ѝ резмесване с околната среда скоростите в отделните напречни сечения намаляват. Намалява също така и максималната скорост по надлъжната ос  $x$ , която, както се вижда по-нататък, е характерен параметър на течението.

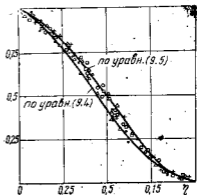
**Скоростни профили.** Както показват теорията и опитът, напречните компоненти на скоростта  $v$  и  $w$  в отделните сечения на струйното течение са много малки в сравнение с надлъжната ѝ компонента  $u$ . Това от своя страна дава основание в инженерното приложение на теорията на турбулентните струи тези компоненти да бъдат пренебрегнати. При това разпределението на скоростта, респ. на компонентата  $u$ , в отделните напречни сечения е различно (фиг. 9.3). Очевидно е наличие непрекъснатата деформация на скоростния профил по дължина на струйното течение, като с отдалечаване от началното сечение скоростният профил все повече се скъсява и разширява. Ако обаче скоростните профили в отделните напречни сечения се построят в безразмерните координати от вида  $\frac{u}{u_{\max}} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$  или  $\frac{u}{u_{\max}} = f\left(\frac{y}{y_c}\right)$

(където  $y_c$  е координатата на точката, в която  $u=0,5u_{\max}$ ), всички скоростни профили в безразмерен вид съвпадат, т. е. остават еднакви. Това показва, че съществува подобие на скоростните профили, респ. на скоростното поле в граничната област

(граничен слой), особено в основния участък на струите с ограничени размери. Казва се още, че съществува афинност на скоростното поле, която придава известен универсален характер на струйното течение независимо от условията в началното сечение.



Фиг. 9.3



Фиг. 9.4

Този резултат, получен от многократни опитни изследвания, позволява да се намери и съответен израз за разпределението на скоростта в струйния граничен слой. Така например в теорията и експеримента се използва с успех полуемпиричната зависимост по

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (9.4 \text{ а})$$

или, ако се приеме  $\eta = \frac{y}{b}$ ,

$$\frac{u}{u_{\max}} = [1 - \eta^{3/2}]^2. \quad (9.4 \text{ б})$$

Също така много добър резултат се получава, като зависимостта  $\frac{u}{u_{\max}} = f(\eta)$  се изрази по [7.19], както следва:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\eta^3 + 2\eta^6 \quad (9.5)$$

или

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 0,75\eta_c^2 + 0,25\eta_c^4, \quad (9.6)$$

където  $\eta_c = \frac{y}{y_c}$ .

Познати са и други полуемпирични зависимости, изразени с експоненциални функции или чрез представяне на скоростта в степенен ред въз основа на данни от опита. На фиг. 9.4 е показан безразмерен скоростен профил, определен по уравн. (9.4) и (9.5) — съответните плътни линии, и съпоставен с опита.

**Постоянство на количеството на движение.** Характерна особеност на свободните турбулентни струи е постоянството на количеството на движение по дължина на струйното течение. Това лесно може да се покаже, ако се излезе от опростеното уравнение на Прандтл за течение в граничния слой (9.1) и уравнението за непрекъснатостта (9.2), които в този вид са приложими за двумерни струйни течения, респ. за течение на плоски турбулентни струи, а именно:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Първото уравнение, интегрирано по  $y$ , приема вида

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \rho \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy.$$

Ако в първия член на полученото уравнение се размени редът на диференциране и интегриране, като се вземе под внимание, че  $u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right)$ , и вторият член се интегрира по части, получава се

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy + \rho uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \rho \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial y} dy = \tau \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

От друга страна, от уравнението за непрекъснатостта следва

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} u \left( - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) dy.$$

Тогава предишното уравнение може да се запише във вида

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy + \rho uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \tau \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

По-нататък, като се съобрази граничното условие при  $y \rightarrow \pm \infty$ ,  $u=0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}=0$  и  $\tau=0$ , получава се

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = 0$$

или

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = \text{const.} \quad (9.7)$$

Съгласно с получения израз количеството на движение в струйното течение остава постоянна величина, независеща от координатата  $x$ . Очевидно този резултат се дължи на обстоятелството, че статичното налягане по цялото поле на струйното течение е еднакво и равно на това на околната флуидна среда.

В случай на осовосиметрични струи също може да се използва приблизителната теория на граничния слой, като сега обаче уравнението на движението (9.1) и непрекъснатостта (9.2) се трансформират в цилиндрични координати. Всъщност те са осовосиметрични аналози на съответните им уравнения за плоска струя. Чрез интегриране на тези уравнения се получава също, че количеството на движение по дължина на струйното течение остава постоянно. Постоянството на количеството на движение т. е.

$$J = \rho \int u^2 df = \text{const}, \quad (9.8)$$

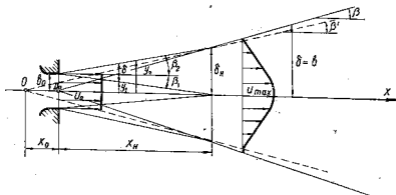
се използва като основно изходно уравнение за определяне на характерните параметри на свободните турбулентни струйни течения.

