

Проф. Велко ЗАЯЧКИ
Проф. Петко ДЕВЕНСКИ
Проф. Христо КАНАЗИРСКИ

ФИЗИКА

ЗАПИСКИ ЗА СТУДЕНТИТЕ ОТ ВХТИ – СОФИЯ

ИЗДАТЕЛСТВО
МАРТИЛЕН

ФИЗИЧНИ ОСНОВИ НА МЕХАНИКАТА

1.1. КИНЕМАТИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

1.1.1. Механично движение. Основни понятия

Механиката е основен раздел от физиката, който изучава най-простата форма на движение на материята—преместването на телата едно спрямо друго, или на едни техни части спрямо други. В зависимост от това, какви са телата, чието движение се изучава, и каква е конкретната задача, се говори за механика на материална точка, механика на твърдо тяло и механика на плътни среди.

Движението на материална точка е най-простият вид механично движение. Под материална точка се разбира тяло с определена маса, чиито размери могат да се пренебрегнат в дадена физична задача. Едно и също тяло в едни случаи може да се разглежда като материална точка, а в други случаи като тяло с определени размери. Например при изучаване движението на планетите (небесната механика) последните се разглеждат като материални точки. При изучаване движението на изкуствените спътници около Земята обаче тя се разглежда като тяло с определени размери, а спътниците като материални точки. Често пъти вместо материална точка се използва понятието частица, но не в смисъл на елементарна частица (протони, неутрони, електрони, мезони и т.н.), а на макрочастица, която се състои от голям брой атоми.

Всички тела под действието на приложени към тях сили изменят своите размери по един или друг начин, т.е. се деформират. За опростяване решаването на редица задачи в механиката се въвежда моделът на абсолютно твърдо тяло. Това е твърдо тяло, чиито деформации се пренебрегват в условията на дадена задача.

Движението на деформируемите тела, течностите и газовете се изучава в механиката на плътните среди. Очевидно тук веществото се разглежда като непрекъсната плътна среда, без да се взема предвид молекулярният му строеж.

В случаите, когато скоростта, с която се движат телата, е значително по-малка от скоростта на разпространение на светлината във вакуум ($v \ll c$), се говори за класическа, нерелативистична механика. Нейните основи са разработени от И.Нютон и затова обикновено се нарича нютонова механика. Често пъти се

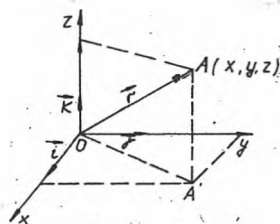
казва още, че това е механика на тела с големи маси (спрямо масата на атомите и елементарните частици) и малки скорости (спрямо скоростта на светлината във вакуум). Ако скоростта на движение на частиците е достатъчно голяма (близка до скоростта на светлината $- v \lesssim c$), се използва релативистичната механика. Тя се основава на специалната теория на относителността, създадена от А. Айнщайн.

Механиката се подразделя на кинематика, динамика и статика. Кинематиката описва движението на телата, без да се разглеждат причините, които го обуславят. Динамиката изучава движението на телата, като се изясняват причините, които обуславят едно или друго движение. Статиката разглежда условията за равновесие на телата. Нейните закони са частен случай на законите на динамиката и затова често пъти в курсовете по физика тя не се изучава като отделен раздел.

Всички тела съществуват и се движат в пространството и времето. Понятията пространство и време са основополагащи за всички естествени науки. Всяко тяло има обем, т.е. има пространствени измерения. Времето отразява реда на смяната на състоянията. То служи като мярка за продължителността на даден процес. По такъв начин пространството и времето са най-общии форми на съществуване на материята. Нютон е приемал пространството и времето като абсолютни, независещи както помежду си, така също и от наличието на тела в пространството.

В специалната теория на относителността се показва, че пространството и времето са неразривно свързани помежду си, образувайки единно четиримерно пространство - време.

Като се има предвид това, ясно е, че няма никакъв смисъл да се говори за определено положение и механично движение на което и да е тяло в пространството „изобщо“. Винаги се говори за състояние на покой и движение на дадено тяло по отношение на друго, предварително избрано тяло. С други думи, за еднозначното определяне положението на дадено тяло в някакъв произволен момент от време е необходимо да се избере отправна система, която по един или друг начин да бъде свързана с телата. Изборът на отправна система може да е произволен, но при характеризане на движението трябва да бъде направен предварително. За



Фиг. 1.1

отправна система могат да се използват стените на дадена лаборатория, Земята, Слънцето, системата неподвижни звезди и др. За да се опише количествено движението на дадено тяло, с оправната система се свързва определена координатна система, най-често дясна правоъгълна декартова координатна система (фиг.1.1). На фиг. 1.1 \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} са единични ортогонални вектори.

Положението на точка A в тази отправна система може да се определи по два еквивалентни начина: или като се знае радиус-векторът \vec{r} (началото на \vec{r} е началото на координатната система т. O , а краят – точката A), или като се знаят трите координати x, y, z на точката A . Като се има предвид правилото за събиране на вектори, радиус-векторът \vec{r} на точката A може да се представи по следния начин:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.1.1)$$

Координатите x, y, z на точката A се наричат още координати (компоненти) на радиус-вектора \vec{r} , а векторите $x\vec{i}, y\vec{j}$ и $z\vec{k}$ – съставлящи вектори на \vec{r} по координатните оси.

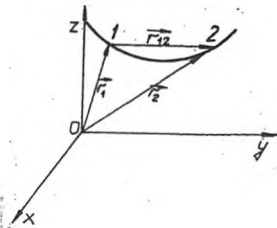
При движение на точката A нейните координати и радиус-векторът \vec{r} се изменят с течение на времето. За да се установи законът за движение на точката A , необходимо е да се знае функционалната зависимост на x, y , и z от времето t , или на радиус-вектора \vec{r} от t :

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t); \quad (1.1.2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1.3)$$

Трите уравнения (1.1.2) или векторното (1.1.3) се наричат кинематични уравнения за движение на точка.

В процеса на движението т. A описва някаква линия, наречена траектория на движението. В зависимост от формата на траекторията движението на точката е праволинейно или криволинейно.



Фиг. 1.2

Нека материална точка се движи по произволна траектория. Положението ѝ в т. 1 в някакъв начален момент от времето t_1 се определя от радиус-вектора \vec{r}_1 , а в момента t_2 от радиус-вектора \vec{r}_2 (фиг.1.2)

Ако движението през целия интервал от време $\Delta t = t_2 - t_1$ се извършва в една и съща посока, то разстоянието s_{12} , измерено по траекторията, се на-

рича дължина на пътя, или само път. Отсечката с начало t_1 и край t_2 се нарича преместване на тялото \vec{r}_{12} . Това е векторна величина и може да се разглежда като нарастване на радиус-вектора \vec{r} , определящ местоположението на материалната точка за разглеждания интервал Δt (фиг.1.2)

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1.1.4)$$

При достатъчно малък интервал от време Δt се говори за елементарно преместване $d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$ и очевидно в този случай дължината на изминатия път $ds = s(t + dt) - s(t)$ е равна на големината на $|d\vec{r}|$, ($|d\vec{r}| = ds$). От казаното е ясно, че векторът $d\vec{r}$ е по допирателната към траекторията в посока на движението.

1.1.2. Скорост

За характеризиране движението на тяло, разглеждано като материална точка, се въвежда физичната величина скорост. Когато за еднакви, достатъчно малки интервали от време Δt тялото изминава еднакви пътища, движението се нарича равномерно. Ако за време t тялото изминава път s , то величината

$$v = \frac{s}{t} \quad (1.1.5)$$

се нарича скорост на тялото. Числено тя е равна на пътя, изминат от тялото за единица време. В SI единицата за скорост е m/s.

В случай на неравномерно движение се въвежда физичната величина средна скорост $\langle v \rangle$ на тялото за времеви интервал от t до $t + \Delta t$. Тя е равна на отношението на нарастването $\Delta \vec{r}$ на радиус-вектора, определящ местоположението на тялото, и интервала време Δt , за което нараства:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.1.6)$$

За характеризиране движението на тялото във всеки момент от времето t е необходимо да се разглежда граничният случай, когато $\Delta t \rightarrow 0$. В такъв случай се въвежда физичната величина скорост в даден момент:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.1.6')$$

или

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle. \quad (1.1.7)$$

Съгласно това съотношение скоростта в даден момент от времето е равна на първата производна по времето на радиус-вектора на

движещата се материална точка. Векторът на скоростта е по допирателната към траекторията на разглежданата точка. Като се има предвид, че $|dr| = ds$, то големината на скоростта в даден момент от времето е равна на първата производна на пътя по времето:

$$v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}. \quad (1.1.8)$$

Ако за отправна система се избере декартовата координатна система, векторното равенство (1.1.6) може да се замени с 3 еквивалентни съотношения за проекциите:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (1.1.9)$$

а за големината на v се получава

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.1.9')$$

Очевидно е, че при конкретни задачи, например движение на тяло в равнина, се използва равнинна координатна система и вместо 3 скаларни съотношения се използват 2, а при линейния случай – едно-единствено съотношение.

1.1.3. Ускорение

Във всеки случай, когато движението на материалната точка не е праволинейно и равномерно, скоростта на точката се изменя с течение на времето. За характеризирание изменението на скоростта с времето се въвежда физичната величина **у с к о р е н и е**. Ускорението \vec{a} е векторна величина, равна на първата производна на скоростта \vec{v} по времето t :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.1.10)$$

Като се има предвид (1.1.6'), ускорението на точката е равно на втората производна по времето на радиус-вектора на тази точка:

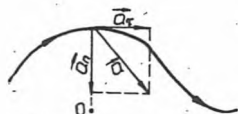
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.1.11)$$

Вместо едно векторно съотношение (1.1.10; 1.1.11), могат да се използват 3 скаларни:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.1.12)$$

По такъв начин компонентите на ускорението са равни на вторите производни на съответните координати, определящи положението на точката, по времето.

Единицата за измерване на ускорението в SI е m/s^2 .



Фиг. 1.3

В процеса на движение на тялото скоростта може да се променя както по големината, така и по посока. Затова ускорението в най-общия случай се състои от 2 съставлящи: една е насочена по допирателната към траекторията и се нарича тангенциално ускорение \vec{a}_t , а другата — по нормалата към траекторията в дадената точка и се нарича нормално или центростремително \vec{a}_n ускорение (фиг.1.3)

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \quad (1.1.13)$$

Не е трудно да се покаже, че съставлящата \vec{a}_t определя изменението на скоростта по-големина, а другата съставляща — \vec{a}_n , изменението на скоростта по посока. Тъй като $\vec{a}_t \perp \vec{a}_n$, то квадратът от големината на ускорението е равен на сумата от квадратите на големините на съставлящите го:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \quad \text{или} \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (1.1.14)$$

Необходимо е да се отбележи, че криволинейното движение се извършва винаги с ускорение (скоростта \vec{v} се изменя поне по посока).

1.1.4. Праволинейно движение на материална точка

При праволинейно движение центростремителната съставляща на ускорението е равна на нула и затова пълното ускорение съвпада със своята тангенциална съставляща $\vec{a} = \vec{a}_t$.

Движение на материална точка, при което ускорението остава постоянно с времето, се нарича равнопроменливо движение. В този случай (1.1.10) може да се запише в скаларна форма:

$$dv = a dt. \quad (1.1.15)$$

Тогава, ако в някакъв начален момент от време $t = 0$ скоростта на точката е v_0 , а в момента t скоростта е вече v , то от предния израз

чрез интегриране може да се получи законът за скоростта.

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt, v = v_0 + at. \quad (1.1.16)$$

Като се има предвид (1.1.8) и (1.1.16), може да се получи и законът за пътя при равнопроменливо движение:

$$ds = (v_0 + at)dt. \quad (1.1.17)$$

Ако в началния момент от време $t = 0$ точката е изминала път s_0 , а в крайния момент t – път s , то

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + at)dt,$$
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.1.18)$$

Очевидно, ако началната скорост $v_0 = 0$ и изминатият начален път $s_0 = 0$, то законите за скоростта и пътя придобиват вида

$$v = at, s = \frac{1}{2} at^2 \quad (1.1.19)$$

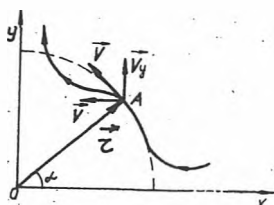
(свободно падане на телата към Земята).

1.1.5. Криволинейно движение

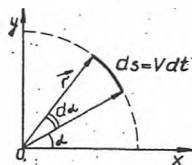
При криволинейно движение на материална точка в най-общия случай скоростта може да се мени както по големина, така и по посока. Това означава, че ускорението винаги се състои от две съставлящи – тангенциално и нормално.

Нека разгледаме криволинейно движение на тяло, извършващо се в дадена равнина – равнината на координатната система XOY (фиг.1.4). В даден момент от време тялото се намира в т. A , чийто радиус-вектор образува α с оста OX . Проекциите на скоростта (приемаме, че движението е в посока, обратна на часовниковата стрелка) върху координатните оси са:

$$v_x = -v \sin \alpha,$$
$$v_y = v \cos \alpha. \quad (1.1.20)$$



Фиг. 1.4



Фиг. 1.5

Съответно проекциите на ускорението ще бъдат

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{dv}{dt} \sin \alpha - v \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}, \\ a_y &= \frac{dv}{dt} \cos \alpha - v \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

От друга страна, доколкото интервалът време dt е достатъчно малка величина, то от фиг.1.5 се вижда, че

$$\frac{v dt}{r} = d\alpha; \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{r}. \quad (1.1.22)$$

Следователно

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{dv}{dt} \sin \alpha - \frac{v^2 \cos \alpha}{r} \\ a_y &= \frac{dv}{dt} \cos \alpha - \frac{v^2 \sin \alpha}{r}. \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Ако изберем координатната система така, че \vec{r} да е по посока на оста OX , то $\alpha = 0$ и съответно

$$\begin{aligned} a_x &= a_n = -\frac{v^2}{r}, \\ a_y &= a_\tau = \frac{dv}{dt}. \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Знакът „-“ показва, че нормалното ускорение е насочено към центъра, т.е. в противоположна посока на оста OX .

В случай, когато големината на скоростта е постоянна, пълното ускорение е насочено по нормалата към траекторията и е равно

на a_n . Ако движението на материалната точка е праволинейно, нормалното ускорение е равно на нула и пълното ускорение е равно на тангенциалното a_t .

Важен частен случай на криволинейно движение е движението на материална точка по окръжност. В този случай нормалното ускорение е насочено по радиуса на окръжността. Положението на материалната точка в произволен момент от време еднозначно се определя от ъгъла $\alpha = \alpha(t)$, определен от радиус-вектора на точката с каква да е неподвижна права, например оста OX (фиг.1.4).

Величината

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{r}, \quad (1.1.25)$$

характеризираща скоростта на изменение на ъгъла α , се нарича ъглова скорост.

При равномерно кръгово движение ъгловата скорост е свързана с периода на въртене T или с броя на оборотите за 1 секунда ν . Ако в (1.1.25) се използват определени стойности за изменението на ъгъла и времето ($d\alpha = 2\pi$, $dt = T$), то

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (1.1.26)$$

Очевидно единицата за ъглова скорост е $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Равенството (1.1.25) може да се запише във векторна форма, като се има предвид, че ъгловата скорост е векторна величина. Това е вектор, перпендикулярен на равнината, в която се извършва криволинейното движение, и неговата посока се определя от посоката на векторното произведение

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}. \quad (1.1.27)$$

Често се използва правилото на десния винт: $\vec{\omega}$ съвпада с посоката на постъпателното движение на винта.

Изменението на ъгловата скорост с времето се характеризира с величината ъглово ускорение:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (1.1.28)$$

1.2. ДИНАМИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

1.2.1. Закони на Нютон за движение на материална точка

В основата на класическата механика са трите закона на динамиката, формулирани от И.Нютон през 1687г. Тези закони (както и

всички физични постулати) са установени в резултат на обобщението на голям брой опитни факти. За тяхната правилност се съди по това, доколко опитните резултати се съгласуват със следствията, които произтичат от тях.

Механиката на Нютон за две столетия достига такива огромни успехи, че през XIX в. сред учените се създава впечатлението, че всеки процес и явление могат да се обяснят, като се сведат до механичен процес, подчиняващ се на законите на Нютон. С развитието на науката и техниката обаче се откриват нови факти и явления, които не могат да се обяснят в рамките на класическата механика. Тези факти получават своето обяснение в новите теории – специалната теория на относителността и квантовата механика.

А. ПЪРВИ ЗАКОН НА НЮТОН

Първият закон на Нютон се отнася за движението на тела, неизпитващи външни въздействия. Формулира се по следния начин:

Всяко тяло, разглеждано като материална точка, запазва състоянието си на покой или равномерно праволинейно движение, докато действието от страна на други тела не го принуди да измени това си състояние. Свойството телата да запазват състоянието си на покой или равномерно праволинейно движение при отсъствие на външни въздействия се нарича инерция. Затова първият закон на Нютон е известен като закон за инерцията.

Както беше отбелязано, движението се извършва винаги спрямо определена отправна система. Тогава се поставя въпросът: спрямо каква отправна система се установява състоянието на покой или на равномерно праволинейно движение в първия закон на Нютон? Самият Нютон е приемал, че става дума за „абсолютно движение“ в „абсолютно пространство“, което е неправилно. Движението на телата е винаги относително – извършва се само относно други реални тела. Системите, по отношение на които е валиден първият закон на Нютон, се наричат инерциални отправни системи. За такива системи могат да се приемат Земята (геоцентрична система), Слънцето (хелиоцентрична система) и др.

Необходимо е да се подчертае, че първият закон на Нютон не може да се провери с непосредствен опит. Това е така, защото е невъзможно да се изключат действията на другите тела върху дадено тяло. В неговата вярност се убеждаваме по косвен начин. Например при движението си едно тяло запазва своята скорост толкова по-дълго време, колкото по-слабо му действуват други тела. Едно тяло се намира в покой, защото действията на други тела върху него взаимно се уравновесяват.

Б. ВТОРИ ЗАКОН НА НЮТОН

Състоянието на покой или праволинейно равномерно движение на едно тяло може да се промени само при действието на други тела. Това изменение на състоянието на тялото означава, че то получава **ускорение**. Действието върху едно тяло от страна на други тела може да доведе не само до получаване на ускорение, но и до изменение формата на тялото, т.е. до получаване на **деформация**.

За количествено характеризиране на действието на дадено тяло (или тела) върху друго тяло, в резултат на което то получава ускорение или деформация, се въвежда физичната величина **сила**. Доколкото и двата ефекта – ускорение и деформация – се поддават на измерване, кой да е от тях може да се използва за сравнение и измерване на силата.

Вторият закон на Нютон установява връзката между изменението на състоянието и външните действия, на които е подложено дадено тяло. Като се използва първият ефект – ускорение, което получава дадено тяло, той се формулира по следния начин: Изменението на скоростта на движение на дадено тяло, разглеждано като материална точка, е пропорционално на приложената сила и се извършва по направлението на првата, по която действува силата.

Приведената формулировка на втория закон на Нютон се отнася за определено тяло. Опитът показва, че при една и съща сила ускоренията, които получават различните тела, не са еднакви, а зависят от тяхната маса – тела с по-малка маса получават по-голямо ускорение и обратно. Следователно вторият закон може да се запише в следната форма:

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m} \text{ или } \vec{f} = m\vec{a}, \quad (1.2.1)$$

където m е масата на тялото;

\vec{f} — приложената към него сила;

\vec{a} — ускорението.

Вторият закон на Нютон е валиден само в инерциални отправни системи. В частния случай, когато силата е равна на нула (тяло не изпитва действие от страна на други тела), ускорението, както се вижда от (1.2.1), е също нула, което съвпада с твърдението на първия закон на Нютон. Затова именно първият закон изглежда частен случай на втория закон. И все пак първият закон се формулира независимо от втория, тъй като по същество в него се съдържа постулатът за съществуването на инерциални отправни системи – системи, в които е изпълнен първият закон на Нютон.

Съгласно уравн.(1.2.1) действието на телата има насочен характер и силата \vec{f} е векторна величина, чиято посока съвпада с посоката на вектора ускорение.

Масата на дадено тяло зависи от неговите размери и от природата на неговото вещество. В механиката масата се разглежда като основна характеристика на тялото, показваща неговата способност да противостои на ускоряващите го сили, неговата инертност. В механиката на Нютон се приема, че тя е постоянна величина, независеща от скоростта на движение на телата.

Масата е една от основните физични величини в SI- системата и единицата е kg. (Еталонът е платино-иридиев цилиндър и се намира в Париж.) Следователно като се има предвид вторият закон на Нютон (1.2.1), се въвежда единицата за сила: За единица сила се приема такава сила, под действието на която тяло с маса 1 kg получава ускорение 1m/s^2 . Тази сила се нарича нютон и се означава с N. Очевидно е, че $1\text{N}=1\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

В. ТРЕТИ ЗАКОН НА НЮТОН

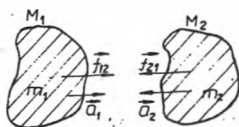
Третият закон на Нютон допълва съдържанието на втория закон в смисъл, че действието на телата има винаги характер на взаимоддействие. Ако тяло M_1 с маса m_1 действа на тяло M_2 , чиято маса е m_2 , със сила \vec{f}_{21} , то и тялото M_2 от своя страна действа на тялото M_1 със сила \vec{f}_{12} (фиг.1.6). Опитът показва, че силите, с които си взаимоддействуват телата, са винаги равни по големина и противоположни по посока. Под действието на силите \vec{f}_{12} и \vec{f}_{21} телата придобиват ускорения \vec{a}_1 и \vec{a}_2 .