### 9.3. СВОБОДНА ПЛОСКА ТУРБУЛЕНТНА СТРУЯ

На фиг. 9.5 е показано схематично разпространението на плоска турбулентна струя, която изтича със скорост  $u_0$  през дълъг процеп с широчина  $2b_0$ . В началния участък с дължина  $x_n$  е разположено потенциално ядро, в което скоростта остава постоянна и равна на  $u=u_0$ , ограничено от двете страни на струйния граничен слой, където скоростта се изменя от  $u=0$  до  $u=u_0$ . След преходното сечение започва основният участък. В него по

ос  $x$  скоростта има максимална стойност  $u_{\max} < u_0$ , която по дължина на течението намалява, като в отделните напречни сечения скоростта се мени в границите  $0 \leq u \leq u_{\max}$ .

За плоска турбулентна струя могат да се въведат като ос-



Фиг. 9.5

новни следните параметри: максимална скорост  $u_{\max}$ , дължина на началния участък  $x_n$ , дебелина на граничния слой  $\delta$ , граници на ядрото и струята —  $y_1$  и  $y_2$ , а също така дебит в началния и основния участък  $Q_n$ .

От условието  $J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \text{const}$ , приложено за началното

сечение и произволно сечение на основния участък, може да се запише равенството

$$\rho u_0^2 2b_0 = 2\rho \int_0^{\delta} u^2 dy$$

или

$$u_0^2 b_0 = \int_0^{\delta} u^2 dy = u_{\max}^2 \delta \int_0^1 \left(\frac{u}{u_{\max}}\right)^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Тъй като  $\eta = y/\delta$  и  $\frac{u}{u_{\max}} = f(\eta)$ ,

следва

$$u_0^2 b_0 = u_{\max}^2 \delta \int_0^1 [f(\eta)]^2 d\eta = u_{\max}^2 \delta A,$$

откъдето

$$u_{\max} = u_0 \sqrt{\frac{1}{A} \frac{1}{\delta}} = u_0 \frac{\text{const}}{\sqrt{\delta}}$$

или

$$\frac{u_{\max}}{u_0} = \bar{u}_{\max} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\delta}}, \quad (9.9)$$

където

$$\bar{\delta} = \delta/b_0.$$

Въз основа на теоретични изследвания, потвърдени от опита, е установено, че дебелината на струйния граничен слой се изменя по линейния закон

$$\delta \sim x; \quad \delta = ax,$$

където  $a$  е коефициент на пропорционалност, чиято числена стойност съгласно с опита е  $a=0,27$ .

Тогава уравн. (9.9) може да се запише, както следва:

$$\frac{u_{\max}}{u_0} = \frac{\text{const}}{\sqrt{a_0} \sqrt{x}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}. \quad (9.10)$$

Като се вземе под внимание изразът (9.5), т. е.

$$f(\eta) = \frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3,$$

може сравнително лесно да се определи числената стойност на интеграла

$$A = \int_0^1 [f(\eta)]^2 d\eta = 0,37$$

и приемайки  $a=0,27$ , уравн. (9.10) получава окончателния си вид

$$\frac{u_{\max}}{u_0} = \bar{u}_{\max} = \frac{3,18}{\sqrt{x}} \quad (9.11)$$

Дължината на началния участък се определя от граничното условие при  $x = x_n$ ,  $u_0 = u_{\max}$

$$\text{и следователно } \frac{u_{\max}}{u_0} = 1 = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x_n}},$$

откъдето  $\bar{x}_n = 10$

$$\text{или } x_n = 10b_0 \quad (9.12)$$

По отношение на дебелината на струйния граничен слой в преходното сечение може да се запише равенството

$$\delta_n u_{\max}^2 A = u_0^2 b_0,$$

$$\delta_n u_0^2 A = u_0^2 b_0,$$

откъдето

$$\delta_n = \frac{b_0}{A} = \frac{b_0}{0,37} = 2,7b_0; \quad \bar{\delta}_n = 2,7. \quad (9.13)$$

Външната граница на струята в началния участък се дефинира от ъгъл  $\beta_2$ , за който

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\delta_n - b_0}{x_n} = \frac{2,7b_0 - b_0}{10b_0} = 0,17,$$

откъдето

$$\beta_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta_2 = 9^\circ 40' \approx 10^\circ,$$

а вътрешната граница на струйния граничен слой — от ъгъл  $\beta_1'$ , за който

$$\operatorname{tg} \beta_1' = \frac{b_0}{x_n} = 0,1 \text{ и } \beta_1' = 5^\circ.$$

Външната граница на струята в основния участък се определя от ъгъл  $\beta'$  чрез съотношението

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\delta}{x'} = 0,22,$$

където  $x'$  е разстоянието от разглежданото сечение до т. нар. полюс на струята (фиг. 9.5, точка  $O$ ). Предвид на обстоятелството, че преходът на скоростта към тази на външното течение (в случая тя е равна на нула) е асимптотичен и като се вземе под внимание структурата на турбулентния обмен с околната среда, външната граница може да се дефинира и от ъгъл  $\beta$ , отнесен за точка  $D$ , разположена на ос  $x$  и началното сечение на струята, за който

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{x} = 0,27 \text{ и } \beta = 15^\circ.$$

Сега може да се определи местоположението на полюса на струята, като се излезе от условието, че двете външни граници се пресичат в точката с координати  $x_n$ ,  $\delta_n$ . Следователно при  $x = x_n$

$$\delta_n = 0,27x_n = 0,22x'_n,$$

откъдето за разстоянието  $x_0$  се получава

$$x'_n = x_n + x_0 = \frac{0,27}{0,22} x_n,$$

$$x_0 = 0,23 x_n; \quad \frac{x_0}{b_0} = \bar{x}_0 = 2,3.$$

Друг съществен параметър на свободната плоска турбулентна струя е дебитът, чието определяне се извършва сравнително лесно.

За началния участък

$$Q = 2 \left[ u_0 y_1 + \int_{y_1}^{\delta} u dy \right] = 2 \left[ u_0 y_1 + u_0 \delta \int_0^1 f(\eta) d\eta \right],$$

където  $\eta = \frac{y - y_1}{\delta}$ .

Като се вземе под внимание изразът  $y_1 = b_0 - x \operatorname{tg} \beta_1$ , за дебита се получава

$$Q = 2 [u_0 (b_0 - x \operatorname{tg} \beta_1) + u_0 x (\operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_1) B],$$

където

$$\delta = (b_0 + x \operatorname{tg} \beta_2) - (b_0 - x \operatorname{tg} \beta_1) = x (\operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_1);$$

$$B = \int_0^1 f(\eta) d\eta; \text{ за } f(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \quad B = 0,5.$$

По-нататък следва

$$Q = 2u_0 b_0 [1 - \bar{x} \operatorname{tg} \beta_1 + \bar{x} (\operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_1) B]$$

или

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 (1 - 0,1 \bar{x} + 0,27 \cdot 0,5 \bar{x}) = \\ &= Q_0 (1 + 0,035 \bar{x}), \end{aligned} \quad (9.14a)$$

а в безразмерен вид

$$\frac{Q}{Q_0} = \bar{Q} = 1 + 0,035 \bar{x}, \quad (9.14b)$$

като ежектираният дебит е  $Q_e = Q - Q_0$  или

$$\bar{Q}_e = 0,035 \bar{x}. \quad (9.14b)$$

За основния участък следва

$$Q = 2 \int_0^{\delta} u dy = 2u_{\max} \delta \int_0^1 \frac{u}{u_{\max}} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2u_{\max} \delta \int_0^1 f(\eta) d\eta$$

или

$$Q = 2u_0 b_0 \frac{u_{\max}}{u_0} \frac{\delta}{b_0} B,$$

откъдето

$$Q = Q_0 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}} \cdot 0,27 \bar{x} 0,5 \text{ или } \bar{Q} = 0,426 \sqrt{\bar{x}}, \quad (9.15a)$$

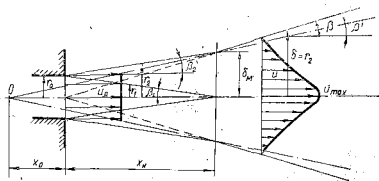
като дебитът на ежектирания флуид е

$$Q_e = Q - Q_0 \text{ или } \bar{Q}_e = 0,426 \sqrt{\bar{x}} - 1. \quad (9.15b)$$

Получените зависимости за характерните параметри на свободна плоска турбулентна струя имат много добро съответствие с опита и могат да се използват успешно в практиката.

#### 9.4. СВОБОДНИ ОСОВОСИМЕТРИЧНИ ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ

Разглежда се свободна осовосиметрична турбулентна струя, която изтича от дюза с цилиндричен отвор в неподвижна еднородна флуидна среда (фиг. 9.6). В този случай също се различа-



Фиг. 9.6

ват два участъка: начален, в който съществува потенциално ядро и струен граничен слой, и основен, състоящ се само от струен граничен слой, в който скоростното поле остава афинно. Следователно и тук може да се използва безразмерната зависимост за скоростта (9.5) и постоянството на количеството на движение (9.8). Сега зависимостта (9.5) може да се представи, както следва:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{\delta}\right)^3, \quad (9.16)$$

където  $\eta = \frac{r}{\delta}$ , като за началния участък  $\delta = r_2 - r_1$ , а уравнението за количеството на движение (9.8) е

$$2\pi\rho \int_0^{\delta} u^2 r dr = \text{const}. \quad (9.17)$$

Последното уравнение, приложено за началното и произволно сечение на струята, приема вида

$$\pi\rho u_0^2 r_0^2 = 2\pi\rho \int_0^{\delta} u^2 r dr = \text{const},$$

където  $u_0$ ,  $r_0$  са скоростта и радиусът в началното сечение на струята. По-нататък следва

$$u_0^2 r_0^2 = 2u_{\max}^2 \delta^2 \int_0^1 \left(\frac{u}{u_{\max}}\right)^3 \frac{r}{\delta} d\left(\frac{r}{\delta}\right)$$

или

$$u_0^2 r_0^2 = 2u_{\max}^2 \delta^2 \int_0^1 [f(\eta)]^2 \eta d\eta = 2u_{\max}^2 \delta^2 A, \quad (9.18)$$

където

$$A = \int_0^1 [f(\eta)]^2 \eta d\eta.$$

Очевидно за максималната скорост по оста се получава

$$u_{\max}^2 = \frac{u_0^2 r_0^2}{2\delta^2 A} = u_0^2 \frac{1}{2A\bar{\delta}^2}; \quad \bar{u}_{\max} = \frac{\text{const}}{\bar{\delta}},$$