Големините на ускоренията са обратнопропорционални на масите на телата: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$, или $m_1 a_1 = m_2 a_2$, а следователно $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$.

Третият закон се формулира по следния начин: ако едно тяло действа на друго със сила \vec{f}_{21} , то второто тяло действа върху първото със сила \vec{f}_{12} , която има същата големина, но е в противоположна посока на \vec{f}_{21} :

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}. \quad (1.2.2)$$

Необходимо е да се отбележи, че силите \vec{f}_{12} и \vec{f}_{21} са приложени към различни тела и следователно не могат да се уравновесяват една с друга.



Фиг. 1.6

1.2.2. Импулс. Център на масите.
Закон за запазване на импулса

Уравнението на втория закон на Нютон

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \quad (1.2.3)$$

може да се представи и в друг вид. Като се има предвид, че масата на дадено тяло, разглеждано като материална точка, в класическата механика е постоянна величина, то тя може да бъде внесена под знака на диференциала и (1.2.3) придобива вида

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f}. \quad (1.2.4)$$

Векторната величина

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.2.5)$$

се нарича импулс на тялото. (В някои учебници по физика тази величина се нарича количество на движението.) В такъв случай вторият закон на Нютон се записва по следния начин:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \quad (1.2.6)$$

и се формулира така: производната на импулса на дадена материална точка по времето е равна на резултантната на всички сили, действащи върху точката. Ако уравнението (1.2.6) умножим с dt , се получава

$$d\vec{p} = \vec{f}dt. \quad (1.2.7)$$

В такъв случай, ако в момент t_1 тялото има импулс \vec{p}_1 , а в следващ момент t_2 има импулс \vec{p}_2 , то изменението на импулса за интервала време $\tau = t_2 - t_1$ ще бъде

$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}dt, \quad \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}dt. \quad (1.2.8)$$

В частния случай, когато силата \vec{f} , действаща на тялото, е постоянна величина ($\vec{f} = \text{const}$), то $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{f}\tau$. Векторната величина $\vec{f}\tau$, равна на произведението от действащата върху материалната точка сила \vec{f} и интервала време τ , за който силата действа и настъпва изменение на импулса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, се нарича импулс

на силата. Очевидно единицата за импулс на материална точка и импулс на силата е kg.m.s^{-1} .

Нека разгледаме съвкупност от материални точки, или накратко система от n тела. Телата, влизащи в системата, могат да взаимодействуват както помежду си, така и с тела, принадлежащи на системата. В съответствие с това силите, действащи върху телата, могат да се разделят на вътрешни и външни. Вътрешни ще наричаме силите, с които върху дадено тяло действуват останалите тела от системата, а външни – силите, появили се от действието на тела, принадлежащи на системата.

Ако външни сили отсъствуват, системата се нарича затворена, а ако има такива – отворена.

Векторната сума от импулсите на телата, образуващи системата, дава импулса на системата

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (1.2.9)$$

Нека C е точка от системата, положението на която в пространството се определя с радиус-вектора \vec{r}_C (фиг.1.7):

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (1.2.10)$$

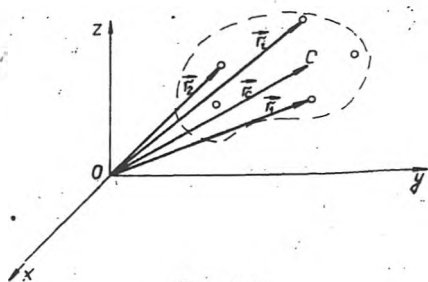
където m_i е масата на i -тата точка;

\vec{r}_i – радиус-векторът, определящ положението i в пространството;

m – масата на системата.

Декартовите координати, определящи точката C , са

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_i x_i}{m}, \\ y_C &= \frac{\sum m_i y_i}{m}, \\ z_C &= \frac{\sum m_i z_i}{m}. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$



Фиг. 1.7

Определената по този начин точка C от системата се нарича

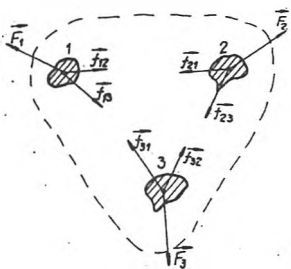
център на инерцията или център на масите, който съвпада с центъра на тежестта на системата.

Скоростта на центъра на инерцията се получава чрез диференциране на (1.2.10) по времето:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\Sigma m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\Sigma m_i \vec{v}_i}{m} \quad (1.2.12)$$

Но $m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i$, $\Sigma \vec{p}_i = \vec{p}$ и следователно

$$\vec{p} = m\vec{v}_C. \quad (1.2.13)$$



Фиг. 1.8

По такъв начин импулсът на системата \vec{p} е равен на произведение то от масата m на системата и скоростта \vec{v}_C на центъра на инерцията ѝ.

Да разгледаме система, състояща се от 3 тела (фиг.1.8). Съгласно третия закон на Нютон телата си взаимодействуват съответно със сили \vec{f}_{12} и \vec{f}_{21} , \vec{f}_{13} и \vec{f}_{31} , \vec{f}_{23} и \vec{f}_{32} , равни по големина и противоположни по посока. Нека \vec{F}_1

\vec{F}_2 и \vec{F}_3 са резултантните от всички външни сили, с които външни тела действуват съответно на 1-вото, 2-рото и 3-тото тяло на системата.

Като приложим втория закон на Нютон (1.2.6) за всяко от телата, получава се:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_1 = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_2 = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_3 = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3.$$

Ако се съберат почленно трите уравнения, то

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \quad (1.2.14)$$

При отсъствие на външни сили

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0; \quad \vec{p} = \text{const.} \quad (1.2.15)$$

Този резултат не е трудно да се обобщи за система, състояща се от произволен брой тела, като за всяко от тях вторият закон на Нютон има следния вид:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_i = \sum_{\substack{i \neq k \\ (k=1, n)}} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.2.16)$$

Изразът (1.2.16) е система от n уравнения, отличаващи се едно от друго по стойностите на индекса i . Сумирането във всяко от тези уравнения се извършва по индекса k , като в i -тото уравнение индексът k взема всички стойности от 1 до n освен стойността $k = i$.

Като се съберат почленно (1.2.16) и се вземе предвид, че $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$, се получава

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (1.2.17)$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1.2.18)$$

където \vec{p} е импулсът на цялата система;

\vec{F} — равнодействащата на всички външни сили, действащи на системата.

По такъв начин производната на импулса на система от произволен брой тела е равна на векторната сума от всички външни сили, действащи върху системата.

Да допуснем, че векторната сума от всички външни сили е равна на нула (това е така например, ако системата е затворена). Тогава

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0; \quad \vec{p} = \text{const}. \quad (1.2.19)$$

Изразът (1.2.19) дава съдържанието на закона за запазване на импулса: ако векторната сума на външните сили, действащи върху системата, е равна на нула, то импулсът на системата остава постоянна величина. Или с други думи казано: вътрешните сили на една система не могат да изменят общия импулс на системата.

За дадена система, тъй като масата ѝ m е постоянна величина и ако $\vec{p} = \text{const}$, то скоростта \vec{v}_C на центъра на масите (1.2.13) е постоянна величина. Следователно законът за запазване на импулс може да се формулира и така: ако векторната сума на външните сили, действащи на системата, е равна на нула, то

центърът на масите на системата се движи без ускорение.

Опитът показва, че законът за запазване на импулса е един от фундаменталните природни закони.

1.3. РАБОТА И ЕНЕРГИЯ

1.3.1. Работа и мощност

Нека въведем характеристика за силата, която е свързана с преместването на телата под нейното действие. Такава характеристика е физичната величина работа. Тя е равна на произведението от проекцията f_s на силата върху преместването $d\vec{s}$ и големината на преместването

$$dA = f_s ds = f ds \cos \alpha, \quad (1.3.1)$$

където α е ъгълът между силата \vec{f} и преместването $d\vec{s}$ (фиг.1.9). Тъй като преместването $d\vec{s}$ се приема като достатъчно малко, то величината dA е прието да се нарича елементарна работа. Ако се използва понятието скалярно произведение, може да се каже, че елементарната работа е физична величина, равна на скалярното произведение от силата \vec{f} и преместването $d\vec{s}$:

$$dA = \vec{f} \cdot d\vec{s}. \quad (1.3.2)$$

Работата, която се извършва от силата \vec{f} върху краен участък от изминатия път s на тялото, може да се пресметне, като целият път се раздели на достатъчно малки участъци. За всеки от тях силата \vec{f} се приема постоянна, а елементарната работа се намира по формулатата (1.3.2).

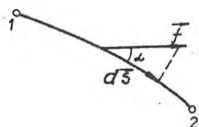
Тогава за работата на силата \vec{f} се получава

$$A = \int_s \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_s f \cos \alpha ds. \quad (1.3.3)$$

Често пъти величината $f \cos \alpha = f_s$ се нарича движеща сила. Очевидно при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $f \cos \alpha = 0$ и работата $A = 0$. В случаите, когато силата f и преместването образуват ъгъл $\alpha < \frac{\pi}{2}$, работата е положителна величина, а когато $\alpha > \frac{\pi}{2}$, работата е отрицателна величина.

В частния случай, когато тялото се движи праволинейно под действието на постоянна сила, работата, извършвана при преместването на тялото върху пътя s , е

$$A = fs \cos \alpha. \quad (1.3.4)$$



Фиг. 1.9

Ако на дадено тяло действуват няколко сили

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i, \quad (1.3.5)$$

то общата работа A ще бъде равна на алгебричната сума от работите, навършени от отделните сили:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (1.3.6)$$

Единицата за работа в SI е джаул: работата е 1 джаул, когато се извършва от сила един нютон при преместване на дадено тяло на разстояние един метър в посока на силата (1.3.4):

$$1\text{J} = 1\text{ N.m.}$$

За практиката е важно да се знае не само работата, която един механизъм извършва, но и времето, за което тя ще бъде извършена. За тази цел се въвежда физичната величина **мощност**, числено равна на работата, извършена за единица време. Ако за интервала от време Δt се извършва работа ΔA , величината

$$P_{\text{cp}} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (1.3.7)$$

се нарича **средна мощност**. Ако за еднакви, достатъчно малки интервали от време Δt се извършва различна работа ΔA , то мощността се оказва изменяща се с времето величина. В такъв случай се въвежда величината **мощност в даден момент**:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \quad (1.3.8)$$

Като се има предвид (1.3.2), за мощността в даден момент от време се получава

$$P = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}, \quad (1.3.9)$$

където $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ е скоростта на преместването. Следователно мощността е равна на скаларното произведение на силата \vec{f} и скоростта \vec{v} , с които се движи приложната точка на силата.

Единицата за мощност в SI е ват (W) – мощността на механизъм, който извършва работа 1 джаул за 1 секунда, е 1 ват:

$$1\text{W} = 1\text{J.s}^{-1}.$$

В практиката често пъти се използват и кратните единици: $1\text{kW} = 10^3\text{W}$, $1\text{MW} = 10^6\text{W}$, $1\text{GW} = 10^9\text{W}$.

От (1.3.7) следва

$$\Delta A = P\Delta t, \quad (1.3.10)$$

което дава възможност да се въвеждат единици за работа (енергия) чрез единицата за мощност. Например в практиката често пъти се използва единицата киловатчас (kWh): работата, която се извършва от механизъм с постоянна мощност един киловат за 1 час. Очевидно $1\text{kWh} = 3,6 \cdot 10^6\text{J}$.

1.3.2. Кинетична енергия

Работата, която се извършва от дадено тяло под действието на определена сила, е свързана с изменението на скоростта на самото тяло. Нека си поставим задачата да се пресметне работата, която се извършва от силата, под действието на която тялото променя скоростта си от v_1 до v_2 .

Като се има предвид, че $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ и $d\vec{s} = \vec{v}dt$, изразът за елементарната работа (1.3.2) добива вида

$$dA = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \vec{v} \cdot d\vec{p}. \quad (1.3.11)$$

По определение импулсът $\vec{p} = m\vec{v}$, като масата m в класическата (нерелативистка) механика не зависи от скоростта. В такъв случай $\vec{v}d\vec{p} = m\vec{v}d\vec{v}$, където векторът $d\vec{v}$ дава елементарното нарастване на скоростта \vec{v} . Тъй като $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2$, то $v dv = \vec{v}d\vec{v}$ и за елементарната работа се получава

$$dA = mvdv. \quad (1.3.12)$$

Пълната работа, която се извършва от силата при преместване на тялото от начално положение 1 в крайно 2 (вж. фиг.1.9), ще бъде

$$A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (1.3.13)$$

където v_1 е началната скорост;

v_2 — крайната скорост на тялото.

Физичната величина

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (1.3.14)$$

се нарича кинетична енергия на тялото (материалната точка). Или

$$A_{12} = W_{k_2} - W_{k_1}. \quad (1.3.15)$$

По такъв начин работата на силата при преместването на тялото е равна на нарастването на кинетичната му енергия. (Изменението на каквато и да е величина a може да се характеризира или с нарастване, или с намаление. Нарастването на величината Δa се дефинира като разлика между крайната a_2 и началната стойност a_1 на величината:

$$\text{нарастване} = \Delta a = a_2 - a_1.$$

Намалението се дефинира като разлика между началната и крайната стойност на величината

$$\text{намаление} = a_1 - a_2 = -\Delta a.$$

Намалението на величината е равно на нейното нарастване, взето с обратен знак.) Като се имат предвид изразите за елементарната работа (1.3.12) и за кинетичната енергия (1.3.14), то

$$dA = dW_k. \quad (1.3.16)$$

От (1.3.15) следва, че енергията се измерва в същите единици, както и работата.

Полученият извод не е трудно да се обобщи за случай на система от тела. Под кинетична енергия на система се разбира сумата от кинетичните енергии на телата, влизащи в системата. Изразът за работата (1.3.6) се отнася вече не за едно тяло, а за система от тела. Под A_{12} трябва да се разбира сумата от работата на всички сили – както вътрешни, така и външни, действащи на телата от системата. По такъв начин работата на всички сили, действащи на системата от тела, е равна на нарастването на кинетичната енергия на системата.

1.3.3. Консервативни и неконсервативни сили

Когато дадено тяло или частица във всяка точка от пространството, където се намира, изпитва действието на друго тяло, казва се, че тялото се намира в силово поле. Например тяло на недалечно разстояние от земната повърхност се намира в полето на силата на тежестта – във всяка точка от пространството му действа силата $\vec{Q} = mg$. Заредено тяло (частица) със заряд q_0 , намиращо се на разстояние r от друго заредено тяло (частица) със заряд q , се намира в електрично силово поле – във всяка точка от пространството му действа сила $\vec{f} = q_0 \vec{E}$ (\vec{E} – интензитет на електричното поле в точка на разстояние r от заряда q ; вж. §4.1).

Всички сили, известни в механиката, е прието да се разде-

За система от частици моментът на импулса ще бъде равен на векторната сума от моментите на импулса за всяка точка:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{p}_n. \quad (1.4.8)$$

За по-нататъшното разглеждане е съществена формулата, свързваща момента на силата \vec{M}_f с производната по времето на момента на импулса $\frac{d\vec{L}}{dt}$.

И наистина нека намерим $\frac{d\vec{L}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (1.4.9)$$

Първото събираемо е нула, тъй като $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а $\vec{v} \parallel \vec{p}$. Като се има предвид вторият закон на Нютон $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{M}_f. \quad (1.4.10)$$

Производната по времето на момента на импулса е равна на момента на силата.

Нека се върнем към фиг.1.18.

Моментът $(\vec{M}_f)_i$ на силата \vec{f}_i , действаща на i -тата материална точка, спрямо точка O е

$$(\vec{M}_f)_i = \vec{r}_i \times \vec{f}_i, \quad (1.4.11)$$

където \vec{r}_i е радиус-векторът на приложната точка на силата, действаща на материалната точка i с начало точката O . При зададената ос на въртене е по-удобно да се работи с величината момент на силата спрямо тази ос. Тогава

$$(\vec{M}_f)_i = \vec{R}_i \times \vec{f}_i, \quad (1.4.12)$$

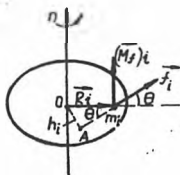
където \vec{R}_i е радиус-векторът на приложната точка на силата \vec{f}_i с начало точка O_i от оста на въртене ($\vec{R}_i \perp O_1O_2$). Тъй като компонентата на вектора сила, успоредна на оста, не дава никакъв принос към момента на силата спрямо тази ос, то може да се смята, че действащата на тялото сила е разположена в равнина, перпендикулярна на оста на въртене (фиг. 1.20). По определение за векторното произведение (1.4.12) получаваме

$$(M_f)_i = f_i R_i \sin \Theta,$$

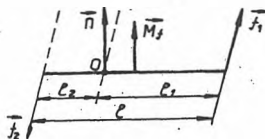
където Θ е ъгълът между \vec{f}_i и \vec{R}_i . Но $R_i \sin \Theta = h_i$. Тогава

$$(M_f)_i = f_i h_i. \quad (1.4.13)$$

Величината h_i , равна на разстоянието от оста на въртене до направлението на силата f_i , се нарича рамо на силата спрямо оста. И така моментът на силата спрямо оста е вектор, успореден на оста на въртене и числено равен на произведението от силата и рамото на силата.



Фиг. 1.20



Фиг. 1.21

При описание на въртеливото движение много често се използва понятието двойка сили. Ако две равни по големина и противоположни по посока сили лежат в една равнина, те образуват двойка сили (фиг.1.21). Разстоянието l между правите, по които действуват двете сили, се нарича рамо на двойката.

Моментът на двойката сили спрямо оста на въртене е

$$M_f = l_1 f_1 + l_2 f_2 = (l_1 + l_2) f = l f,$$

тъй като $f_1 = f_2 = f$.

От полученото следва, че моментът на двойката сили не зависи от положението на точката O , през която минава оста на въртене.

За всяка точка от тялото с маса m_i може да се напише уравнението

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = (\vec{M}_f)_i,$$

където $\vec{L}_i = \vec{R}_i \times \vec{p}_i$ е моментът на импулса на i -тата точка спрямо оста \vec{n} ,

$(\vec{M}_f)_i$ — моментът на силата спрямо същата ос.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_f, \quad (1.4)$$

където \vec{M}_f е сумарният момент на силите, действащи на тяло

За \vec{L}_i имаме

$$\vec{L}_i = \vec{R}_i \times \vec{p}_i = \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (1.4)$$

Тук \vec{R}_i е радиус-векторът на i -тата маса. Той лежи в равнина перпендикулярна на единичния вектор \vec{n} , който дава направлението на оста на въртене. Тъй като тялото е твърдо, линейната скорост \vec{v}_i е скоростта на разглежданата точка, получена в резултат на въртливото движение. Тя е перпендикулярна на \vec{R}_i и следователно

$$\vec{L}_i = R_i m_i v_i \vec{n}.$$

От друга страна, $v_i = R_i \omega$. Тогава

$$\vec{L}_i = m_i R_i^2 \vec{\omega}, \quad (1.4)$$

тъй като $\omega \vec{n} = \vec{\omega}$.

Ако се замести \vec{L}_i от (1.4.16) в уравн. (1.4.14) и се вземе предвид, че ъгловата скорост $\vec{\omega}$ е постоянна за всички точки на твърдото тяло, получава се

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{\omega} \sum_{i=1}^n (m_i R_i^2) \right] = \vec{M}_f. \quad (1.4)$$

Величината

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \quad (1.4)$$

се нарича инерционен момент на тялото спрямо оста \vec{n} . Тогава

$$\frac{d}{dt} (I\vec{\omega}) = \vec{M}_f. \quad (1.4)$$

Полученото равенство представлява основното уравнение на въртливото движение на твърдо тяло. Сравнявайки го с (1.4.14), то

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (1.4.2)$$

Или за твърдо тяло се получава

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_f.$$

Производната на момента на импулса на твърдо тяло спрямо неподвижна ос е равна на момента на действащата на тялото сила спрямо същата ос.

Ако инерционният момент е постоянен, т.е. тялото през целия интервал от време, за което се разглежда, действително е твърдо, то уравнението на въртеливото движение (1.4.19) добива вида

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_f. \quad (1.4.21)$$

Но $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$, където $\vec{\epsilon}$ е ъгловото ускорение. Следователно

$$I\vec{\epsilon} = \vec{M}_f. \quad (1.4.22)$$

Често вместо във векторен вид основното уравнение (1.4.19) се записва в скаларен вид (\vec{M}_f и $\vec{\omega}$ са еднопосочни!):

$$I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I\epsilon = M_f. \quad (1.4.23)$$

Ако на тялото не действа момент на външни сили ($M_f = 0$), от основното уравнение (1.4.19) следва

$$I\vec{\omega} = \text{const}, \quad (1.4.24)$$

Това равенство дава съдържанието на закона за запазване на момента на импулса:

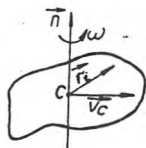
При въртене на твърдо тяло в отсъствие на момент на външни сили (затворена система) моментът на силата остава постоянна величина.