където

$$\bar{\delta} = \delta/r_0; \quad \text{const} = \frac{1}{\sqrt{2A}}.$$

Ако се приеме, че  $\bar{\delta} = ax$  или  $\bar{\delta} = a\bar{x}$ , последният израз става

$$u_{\max} = u_0 \frac{1}{\sqrt{2A}} \frac{1}{a\bar{x}} = u_0 \frac{\text{const}}{\bar{x}}, \quad (9.19a)$$

където  $\text{const} = \frac{1}{a\sqrt{2A}}$ . Като се определи числената стойност на интеграла  $A$  въз основа на (9.18)

$$A = \int_0^1 [f(\eta)]^2 \eta d\eta = 0,085$$

и се приеме съгласно с опита  $a=0,27$ , за константата се получава  $\text{const}=9$  и следователно

$$u_{\max} = u_0 \cdot \frac{9}{x}. \quad (9.196)$$

Дължината на началния участък се определя от граничните условия: при  $x = x_n$   $u_0 = u_{\max}$ , откъдето следва

$$1 = \frac{9}{x_n}; \quad x_n = 9r_0. \quad (9.20)$$

За дебелината на струйния граничен слой в преходното сечение се получава

$$\delta_n = ax_n = 0,27 \cdot 9r_0 = 2,43r_0$$

или

$$\bar{\delta}_n = \frac{\delta_n}{r_0} = 2,43.$$

Получените данни дотук позволяват да се определят границите на ядрото и струята в началния участък, а също така и границата на струята в основния участък.

В началния участък за външната граница, дефинирана с ъгъла  $\beta_2$ , следва

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\delta_n - r_0}{x_n} = \frac{\bar{\delta}_n - 1}{x_n} = 0,158 \quad \text{или} \quad \beta_2 \approx 9^\circ.$$

За ядрото (съответно ъгъл  $\beta_1$ ) се получава

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{r_0}{x_n} = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{9} = 0,112 \quad \text{или} \quad \beta_1 = 6^\circ 25'.$$

За основния участък (съответно ъгъл  $\beta$  или  $\beta'$ ), отнесен за полюса, разположен по оста на дюзата на разстояние  $x_0$  от изходното сечение,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{x} = 0,27,$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\delta}{x'} = 0,22.$$

От условието, че  $\delta_n$  е еднакво и за двете граници, следва

$$\delta_n = 0,27x_n \quad \text{и} \quad \delta_n = 0,22(x_n + x_0)$$

или

$$0,27x_n = 0,22(x_n + x_0).$$

откъдето

$$x_0 = \frac{(0,27-0,22)x_n}{0,22} = 0,23x_n,$$

респ.

$$\bar{x}_0 = \frac{x}{r_0} = 0,23\bar{x}_n = 2,07. \quad (9.21)$$

И тук  $x_0$  е координатата на полюса, която зависи от началната турбулентност на струята. При голяма начална турбулентност  $x_0$  има малки стойности, стремящи се към нула.

За изменението на дебита на струйното течение се използват аналогични на плоска струя решения.

За началния участък

$$Q = \pi r_1^2 u_0 + 2\pi \int_{r_1}^r u r dr = \pi r_1^2 u_0 + 2\pi u_0 \delta^2 \int_0^1 f(\eta) \eta d\eta,$$

или

$$Q = \pi u_0 (r_1^2 + 2\delta^2 B).$$

Като се приеме

$$r_1 = r_0 - x \operatorname{tg} \beta_1 = r_0 - 0,112x,$$

$$\delta = r_2 - r_1 = r_0 + x \operatorname{tg} \beta_2 - (r_0 - x \operatorname{tg} \beta_1)$$

или

$$\delta = x (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) = 0,27x,$$

$$Q = \pi r_0^2 u_0 [(1 - 0,112\bar{x})^2 + 2B (0,27\bar{x})^2].$$

От безразмерния скоростен профил се получава за

$B = \int_0^1 f(\eta) \eta d\eta = 0,15$ , която стойност, заместена в последното уравнение, довежда до израза

$$Q = Q_0 [1 + 0,046\bar{x} + 0,004\bar{x}^2]$$

или

$$\bar{Q} = \frac{Q'}{Q_0} = 1 + 0,046 \bar{x} + 0,004 \bar{x}^2. \quad (9.22)$$

За основния участък

$$Q = 2\pi \int_0^{\delta} u r dr = 2\pi u_{\max} \delta^2 \int_0^1 f(\eta) \eta d\eta,$$

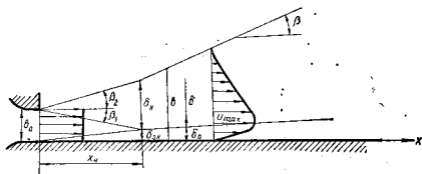
$$Q = 2\pi u_{\max} \delta^2 B = 2\pi u_0 \bar{u}_{\max} r_0^2 \bar{\delta}^2 B$$

или 
$$Q = Q_0 2B \frac{9}{x} (1,27\bar{x})^2 = 0,2 Q_0 \bar{x}. \quad (9.23)$$

Получените резултати имат добро потвърждение от опита и могат да бъдат използвани в практиката.

#### 9.5. ПОЛУОГРАНИЧЕНА ПЛОСКА ТУРБУЛЕНТНА СТРУЯ

Полуограничената плоска струя (фиг. 97) се характеризира с това, че от едната страна тя е ограничена с твърда стена, а от



Фиг. 9.7

другата — с неподвижна флуидна среда. Сечението, в което струйният граничен слой се слива с пристенния слой, се нарича *преходно*. От началното сечение до него се разполага началният участък, в който се намира ядрото на струята. Приема се, че след переходното сечение се намира основният участък на струята. Според приблизителната теория на Прандтля граничния слой

уравненията за движение и непрекъснатостта на плоска полуограничена струя с нулев градиент на налягане имат вида

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Първото уравнение може да се интегрира по  $y$ , както следва:

$$\int_0^b u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{\rho} \int_0^b \frac{\partial \tau}{\partial y} dy. \quad (9.24)$$

Ако в (9.24) се измени редът на диференциране и интегриране на първия член, като се отбележи, че  $u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right)$ , а вторият член се интегрира по части, се получава

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b u^2 dy + uv \Big|_0^b - \int_0^b u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{1}{\rho} \tau \Big|_0^b.$$

Съгласно с уравнението за непрекъснатостта обаче  $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ , от което следва

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b u^2 dy + uv \Big|_0^b = \tau \Big|_0^b. \quad (9.25)$$

При съобразяване на граничните условия

$$y=0, u=0, uv=0, \tau=\tau_0$$

$$y=b, u=0, uv=0, \tau=0$$

уравн. (9.25) приема вида

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b u^2 dy = -\tau_0$$

или

$$\rho \int_0^b u^2 dy + \tau_0 x = \text{const.} \quad (9.26)$$

Полученият израз показва, че при полуограничените турбулентни струи за разлика от свободните количеството на движение по дължина на течението намалява за сметка на силата от триене по стената.

Константата в (9.26) се определя посредством количеството на движение при изходящото сечение, където  $x=0$  и  $\tau_0 x=0$ , както следва:

$$\rho \int_0^b u^2 dy + \tau_0 x = \rho u_0^2 b_0. \quad (9.27)$$

Съгласно с теорията на граничния слой

$$\tau_0 x = \rho u_{\max}^2 \delta^{**},$$

от което за (9.27) се получава

$$\int_0^b u^2 dy + u_{\max}^2 \delta^{**} = b_0 u^2. \quad (9.28)$$

За решаване на (9.28) трябва да се познава зависимостта  $u=f(y)$ . Приблизително решение може да се получи, ако струйното течение се разглежда съставено от пристенен граничен слой, за който

$$\frac{u}{u_{\max}} = \xi^n,$$

и външен граничен слой, за който по (9.5) следва

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3,$$

където

$$\eta = \frac{y - \delta_0}{\delta} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{y}{\delta_0}.$$

Въз основа на първата зависимост за дебелината на загубите на импулса при приемане  $n = \frac{1}{7}$  се получава

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta_0} \frac{u}{u_{\max}} \left(1 - \frac{u}{u_{\max}}\right) d\left(\frac{y}{\delta_0}\right) = \frac{7}{72} \delta_0.$$

След тези приемания (9.28) се записва във вида

$$\int_0^{\delta_0} u^2 dy + \int_0^{\delta} u^2 dy + \frac{7}{72} \delta_0 u_{\max}^2 = u_0^2 b_0.$$

Първите два интеграла в получения израз могат да се представят съответно

$$\int_0^{\delta_0} u^2 dy = u_{\max}^2 \delta_0 \int_0^1 [f(\xi)]^2 d\xi = u_{\max}^2 \delta_0 A$$

и

$$\int_0^{\delta} u^2 dy = u_{\max}^2 \delta \int_0^1 [f(\eta)]^2 d\eta = u_{\max}^2 \delta B$$

и следователно за споменатия израз се получава

$$u_{\max}^2 \left[ A \delta_0 + B \delta + \frac{7}{72} \delta_0 \right] = u_0^2 b_0. \quad (9.29)$$

Като се приеме за  $f(\xi)$  съответният израз, в който  $n = \frac{1}{7}$ , и за  $f(\eta)$  — изразът по (9.5), интегралите  $A$  и  $B$  имат съответните стойности:  $A = 7/9$  и  $B = 0,37$ . Според опита и някои автори за плоска полуограничена турбулентна струя е в сила отношението  $\delta_0 = 0,1\delta$ . Като се приеме също така и зависимостта  $\delta = ax$ , където  $a$  е коефициентът на пропорционалност, уравн. (9.29) приема вида

$$0,458 (\bar{u}_{\max})^2 ax = 1,$$

от който следва

$$\bar{u}_{\max} = \frac{u_{\max}}{u_0} = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}, \quad (9.30a)$$

където

$$\bar{x} = \frac{x_s}{b_0} \text{ и } \text{const} = \frac{1}{\sqrt{0,458a}}$$

Съгласно с опита  $a=0,23$ , респ.  $\text{const}=3,04$ , или

$$\bar{u}_{\max} = \frac{3,04}{\sqrt{x}} \quad (9.306)$$

Получената формула позволява със задоволителна за инженерната практика точност да се определи големината на максималната скорост по дължина на течението на плоска турбулентна струя, полуограничена от права стена.