От (1.4.24) се вижда, че при намаляване на инерционния момент на тялото I неговата ъглова скорост ω се увеличава. При това обаче се предполага, че за определени интервали от времето тялото престава да бъде „твърдо“.

Законът за запазване момента на импулса се проявява често в природата и техниката. Например съзнателно или несъзнателно се използва от балерини, гимнастици и акробати при изпълнение на различни упражнения.

1.4.3. Енергия на движение на твърдо тяло

Както беше казано, движението на твърдото тяло в най-общия случай може да се представи като резултантно движение от постъпателно и въртливо движение на тялото. Съответно кинетичната енергия на произволно движещо се твърдо тяло се представя във вида на сума от кинетичните енергии на постъпателното и въртливото движение.



Фиг. 1.22

За да се покаже, че това е така, нека разгледаме движението на центъра на инерцията и въртенето на тялото спрямо ос, минаваща през центъра на инерцията (фиг.1.22). Ако v_C е скоростта на центъра на инерцията, то скоростта на i -тия елемент от тялото съгласно (1.4.5) ще бъде

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_i,$$

където \vec{r}_i е радиус-векторът на i -тата маса с начало в центъра на инерцията. Кинетичната енергия се определя от израза

$$W_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_C^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_C \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2. \quad (1.4.25)$$

Ще напомним, че квадратът на даден вектор е равен на квадрата на неговата големина. Освен това скаларното произведение във втория член може да се представи по следния начин:

$$\vec{v}_C \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_i = -\vec{v}_C \cdot \vec{r}_i \times \vec{\omega} = \vec{r}_i \cdot \vec{v}_C \times \vec{\omega}. \quad (1.4.26)$$

Ако в (1.4.25) изнесем постоянните множители пред знака за сумата и отчетем (1.4.26) и това, че $\sum m_i = m$, получава се

$$W_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \vec{v}_C \times \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2. \quad (1.4.27)$$

При определяне на центъра на инерцията видяхме, че величината $\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = \vec{r}_c$ дава радиус-вектора на центъра на инерцията с начало в точката, от която се отчита векторът \vec{r}_i . Тъй като в нашия случай за такава точка е приет самият център на инерцията, то вторият член в (1.4.27) е нула. Третият член в (1.4.27) дава кинетичната енергия на тялото вследствие на въртенето му около ос с направление по единичния вектор \vec{n} , минаваща през центъра на инерцията:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

където $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ е инерчният момент на тялото спрямо оста \vec{n} . Следователно равенството (1.4.27) придобива вида

$$W_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (1.4.28)$$

Полученото равенство показва, че кинетичната енергия на тялото е сума от кинетичната енергия на постъпателното движение на тялото със скорост, равна на скоростта на центъра на инерцията, и кинетичната енергия на въртеливото движение на тялото около ос, минаваща през центъра на инерцията. Необходимо е да се има предвид, че при този извод се предполага, че оста на въртене, спрямо която се пресмята инерчният момент, е неизменна. Ако тази ос на въртене мени своето направление, инерчният момент не е постоянна величина.

И накрая нека направим известно сравнение между формулите, които определят основните физични величини при постъпателното движение на материална точка и при въртеливото движение на твърдо тяло (табл.1.1).

Таблица 1.1

Постъпателно движение	Въртеливо движение
Линейна скорост - \vec{v}	Ъглова скорост - $\vec{\omega}$
Линейно ускорение - \vec{a}	Ъглово ускорение - $\vec{\epsilon}$
Маса - m	Инерчен момент - I
Импулс - $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент на импулса - $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Сила - \vec{f}	Момент на сила - \vec{M}_f
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_f$
$m\vec{a} = \vec{f}$	$I\vec{\epsilon} = \vec{M}_f$
Кинетична енергия $W_k = \frac{mv^2}{2}$	Кинетична енергия $W_k = \frac{I\omega^2}{2}$ (за случай на въртене на тяло около неподвижна ос)

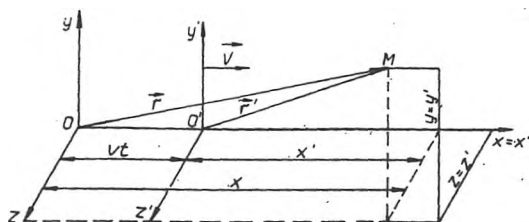
Вижда се, че при въртеливите движения вместо за маса се говори за инерчен момент, вместо за сила - за момент на силата, вместо за импулс - за момент на импулса и т.н.

1.5. РАЛАТИВИСТИЧНА МЕХАНИКА

1.5.1. Механичен принцип на относителността на Галилей

Да разгледаме две инерциални декартови координатни системи. Едната от тях K считаме за неподвижна, а другата K' се движи

с постоянна скорост \vec{v} , насочена в положителната посока на ос Ox (фиг.1.23). За простота се предполага, че в началния момент $t=0$ началата на координатните системи O и O' , а така също и съответните оси на K и K' съвпадат.



Фиг. 1.23

В класическата механика се приема, че свойствата на пространството и ходът на времето във всички инерциални отправни системи са еднакви. В такъв случай координатите на коя и да е материална точка M и времето в неподвижната (x, y, z, t) и подвижната (x', y', z', t') координатна система са свързани с трансформациите на Галилей

$$x = vt + x', y = y', z = z', t = t', \quad (1.5.1)$$

или във векторен вид

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}' \quad \text{и} \quad t = t', \quad (1.5.2)$$

валидни само при стойности на v , значително по-малки от скоростта на светлината във вакуум ($v \ll c$).

От (1.5.1) за проекциите на скоростите на разглежданата точка се получават съотношенията

$$u_x = v + u'_x, u_y = u'_y, u_z = u'_z, \quad (1.5.3)$$

или от (1.5.2)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} + \frac{d\vec{r}'}{dt}, \vec{u} = \vec{v} + \vec{u}', \quad (1.5.4)$$

където \vec{u} е скоростта в неподвижната координатна система K , \vec{u}' - в подвижната координатна система K' . Формулите (1.5.3) и (1.5.4) дават закона за събиране на скорости в класическата (нерелативистична) механика. Съотношението (1.5.4) остава вярно и при произволен избор на взаимните направления на координатните оси на системите K и K' , а

Отношенията (1.5.3) са валидни само при горния избор на координатните оси (фиг.1.23).

Като се вземе предвид, че $\vec{v} = \text{const}$, за ускорението на точка M в двете системи от (1.5.4) се получава

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}'}{dt} = \vec{a}' \quad (1.5.5)$$

Т.е. ускорението на една и съща подвижна точка е еднакво във всички системи, които се движат с постоянна скорост една спрямо друга, или както се казва ускорението на точката е инвариантно по отношение на трансформациите на Галилей (1.5.3).

В класическата механика силите, които действуват на дадена материална точка, зависят от нейното положение и скоростта на движение относно другите материални точки, които ѝ действуват. От (1.5.2) и (1.5.4) се вижда, че взаимното разположение и относителната скорост на движение на две материални точки 1 и 2 не се променят при преминаване от една инерциална отправна система към друга:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\vec{r}'_1 + \vec{v}t) - (\vec{r}'_2 + \vec{v}t) = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \vec{r}'_{12},$$

$$\vec{u}_{12} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (\vec{v} + \vec{u}'_1) - (\vec{v} + \vec{u}'_2) = \vec{u}'_1 - \vec{u}'_2 = \vec{u}'_{12}.$$

По такъв начин силата, действаща на материалната точка, е инвариантна по отношение на трансформациите на Галилей:

$$\vec{f} = \vec{f}' \quad (1.5.6)$$

Освен това в класическата механика се счита, че масата на телата не зависи от скоростта на тяхното движение, т.е. тя е еднаква във всички инерциални отправни системи:

$$m = m'$$

Оттук следва, че уравнението, изразяващо втория закон на Нютон (1.2.1)

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m} \quad (1.5.6')$$

е инвариантно относно трансформациите на Галилей – с него се описва движението на която и да е материална точка във всички инерциални отправни системи.

Този извод е математически израз на механичния принцип на относителността на Галилей, който се формулира по следния начин: Всички механични явления при едни и същи условия протичат по еднакъв начин в различните инерциални отправни системи.

Механичният принцип на относителността показва, че в рамките на класическата механика всички инерциални отправни системи са напълно равноправни. На нито една от тях не може да се даде предимство пред другите. Сред тях не съществува никаква главна, един път завинаги дадена като абсолютна отправна система, спрямо която движението на телата би могло да се разглежда като абсолютно движение. Практически това означава, че с никакви механични опити, проведени в дадена инерциална отправна система, не може да се установи дали тя се намира в състояние на покой или в състояние на равномерно и праволинейно движение.

1.5.2. Специална теория на относителността. Постулати на Айнщайн

Както беше казано, законите на класическата механика са валидни само в случай, когато скоростта на движението на телата е значително по-малка от скоростта на светлината във вакуум. За описание на движенията със скорости, близки до скоростта на светлината във вакуум, се използва т.нар. релативистична механика, т.е. механика, която взема предвид изискванията на специалната теория на относителността.

Като проанализирал огромното количество експериментални факти, още през 1905 г. А.Айнщайн предложил свършено нова физическа теория за пространството и времето – специалната теория на относителността (СТО). В основата на тази теория са два постулата, които са известни като принцип за относителността на Айнщайн и принцип за постоянството на скоростта на светлината във вакуум.

Първият постулат на Айнщайн за относителността е обобщение на механичния принцип на относителността на Галилей за всички, без изключение, физични явления. Съгласно този принцип всички природни закони са еднакви във всички инерциални отправни системи. Равномерното и праволинейно движение на затворени системи от тела като цяло не оказва влияние на явленията (механични, електромагнитни и др.), протичащи в тези системи. Или казано по друг начин: с помощта на никакви опити, определени в една инерционна система, не може да се установи дали тази система е в по-

кой или се движи равномерно и праволинейно. Често принципът за относителността на Айнщайн се формулира и по следния начин: уравненията, изразяващи природните закони, са инвариантни по отношение на преобразованията на координатите и времето от една инерциална отправна система към друга.

Справедливостта на първия принцип на Айнщайн се потвърждава с това, че всички разнообразни опити, които са провеждани с цел да се установи влиянието на орбиталното движение на Земята върху закономерностите на електромагнитните явления, постоянно водят до отрицателен резултат.

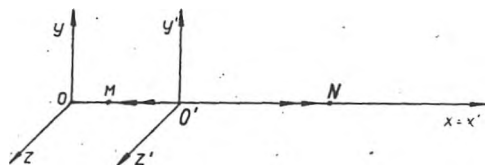
Вторият постулат, който е формулирал Айнщайн също в съответствие с опитните факти, гласи: скоростта на светлината във вакуум е еднаква във всички инерциални отправни системи и не зависи от скоростта на движението на източника и приемника на светлина, т.е. представлява универсална константа.

Специалната теория на относителността отдавна е общопризната. Независимо от това предвид огромното ѝ значение за физиката и понастоящем продължават да се провеждат различни експерименти, посветени на проверката на основните нейни постулати и следствията от тях. За тази цел се използват съвършени уреди и методи за изследване. Така например за проверка на постулата за постоянство на скоростта на светлината дълго време са използвани само данните, получени от астрономическите наблюдения за движението на т.нар. двойни звезди. През 1963 г. за проверка на този постулат е осъществен експеримент в лабораторни условия с бързо движещ се източник на γ -кванти. (Светлината се разглежда като поток от кванти, наречени фотони.) Показано е, че в границите на грешките на измерването (около 10 %) скоростта на разпространение на излъчваните γ -кванти не зависи от скоростта на движение на техния източник.

От формулираните по-горе постулати следат редица важни изводи, отнасящи се до свойствата на пространството и времето. В класическата механика се приема, че пространството и времето съществуват независимо едно от друго и не зависят от телата, намиращи се в пространството. Съвременната физика отдавна се отказва от абсолютното пространство, като приема, че всички инерциални отправни системи са равноправни. Свойствата на пространството не се разглеждат като отнапред зададени, а се определят от разпределението на телата в пространството. В класическата механика се приема като очевидно, че ако две събития са едновременни в коя да е отправна система, ще бъдат едновременни и във всички останали отправни системи. Това твърдение обаче е в противоречие с принципа

за постоянство на скоростта на светлината във вакуум.

Нека вземем две инерциални отправни системи K и K' , при което K е неподвижна, а K' се движи с постоянна скорост \vec{v} в посока на осите Ox и Ox' , които съвпадат (фиг.1.24).



Фиг. 1.24

Да разгледаме в двете системи един и същ процес – излъчването на светлинни сигнали от източник, намиращ се в началото O' на подвижната координатна система K' , и достигането на сигналите в точки M и N . Точките M и N са неподвижни в K' и съответно разстоянията $O'M$ и $O'N$ са еднакви в тази система. В такъв случай в системата K' светлинните сигнали ще пристигнат в един и същ момент от времето. (Приема се още, че системите K и K' се намират във вакуум.) Да разгледаме сега същия процес в системата K . Относно тази система светлината също се разпространява във всички направления със скорост c . В този случай точката M се движи в посока, обратна на светлинния лъч, идващ от O' , а N – в посоката на светлинния лъч. Затова светлинните сигнали достигат по-рано в т. M , а по-късно в т. N . По такъв начин събитията, които в системата K са били едновременни, в системата K се оказват неедновременни. От това следва, че времето в различните инерциални отправни системи не тече по еднакъв начин.

1.5.3. Трансформации на Лоренц

В нерелативистичната механика преходът на координатите и времето от една инерциална отправна система към друга инерциална отправна система се осъществява с помощта на трансформациите на Галилей (1.5.1, 1.5.2). Непосредствено от тях следва законът за събиране на скорости в класическата механика. Очевидно този закон е в противоречие с постулата за постоянство на скоростта на светлината във вакуум. И наистина, ако светлинен сигнал се разпространява в посоката на скоростта \vec{v} в подвижната координатна система K' със скорост $u'_x = c$, то съгласно (1.5.3) скоростта на сигнала в системата K би се оказала $u_x = c + v$. Този резултат е в противоречие с постулата за постоянство на скоростта на светлината във всички инерциални отправни системи. Оттук следва, че трансформациите на Галилей трябва да бъдат заменени с други формули.

В съответствие с двата постулата на специалната теория на относителността Айнщайн показва, че връзката между координатите на дадена точка и времето, разглеждано като четвърта координата, в две инерциални отправни системи – подвижна K' и неподвижна K (фиг.1.23), се дава с изразите

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; y = y'; z = z'; t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.5.7)$$

или

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; y' = y; z' = z; t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.5.8)$$

където $\beta = \frac{v}{c}$. Тези съотношения са известни като трансформации на Лоренц.

Лесно е да се види, че при $v \ll c$ (строго при $c \rightarrow \infty$) формулите (1.5.7) съвпадат с формулите (1.5.1). По такъв начин класическата механика, основаваща се на трансформациите на Галилей, е пригодна за разглеждане движението на телата, чиито скорости са значително по-малки от скоростта на светлината във вакуум. В общия случай е целесъобразно да се използва релативистичната механика, основана на постулатите на теорията на относителността, и адекватните на тях трансформации на Лоренц за координатите и времето.

Непосредствено от трансформациите на Лоренц следват два важни извода:

Координатите x, y, z и времето t в неподвижната координатна система K , така както и координатите x', y', z' и времето t' в подвижната координатна система K' не могат да имат имагинерни стойности. Затова от първото и четвъртото уравнение на (1.5.7) и (1.5.8) следва, че $\beta = \frac{v}{c} < 1$. Следователно първият извод е, че скоростта на относителното движение на двете координатни системи не може да бъде по-голяма от скоростта на светлината във вакуум. Освен това не могат да се използват отправни системи, движещи се със скорост v , равна на скоростта на светлината c , тъй като в този случай за координатата $x(x')$ и времето $t(t')$ се получават неопределено големи стойности.

1.5.4. Някои следствия от трансформациите на Лоренц

От трансформациите на Лоренц се получават някои следствия, които от гледна точка на класическата механика изглеждат необичайни.

А. СКЪСЯВАНЕ ДЪЛЖИНАТА НА ТЕЛАТА

Нека дадено тяло (напр. цилиндрично тяло) се движи заедно с подвижна координатна система K' със скорост \vec{v} спрямо неподвижна координатна система K (фиг.1.25,а). Неговата дължина в системата K' е $l_0 = x_2' - x_1'$, където x_1' и x_2' са координатите на крайните точки на цилиндричното тяло и те не се променят с течение на времето t' .

За определяне дължината на движещото се тяло в системата K е необходимо да се измерят координатите x_1 и x_2 върху оста Ox , които съответствуват на краищата му, в един и същ момент от времето t по часовник, работещ в системата K : $l = x_2(t) - x_1(t)$. Като се има предвид първото уравнение от (1.5.8) се получава

$$x_1' = \frac{x_1(t) - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$x_2' = \frac{x_2(t) - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

откъдето

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

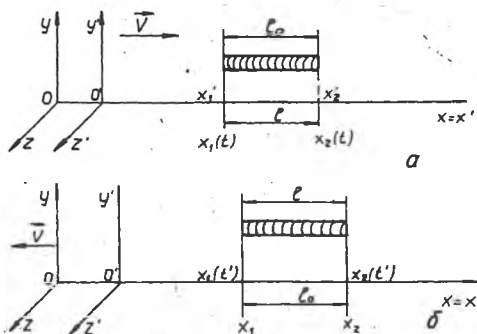
т.е.

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.5.9)$$

Съответно, ако същото тяло се намира в покой в системата K , то неговата дължина в тази система е $l_0 = x_2 - x_1$ (фиг. 1.25, б). Спрямо системата K' тялото се движи със скорост \vec{v} и има дължина $l = x_2(t') - x_1(t')$, която в съответствие с първото уравнение от (1.5.7) и принципа на относителността се определя с израза (1.5.9). По такъв начин линейният размер на тялото, движещо се спрямо инерциална отправна система, се намалява в направлението на движението $\sqrt{1 - \beta^2}$ пъти – скъсяването е толкова по-голямо, колкото е по-голяма скоростта на движение. Това явление е известно под името Лоренц-Фитцджералдово скъсяване на линейната дължина на телата.

От второто и третото съотношение на (1.5.7), които не зависят от времето, следва, че $y_2' - y_1' = y_2 - y_1$ и $z_2' - z_1' = z_2 - z_1$, т.е. напречните размери на тялото не зависят от скоростта на неговото движение и са еднакви във всички инерциални отправни системи.

Независимо от горните изводи интересно е да се отбележи, че визуално (или на фотография) не се наблюдава изменение във формата на телата дори в случай на движение със скорости, сравними със скоростта на светлината. Причината е следната. Наблюдавайки визуално или фотографирайки движещото се тяло, регистрират



Фиг. 1.25

се светлинни сигнали от различни участъци на тялото, достигащи едновременно до окото на наблюдателя или до фотографската лента. Излъчването на тези сигнали обаче не е едновременно. Сигналите от по-далечните участъци са излъчени по-рано, отколкото от по-близките. По такъв начин, ако тялото се движи, в окото или върху фотографската лента се получава деформиран образ на тялото. Чрез пресмятане може да се покаже, че съответното изменение на формата на тялото се компенсира от Лоренцовото скъсяване. Ако не съществува такова скъсяване, бързодвижещите се тела би трябвало да бъдат удължени в направлението на движението.

Б. ПРОДЪЛЖИТЕЛНОСТ НА СЪБИТИЯТА В РАЗЛИЧНИ ОТПРАВНИ СИСТЕМИ

Нека разгледаме някакъв процес (събитие), който се извършва в точка M , неподвижна в системата K' . Да означим продължителността на този процес в системите K и K' съответно с τ_0 и τ (τ_0 се измерва с часовник, непосредствено свързан с K' – движещ се заедно с точката M спрямо K , а τ – с часовник, свързан с неподвижната координатна система K). В такъв случай $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ и $\tau = t_2 - t_1$, където индексите 1 и 2 съответствуват на началото и края на процеса. Съгласно четвъртото уравнение (1.5.8)

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\tau_0 = \frac{\tau - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.5.10)$$

В този израз $x_2 - x_1$ е преместването на точката, в която се извършва процесът, по направлението на оста Ox за времетраенето τ в системата K . Затова, като се замести $x_2 - x_1 = vt$ в (1.5.10), се получава

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (1.5.11)$$

т.е. $\tau_0 < \tau$.

По такъв начин продължителността на извършеното събитие в тялото, намиращо се в M , е минимална в тази инерциална отправна система, спрямо която тялото е неподвижно. Този резултат може да се формулира и по друг начин: продължителността на времето τ_0 , измерено с часовник, който е неподвижен спрямо тялото, се оказва по-малка от продължителността на времето τ , измерено с часовник, движещ се спрямо тялото със скорост v или още може да се каже, че часовникът в подвижната координатна система върви по-бавно, отколкото часовника, намиращ се в покой. (Има се предвид, че часовниците са съвършено идентични, но са „свързани“ със съответните координатни системи.)

Времето τ_0 , измервано с часовник, движещ се заедно с тялото, е възприето да се нарича собствено време на това тяло. Както се вижда от (1.5.11), собственото време е винаги по-малко, отколкото времето, измерено с часовник, движещ се спрямо тялото.