От (9.30a) може сравнително лесно да се определи дължината на началния участък от условието при  $x=x_n$ ,  $u_{\max}=u_0$ , т. е.

$$\bar{x}_n = 9,2 \quad (9.31)$$

За дебелината на пристенния и струйния граничен слой в переходното сечение ( $x=x_n$ ) се получава съответно

$$\bar{\delta}_n = 0,23\bar{x}_n \quad (9.32a)$$

$$\bar{\delta}_{0n} \approx 2,1 \quad (9.326)$$

Други съществени параметри са границите на ядрото и външната граница на струята. За тях се получават следните зависимости:

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{b_0 - \delta_{0n}}{x_n} = \frac{1 - \delta_{0n}}{x_n} = 0,086,$$

откъдето

$$\beta_1 = \text{arc tg } 0,086,$$

$$\text{tg } \beta_2 = \frac{\delta_n - \delta_0}{x_n} = \frac{1,1\bar{\delta}_n - 1}{x_n} = 0,144$$

и

$$\text{tg } \beta = \text{tg } \beta_1 + \text{tg } \beta_2 = 0,23 = \text{const}$$

за началния и основния участък.

За нарастването на дебита в основния участък се получава:

$$Q = \int_0^{\delta_0} u dy + \int_0^{\delta} u dy = u_{\max} \left[ \delta_0 \int_0^1 f(\xi) d\xi + \delta \int_0^1 f(\eta) d\eta \right], \quad (9.33)$$

$$Q = u_{\max} \delta (0,1C + D),$$

където

$$C = \int_0^1 f(\xi) d\xi \quad \text{и} \quad D = \int_0^1 f(\eta) d\eta.$$

Същите интеграли съобразно със зависимостите за  $f(\xi)$  и  $f(\eta)$  имат числени стойности съответно  $C=0,87$  и  $D=0,5$ , откъдето за дебита се получава

$$Q = Q_0 \bar{u}_{\max} \bar{\delta} 0,587$$

или

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_0} = 0,587 \bar{u}_{\max} \bar{\delta} = 0,414 \sqrt{x}. \quad (9.34)$$

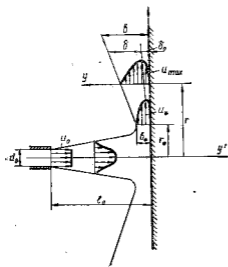
Получените резултати за основните параметри на плоската турбулентна струя, полуограничена от права стена, имат много добро съответствие с опита и могат да бъдат успешно използвани в инженерната практика.

## 9.6. РАДИАЛНА ПРИСТЕННА ТУРБУЛЕНТНА СТРУЯ

Течението на струя срещу екран (фиг. 9.8) се характеризира с наличие на два участъка: първи до екрана, в който течението запазва характера на свободна осовосиметрична струя, и втори, в който течението се разпространява като полуограничена плоска радиална турбулентна струя. Очевидно между тези два участъка съществува и преходен участък, в който се наблюдава деформация на скоростното поле и преминаване на струйното течение от осова в радиална посока. При това във втория участък се различават две гранични области, разделени от повърхнината на максималните скорости: пристенна — обхващаща граничния слой, и външна, в която течението се подчинява на закона на движение на свободна плоска радиална турбулентна струя. Тези характерни особености правят задачата сложна, поради което този вид

струйни течения все още не са достатъчно изучени и засега са познати предимно полуемпирични решения.

Опитът показва, че в първия участък скоростното поле запазва характера на осовосиметрична турбулентна струя на разстояние  $y' = 0,8b_0$  независимо от наличието на екрана. За разлика от него значително по-сложна е картината на течението във втория участък. За начално сечение на втория участък може да се приеме сечението с най-малка дебелина, от което нататък течението има напълно изразен характер на полуограничена радиална турбулентна струя. Ето защо неговата координата  $r_*$ , дебелината на струята  $\delta_*$  и максималната скорост  $u_*$  в това сечение са характерни начални параметри. Те са определени по експериментален път и са показани на фиг. 9.9 в зависимост от местоположението на екрана спрямо дюзата, от която изтича струята.



Фиг. 9.8

Разпределението на скоростта в напречните сечения на граничния слой, получено от опита, показва много добро съответствие със степения закон (7.99б), валиден за течението в граничния слой:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^n,$$

докато за външната гранична област е в сила зависимостта (9.5) респ. (9.6):

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3,$$

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 0,75\eta_c^2 + 0,25\eta_c^3,$$

където

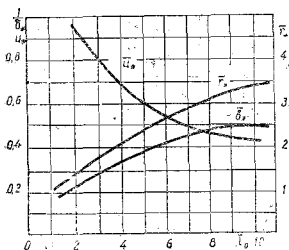
$$\eta = \frac{y - \delta_0}{\delta_1} \quad \text{и} \quad \eta_c = \frac{y - \delta_0}{y_* - \delta_0}.$$

Що се отнася до изменението на максималната скорост по дължината на течението, то е подчинено на закона

$$\bar{u}_{\max} = \frac{k}{r} = \frac{\text{const}}{r}, \quad (9.35)$$

където  $k$  е константа, която съгласно с резултатите от опита се изменя в границите  $k=1,35 \div 1,4$ .