Релятивисткият ефект на забавяне хода на времето (1.5.11) е получил непосредствено експериментално потвърждение. Известно е, че в състава на космическите лъчи има μ^+ - и μ^- -мезони – нестабилни, самопроизволно разпадащи се елементарни частици на позитрон (или електрон) и две неутрино. Средното време на живот на μ -мезоните в покой τ_0 , т.е. времето, измерено с „часовник“, движещ се заедно с тях, както показват експерименталните измервания, е $\tau_0 = 2.21 \cdot 10^{-6}$ s. В такъв случай дори ако се движат със скорост $v = c$, те могат да изминат път в атмосферата $l_0 = c\tau_0 = 660$ m. Както показват наблюденията обаче, μ -мезоните се образуват на височина 20 – 30 km и успяват в значително количество да достигнат до земната повърхност. С помощта на формула (1.5.11) лесно се обяснява този парадокс: за наблюдателя, намиращ се върху земната повърхност, времето на живот на μ -мезоните е $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, а пътят, който те изминават в атмосферата, е $l = \beta c \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$. Тъй като β е близко до единица, то $l \gg l_0$. Всъщност от позицията на наблюдател, движещ се заедно с μ -мезоните, разстоянието, което те изминават до земната повърхност, се скъсява до около 660 m [вж. формула (1.5.9)].

В. ЕДНОВРЕМЕННОСТ НА СЪБИТИЯТА В РАЗЛИЧНИ ОТПРАВНИ СИСТЕМИ

Да предположим, че има две събития 1 и 2, които в инерциалната отправна система K се извършват съответно в точки с координати $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в момент от времето t_1 и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в момент t_2 . В подвижната координатна система K' тези събития ще се извършват в точки $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ в момент t'_1 и $M'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$ в момента t'_2 . Като се използват формулите (1.5.7), може да се покаже, че

$$l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2 = l'^2_{12} - c^2 t'^2_{12}, \quad (1.5.12)$$

където

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$l'_{12} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

са разстоянията между точките M_1 и M_2 в системата K и между точките M'_1 и M'_2 в системата K' , а $t_{12} = t_2 - t_1$ и $t'_{12} = t'_2 - t'_1$ са продължителностите на времето между събитията в двете системи. Величината

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}} \quad (1.5.13)$$

се нарича интервал между две събития. Равенството (1.5.12) показва, че квадратът на интервала s^2_{12} между две дадени събития е инвариант по отношение на трансформациите на Лоренц при прехода от една инерциална отправна система към друга и е основен инвариант в четиримерното пространство – време (метод на Минковски).

Нека сега разгледаме за простота частния случай, когато точките M_1 и M_2 се намират върху оста Ox и събитията се извършват в един и същ момент от времето $t_1 = t_2 = t$ в системата K . Съгласно формули (1.5.8) на тези събития в системата K' ще съответствуват координати

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

и момент от време

$$t'_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

От тези формули следва, че ако събитията в системата K се извършват в едно и също място от пространството ($x_1 = x_2$), то те ще съвпадат в пространството ($x'_1 = x'_2$) и във времето ($t'_1 = t'_2$) в системата K' . Ако обаче събитията в системата

K са пространствено разделени ($x_1 \neq x_2$) и се извършват едновременно ($t_1 = t_2$), то в системата K' са пространствено и временно разделени, ($x'_1 \neq x'_2; t'_1 \neq t'_2$). Знакът на разликата във времената $t'_{12} = t'_2 - t'_1$ се определя от знака на израза $v(x_1 - x_2)$. Това означава, че t'_{12} в различните подвижни инерциални отправни системи K' е различно както по големина, така и по знак – в едни системи събитието 1 ще предшества събитието 2, в други – обратно, второто събитие ще предшества първото. Разбира се, това е вярно за независими събития – събития, между които не съществува причинна връзка. Причинно свързаните събития (например изстрел и попадане на куршума в мишената) в нито една от отправните системи не са едновременни, като във всички системи събитието, което е причина, предшества следствието.

Следователно всяко от събираемите t_{12} и l_{12} , образуващи величината интервал s_{12}^2 (1.5.13), се изменя при прехода от една инерциална отправна система към друга (не са инвариантни), но самата величина s_{12}^2 остава постоянна (1.5.12).

1.5.5. Събиране на скорости

Като се използват трансформациите на Лоренц (1.5.7), може да се получи законът за събиране на скорости в СТО. По определение скоростите \vec{u} и \vec{u}' на движеща се материална точка в двете инерциални отправни системи K и K' могат да се представят по следния начин:

$$\vec{u} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$

$$\vec{u}' = \frac{dx'}{dt'}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt'}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt'}\vec{k}',$$

В тези изрази $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ са единичните ортогонални вектори по съответните оси.

Величините

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

и

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

са проекциите на скоростите \vec{u} и \vec{u}' върху съответните оси в моментите t и t' в системите K и K' . От формулите (1.5.7) следва, че за безкрайно малките изменения на координатите са в сила зависимостите

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, dy = dy', dz = dz', dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.5.14)$$

Ако първите три равенства се разделят на четвъртото, получават се формулите за преобразуване на компонентите на скоростите при преход от една инерциална отправна система към друга:

$$\frac{dx}{dt} = u_x = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{dx'}{dt' \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}\right)} + \frac{vdt'}{dt' \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}\right)},$$

или

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \quad (1.5.15)$$

При $v \ll c$ тези формули преминават във формулите за събиране на скорости в класическата механика (1.5.3).

По аналогичен начин на основата на формули (1.5.8) се получават изразите за компонентите на скоростта в системата K' чрез компонентите на скоростта в системата K :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}. \quad (1.5.16)$$

Не е трудно да се провери, че получените изрази за скоростта са в съгласие с постулатите на СТО. И наистина нека тялото се движи успоредно на оста Ox . Тогава $u = u_x, u' = u'_x$ и законът за събиране на скорости (1.5.15) придобива вида

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'}. \quad (1.5.17)$$

Да допуснем, че скоростта на тялото в K' е равна на скоростта на светлината: $u' = c$. Съгласно (1.5.17)

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c, \quad (1.5.18)$$

от което следва, че скоростта на светлината е еднаква във всички инерциални отправни системи. Ако $u' = v = c$, то и $u = c$, т.е.

ако двете скорости в (1.5.17) не надминават скоростта на светлината c , то и резултатната скорост u също не надминава скоростта на светлината във вакуум.

1.5.6. Релативистичен израз за импулса

От принципа за относителността следва, че математическият запис на който и да е физичен закон трябва да бъде еднакъв във всички инерциални отправни системи. Това условие е известно като условие за инвариантност на уравненията на физичните закони относно преобразованията на Лоренц.

В класическата механика се предполага, че масата на телата е постоянна величина независимо от тяхната скорост на движение и е еднаква във всички инерциални отправни системи ($m = m' = \text{const}$). Силите, действащи на дадено тяло, са също инвариантни по отношение на използваните инерциални отправни системи ($f = f'$). При това положение обаче основният закон на класическата механика

$$\vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.5.19)$$

е инвариантен по отношение на трансформациите на Галилей и е неинвариантен по отношение на трансформациите на Лоренц. Следователно законът (1.5.19) не може да се разглежда като основен в релативистичната механика.

Айнщайн е показал, че масата m на едно тяло зависи от скоростта, с която се движи спрямо дадена инерциална отправна система

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.5.20)$$

където m_0 е масата на същото тяло, измерена в инерциална отправна система, спрямо която $v = 0$. Тя се нарича маса в покой на тялото. Масата m_r на движещо се тяло се нарича релативистична маса.

Зависимостта на m_r от v е експериментално потвърдена за елементарни частици, като е почувствителна при значително по-големи скорости. Например при $\beta = 0,6$ $\frac{m_r}{m_0} \approx 1,2$, а при $\beta = 0,8$ $\frac{m_r}{m_0} \approx 1,7$.

Релативистичното увеличаване на масата е от съществено значение за развитието на съвременната техника. Например многобройните електронни уреди и установки, ускорителите за заредени части и др. не биха могли да действуват, ако този ефект не се вземе

предвид в процеса на тяхното проектиране. Изследванията на взаимодействието между елементарните частици също е немислимо без отчитане на различните релативистични ефекти.

Като се има предвид (1.5.20), основното уравнение на релативистичната механика придобива вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v} \right) = \vec{f}, \quad (1.5.21)$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}, \quad (1.5.22)$$

където

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_r \vec{v} \quad (1.5.23)$$

е импулсът на тялото в релативистичната механика.

Може да се покаже, че уравнението (1.5.21) е инвариантно относно трансформациите на Лоренц, ако се приеме, че при преход от една инерциална отправна система към друга компонентите на силата \vec{f} по съответните оси се преобразуват по определен начин.

Както се вижда от (1.5.23), зависимостта на импулса от скоростта се оказва по-сложна, отколкото в класическата механика.

При малки скорости на движение на телата ($v \ll c$) масата е постоянна величина ($m_r \approx m_0$) и изразът (1.5.23) съвпада с основния закон на класическата механика (1.5.19), а импулсът на тялото е линейна функция на неговата скорост.

За всички реални тела масата в покой е $m_0 > 0$. В такъв случай, както се вижда от (1.5.20) и (1.5.21), масата и импулсът нарастват неограничено при $v \rightarrow c$. Но всички реални сили имат ограничена стойност и действие и естествено не е възможно да се предаде на дадено тяло (частица) неограничено голям импулс. Следователно скоростта на телата в която и да е инерциална отправна система е винаги по-малка от скоростта на светлината c . Този извод се отнася и за микрочастиците – атоми, молекули и елементарни частици, с изключение на фотоните, масата на които в покой е $m_0 = 0$, а скоростта на движението им е равна на c . Това се отнася и за неутриното и антинеутриното, чиято маса е приблизително равна на нула.

1.5.7. Релативистичен израз на енергията

От класическата механика е известно, че работата, която и вършва силата \vec{f} при преместване $d\vec{r} = \vec{v}dt$ на дадена материална точка, се дава с израза

$$dA = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{v}dt, \quad (1.5.24)$$

където $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. При пресмятане на работата по (1.5.25) в релативистичната механика е необходимо да се вземе релативистичният израз за втория закон на Нютон (1.5.21). В такъв случай за работата dA се получава

$$dA = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \vec{v}dt = \vec{v}d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (1.5.25)$$

От закона за запазване на енергията следва, че работата, извършена над частицата, е равна на нарастването на нейната пълна енергия dW :

$$dW = \vec{v}d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (1.5.26)$$

Като се има предвид, че $\vec{v} \cdot d\vec{v} = vdv = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$ и $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$, след извършване на диференцирането и кратки преобразувания изразът за нарастване на пълната енергия придобива вида

$$dW = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = d(mc^2) = c^2 dm. \quad (1.5.27)$$

Чрез интегриране на полученото съотношение се получава

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \text{const.} \quad (1.5.28)$$

Интеграционната константа в (1.5.29) не може да има стойност, различна от нула. Това е така, защото само тогава от изразите за енергията и импулса става възможно да се образува инвариант, т.е. величина, която не се изменя при трансформациите на Лоренц. Експерименталните изследвания с ускорени елементарни частици потвърждават неизменността на тази величина. И затова в съответствие с опитните факти се приема, че в (1.5.29) $\text{const} = 0$. В такъв случай изразът за енергията добива вида

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.5.30)$$

Необходимо е да се има предвид, че тук се разглеждат тела (частици), движещи се свободно в пространството, или система от тела (частици), взаимодействащи само помежду си. Затова в пълната енергия W на системата в (1.5.30) не се включва потенциалната енергия на тялото (системата) във външно силово поле. (Предполага се, че такова поле не съществува.)

В случай че частицата се намира в покой ($v = 0$), енергията ѝ е

$$W_0 = m_0 c^2 \quad (1.5.31)$$

и се нарича енергия на частицата в покой. Тази енергия не е свързана с движението на частицата като цяло, а представлява т.нар. вътрешна енергия на частицата. Енергията на свободната частица в покой обикновено се нарича нейна собствена енергия.

Кинетичната енергия на свободна частица се определя като разлика между пълната енергия W и нейната собствена енергия

$$W_k = W - W_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (1.5.32)$$

Ако $v \ll c$, тази формула се преобразува по следния начин:

$$W_k \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2}. \quad (1.5.33)$$

Получи се изразът за кинетичната енергия на тяло с маса m_0 , движещо се със скорост v в класическата механика, както и трябваше да бъде: При скорост $v \ll c$ съответните формули от релативистичната механика преминават във формули на класическата механика.

Ако от уравнението за импулса (1.5.23) се определи скоростта v по големина и се замести в израза за пълната енергия (1.5.30), се получава следната зависимост между пълната енергия на частицата и нейния импулс:

$$W^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \beta^2} = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

или

$$W = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}, \quad (1.5.34)$$

$$W^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (1.5.35)$$

Когато се преминава от една инерциална отправна система в друга, скоростта, масата, импулсът и пълната енергия на частицата се изменят. Величината $W^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$ обаче остава еднаква във всички инерциални отправни системи, т.е. е инвариантна спрямо трансформациите на Лоренц аналогично на квадрата на интервала между две събития (1.5.12).

Величините

$$m_0^2 c^4 = W^2 - p^2 c^4 \text{ и } s_{12}^2 = l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2 \quad (1.5.36)$$

е възприето да се наричат релативистични инварианти.

1.5.8. Връзка между маса и енергия

Както видяхме, в релативистичната механика изразът за пълната енергия на частица се различава съществено от класическия. Като се използва изразът за релативистичната маса, формулата за пълната енергия (1.5.30) добива вида

$$W = c^2 m_r. \quad (1.5.37)$$

Следователно енергията на частиците и тяхната релативистична маса са непосредствено свързани помежду си и са пропорционални една на друга с коефициент на пропорционалност c^2 .

При всяко изменение на енергията на частиците (телата) с ΔW настъпва изменение в релативистичната маса на частиците $\Delta m_r = \frac{\Delta W}{c^2}$ и, обратно, всяко изменение на релативистичната маса Δm_r е съпроводено с изменение на енергията на частицата

$$\Delta W = c^2 \Delta m_r. \quad (1.5.38)$$

Често пъти това твърдение е известно като закон за взаимната връзка между маса и енергия, или още като закон за еквивалентност на масата и енергията. Във връзка с това е необходимо да се подчертае, че не бива да се смесват понятията тъждественост и еквивалентност. Енергията и масата се явяват различни характеристики на частиците, а законът за еквивалентността (1.5.38) установява само тяхната пропорционалност една на друга.

От пропорционалността между релативистичната маса и енергия, а при някои избори на измерителни системи и единици, например $\hbar = c = 1$ ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, константа на Планк), и от тяхното равенство $W = m_r$, могат да се направят някои фундаментални изводи. Така

например, ако на частицата не действуват никакви външни сили, е в сила законът за запазване на енергията и на импулса

$$\frac{dW}{dt} = 0, W = \text{const}; \quad (1.5.39)$$

$$\frac{dp}{dt} = 0, p = \text{const}. \quad (1.5.40)$$

От формулата на Айнщайн (1.5.38) следва, че заедно със закона за запазване на енергията е в сила и законът за запазване на релативистичната маса $m(v) = \text{const}$. И докато в класическата механика има два закона – закон за запазване на енергията и закон за запазване на масата, то в теорията на относителността се стига само до един, независим закон – закон за запазване на пълната енергия. Във връзка с това тук не е прието да се говори за закон за запазване на релативистичната маса като за отделен закон.

Енергията в покой W_0 на свободна частица или на каква да е система от взаимодействащи частици (например на молекула, на атом, на ядро и т.н.), която притежава известна устойчивост, не е равна на сумата от собствените енергии $m_{0i}c^2$ на всичките n частици, които образуват системата. За да се раздели такава система на съставните ѝ части, например молекулите на атоми, атомите – на електрони и атомни ядра, а ядрата – на свободни протони и неутрони и т.н., е необходимо да се извърши определена работа A против силите на свързване между частиците. На основата на закона за запазване на енергията следва

$$\sum_{i=1}^n m_{0i}c^2 = W_0 + A, \quad (1.5.41)$$

или

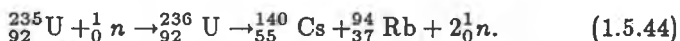
$$W_0 = \sum_{i=1}^n m_{0i}c^2 + W_{\text{св}}. \quad (1.5.42)$$

Величината $W_{\text{св}} = -A < 0$ се нарича енергия на свързване на системата и определя до каква степен последната е устойчива. Съответно масата в покой m_0 на разглежданата система е по-малка от сумата на масите в покой на всички частици, когато се намират в свободно състояние

$$m_0 - \sum_{i=1}^n m_{0i} = \frac{W_{\text{св}}}{c^2} < 0. \quad (1.5.43)$$

Следователно в противоположност на релативистичната маса сумарната маса в покой на взаимодействащите частици не се запазва.

Законът за взаимната връзка между масата и енергията се потвърждава от многобройни експериментални факти. Енергетичните ефекти при различните ядрени реакции и при превръщанията на елементарните частици, които се предсказват от закона (1.5.38), са в пълно съгласие с експерименталните резултати. Например работата на атомните електроцентрали се основава на делението на ядрото на урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ (или на плутония) чрез захващане на бавни неутрони n . (Символът ${}_{92}^{235}\text{U}$ означава изотоп на урана с масово число 235, ядрото на който се състои от 92 протона – поредния номер на елемента в таблицата на Менделеев, и $235 - 92 = 143$ неутрона). В резултат на това възниква следната ядрена реакция:



Сумарната маса в покой на системата уран-235 и неутрон е по-голяма от сумарната маса в покой на новообразуваните се частици в дясната страна (1.5.44) – ядра на цезий с масово число 140, на рубидий – 94, и 2 неутрона, примерно с около $\Delta m = 4 \cdot 10^{-28}$ kg. На тази маса отговаря енергия

$$\Delta W = c^2 \Delta m = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-28} \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ J},$$

която се превръща в кинетична енергия на образуваните се частици и в енергия на електромагнитното лъчение, възникващо при делението.

В заключение е необходимо да се подчертае, че специалната теория на относителността показва, че много физични характеристики на телата и процесите (например линейните им размери, масата им, продължителността на даден процес и др.), които в класическата механика се приемаха за абсолютни, неизменни свойства на самите тела и процеси, са в действителност относителни. Техните числени стойности в две инерциални отправни системи – подвижна и неподвижна, са различни. Главният извод на СТО е, че пространството и времето са органически взаимосвързани и образуват една единна форма на съществуване на материята – пространство-време, четиримерно пространство. Именно поради това пространствено-временният интервал между две събития е еднакъв във всички инерциални отправни системи, докато взетите поотделно пространствени или временни интервали между тези събития са относителни. По такъв начин преобразованието на Лоренц и всички произтичащи от тях следствия са израз на обективно съществуващите пространствено-временни отношения на движещата се материя.

1.6. ДИНАМИКА НА ФЛУИДИ

В хидродинамиката и аеродинамиката се изучават движенията на течностите и газовете и силите, които действуват върху обтичаните от тях тела.

Газовете са по-лесно свиваеми от течностите. При неголеми скорости – за въздуха до 50 m/s, наляганията в различните точки на потока се различават едно от друго с по-малко от 1 %. Ето защо в този случай промените на обемите на изучаваната маса газ, когато последният преминава от една област в друга, са незначителни и не оказват практически влияние върху характера на течението. При такива скорости законите за движението на течностите и газовете са еднакви и затова е целесъобразно да се разглеждат съвместно. Поради тази еднаквост на много от свойствата им течностите и газовете се наричат с общо име **флуиди**.

1.6.1. Токови линии и токови тръби

В динамиката на флуидите, както и в динамиката на реалните твърди тела телата, въпреки техния молекулен строеж се разглеждат като непрекъснати среди. Това не води до някакво противоречие, тъй като тук се разглеждат макроскопични процеси, върху които прекъснатият строеж на веществото не оказва съществено влияние. Ако обаче искаме да проникнем по-дълбоко в природата на някои сили, които играят определена роля в динамиката на флуидите, то молекулно-статистическите разглеждания са безусловно необходими.

За разлика от абсолютно твърдите тела, при движението на които разстоянията между техните точки остават постоянни, при движението на флуидите всяка точка от флуида извършва различно от останалите точки движение. Оттук се вижда колко по-сложна е задачата в динамиката на флуидите, отколкото в динамиката на твърдото тяло. Затова неслучайно още навремето Галилей е изказал мисълта, че е по-лесно да се изучи движението на звездите по небето, отколкото течението на водата в ручей.

При разглеждане движението на дадена течност в повечето случаи може с достатъчно голямо приближение да се счита, че е абсолютно несвиваема и да се предполага, че преместването на едни слоеве спрямо други не е свързано с възникване на сили на триене. Течност, която е несвиваема и в която се пренебрегват силите на вътрешно триене, се нарича идеална.

Движението на течностите може да се опише, като се изучава положението на всяка частица течност като функция на времето – метод на Лагранж. Тук под *частица течност* се разбира достатъчно малък елементарен обем от разглежданата течност. Такова движение на течността се нарича **течение**, а цялата движеща се течност – **поток**.

В този случай се определя

$$\vec{r} = f(\vec{r}_0, t), \quad (1.6.1)$$

където \vec{r}_0 е радиус-векторът, определящ положението на частицата от флуида в момента $t = 0$.

Основен метод за описание движението на флуида методът на Ойлер, при който се изучава зависимостта на скоростта \vec{v} на частиците на флуида в различните точки от координатите на тези точки (x, y, z) и времето t

$$\vec{v} = f(\vec{r}, t) \quad (1.6.2)$$

или

$$v_x = f_1(x, y, z, t),$$

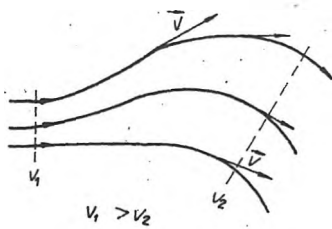
$$v_y = f_2(x, y, z, t),$$

$$v_z = f_3(x, y, z, t),$$

където $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ е радиус-векторът, прекаран от началото на координатната система до разглежданата точка;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ са единичните вектори по съответните ос;

v_x, v_y, v_z — проекциите на скоростта \vec{v} върху координатните ос.



Фиг. 1.26

Съвкупността от скоростите на всички частици на течността образуват полето на вектора на скоростта (токово поле), което нагледно може да се представи по следния начин. Като движещата се течност могат да се прекарат множество линии, допирателните към които във всяка точка съвпадат с направлението на скоростта (фиг.1.26). Такива линии се наричат токови линии. Следователно токова линия

е такава линия, във всяка точка на която допирателната е в направлението на скоростта. Условно токовете линии се прекарват така, че тяхната гъстота (отношението на броя на линиите ΔN към големината на площта, перпендикулярна на тях) да е пропорционална на скоростта в даденото

Место. В такъв случай по вида и разположението на токовите линии може да се съди за големината и посоката на скоростта в различните точки от пространството (фиг.1.26).

В най-общия случай големината и посоката на скоростта \vec{v} във всяка точка може да се мени с времето, а следователно ще се изменя непрекъснато и общата картина на токовото поле. Ако има такова поле, при което скоростта във всяка точка от полето се запазва постоянна с времето, се казва, че движението на флуида е стационарно (установено). В тези случаи токовите линии са неподвижни, постоянни и съвпадат с траекториите на частиците на течността. Стационарното движение не бива да се смесва с равномерното движение. При стационарното движение скоростта на всяка частица може да се мени с течение на времето, но всички частици, които минават една след друга през определена точка в пространството имат една и съща скорост.

Токова тръба се нарича повърхността, която се образува от токовите линии, прекарани през всички точки на малък контур. Потокът вътре в токовата тръба се нарича токова нишка или струя. При стационарно движение частиците не напускат никога токовата тръба. Също така никакви други частици не проникват отвън в токовата тръба.

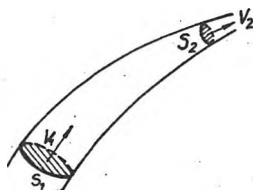
Течение, в което не се наблюдава въртливо движение на частица течност се нарича потенциално течение. Ако в течността има и въртене на частиците то се нарича вихрово течение.

Нека S_1 и S_2 са две напречни сечения на каква да е токова тръба на поток идеална течност (фиг.1.27), при които скоростите са съответно v_1 и v_2 . Обемът течност V_1 , който преминава през първото сечение за време Δt , е равен на обема течност V_2 , преминаващ за същото време през второто сечение:

$$V_1 = V_2; S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t, \quad (1.6.3)$$

или

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (1.6.4)$$



Фиг. 1.27

Това е така, тъй като течността не може да минава през страничната стена на токовата тръба, не се задържа вътре в тръбата и не се свива. Това разглеждане е приложимо за каква да е двойка напречни сечения S_1 и S_2 от токовата тръба. Следователно за стационарно движение на идеална течност в което и да е сечение от една и съща токова тръба величината Sv е постоянна:

$$Sv = \text{const.} \quad (1.6.5)$$

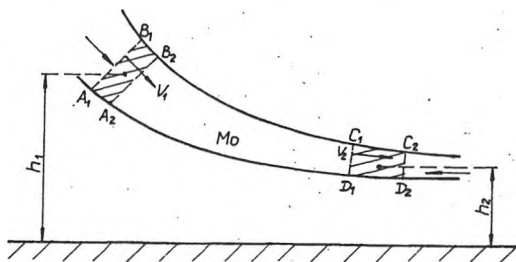
Полученият резултат изразява закона за непрекъснатостта на струята. От (1.6.5) следва, че при променливи сечения на токовата тръба частиците на несвиваема течност се движат с различни скорости, т.е. с ускорение.

Законът за непрекъснатостта на струята е приложим за реални течности и даже за газове, движещи се стационарно в действителни тръби, когато тяхната свиваемост може да се пренебрегне. Пресмятанията показват, че при движение на течности и газове със скорости, по-малки от скоростта на звука, последните могат да се разглеждат като несвиваеми.

1.6.2. Уравнение на Бернули

Да разгледаме течение в токова тръба, която се стеснява в посоката на течението. От закона за непрекъснатостта на струята следва, че скоростта в посоката на движението ще нараства, т.е. течността в токовата тръба ще се движи ускорително. Следователно на течността в по-тясната част на токовата тръба действа сила от страна на течността, намираща се в нейната по-широка част. Такава сила, възникваща вътре в обема на течността, може да се появи за сметка на изменение на налягането в широката и в по-тясната част на тръбата. Тъй като силата трябва да има посока, съвпадаща с посоката на движението, необходимо е налягането в по-широката част да е по-голямо от това в тясната. (Да напомним, че налягането е физична величина, числено равна на силата f , действаща перпендикулярно на единица площ: $p = \frac{f}{S}$.)

За да намерим зависимостта между скоростта и налягането, нека разгледаме определен обем от течността $A_1B_1C_1D_1$ в каквато и да е токова тръба (фиг.1.28). След време Δt този обем се премества по посока на тръбата и заема положението $A_2B_2C_2D_2$.



Фиг. 1.28

Сечението $S_{A_1B_1}$ се премества на разстояние $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$, а $S_{C_1D_1} - \Delta l_2 = v_2 \Delta t$. Силите, които действуват върху двете сечения, са $f_1 = p_1 S_{A_1B_1}$ и $f_2 = p_2 S_{C_1D_1}$, където p_1 и p_2 са наляганятията съответно върху $S_{A_1B_1}$ и $S_{C_1D_1}$. Първата сила f_1 е положителна, тъй като е насочена по посока на движението на течността. (Силата, с която пластове зад $S_{A_1B_1}$ действуват на $S_{A_1B_1}$.) Втората сила f_2 е отрицателна, тъй като тя представлява силата, с която предните пластове (пластовете пред $S_{C_1D_1}$) действуват на $S_{C_1D_1}$ и следователно е насочена в посока, обратна на посоката на движението на течността.

При това преместване на обема течност силата f_1 извършва положителна, а f_2 — отрицателна работа:

$$\begin{aligned} A_1 &= f_1 \Delta l_1 = p_1 S_{A_1B_1} v_1 \Delta t, \\ A_2 &= -f_2 \Delta l_2 = -p_2 S_{C_1D_1} v_2 \Delta t. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Общата работа, извършена от двете сили, е

$$A = p_1 S_{A_1B_1} v_1 \Delta t - p_2 S_{C_1D_1} v_2 \Delta t. \quad (1.6.7)$$

За сметка на тази работа от външни сили (различното налягане в $S_{A_1B_1}$ и $S_{C_1D_1}$) съгласно закона за запазване и изменение на общата механична енергия настъпва изменение в енергията на разглеждания обем течност

$$W_2 - W_1 = A = p_1 S_{A_1B_1} v_1 \Delta t - p_2 S_{C_1D_1} v_2 \Delta t, \quad (1.6.8)$$

където W_2 е общата механична енергия на обема течност в крайното положение (2),

W_1 — общата механична енергия в началното положение (1).

От закона за непрекъснатостта на струята (1.6.4) следва, че

$$S_{A_1B_1} v_1 \Delta t = S_{C_1D_1} v_2 \Delta t = \Delta V$$

и следователно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (1.6.9)$$

От друга страна, W_2 може да се разглежда като сума от общата механична енергия на обема течност $A_2 B_2 C_1 D_1$ и обема $C_1 D_1 D_2 C_2$

$$W_2 = W_2(A_2 B_2 C_1 D_1) + W_2(C_1 D_1 D_2 C_2). \quad (1.6.10)$$

Общата механична енергия в първоначалното положение 1 е

$$W_1 = W_1(A_1 B_1 B_2 A_2) + W_1(A_2 B_2 C_1 D_1). \quad (1.6.11)$$

Енергията на всяка частица от течността е сума от нейната кинетична енергия и потенциалната ѝ енергия в полето на силата на земното привличане. В резултат на това, че движението на течността е стационарно, всяка частица, която се намира след време Δt в коя да е точка M от незащрихованата част на обема $A_2 B_2 C_1 D_1$, има една и съща скорост, а следователно и кинетична енергия, каквато е имала частицата, намирала се в същата точка в началния момент от времето, т.е.

$$W_2(A_2 B_2 C_1 D_1) = W_1(A_2 B_2 C_1 D_1). \quad (1.6.12)$$

Като се има предвид (1.6.10), (1.6.11) и (1.6.12), за изменение на общата механична енергия на целия разглеждан обем течност при преминаването му от положение 1 в положение 2 се получава

$$W_2 - W_1 = W_2(C_1 D_1 D_2 C_2) - W_1(A_1 B_1 B_2 A_2). \quad (1.6.13)$$

При положение че сеченията на токовата тръба и преместванията им Δl са достатъчно малки, то на всяка точка от елементарните обеми ΔV_1 и ΔV_2 може да се препише една и съща скорост v , налягане p и височина h . Тогава изменението на енергията (1.6.13) може да се представи по следния начин:

$$\Delta W = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) \quad (1.6.14)$$

(ρ е плътността на течността).

Като се приравнят изразите (1.6.9) и (1.6.14) и се съкрати на обема ΔV , получава се

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (1.6.15)$$

Разглежданият обем от течността на токовата тръба беше взет произволно. Затова може да се твърди, че за всяко произволно сечение на токовата тръба изразът $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p$ има еднаква стойност. Строго, уравнението (1.6.15) е точно, при положение че сечението на токовата тръба $S \rightarrow 0$, т.е. когато последната преминава към токова линия. По такъв начин величините p , v и h , фигуриращи в лявата и дясната част на (1.6.15), следва да се разглеждат като отнасящи се към две произволни точки от една и съща токова линия.

Полученият резултат може да се формулира по следния начин: в стационарно движеща се идеална течност в направлението на която и да е токова линия е в сила уравнението

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}, \quad (1.6.16)$$

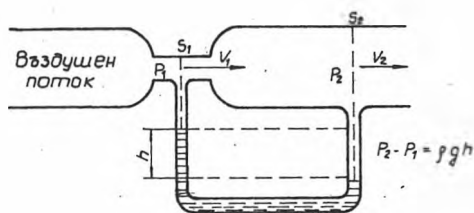
т.е. сумата от динамичното, хидростатичното и статичното налягане е постоянна величина.

Уравнението (1.6.16) или равнозначното му уравнение (1.6.15) се нарича уравнение на Бернули. Независимо от това, че е получено за идеални течности, то достатъчно добре се изпълнява и за реални течности, вътрешното триене при които не е много голямо (например водата).

За хоризонтална токова тръба $h_1 = h_2$ и от (1.6.15) се получава

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \quad (1.6.17)$$

т.е. сумата от динамичното и статичното налягане е постоянна величина при стационарно ламинарно движение на идеален флуид по хоризонтална тръба. В такъв случай статичното налягане в местата с по-малко напречно сечение, където скоростта на потока е по-голяма, намалява в сравнение с това в местата с по-голямо сечение и съответно по-малка скорост (фиг.1.29). В един движещ се флуид в местата, където скоростта е достатъчно голяма, статичното налягане може да стане значително по-малко от атмосферното налягане. На тези места флуидът ще оказва засмукващо действие (водни вакуумни помпи, пулверизатори и др.).



Фиг. 1.29

1.6.3. Изтичане на флуиди през отвори. Закон на Торичели

Да приложим уравнението на Бернули в случай на изтичане на течности през достатъчно малък отвор на широк отворен съд (фиг.1.30). Като се предположи, че сечението на широката част S_1 е много по-голямо от сечението S_2 на тесния отвор ($S_1 \gg S_2$), то съгласно (1.6.4) скоростта на течността в съда е значително по-малка от скоростта на изтичането ѝ през отвора $v_1 \ll v_2$ и целият поток може да се разглежда като една токова тръба. Налягането както в горното сечение S_1 , така и в долното S_2 , практически е едно и също,

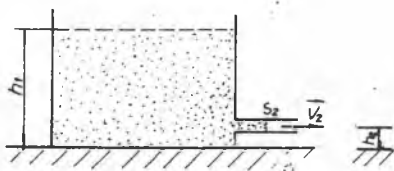
равно на атмосферното налягане: $p_1 = p_2 = p_0$. Тогава от (1.6.15) получаваме приблизително уравнението

$$p_0 + \rho gh_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_0,$$

т.е.

$$v = v_2 = \sqrt{2gh}, \quad (1.6.18)$$

където $h = h_1 - h_2$ е превишението на нивото на широкото сечение спрямо това на тесния отвор. Или скоростта, с която изтича идеална течност през отвор, е такава, каквато е скоростта на свободно падащо тяло от височина, равна на височината на свободната повърхност на течността над отвора. Това положение е известно като закон на Торичели за изтичане на течности през малък отвор.



Фиг. 1.30

Необходимо е да се подчертае, че полученият резултат (1.6.18) се отнася за идеална течност. За реални течности скоростта на изтичане ще бъде толкова по-малка от пресметнатата по (1.6.18), колкото е по-голям нейният вискозитет (вж. следващия §1.6.4).

Течната струя, изтичаща през тесния отвор на съда (фиг.1.30), отнася със себе си за определено време Δt импулс $\Delta \vec{q} = \rho S_2 v \Delta t \vec{v}$. Този импулс се предава на течността в съда. Съгласно третия закон на Нютон съдът получава от изтичащата течност за това време Δt импулс $-\Delta \vec{q}$, т.е. изпитва действието на силата

$$\vec{f}_r = -\frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = -\rho S_2 v \vec{v}. \quad (1.6.19)$$

Тази сила е известна като реакция на изтичащата струя. Ако съдът се постави върху подвижна поставка, то под действието на силата \vec{f}_r той започва да се движи в посока, обратна на струята.

Като се има предвид (1.6.18), за големината на силата се получава

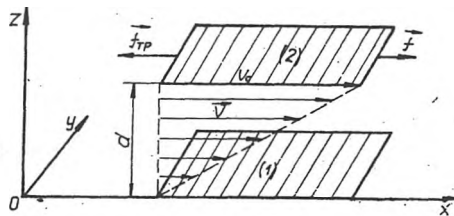
$$f_r = \rho S_2 v^2 = 2gh\rho S_2. \quad (1.6.20)$$

На пръв поглед, ако силата \vec{f}_r би съвпадала по големина със силата на хидростатичното налягане, което течността би оказвала върху

1.6.4. Вискозитет на флуиди. Закон на Нютон за вътрешното триене

Във всички реални течности и газове за разлика от идеалните при преместването на едни слоеве спрямо други възникват сили на вътрешно триене.

Нека разгледаме две успоредни една на друга пластинки, намиращи се в дадена течност на разстояние d една от друга (фиг.1.32). Предполага се, че размерите им са значително по-големи в сравнение с разстоянието d и че пластинките се мокрят от течността. Едната от пластинките, например долната (1), е закрепена неподвижно, а горната (2) се движи спрямо долната със скорост \bar{v}_0 . Опитът показва, че за да имаме движение на пластинката (2) с постоянна скорост \bar{v}_0 , е необходимо да ѝ се действа с постоянна сила \bar{f} . И тъй като пластинката не получава ускорение, то действието на силата \bar{f} се уравнива от друга, равна по големина на нея и действаща в обратна посока. Това е силата на триене $\bar{f}_{тр}$, действаща на пластинката при нейното движение в течността.



Фиг. 1.32

Опитно е установено, че големината на силата на триене зависи от скоростта на подвижната пластинка v_0 , нейната площ S и разстоянието d между пластинките

$$f_{тр} = \eta \frac{v_0}{d} S, \quad (1.6.22)$$

където η е коефициент на пропорционалност, зависещ от природата и състоянието (например от температурата) на течността и се нарича коефициент на вътрешно триене, или динамичен вискозитет на течността.

Причината за възникването на силата на триене е следната. Поради адхезионните сили (силите, с които твърдото тяло – пластинката, и течността си взаимодействуват) адсорбираният от пластинката тънък слой от течността се движи заедно с нея. Този слой течност вследствие на кохезионните сили (силите на взаимодействие между частиците от едно и също вещество – течността) увлича съседния пласт, но последният се движи с по-малка скорост именно

ди наличието на кохезионните сили между този пласт и долуплащия пласт, който е все още неподвижен. По същата причина е постепенно и по-долуплащият пласт започва да се движи, но с по-малка скорост и т.н. По такъв начин се създава относително движение на пластове един спрямо друг. Пластът, който се движи с голяма скорост, действа ускоряващо на долуплащия, по-бавно подвижни пластове и, обратно, по-бавно подвижните пластове гъват върху по-бързо движещите се със задържаща сила. Тези сили са известни под името сили на вътрешно триене. Те са описани по допирателната към повърхността на пластове.

Опитът показва, че скоростта на частиците в дадена течност в различните слоеве между пластинките се изменя в направление-та оста Oz , перпендикулярна на двете пластинки (фиг.1.32), по следен закон

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z. \quad (1.6.23)$$

Съгласно тази зависимост

$$\left| \frac{dv}{dz} \right| = \frac{v_0}{d}. \quad (1.6.24)$$

Може да се има предвид това, формулата за големината на силата на вътрешно триене придобива вида

$$f_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| \cdot S. \quad (1.6.25)$$

Формулата $\left| \frac{dv}{dz} \right|$ показва доколко бързо се изменя скоростта в направление-та оста Oz и представлява модулът на градиента на скоростта.

Зависимостта (1.6.22), респ. (1.6.25), е известна като закон на Пуазей за силата на вътрешното триене: Силата на вътрешното триене на една течност е равна на произведението на площта S на пластинките, които се движат един спрямо друг, градиента на скоростта и коефициента на вътрешното триене η .

Формула (1.6.25) е в сила не само когато скоростта се мени с линейното z по линейен закон, но и при какъв да е закон за изменение $v = v(z)$. В този случай $\left| \frac{dv}{dz} \right|$ се определя в мястото на границата между взаимодействащите по закона (1.6.25) слоеве.

От (1.6.22) или (1.6.25) следва, че единицата за измерване на динамичния вискозитет в SI е $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2} = \text{Pa}\cdot\text{s}$. ($1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$ – единица за измерване на налягането).

В много случаи се използва и т.нар. кинематичен вискозитет ν , който е равен на отношението на динамичния вискозитет η към плътността ρ на течността

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (1.6.26)$$

Единица за ν в SI е $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Вискозитетът на течностите и газовете зависи от температурата. При течностите η бързо намалява, а при газовете бързо нараства с повишаване на температурата. Тази разлика се обяснява с различния механизъм на възникване на силите на вътрешното триене при течности и газове. При течности, както беше отбелязано, вътрешното триене възниква главно в резултат на междумолекулните сили, а при газовете – на хаотичното движение на молекулите.

1.6.5. Ламинарно и турбулентно движение

При вискозните течности и газове се наблюдават два вида движения. В едни случаи движението на течностите има ламинарен (слоест) характер – пластове на течността се хлъзгат един спрямо друг, без да се смесват. Например при немного големи стойности на скоростта на вискозната течност в реална тръба течението има ламинарен характер. Това лесно може да се демонстрира опитно, като в потока течност в стъклена тръба на входа се въведе тънка струя оцветена течност. При ламинарното движение оцветената струя не се смесва с останалата течност.

С увеличаване скоростта v на движение на течността в тръбата настъпва качествено изменение на течението. При определена скорост $v \gg v_{кр}$ оцветена струя течност бързо се развива, настъпва размесване с останалата течност, т.е. течението престава да бъде ламинарно. Такова течение се нарича турбулентно. При турбулентно течение скоростта на частиците във всяко дадено място през цялото време се изменя хаотично, т.е. течението е нестационарно. Именно в резултат на това настъпва равномерно размиване на вкараната оцветена течност.

Изследванията показват, че една от най-важните характеристики на движението на течностите е безразмерната величина

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (1.6.27)$$

където ρ е плътността на течността (или газа),

v — средната скорост на потока по сечението на тръбата,

η — динамичният вискозитет на течността;

l — характерен размер за напречното сечение, например радиус или диаметър при кръгло сечение, страна на квадрат или квадратно сечение и т.н.

Зависимостта (1.6.27) е установена от английския учен Рейнолдс и е възприето да се нарича число на Рейнолдс.

Като се използва формулата (1.6.26) за кинематичния вискозитет, числото на Рейнолдс се записва във вида

$$\text{Re} = \frac{v l}{\nu}. \quad (1.6.28)$$

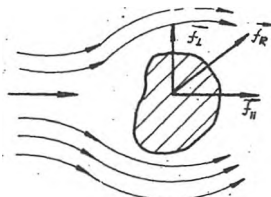
Числото на Рейнолдс се използва за характеризиране течението на вискозни течности в тръби, канали и т.н. Характерът на теченията на различни течности в тръби с различни сечения ще бъде различен, ако на всяко течение съответства една и съща стойност

Преходът от ламинарно течение в турбулентно се осъществява при определена стойност на числото на Рейнолдс, по-голяма от определена критична стойност $Re > Re_{кр}$. Стойността на $Re_{кр}$ зависи от редица фактори: вида на стените на тръбите, начина на въвеждане на течението в тръбите и т.н. Опитно е установено, че за тръби с гладки стени $Re_{кр} \approx 2300$.