Дебелината на граничния слой  $\delta_0$  е характерен параметър на



Фиг. 9.9

полуограничената радиална струя. Тя може да се определи сравнително лесно и с достатъчна за инженерната практика точност с помощта на импулсното уравнение на турбулентния граничен слой, което в случая приема вида

$$\frac{d\delta_0^{**}}{dr} = \frac{\tau_0}{\rho u_{\max}^2} = 0,0225 \left( \frac{u_{\max} \delta_0}{\nu} \right)^{-1/4}.$$

Като се използва зависимостта (7.996) при  $n=1/7$ , за  $\delta^{**}$  се получава

$$\delta^{**} = \delta_0 \int_0^1 \frac{u}{u_{\max}} \left( 1 - \frac{u}{u_{\max}} \right) d \left( \frac{y}{\delta_0} \right) = 7/72 \delta_0,$$

в резултат на което за импулсното уравнение следва изразът

$$\frac{d\delta^{**}}{dr} = \frac{7}{72} \frac{d\delta_0}{dr} = 0,0225 \left( \frac{u_{\max} \delta_0}{\nu} \right)^{-1/4}.$$

Ако се приведе в безразмерен вид посредством съответно разделяне на  $u_0$  и  $d_0$  и за отношението  $\frac{u_{\max}}{u_0}$  се приеме зависимостта по (9.35), в която  $k=1,38$ , импулсното уравнение след съответни преобразувания и интегриране се довежда до зависимостта

$$\bar{\delta}_0 = 0,38 \text{Re}^{-1/5} \bar{r}, \quad (9.36)$$

където

$$\bar{r} = \frac{r}{d_0}, \quad \bar{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{d_0} \quad \text{и} \quad \text{Re} = \frac{u_{\max} r}{\nu}.$$

Съгласно с опита параметърът  $l_0$  не оказва забележимо влияние, когато  $\bar{l}_0 < 10$ .

За определяне на дебелината на външната гранична област на струйното течение се използва получената от опита зависимост  $\bar{\delta} = 6\bar{\delta}_0$  и следователно

$$\bar{\delta} = 2,28 \text{Re}^{-1/5} \bar{r}. \quad (9.37)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович, Г. Н.* Прикладная газовая динамика. М., Наука, 1976.
2. *Абрамович, Г. Н.* Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
3. *Абрамович, Г. Н. и коллегия.* Теория турбулентных струй. М., Наука, 1984.
4. *Альтшуль, А. Д., П. Г. Киселев.* Гидравлика и аэродинамика. М., Стройиздат, 1975.
5. *Аржаников, Н. С., В. Н. Мальцев.* Аэродинамика. М. Оборонгиз, 1956.
6. *Байбардин, Ю. В.* Основы лазерной техники. Киев. Издательское объединение Виша школа, 1988.
7. *Гиневский, А. С.* Теория турбулентных струй и следов. М., Машиностроение, 1969.
8. *Голубева, О. В.* Курс механики сплошных сред. М., Высшая школа, 1972.
9. *Дейли, Дж., Д. Харлеман.* Механика жидкости (перев. от англ.) М., Энергия, 1971.
10. *Дейч, Дж.* Техническая газодинамика. М., Энергия, 1974.
11. *Дейч, М. Е., Х. Е. Зарянкин.* Газодинамика. М., Энергоатомиздат, 1984.
12. *Козлов, Л. Ф.* Теоретические исследования пограничного слоя. Киев. Научкова думка, 1982.
13. *Кочин, Н. А., И. А. Кибель, Н. В. Розг.* Теоретическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1963.
14. *Краснов, Н. Ф.* Аэродинамика. М., Высшая школа, 1976.
15. *Ламб, Г.* Гидродинамика (перев. от англ.) М., Издательство технико-теоретической литературы, 1974.
16. *Лебедев, Н. В., С. Л. Трескунов, В. С. Яковенко.* Элементы струйной авиатики. М., Машиностроение, 1973.
17. *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газ. М., Наука, 1987.
18. *Лойцянский, Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1963.
19. *Маджирски, В.* Определяние распределения скорости по поперечному сечению при размещении на две осесимметричные струи с ограничением размера. С., Техника, 1969.
20. *Маджирски, В., Е. Чичов.* Сборник задачи по гидродинамике и гидравлике. С., Наука и искусство, 1958.
21. *Маджирски, В., П. Станков, И. Антонов.* Исследование радиальной пристеночной турбулентной струи. Будапешт, Яблони, 1974.
22. *Мартинов, А. К.* Экспериментальная аэродинамика. М., Оборонгиз, 1950.
23. *Монин, А. С., А. М. Яглом.* Статистическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1965.
24. *Мостков, М. А.* Прикладная гидромеханика. М., Госэнергоиздат, 1963.
25. *Михтаоян, А. М.* Аэродинамика. М., Машиностроение, 1970.
26. *Повх, И. Л.* Техническая гидромеханика. Л., Машиностроение, 1976.
27. *Попов, М. Г.* Хидродинамика. С., Техника, 1973.
28. *Попов, М. Г., Л. Я. Панов.* Гидро и газодинамика. С., Техника, 1980.
29. *Прандтль, Г.* Гидромеханика (перев. от немски). ИЛ М., 1949.
30. *Реди, Дос.* Промышленные применения лагеров. М., Мир, 1981.
31. *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. М., Наука, 1970.
32. *Торг, С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М., Издательство технико-теоретической литературы, 1951.
33. *Шерстюк, А. Н.* Турбулентный пограничный слой. Энергия. М., 1974.
34. *Шлихтинг, Г.* Теория пограничного слоя (перев. от немски). М., Физматгиз, 1972.