За идеален флуид $\eta = 0$, $Re \rightarrow \infty$. В случаите, когато η расте, влиянието на вътрешното триене се засилва.

1.6.6. Движение на тела в течности и газове

За нуждите на практиката, и особено на корабоплаването и въздушния транспорт, е важно да се установят какви сили изпитва дадено тяло, когато се движи в флуид. Важно е да се знае какви сили действуват върху тялото при обтичането му. Тези сили в най-общия случай се свеждат до една резултантна сила \vec{f}_R , която може да се разложи на 2 компоненти: в посока, обратна на скоростта на потока $\vec{f}_{||}$, и перпендикулярна към нея \vec{f}_{\perp} (фиг.1.33). Двете компоненти $\vec{f}_{||}$ и \vec{f}_{\perp} се възприемат и се наричат съответно сила на челното съпротивление, или фронтално съпротивление, и подемна сила.



Фиг. 1.33

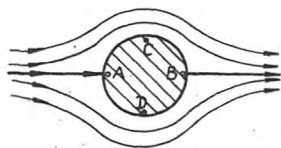
Съпротивлението зависи от формата на тялото и от скоростта на потока спрямо флуида. В най-общия случай големината на силата на челното съпротивление може да се определи по формулата

$$f_{||} = C_0 S_{\perp} \rho v^n, \quad (1.6.29)$$

където S_{\perp} е проекцията на тялото върху равнина, перпендикулярна на скоростта \vec{v} ,

ρ — плътността на течността.

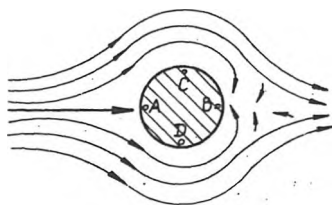
Показателят n може да приема стойности от 1 до 3 в зависимост от големината на скоростта. Коефициентът C_0 при други равнини зависи както от формата на тялото, така и от стойността на числото на Рейнолдс (1.6.27).



Фиг. 1.34

Пълното свободно обтичане на тялото картината на токовите линии е напълно симетрична. Следователно резултантната сила на налягането върху повърхността на цилиндъра, която при отсъствие на вътрешно триене би могла да е причина за поява на челно съпротивление, е равна на нула. Този въпрос за първи път теоретично е разгледан от Ойлер и Д'Аламбер. Изводът очевидно противоречи на опита и затова обикновено се нарича парадокс на Ойлер – Д'Аламбер.

При движение на тела във вискозни флуиди явленията протичат по друг начин. В този случай много тънък слой от течността практически прилепва към повърхността на тялото и се движи заедно с него, като увелича постепенно съседните слоеве. По такъв начин се образува преходен пласт течност, в който се създава голям градиент на скоростта. В резултат на това пълното обтичане става невъзможно. При по-големи скорости преходният слой се откъсва от повърхността на тялото, в резултат на което зад него се образуват вихри (фиг.1.35).



Фиг. 1.35

Движението на течност зад тялото става турбулентно. Вихрите се отнасят от течението, на тяхно място се образуват нови вихри и зад тялото се получава поредица от вихри, наречена вихрова улица (вихрова улица на Карман). Отнесените вихри постепенно затихват поради наличието на вътрешно триене. За образуване-

то на вихри се изразходва част от кинетичната енергия на тялото, а енергията на вихрите преминава във вътрешна енергия на течността – последната се нагрява. Симетрията на налягането пред и зад

се нарушава. Поради увеличаване на динамичното налягане тлялото там статичното налягане намалява. Така резултантната сила на налягането става различна от нула, в резултат на което се появява челното съпротивление.

По такъв начин челното съпротивление се явява сума от съпротивителната сила на вътрешното триене и силата, получена в резултат на различието в налягането. Опитът показва, че при дадени напречни размери на телата последната сила силно зависи от формата на телата.

Установява се, че съотношението между двете сили, обуславящи челното съпротивление, се определя от числото Re на Рейнолдс (число на Рейнолдс). При малки стойности на Re основна роля играе силата на вътрешното триене, а при големи – силата на съпротивлението, появяваща се в резултат на разликата в налягането пред и зад тлялото.

ТРЕПТЕНИЯ И ВЪЛНИ

2.1. ТРЕПТЕНИЯ

2.1.1. Трептеливи движения – обща характеристика

Известно е, че в природата и техниката много често възникват движения, които в една или друга степен се повтарят с течение на времето. Движения, които се повтарят или приблизително се повтарят след равни интервали от време, се наричат **периодични движения**. Такива движения напр. са въртеливото движение на твърдо тяло с постоянна ъглова скорост, обикалянето на Земята около Слънцето, люлеенето на часовниковото махало и т.н. Характерно за движението на часовниковото махало е, че последното преминава винаги през равновесното си положение, където потенциалната му енергия в системата Земя–тяло е минимална. Такъв вид периодични движения на телата, които са свързани с преминаване през едно равновесно положение ту в една, ту в обратна посока, се наричат **механични трептения**.

Освен механичните трептения съществуват и други видове трептения – електромагнитни, електромеханични и др. Независимо от голямото разнообразие и произход на различните видове трептения всички те имат помежду си много общи свойства. Затова изучаването на един вид трептения позволява да се разберат явления от друг раздел на физиката, в основата на които се намират трептеливи процеси. В тази глава ще се спрем на механичните трептения.

При изучаване на трептеливите процеси се разглеждат преди всичко величини и съотношения, характеризиращи тяхната повторемост – законът за повторение на процеса; времето, след което системата идва в изходно състояние; най-големите отклонения, достигани от трептящата система от равновесното положение в процеса на трептението, и т.н. Състоянието на системата в даден момент от времето често пъти изобщо не представлява никакъв интерес.

Интервалът от време между две последователни преминавания на трептящата система през едно и също положение в една и съща посока се нарича **период** на трептението, или това е интервалът от време, за който трептеливото движение се повтаря напълно. Тогава, ако T е периодът на трептеливото движение, трептящата система в моментите t и $t + T$ се намира в еднакви състояния, т.е. положението и скоростта

ки нейни точки в тези моменти са еднакви. Математическите движения се изразяват с помощта на периодични функции на времето от вида

$$f(t) = f(t + nT), \quad (2.1.1)$$

където n е цяло положително число.

Честотата ν , реципрочна на периода на трептене, се нарича честота на трептението

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (2.1.2)$$

Честотата е физична величина, числено равна на броя на пълните трептения, извършвани за единица време. В системата SI честотата се измерва с единицата херц (Hz). Честотата е равна на 1 херц, ако за време 1 секунда се извършва едно пълно трептене.

2.1.2. Хармонично трептене

Един от най-простите видове трептения са т.нар. хармоничните трептения. Трептенията се наричат хармонични, ако величините x на каква да е величина се изменят с течение на времето t по синусов или косинов закон:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (2.1.3)$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \quad (2.1.4)$$

Уравнението (2.1.3) или (2.1.4) се нарича уравнение на хармонично трептене.

Представянето на хармоничното трептене чрез синусова или косинова функция в значителна степен е произволно и се определя от избора на тични съображения. В редица случаи известно предпочитание се дава на косиновото представяне на хармоничните трептения, което се възприема и в нашите по-нататъшни разглеждания

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.1.5)$$

Преходът от едната формула към другата се осъществява лесно чрез подходящия избор на началните стойности на величините φ_1 и φ_2 . Например, ако хармоничното трептене се описва със синусовата функция (2.1.3), то може да се представи и чрез косиновата функция по следния начин:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_1) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (2.1.6)$$

където $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$.

Величините A , ω_0 , φ с течение на времето остават постоянни и характеризират дадено трептение. Тъй като максималната стойност на косинуса е равна на единица, то максималната стойност, която може да има величината x , е равна на A . Тази постоянна величина A се нарича амплитуда на трептението. Тя е винаги положителна величина. Стойността на x се изменя в границите от $-A$ до A .

Величината $\Phi = (\omega_0 t + \varphi)$, която определя стойността на отклонението x в даден момент от времето t , се нарича фаза на трептението.

Постоянната величина φ , която е равна на фазата в началния момент от време $t = 0$, се нарича начална фаза на трептението.

Стойността на φ се определя от избора на началния момент от време.

Като се има предвид, че периодът на косинусовата функция е равен на 2π , периодът на хармоничното трептение може да се определи от условието

$$\omega_0(t + T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi,$$

откъдето

$$\omega_0 T = 2\pi, \quad T = 2\pi/\omega_0. \quad (2.1.7)$$

От (2.1.2) и (2.1.7) следва

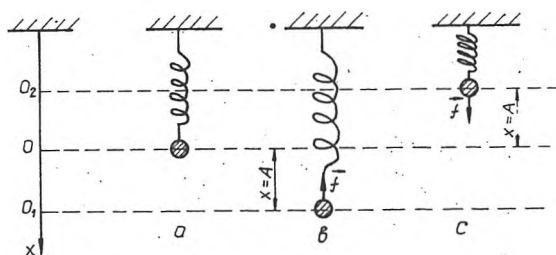
$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (2.1.8)$$

Величината ω_0 , равна на броя на трептенията, извършвани за 2π секунди, е възприето да се нарича кръгова честота на трептението. Когато се разглеждат механични трептения, величината $x = x(t)$ е отклонение на тялото от равновесното му положение.

Особената роля на хармоничните трептения във физиката и техниката се дължи на това, че всяко движение на телата около устойчивото равновесно положение в първо приближение може да се разглежда като хармонично трептение. Нека напр. едно тяло с маса m , разглеждано като материална точка, е закачено на стоманена пружина, чиято маса е значително по-малка от m и може да се пренебрегне. В състояние на покой тялото се намира в положение O (фиг.2.1,*a*). Когато тялото се отклони, напр. надолу на разстояние x от равновесното положение (фиг.2.1,*б*), като се опъне пружината, а след това се пусне, то ще започне да се движи ускорено нагоре под действието на еластичната сила

$$f = -kx, \quad (2.1.9)$$

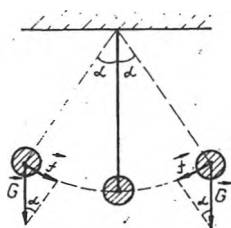
където k е характерна за пружината постоянна величина, наречена коефициент на еластичност. Знакът минус в (2.1.9) показва, че силата f е в противоположна посока на отклонението x .



Фиг. 2.1

приближаването на тялото към равновесното му положение тази стойност на еластичната сила намалява, а следователно понижението, с което се движи тялото, намалява и в точка O става нула. За сметка на придобитата вече кинетична енергия тя ще продължи своето движение нагоре, свивайки пружината. Цялата кинетична енергия на тялото се превърне в потенциална енергия на свитата пружина (фиг.2.1,в), тялото за миг спира, след което под действието на еластичната сила на свитата пружина връща отново към равновесното положение O и т.н. Характерна черта на тези разглеждания е това, че силата f е пропорционална на понижението x от равновесното положение и е насочена винаги в обратна посока на понижението. Такава сила се нарича връщаща сила.

Съществуват и нееластични сили от вида $f = -kx$ (фиг.2.2). Тези сили са свързани с деформацията на тялото и не зависят от скоростта му. Тези сили съществуват и в нееластични материали, които удовлетворяват условието $f = -kx$ (фиг.2.2) и изпълняват ролята на връщаща сила. Например връщаща сила при деформацията на часовниковото махало се дължи на компонентата на силата на тежестта G (фиг.2.2) $f = -G \sin \alpha \approx -kx$.



Фиг. 2.2

Такава сила независимо от тялото или частица, която се движи под действието на еластична сила се нарича квазиеластична. Характерна черта на силите от този вид е това, че коефициентът k е постоянна величина, наричана връщаща сила. Коефициентът k е постоянна величина, наричана връщаща сила.

Тялото или частица, която се движи под действието на еластична сила от вида $f = -kx$ по направление на опростено движение, се нарича линеен хармоничен осцилатор.

Уравнението за движение на тяло с маса m под действие на квазиеластична сила съгласно втория закон на Нютон има вида

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad (2.1.10)$$

където $d^2 x/dt^2$ е ускорението на тялото.

Нека последното уравнение представим по следния начин:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (2.1.11)$$

Тъй като коефициентът пред x е положителна величина ($k > 0$, $m > 0$), може да се положи

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (2.1.12)$$

Следователно уравнението за движение на тяло под действие на сила от вида (2.1.9) е

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.1.13)$$

Това е диференциално уравнение на хармоничното трептене. Ако уравнението на движение на каква да е материална точка или тяло може да се представи във вида (2.1.13), това показва, че разглежданото движение е хармонично трептене.

Не е трудно да се провери чрез две последователни диференцирания, че функциите (2.1.3) и (2.1.4) са решения на уравнението (2.1.13). Решение на горното уравнение е и функцията

$$x = A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t \quad (2.1.14)$$

като линейна комбинация на двете решение (2.1.3) и (2.1.4), където A_1 и B_1 са произволни константи.

Скоростта v на хармонично трептяща точка се намира, като (2.1.5) се диференцира спрямо времето

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.1.15)$$

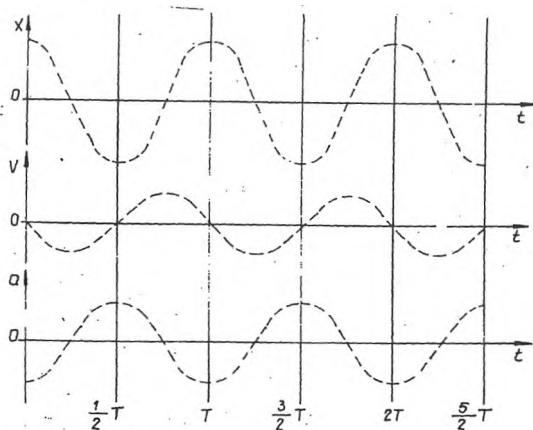
Или скоростта v се изменя с течение на времето по хармоничен закон с амплитуда $A\omega_0$. Като се сравнят (2.1.5) и (2.1.15), вижда се, че скоростта v изпреварва отклонението по фаза с $\pi/2$.

Уравнението за ускорението a на хармонично трептящата точка се намира чрез диференциране на (2.1.15):

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x, \quad (2.1.16)$$

$$a = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (2.1.17)$$

От (2.1.17) следва, че ускорението a също се изменя с течение на времето по хармоничен закон с амплитудата $A\omega_0^2$. Сравнението на (2.1.17) с (2.1.15) показва, че ускорението и отклонението се намират в противофаза. Това означава, че в момента, в който отклонението достига най-голяма положителна стойност, ускорението приема най-голяма отрицателна стойност и обратно.



Фиг. 2.3

На фиг.2.3 са представени графичните зависимости на x , v и a спрямо t .

2.1.3. Енергия на хармоничното трептене

Една хармонично трептяща точка в най-общия случай притежава както кинетична, така и потенциална енергия, като тяхната сума дава пълната ѝ механична енергия W :

$$W = W_k + W_p. \quad (2.1.18)$$

Кинетичната енергия в даден момент от времето t съгласно (2.1.15) е

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.1.19)$$

Видяхме, че при отклонение от равновесното положение на тялото започва да действа еластичната сила (2.1.9) и следователно то ще притежава потенциална енергия W_p . Като се има предвид връзката, която съществува между силата и потенциалната енергия

$$f = -\frac{dW_p}{dx}, \quad (2.1.20)$$

то потенциалната енергия, която притежава хармонично трептящата точка при отклонението ѝ от равновесното положение до x , ще бъде

$$W_p = \int_0^x kx dx,$$

или

$$W_p = \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.1.21)$$

Условно е прието, че в равновесното положение потенциалната енергия на хармонично трептящата точка е равна на нула.

Ако се заместят x и k с техните равни по (2.1.5) и (2.1.12), се получава изразът

$$W_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.1.22)$$

Както се вижда от (2.1.19) и (2.1.22), кинетичната и потенциалната енергия приемат само неотрицателни стойности, докато отклонението x приема както положителни, така и отрицателни стойности.

Сумирайки кинетичната и потенциалната енергия, намираме

$$W = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \quad (2.1.23)$$

Последната формула показва, че за хармонично трептяща точка с маса m пълната механична енергия е постоянна величина, пропорционална на квадрата на честотата на трептене и квадрата на амплитудата. Тя не зависи от времето, докато кинетичната енергия съгласно (2.1.19) и потенциалната енергия съгласно (2.1.22) зависят от времето t посредством

$-\varphi)$ и $\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$. Когато едната от тях се увеличава, другата намалява, или процесът трептене наистина е свързан с непрекъснат периодичен преход на енергията от потенциална в кинетична и обратно.

При това очевидно е, че максималната потенциална енергия се получава при максимално (амплитудно) отклонение от равновесното положение, е равна на пълната енергия. Също така максималната кинетична енергия, която получава хармонично трептене при преминаване през равновесното положение, е равна на пълната енергия. Ясно е, че разглежданата система е консервативна, т.е. механичната енергия се запазва постоянна величина. Затова се използват известните формули от тригонометрията

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

където за W_k и W_p могат да се представят във вида

$$W_k = \frac{1}{2} W \{1 - \cos[2(\omega_0 t + \varphi)]\} \quad (2.1.24)$$

$$W_p = \frac{1}{2} W \{1 + \cos[2(\omega_0 t + \varphi)]\}. \quad (2.1.25)$$

От формули се вижда, че трептенията на кинетичната и потенциалната енергия се извършват с честота 2 пъти по-голяма, отколкото честотата на хармонично трептящата точка.

Също пъти е важно да се знаят средните стойности на кинетичната \overline{W}_k и потенциалната \overline{W}_p енергия за един период. В такъв случай съгласно (2.1.19) при $\varphi = 0$ за \overline{W}_k се получава

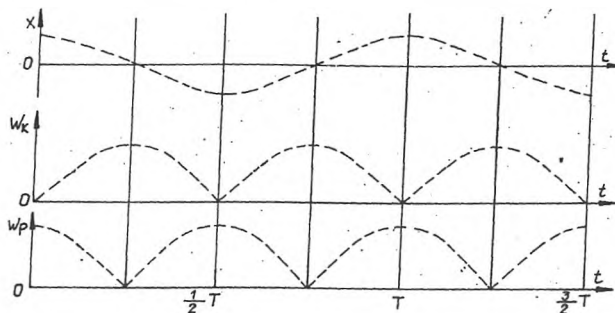
$$\overline{W}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2. \quad (2.1.26)$$

По подобен начин за \overline{W}_p се получава

$$\overline{W}_p = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2. \quad (2.1.27)$$

Следователно средната стойност на кинетичната и средната стойност на потенциалната енергия са равни помежду си и представляват половината от общата енергия:

$$\overline{W}_k = \overline{W}_p = \frac{1}{2} W.$$



Фиг. 2.4

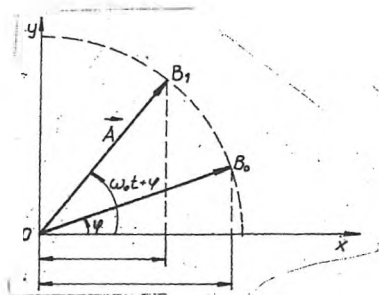
На фиг.2.4 са представени графичните зависимости $x = x(t)$, $W_k = W_k(t)$ и $W_p = W_p(t)$, като за простота е прието, че началната фаза $\varphi = 0$.

2.1.4. Представяне на хармоничните трептения

А. ВЕКТОРНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ХАРМОНИЧНОТО ТРЕПТЕНИЕ

За нагледно представяне на хармоничните трептения често пъти се използва векторното им представяне. В този случай хармоничното трептене се представя геометрично с помощта на т.нар. вектор на амплитудата \vec{A} в дадена равнина, големината на който е равна на амплитудата.

Това представяне се състои в следното. Нека си представим, че от началото O на координатната система xOy е прекаран векторът на амплиту-



Фиг. 2.5

който извършва равномерно въртливо движение около на-
 на координатната система с ъглова скорост ω_0 в обратна
 часовниковата стрелка (фиг.2.5). Нека ъгълът, който обра-
 чалния момент от времето векторът \vec{A} с оста Ox , е φ . Не-
 проекция върху Ox е

$$x = A \cos \varphi. \quad (2.1.28)$$

елено време t векторът \vec{A} се завърта на ъгъл $\omega_0 t$ и ъгъ-
 го сключва с оста Ox , се изменя и става равен на $\omega_0 t + \varphi$.
 ята му в момента t върху Ox се изменя също и придобива

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.1.29)$$

впада с (2.1.5). Или проекцията на вектора на амплитудата
 абсцисната ос се изменя по хармоничен закон.

дователно проекцията на края на вектора на амплитуда-
 чка B_0) върху оста Ox извършва хармонично трептение с
 да A , равна на големината на вектора \vec{A} , с кръгова честота
 на ъгловата скорост на въртене на вектора на амплитудата
 ална фаза φ , равна на ъгъла между вектора \vec{A} и оста Ox в
 и момент от време.

такъв начин кръговата честота на хармоничното трепте-
 чавя следната интерпретация: това е постоянната ъглова
 на въртене на вектора на амплитудата, представляващ хар-
 го трептение.

ълът Φ , който образува в даден момент от времето векторът
 исната ос Ox , дава геометричното изображение на фазата
 ничното трептение

$$\Phi = \omega_0 t + \varphi. \quad (2.1.30)$$

) се вижда, че кръговата честота може да се разглежда като
 с която се изменя фазата, изразена в радиани:

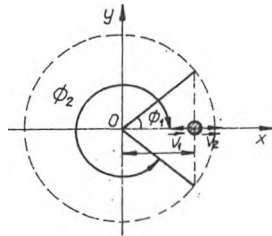
$$\omega_0 = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.1.31)$$

и описание на хармоничното трептение, което извършва да-
 риална точка, с известно предимство се ползува фазата на
 нето пред отклонението на точката от равновесното поло-
 Гова е така, защото фазата при известни амплитуда и че-
 значно определя отклонението, скоростта и ускорението
 нично трептящата точка. Обратно, на дадено отклонение

x отговарят две стойности на фазата Φ_1 и $\Phi_2 = 2\pi - \Phi_1$ (фиг.2.6), а следователно и две скорости v_1 и v_2 , които съгласно (2.1.15) са съответно

$$\begin{aligned} v_1 &= A\omega_0 \cos\left(\Phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -A\omega_0 \sin \Phi_1, \\ v_2 &= A\omega_0 \cos\left(2\pi - \Phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = A\omega_0 \sin \Phi_1. \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Ускорението, както видяхме, е винаги в противоположна посока на отклонението и еднозначно се определя от неговата големина (2.1.16).



Фиг. 2.6

В най-общия случай въз основа на фазата на хармоничното трептене могат да се направят определени изводи при решаване на някои задачи. Например достигат ли две хармонични трептения максимално отклонение от равновесното положение едновременно или не? Ясно е, че ако фазите им съвпадат, те достигат максималното си отклонение едновременно. Тъй като при изменение на фазата с 2π състоянието на хармонично трептящата система не се изменя, е прието фазите да се наричат съвпадащи и ако те се

различават помежду си с четно число π

$$\Delta\Phi = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.1.33)$$

Тогавата се казва, че съответните хармонични трептения са синфазни.

Ако фазите на хармоничните трептения се различават с нечетно число π ,

$$\Delta\Phi = (2n + 1)\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.1.34)$$

за такива трептения е прието да се казва, че имат противоположни фази или просто, че трептенията се извършват в противофаза.

Б. КОМПЛЕКСНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ХАРМОНИЧНОТО ТРЕПТЕНИЕ

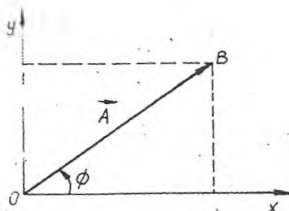
Установената връзка между хармоничното трептене и въртеливото движение на вектор с големина, равна на амплитудата на трептението, дава възможност последното да се представи с помощта на комплексни числа. Такова представяне в редица случаи позволява да се избегнат дълги тригонометрични преобразования и да се достигне до крайния резултат по сравнително кратък път.

Нека разгледаме комплексна равнина с реална ос Ox и имагинарна ос Oy (фиг.2.7). На всяка точка от тази равнина, например B , както е известно, съответствува комплексно число

$$Z = x + iy. \quad (2.1.35)$$

Модулът на радиус-вектора \vec{A} , излязъл от началото на координатната система към точката B , е модулът на това комплексно число:

$$|Z| = A = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.1.36)$$



Фиг. 2.7

Абсцисата x и ординатата y се определят чрез големината на \vec{A} и ъгъла φ , който сключва \vec{A} с Ox :

$$x = A \cos \Phi, \quad (2.1.37)$$

$$y = A \sin \Phi. \quad (2.1.38)$$

Очевидно от (2.1.37) и (2.1.38) следва

$$\Phi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right). \quad (2.1.39)$$

Следователно (2.1.35) придобива вида

$$Z = A(\cos \Phi + i \sin \Phi). \quad (2.1.40)$$

Това може да се има предвид формулата на Ойлер

$$\cos \Phi \pm i \sin \Phi = e^{\pm i\Phi}, \quad (2.1.41)$$

$$Z = Ae^{i\Phi}. \quad (2.1.42)$$

При равномерно въртене на радиус-вектора \vec{A} с ъглова скорост ω аргументът Φ е

$$\Phi = \omega_0 t + \varphi. \quad (2.1.43)$$

Във всеки случай реалната част на комплексното число ще се изменя спрямо време по хармоничен закон

$$\operatorname{Re}(Z) = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.1.44)$$

Следователно всяко хармонично трептение, зададено със закона (2.1.5), може да се представи с комплексната функция

$$Z = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}, \quad (2.1.45)$$

реалната част на която ни дава познатия закон за хармоничните трептения. Условно, при по-нататъшните разглеждания комплексното число Z ще замества с отклонението x , като се има предвид, че хармоничното трептливо движение се описва с реалната част на това комплексно число.

Във формулата (2.1.45) величината A има смисъл на амплитудата на хармоничното трептение, ако е реално число. Ако A е комплексно число от вида

$$A = A_0 e^{i\varphi_0}, \quad (2.1.46)$$

където A_0 и φ_0 са реални числа, то законът на хармоничното трептение придобива вида

$$x = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi)}. \quad (2.1.47)$$

В този случай A се нарича комплексна амплитуда. Вижда се, че модулът A_0 на комплексната амплитуда A представлява амплитудата на реалното трептение, а φ_0 – началният му фазов ъгъл. Като се има предвид това, не е трудно да се види, че квадратът на амплитудата на трептението A_0 може да се представи във вида

$$A_0^2 = x x^*. \quad (2.1.48)$$

Тук $x^* = A^* e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}$ и $A^* = A_0 e^{-i\varphi_0}$ са комплексно спрегнатите функции на x и A . Това показва, че при получаване на реални изрази, съдържащи квадрата на амплитудата (например изразът за енергия на хармоничното трептение), трябва да се има предвид, че вместо повдигане на квадрат следва да се умножат комплексно спрегнатите величини

$$x x^* = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)} A e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} = A^2. \quad (2.1.49)$$

Комплексното представяне на хармоничните трептения не може да се използва в случаите, когато е необходимо да се умножат величини, изменящи се с времето по хармоничен закон, тъй като

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \neq \operatorname{Re}\{\exp[i(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)]\}. \quad (2.1.50)$$

При по-нататъшните разглеждания ще бъде използвано предимно комплексното представяне на хармоничните трептения.

2.1.5. Събиране на трептения с еднакви направления

Често пъти в природата и техниката дадено тяло е принудено да извършва едновременно две или повече трептения. В този случай то извършва едно трептение, което е резултат от събирането на тези трептения. Събирането на трептения е частен случай на събиране на движения. Накратко ще разгледаме само някои частни случаи на събиране на хармонични трептения.

А. СЪБИРАНЕ НА ХАРМОНИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ С ЕДНАКВИ НАПРАВЛЕНИЯ И ЕДНАКВИ ЧЕСТОТИ

Нека една материална точка извършва едновременно две хармонични трептения в еднакво направление и с еднаква кръгова честота ω_0 , но с различни амплитуди A_1 и A_2 и начални фази φ_1 и φ_2 :

$$x_1 = A_1 \exp[i(\omega_0 t + \varphi_1)], \quad x_2 = A_2 \exp[i(\omega_0 t + \varphi_2)]. \quad (2.1.51)$$

Отклонението x на резултантното трептение в даден момент от време t ще бъде

$$x = x_1 + x_2 = [A_1 \exp(i\varphi_1) + A_2 \exp(i\varphi_2)] \exp(i\omega_0 t). \quad (2.1.52)$$

Величината

$$A_0 = A_1 \exp(i\varphi_1) + A_2 \exp(i\varphi_2) \quad (2.1.53)$$

не зависи от времето и (2.1.52) придобива вида

$$x = A_0 \exp(i\omega_0 t). \quad (2.1.54)$$

Следователно, както се вижда, резултантното трептение е хармонично трептение, което има същата честота ω_0 и комплексна амплитуда A_0 , изразяваща се с (2.1.53). Ако изразът (2.1.53) се умножи с комплексно спрегнатата величина

$$A_0^* = A_1 \exp(-i\varphi_1) + A_2 \exp(-i\varphi_2) \quad (2.1.55)$$

и се премине към тригонометрични функции съгласно (2.1.41), се получава

$$A^2 = A A^* = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (2.1.56)$$

или

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (2.1.57)$$

Последната формула показва, че амплитудата A на резултантното трептение зависи от амплитудите A_1 и A_2 на събираемите трептения и от фазовата разлика $\varphi_1 - \varphi_2$ между двете трептения.

Ако

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 2n\pi, \quad (2.1)$$

където n е цяло число, което може да има стойности 0, 1, 2, 3, .

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$$

и от (2.1.57) се получава

$$A_{\max} = A_1 + A_2, \quad (2.1)$$

т.е. резултантната амплитуда има максимална стойност, която е равна на сумата от амплитудите на събираните трептения. този случай се казва, че резултантното трептене е усилено, а съответната фазова разлика отговаря на еднакви фази на двете трептения.

При

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm(2n + 1)\pi \quad (2.1)$$

където n е цяло число, което може да има стойности 0, 1, 2, 3, .

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$$

и от (2.1.57) следва

$$A_{\min} = |A_1 - A_2|, \quad (2.1)$$

т.е. резултантната амплитуда е минимална и е равна на абсолютната стойност на разликата от амплитудите на събираните трептения. За този случай се казва, че резултантното трептене е отслабено и съответната фазова разлика отговаря на противни фази на двете трептения. В частния случай, когато $A_1 = A_2$, при събирането на трептенията се получава трептене с два пъти по-голяма амплитуда, ако е изпълнено условието (2.1.58), или нула, ако е изпълнено условието (2.1.60).

До същите резултати може да се достигне, като се използва тригонометричното представяне на хармоничните трептения (2.1.51).

Сравнително просто и нагледно се извършва събирането, като се използва векторното представяне на хармоничното трептене.

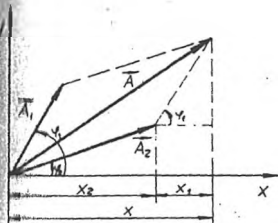
Нека двете трептения (2.1.51) представим с помощта на векторите на амплитудите \vec{A}_1 и \vec{A}_2 и намерим тяхната сума (фиг.2.8)

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2. \quad (2.1.6)$$

Тъй като векторите \vec{A}_1 и \vec{A}_2 се въртят с една и съща ъглова скорост ω_0 , то и резултантният вектор \vec{A} в (2.1.62) ще се върти със същата

Пълна скорост ω_0 . Проекцията на вектора \vec{A} върху оста Ox е равна на сумата от проекциите x_1 и x_2 на векторите на амплитудите A_1 и A_2 на събираемите трептения

$$x = x_1 + x_2. \quad (2.1.63)$$



Фиг. 2.8

Следователно векторът \vec{A} представлява резултантното трептение, което е хармонично трептение със същата кръгова честота ω_0 , както на събираемите трептения, с амплитуда A и начална фаза φ .

От фиг.2.8 се вижда, че началната фаза φ и амплитудата A могат да се определят съответно по формулите

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (2.1.64)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (2.1.65)$$

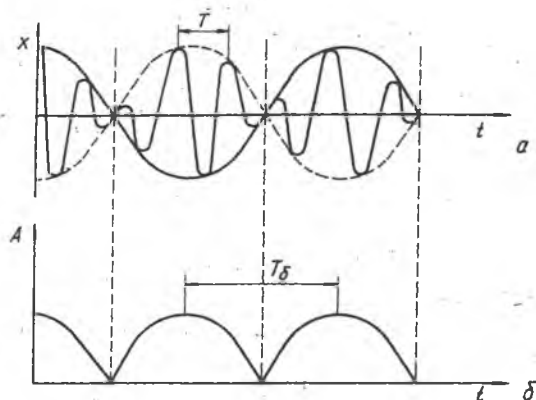
Б. СЪБИРАНЕ НА ХАРМОНИЧНИ ТРЕПЕНИЯ С ЕДНАКВИ НАПРАВЛЕНИЯ, НО С РАЗЛИЧНИ ЧЕСТОТИ

Нека дадена материална точка е принудена да извършва едновременно две хармонични трептения с еднакви направления, но с различни честоти $\omega_1 \neq \omega_2$, различни амплитуди $A_1 \neq A_2$ и еднакви начални фази $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Тогава фазовата разлика в даден момент t ще бъде $(\omega_1 - \omega_2)t$. За резултантната амплитуда съгласно (2.1.57) се получава

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}. \quad (2.1.66)$$

Последната формула показва, че амплитудата на резултантно трептение се мени периодично с времето с кръгова честота $\omega = \omega_1 - \omega_2$ от стойности $A_{\max} = A_1 + A_2$ до $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ и следователно резултантното трептение не е хармонично трептение.

Особен интерес представлява частният случай, когато двете трептения са с еднакво направление и с близки честоти. Резултантното трептение при тези условия може да се разглежда като хармонично трептение с относително бавно изменяща се амплитуда. Такова трептение се нарича биене.



Фиг. 2.9

Нека честотата на едно трептение е $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$, а честотата на второто трептение е $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$. По условие $\Delta\omega \ll \omega_0$. Освен това нека амплитудите на двете трептения да приемем за еднакви и равни на A_0 , а началните им фази равни на нула. Тогава

$$x_1 = A_0 \exp[i(\omega_0 + \Delta\omega)t]$$

$$x_2 = A_0 \exp[i(\omega_0 - \Delta\omega)t].$$

При събирането на тези две трептения се получава

$$x = A_0[\exp(i\Delta\omega t) + \exp(-i\Delta\omega t)] \exp(i\omega_0 t). \quad (2.1.67)$$

Реалната част на това комплексно число е

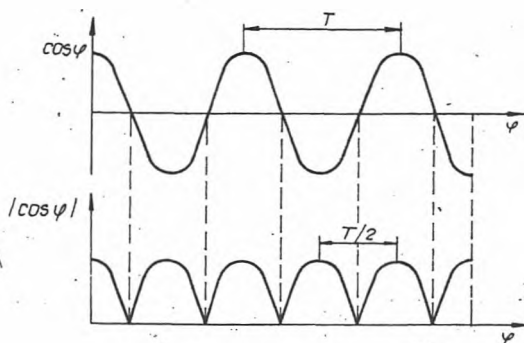
$$x = A \cos \omega_0 t, \quad (2.1.68)$$

където

$$A = 2A_0 |\cos(\Delta\omega t)| \quad (2.1.69)$$

е относително бавно изменяща се с времето величина спрямо множителя $\cos \omega_0 t$. Това ни дава основание да разглеждаме трептението (2.1.68) като хармонично трептение с честота ω_0 , амплитудата на което сравнително бавно се мени с времето по хармоничен закон.

Графичните зависимости на отклонението x (2.1.68) и амплитудата A (2.1.69) в зависимост от времето са показани на фиг.2.9.



Фиг. 2.10

Функцията (2.1.69) е периодична функция с честота, два пъти по-голяма от честотата, стояща под знака на модула, т.е. с честота $2\Delta\omega$. И наистина това става ясно, като се сравнят графичните зависимости на функциите $\cos \varphi$ и $|\cos \varphi|$ в зависимост от φ (фиг.2.10).

Следователно честотата на бавно изменящата се амплитуда, която се нарича честота на биенето ω_δ , е равна на разликата от честотите на трептенията, които се събират

$$\omega_\delta = \omega_1 - \omega_2 = 2\Delta\omega. \quad (2.1.70)$$

В такъв случай периодът на биене е

$$T_\delta = \frac{2\pi}{2\Delta\omega} = \frac{\pi}{\Delta\omega}. \quad (2.1.71)$$

По биенията могат да се откриват извънредно малки разлики в честотите. Това дава възможност биенията да се използват в разнообразни уреди за измервания на честоти, капацитети, индуктивност и др.

Това, че в резултат на събирането на две хармонични трептения се получава нехармонично трептене, показва че, обратно, всяко сложно трептене практически може да се представи като сума от краен брой хармонични трептения.

Теоретично се доказва, че една периодична функция

$$x = f(\omega_0 t)$$

може да се представи като безкраен ред

$$x = A_0 + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots, \quad (2.1.72)$$

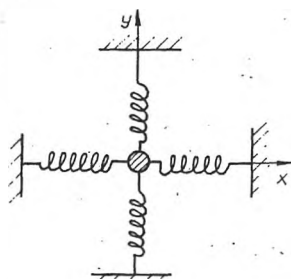
който се нарича ред на Фурие. Следователно всяко трептене може да се представи като сума от хармонични трептения с честоти, кратни на една основна честота.

В. СЪБИРАНЕ НА ХАРМОНИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ В ДВЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИ НАПРАВЛЕНИЯ

Досега бяха разгледани трептящи системи, състоянието на които се определя от една координата. За описание на трептеливото движение в тези случаи, както видяхме, беше необходимо да се определи законът за изменението на една-единствена координата на трептящото тяло – например координатата x . Такава система се казва, че има една степен на свобода. Броят на независимите координати, необходими за описание състоянието на дадена система, се нарича брой на степените на свобода. Ако трептящото тяло притежава повече от една степен на свобода, то при трептенята могат да се изменят всички координати, съответстващи на степените на свобода на тялото. Ще разгледаме един от най-простите случаи, когато трептението на дадена материална точка с определена маса m се извършва в една равнина. Такъв е случаят например, когато тяло с маса m е подложено на едновременното действие на четири еластични пружини в направлението на две взаимно перпендикулярни оси Ox и Oy (фиг.2.11). За простота приемаме, че пружините са еднакви. Очевидно трептящата система тук ще представлява система с две степени на свобода. Тялото е принудено да участва едновременно в две взаимно перпендикулярни хармонични трептения

с еднакви честоти. Резултантното движение ще се извършва по една или друга траектория, видът на която, както ще видим, зависи от съотношението на амплитудите на двете трептения и от разликата в началните им фази.

И така нека една материална точка е принудена да извършва едновременно две хармонични трептения в две взаимно перпендикулярни направления по осите x и y (фиг.2.11) с еднаква честота ω_0 и различни амплитуди A и B . Нека изберем началото на



Фиг. 2.11

отчитане на времето така, че началната фаза на трептението по оста x да е нула, а началната фаза на трептението по y да е φ . Тогава трептенията на точката по направление на оста x и в направлението на оста y ще се дават съответно от уравненията

$$x = A \cos \omega_0 t, \quad y = B \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.1.73)$$

От математична гледна точка получената система уравнения може да се разглежда като параметрично представяне на траекторията, по която ще се движи разглежданата материална точка (параметър е времето t).

За получаване на уравнението на траекторията в обикновена форма (променливи само x и y) е необходимо от уравнения (2.1.73) да се елиминира времето t .

От първото уравнение намираме

$$\cos \omega_0 t = \frac{x}{A} \quad (2.1.74)$$

или

$$\sin \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (2.1.75)$$

От второто уравнение на (2.1.73) следва

$$\frac{y}{B} = \cos \omega_0 t \cos \varphi - \sin \omega_0 t \sin \varphi. \quad (2.1.76)$$

Чрез заместване на $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ в последното уравнение с техните равни се получава

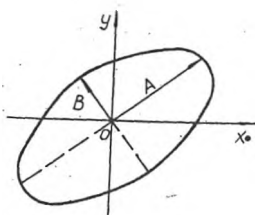
$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi. \quad (2.1.77)$$

След повдигане в квадрат двете страни на уравнението (2.1.77) и малки преобразования се достига до следното уравнение:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (2.1.78)$$

Както е известно от аналитичната геометрия, полученото уравнение е уравнение на елипса, осите на която не съвпадат с координатните оси x и y .

Последната формула показва, че трептящата точка ще се движи по елипса с полуоси A и B (фиг.2.12). Резултантното трептение се нарича елиптическо поляризирано трептение.



Фиг. 2.12

има стойности 0, 1, 2, 3, ... Тогава уравнението (2.1.78) придобива вида

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0, \quad (2.1.8)$$

или

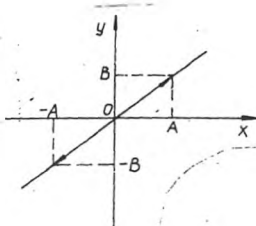
$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0. \quad (2.1.8)$$

Оттук се получава уравнението

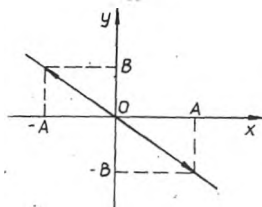
$$y = \frac{B}{A}x. \quad (2.1.8)$$

По такъв начин елипсата при фазова разлика, равна на нула или четно число π , се изразжда в права линия. Тя минава през началото на координатната система xOy и лежи в първия и третия квадрант (фиг.2.13).

Третиящата точка се премества по тази права, при което разстоянието ѝ до началото на координатната система (равновесното



Фиг. 2.13



Фиг. 2.14

положение) е $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Като се заместят x и y с техните равни от (2.1.73) и се има предвид (2.1.79), се получава

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega_0 t. \quad (2.1.83)$$

По такъв начин резултантното движение се явява хармонично трептене с честота, равна на честотата на събираните трептения ω_0 , и амплитуда, равна на $\sqrt{A^2 + B^2}$.