35. *Batchelor, G. K.* An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 1967.
36. *Durst, E., B. Launder.* Turbulent Shear Flows—Springer—Verlag—Berlin Heidelberg, New York, 1979.
37. *Frost, W., T. Mulden.* Handbook of Turbulence. Plenum Press, New York, 1977.
38. *Milne-Thompson, L. M.* Teoretical hydrodynamics. The Macmillan Co, New York, 1960.
39. *Shapiro, A.* The dynamic and thermodinamics of compressible fluid flow, New York, 1953.
40. *Spalding, D. B., S. V. Patankar.* Heat and mass transfer in boundary layers, London, 1987.
41. *Wallis, G. B.* One dimantional two-phase flow. Mc Crow — Hill Book company, 1970.

•

# СЪДЪРЖАНИЕ

## Предговор

## Увод

### I. Основни свойства на флуидите

1.1. Механични свойства на течностите и газовете . . . . .	5
1.2. Плътност и свиваемост . . . . .	6
1.3. Вискозитет . . . . .	10

### II. Хидростатика

2.1. Видове сили и напрежения във флуидите . . . . .	14
2.2. Диференциални уравнения за равновесието на флуидите . . . . .	17
2.3. Някои примери за равновесие на флуидите в относителен покой . . . . .	20
2.4. Приложение на хидростатиката . . . . .	27

### III. Кинематика на флуидните течения

3.1. Математично описание на теченията . . . . .	32
3.2. Токови линии и картини . . . . .	34
3.3. Ускорение на флуидните частици . . . . .	37
3.4. Деформационно и въртливо движение на флуидните частици . . . . .	40
3.5. Безвихрови движения на флуидите . . . . .	44
3.6. Вихрови движения на флуидите . . . . .	46
3.7. Циркулация на скоростта . . . . .	49

### IV. Основни уравнения на механиката на флуидите

4.1. Закон за запазване на материята—уравнение за непрекъснатостта . . . . .	52
4.2. Закон за запазване на импулса. Теорема за количеството на движение на флуидите . . . . .	56
4.3. Уравнения за движението на реалните флуиди . . . . .	60
4.4. Уравнения за движението на идеалните флуиди . . . . .	67
4.5. Уравнение на Бернули . . . . .	70
4.6. Енергийни уравнения . . . . .	73
4.7. Теорема на Томсън . . . . .	75

### V. Някои приложения на основните уравнения на механиката на флуидите

5.1. Приложение на Бернулиевото уравнение за течение в тръби и канали . . . . .	78
5.2. Установени течения на несвиваем флуид . . . . .	80
5.3. Неустановено изтичане . . . . .	86
5.4. Измерване на налягане и скорости при течения на несвиваем флуид . . . . .	89
5.5. Измерване на дебити . . . . .	98
5.6. Кавитация . . . . .	102
5.7. Установени едномерни изосетропни газови течения . . . . .	105
5.8. Приложение на теоремата за количеството на движение . . . . .	114

## VI. Равнинни потенциални течения

6.1. Комплексен потенциал . . . . .	121
6.2. Примери за равнинни потенциални течения . . . . .	125
6.3. Комбиниращи равнинни потенциални течения . . . . .	131
6.4. Изследване на равнинни потенциални течения чрез конформно изображение . . . . .	142

## VII. Динамика на реалните флуиди

7.1. Динамично подобие на флуидните течения . . . . .	148
7.2. Класификация на теченията на реалните флуиди . . . . .	160
7.3. Ламинарни течения . . . . .	165
7.4. Граничен слой . . . . .	179
7.5. Ламинарен граничен слой . . . . .	185
7.6. Приблизителен метод за изследване на граничния слой . . . . .	191
7.7. Турбулентни течения . . . . .	197
7.8. Пристенна турбулентност . . . . .	215
7.9. Турбулентни течения в тръби и канали . . . . .	220
7.10. Турбулентен граничен слой . . . . .	229
7.11. Откъсване на теченията от обтечени стени и вихрообразуване . . . . .	236

## VIII. Течения със съпротивления

8.1. Съпротивление на течение в права тръба с постоянно напречно сечение . . . . .	245
8.2. Местни съпротивления . . . . .	257
8.3. Пълно съпротивление на тръбопровод . . . . .	271
8.4. Съпротивление на обтечени тела . . . . .	280
8.5. Опитно изследване на съпротивлението на обтечени тела . . . . .	283
8.6. Пресмятане на хидродинамичното съпротивление чрез граничния слой . . . . .	292
8.7. Обгичане на крила с крайна дължина . . . . .	297

## IX. Турбулентни струи

9.1. Свободна турбулентност . . . . .	307
9.2. Свободна турбулентна струя . . . . .	310
9.3. Свободна плоска турбулентна струя . . . . .	314
9.4. Свободна осовосиметрична турбулентна струя . . . . .	320
9.5. Полуограничена плоска турбулентна струя . . . . .	324
9.6. Рядваща пристенна турбулентна струя . . . . .	329
Литература . . . . .	333