2. При фазова разлика, равна на нечетно число π ,

$$\varphi = \pm(2n + 1)\pi, \quad (2.1.84)$$

където $n = 0, 1, 2, \dots$, уравнението (2.1.78) придобива вида

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = 0. \quad (2.1.85)$$

От последното уравнение се получава

$$y = -\frac{B}{A}x, \quad (2.1.86)$$

което е уравнение на права, минаваща през началото на координатната система, но лежи във втория и четвъртия квадрант (фиг.2.14). Не е трудно да се види, че и в този случай резултантното движение е хармонично трептене с честота ω_0 и амплитуда $\sqrt{A^2 + B^2}$ и се описва от уравнение (2.1.83). Такива трептения се наричат **линейни** и **поляризиранни**.

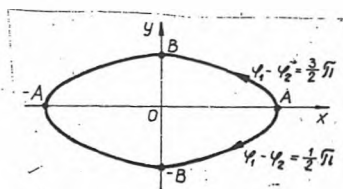
3. Нека разликата в началните фази на двете трептения е нечетно число $\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm(2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad (2.1.87)$$

където $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

В този случай уравнението (2.1.78) преминава в

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (2.1.88)$$



Фиг. 2.15

Последната формула показва, че трептящата точка ще се движи по елипса с полуоси A и B , съвпадащи с x и y (фиг.2.15).

Посоката на движение на трептящата точка по елипсата зависи от стойността на разликата в началните фази на двете трептения.

Така например при $n = 0$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, когато $t = 0$, координатите на движещата се точка са $x = A$ и $y = 0$, а когато $t = \frac{T}{4}$ - $x = 0$ и $y = -B$. Следователно материалната точка се движи в посока по часовниковата стрелка. При $n = 1$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 3\frac{\pi}{2}$ координатите на движещата се точка при $t = 0$ и $t = \frac{T}{4}$ са съответно $x = A$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = B$ - движението по елипсата е в посока, обратна на часовниковата стрелка. Такова е движението и в случая, когато $n = 0$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$. При $n = 1$, $\varphi_1 - \varphi_2 = -3\frac{\pi}{2}$ движението е по часовниковата стрелка.

Ако амплитудите на двете трептения са равни $A = B = R$, то уравнението (2.1.88) ще бъде уравнение на окръжност $x^2 + y^2 = R^2$. Такива трептения се наричат кръгово поляризирани.

Г. ФИГУРИ НА ЛИСАЖУ

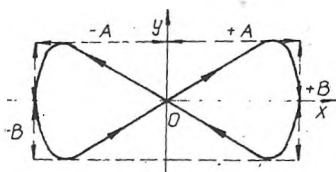
При събиране на хармонични трептения с различни честоти и във взаимноперпендикулярни направления се получават движения, чиито траектории представляват сложни фигури, известни под името фигури на Лисажу. Формата на тези фигури зависи от отношението на амплитудите, отношението на честотите и разликата между началните фази на трептенията.

Така например при отношение на честотите $\omega_{0x} : \omega_{0y} = 1 : 2$ и начална фазова разлика, равна на $\frac{\pi}{2}$, уравненията на събираните хармонични трептения имат вида

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_{0x}t) \\ y &= B \cos\left(2\omega_{0x}t + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.1.89)$$

или

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_{0x}t) \\ y &= -B \sin(2\omega_{0x}t). \end{aligned} \quad (2.1.90)$$



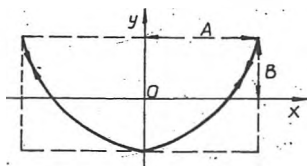
Фиг. 2.16

Не е трудно да се види, че за интервал време от $t = 0$ до $t = \frac{T}{2}$ точката ще се премести по оста x от едното крайно положение $x = A$ до другото $x = -A$. За същото това време точката, излизайки от нулевото положение, по оста y успява да достигне едното крайно положение $y = -B$ (при

$t = \frac{T}{8}$), преминава през началото на координатната система и достига другото крайно положение $y = B$ (при $t = \frac{3T}{8}$), след което се връща в нулевото положение (фиг.2.16).

При отношение на честотите 1:2 и начална фазова разлика, равна на нула, траекторията се изразжда в незатворена крива (фиг.2.17), по която точката се движи ту в една, ту в противоположна посока.

Може да се покаже, че колкото е по-близка до единица рационалната дроб, която изразява отношението на честотите на трептенията, толкова е по-сложна съответната фигура на Лисажу. В най-простия случай, когато двете трептения са с еднакви честоти, фигурите на Лисажу могат да бъдат елипса, окръжности или прави линии, които случаи бяха разгледани.



Фиг. 2.17

2.1.6. Затихващи трептения

Досега беше разгледано хармоничното трептене на дадена система при наличие на една-единствена сила от вида $f = -kx$. В тези случаи трептенията на системата е прието да се наричат свободни. В природата, строго казано, такива трептения не съществуват. Това е така, защото в реалните системи винаги действуват и сили от друг вид. Това са силите на взаимодействие на телата от разглежданата система с околната среда. Взаимодействието на трептящите тела с околната среда е един доста сложен процес, крайният резултат от който е намаляването на енергията на трептението. Тя преминава в друг вид енергия, например топлинна енергия. В рамките на класическата механика намаляването на енергията може да се опише, като се предположи, че тези сили са сили на триене или по-общо – съпротивителни сили.

В резултат на намаляването на енергията на трептящата точка, както следва от формула (2.1.23), амплитудата на трептението ще намалява с времето. Трептения, които се извършват с непрекъснато намаляване на амплитудата, се наричат затихващи. Свободното трептене на една механична система е винаги затихващо. Затихващите трептения не са хармонични, тъй като амплитудата вече не е постоянна величина. Условно обаче тази величина се запазва при затихващите трептения, като под амплитуда се разбира най-голямото отклонение, което достига трептящата точка за време един период

на трептението. Строго погледнато, същото се отнася и за периода и честотата, тъй като трептеливото движение не се повтаря напълно през еднакви интервали от време.

Нека разгледаме по-подробно случая, когато съпротивителната сила, която причинява затихването, е пропорционална на скоростта v на трептящата материална точка

$$f_c = -rv = -r \frac{dx}{dt}, \quad (2.1.91)$$

където r е константа, наречена коефициент на съпротивление. Знакът минус показва, че силата на съпротивлението f_c и скоростта v имат противоположни посоки. Този случай е най-важният за практиката, защото той се отнася за съпротивителна сила на средата както при наличието на вътрешно триене, така и при образуването на еластични вълни, които отнасят със себе си част от енергията на трептящата система.

Върху материалната точка действа и сила от вида (2.1.9). Следователно общата сила, която действа на трептящата точка, е

$$f = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (2.1.92)$$

Уравнението за движение на материална точка с маса m съгласно втория закон на Нютон придобива вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx, \quad (2.1.93)$$

или

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (2.1.94)$$

Ако се въведат означенията

$$\frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2,$$

(2.1.94) се записва по следния начин:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.1.95)$$

Последното уравнение е диференциалното уравнение на разглежданото движение.

За неговото решение ще използваме въведената комплексна показателна функция за хармоничното трептене. Ако нямаше съпротивителна сила ($r = 0$), решението на диференциалното уравнение би било от вида

$$x = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}, \quad (2.1.96)$$

където A е постоянната амплитуда на хармоничното трептене, а ω_0 е неговата честота. При наличие на съпротивителни сили амплитудата, както видяхме, намалява с течение на времето, т.е.

$$A = A(t), \quad (2.1.97)$$

като и честотата на затихващото трептене придобива друга стойност $-\omega$.

Нека допуснем, че решението на уравнението (2.1.95) е от вида

$$x = A(t)e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (2.1.98)$$

За първата и втората производна на (2.1.98) се получава

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}e^{i(\omega t + \varphi)} + i\omega Ae^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (2.1.99)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2A}{dt^2}e^{i(\omega t + \varphi)} + 2i\omega \frac{dA}{dt}e^{i(\omega t + \varphi)} - \omega^2 Ae^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (2.1.100)$$

След заместването на (2.1.98), (2.1.99) и (2.1.100) в (2.1.95) и малки преобразования се получава следното комплексно уравнение:

$$\frac{d^2A}{dt^2} + 2i\omega \frac{dA}{dt} - \omega^2 A + 2\beta \left(\frac{dA}{dt} + i\omega A \right) + \omega_0^2 A = 0. \quad (2.1.101)$$

За да бъде изпълнено това уравнение при всяка стойност на времето t , необходимо е поотделно неговата реална и имагинерна част да бъдат равни на нула:

$$\frac{d^2A}{dt^2} + 2\beta \frac{dA}{dt} + (\omega_0^2 - \omega^2)A = 0, \quad (2.1.102)$$

$$\frac{dA}{dt} + \beta A = 0. \quad (2.1.103)$$

От (2.1.103) следва

$$\frac{dA}{A} = -\beta dt. \quad (2.1.104)$$

След интегриране на (2.1.104) се получава

$$\ln A = -\beta t + \text{const.} \quad (2.1.105)$$

За определяне на интеграционната константа се използват началните условия, а именно: в началния момент от време $t = 0$ амплитудата на трептението има максимална стойност $A = A_0$. Следователно

$$\text{const} = \ln A_0. \quad (2.1.108)$$

Или

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\beta t, \quad (2.1.109)$$

откъдето следва

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (2.1.110)$$

Не е трудно да се провери, че (2.1.108) удовлетворява и (2.1.109). И наистина

$$\frac{dA}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t},$$

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t}.$$

Като се заместят в (2.1.102), получава се

$$\beta^2 A_0 e^{-\beta t} - 2\beta^2 A_0 e^{-\beta t} + (\omega_0^2 - \omega^2) A_0 e^{-\beta t} = 0. \quad (2.1.111)$$

Нещо повече, от (2.1.109) се получава следната връзка между честотата на затихващите трептения ω и величините ω_0 и β :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (2.1.112)$$

Следователно уравнението

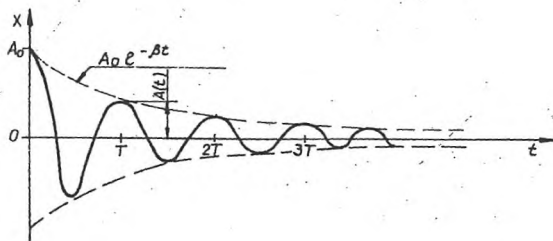
$$x = A_0 e^{-\beta t} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (2.1.113)$$

е решение на диференциалното уравнение (2.1.95). То показва, че разглежданото движение представлява трептене, чиято амплитуда намалява с нарастването на времето по експоненциален закон. Честотата му се определя от (2.1.112). Или уравнението (2.1.113) е уравнение на затихващото трептене.

Периодът на затихващото трептене по определение е времето T (2.1.110) ще бъде

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.1.114)$$

Тази формула показва, че за дадена трептяща система (величините ω_0 и β са постоянни) периодът на затихващото трептене е постоянна величина, т.е. затихващите трептения са изохро-



Фиг. 2.18

На фиг.2.18 е показана графичната зависимост на затихващо трептене при начална фаза $\varphi = 0$. С пунктирна линия е показана зависимостта на амплитудата на трептението от времето.

Ако се предположи, че на трептящата система не действа съпротивителна сила, т.е. $\beta = 0$, съгласно (2.1.110) и (2.1.111) би се получило незатихващо трептене с постоянна амплитуда A_0 и кръгова честота ω_0 . Свободното трептене на една система при $\beta = 0$ се нарича собствено трептене. Следователно ω_0 е кръговата честота на собственото трептене на материалната точка, а периодът му е

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.1.113)$$

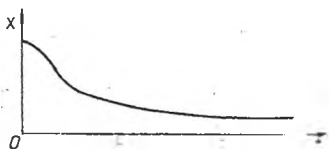
Както се вижда, периодът на затихващото трептене T е винаги по-голям от периода на собственото трептене T_0 :

$$T > T_0. \quad (2.1.114)$$

При това от (2.1.112) се вижда, че колкото β е по-голямо, толкова периодът на затихващото трептене ще бъде по-голям.

В случай, че $\beta \geq \omega_0$, физичната величина ω , определена чрез (2.1.110), и съответно периодът, определен чрез (2.1.112), нямат смисъл. Тогава решението на диференциалното уравнение (2.1.95) не е уравнение (2.1.111), а уравнение, което показва, че движението престава да бъде периодично, както се казва, движението става аperiodично (фиг.2.19).

Съгласно формула (2.1.108) амплитудата на едно затихващо трептене ще бъде равна на нула след безкрайно дълго време. На



Фиг. 2.19

практика обаче амплитудата става равна на нула за крайно време. Наистина, когато амплитудата на трептение на една макросистема стане от порядъка на атомните размери, тя може да се счита равна на нула.

Величината β , която определя бързината на намаляването на амплитудата, се нарича коефициент на затихването.

Времето τ , за което амплитудата намалява e пъти, се нарича време на релаксацията. Съгласно (2.1.108)

$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e,$$

откъдето

$$\beta\tau = 1$$

или

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (2.1.115)$$

Следователно коефициентът на затихване β е величина, числено равна на реципрочната стойност на времето τ , за което амплитудата на трептението намалява e пъти.

За характеризирание процеса на намаляване на амплитудата често се използва и величината λ , наричана логаритмичен декремент на затихването. Последният е числено равен на логаритъма на отношението на две последователни амплитуди, отделени една от друга с време, равно на периода T на трептение:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (2.1.116)$$

От (2.1.115) и (2.1.116) следва

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{n}, \quad (2.1.117)$$

където $n = \frac{T}{\tau} = \tau\nu$ е очевидно броят на трептенията за времето τ . Следователно може да се каже, че логаритмичният декремент на затихване е величина, числено равна на реципрочната стойност на броя на трептенията, за които амплитудата на трептенията намалява e пъти.

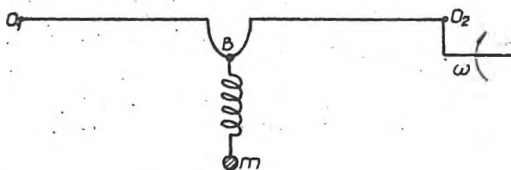
Във връзка със затихването на трептенията на реалните механични системи в практиката се срещат два вида задачи. При първия вид е необходимо трептенията да се поддържат незатихващи. Това може да се осъществи само ако в трептящата система непрекъснато

се внася отвън механична енергия, която да компенсира загубената част поради наличието на съпротивителни сили. Например на трептящата система при часовниците непрекъснато се подава енергия за сметка на енергията на навитата пружина или енергията на някакво друго устройство.

При втория вид задачи е необходимо трептенията да станат силно затихващи. Такива са случаите например при електричните измерителни апарати, аналитичните везни и др. За да се направят трептенията силно затихващи, използват се различни механични и електромагнитни спирални системи.

2.1.7. Принудени трептения: уравнение, амплитуда, резонанс

Трептенията на дадено тяло или система, които се извършват освен под действието на въртяща сила от вида (2.1.9) и съпротивителна сила от вида (2.1.91) още и под действието на външна периодично променлива сила, се наричат принудени трептения. Външната сила, под действието на която възникват принудените трептения, се нарича принуждаваща сила. Нека например едно тяло с маса m е закачено на пружина, която в горния си край е закрепена в ексцентричната точка B на оста O_1O_2 (фиг. 2.20). При въртенето на оста тялото ще извършва принудени трептения.



Фиг. 2.20

Установено е опитно, че честотата на принудените трептения е равна на честотата на външната периодично променлива сила, а амплитудата на принудените трептения отначало нараства, докато се установи една постоянна с времето амплитуда.

Нека разгледаме един от най-простите случаи на принудени трептения, когато външната принуждаваща сила се мени с времето по хармоничен закон:

$$f_{\text{вн}} = f_0 e^{i\omega t}, \quad (2.1.118)$$

където f_0 е нейната амплитуда, а ω кръговата честота. Тогава общата сила, която действа върху дадена материална точка, ще бъде $-kx - r \frac{dx}{dt} + f_0 e^{i\omega t}$. Като се вземе предвид вторият закон на Нютон,

получава се

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + f_0 e^{i\omega t}$$

или

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = f_0 e^{i\omega t}. \quad (2.1.119)$$

Това уравнение е диференциалното уравнение на принуденото трептене. То е аналогично на уравнението на затихващите трептения (2.1.94) с тази разлика, че свободният член (в който не участва x) не е равен на нула.

Както беше казано по-горе, принудените трептения са хармонични трептения с кръгова честота, равна на честотата ω на външната сила и следователно ще се описват с уравнение от вида

$$x = A e^{i\omega t}. \quad (2.1.120)$$

Ако това е така, то уравнението (2.1.119) трябва да се удовлетворява от (2.1.120).

Първата и втората производна на x спрямо t са

$$\frac{dx}{dt} = i\omega A e^{i\omega t} \quad (2.1.121)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i\omega t}. \quad (2.1.122)$$

Чрез заместване на x , $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2 x}{dt^2}$ с техните равни в уравнението (2.1.119) се получава

$$-m\omega^2 A e^{i\omega t} + i r \omega A e^{i\omega t} + k A e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}. \quad (2.1.123)$$

След съкращаване на общия множител $e^{i\omega t}$ уравнението (2.1.119) преминава в алгебричното уравнение

$$A \left(-\omega^2 + i \frac{r}{m} \omega + \frac{k}{m} \right) = \frac{f_0}{m}, \quad (2.1.124)$$

или

$$A(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega) = \frac{f_0}{m}, \quad (2.1.125)$$

където ω_0 е кръговата честота на собствените трептения на системата, а β - коефициентът на затихването.

От (2.1.125) се намира израз за амплитудата на принудените трептения

$$A = \frac{f_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega}, \quad (2.1.126)$$

При който функцията (2.1.120) удовлетворява диференциалното уравнение (2.1.119). Комплексният знаменател в последното равенство може да се представи по следния начин:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega = |Z|e^{i\varphi}. \quad (2.1.127)$$

Съгласно формули (2.1.35), (2.1.36) и (2.1.39) имаме

$$|Z| = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \quad (2.1.128)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.1.129)$$

Замяната в (2.1.126) на знаменателя с (2.1.127) дава

$$A = \frac{f_0}{m|Z|} e^{-i\varphi}. \quad (2.1.130)$$

По такъв начин се получава следният израз за отклонението x на трептящата система от равновесното положение при принудените трептения, който удовлетворява съответно диференциалното уравнение (2.1.119):

$$x = \frac{f_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (2.1.131)$$

Вижда се, че амплитудата и фазата на принудените трептения зависят от амплитудата f_0 и честотата ω на принуждаващата сила, съотношението на честотата ω и честотата ω_0 на собствените трептения и коефициента на затихването β .

Нека да видим как ще се мени амплитудата на принудените трептения на дадена система, когато f_0 , ω_0 и β са постоянни, но се мени кръговата честота ω на придружаващата сила. При определена стойност на ω амплитудата A на принудените трептения (2.1.131) рязко нараства, придобивайки максимална стойност A_p . Това явление се нарича резонанс, а кръговата честота ω_p на принуждаващата сила, при която настъпва резонанс, се нарича резонансна честота. Резонансната честота може да се намери от условието за минимум на знаменателя на (2.1.131):

$$|Z|^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2. \quad (2.1.132)$$

Като се приравни на нула производната на този израз спрямо ω , се получава

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega_p + 8\beta^2\omega_p = 0, \quad (2.1.133)$$

откъдето, тъй като $\omega_p \neq 0$,

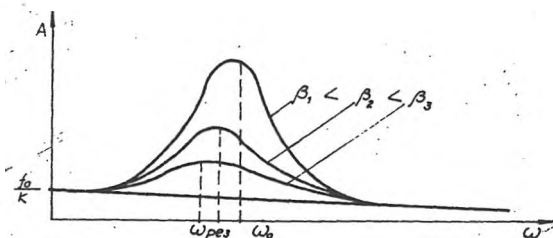
$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (2.1.134)$$

Чрез замяна на ω с ω_p в (2.1.131) за амплитудата на принудените трептения при резонанс се получава

$$A_p = \frac{f_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.1.135)$$

От последните две съотношения следва, че при намаляване на коефициента на затихването β резонансната честота ω_p се приближава към собствената кръгова честота на системата ω_0 , а резонансната амплитуда A_p нараства. Ако $\beta = 0$ и $\omega_p = \omega_0$, резонансната амплитуда нараства неограничено.

Съгласно (2.1.134) и (2.1.135) при $\beta \neq 0$ резонансната честота ω_p е винаги по-малка от собствената честота ω_0 и резонансната амплитуда има крайни стойности, толкова по-малки, колкото β е по-голямо.



Фиг. 2.21

Кривите, които изразяват зависимостта на амплитудата A от честотата ω , се наричат резонансни криви (фиг.2.21). На фигурата са показани три резонансни криви при три различни стойности на β . Кривите имат толкова по-висок и тесен максимум, колкото β е по-малко, а така също толкова по-надясно се намират максимумите на кривите. При достатъчно големи стойности на коефициента на затихването, такива, че $\beta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, изразът за резонансната честота (2.1.134) става имагинерен. Това означава, че при тези условия резонанс не се наблюдава. С увеличаване на честотата амплитудата на принудените трептения (2.1.131) монотонно намалява, което съответствува на най-долната крива на фиг.2.21.

В случаите, когато $\omega \rightarrow 0$, независимо от стойността на β амплитудата придобива определена гранична стойност

$$A_{\text{гр}} = \frac{f_0}{m\omega_0^2} = \frac{f_0}{k}. \quad (2.1.136)$$

Това всъщност е отклонението x_0 , което системата получава под действие на постоянна сила с големина f_0 .

Ако кръговата честота на принуждаващата сила расте неограничено, всички криви (фиг.2.21) асимптотично се стремят към нула. Това е така, защото при много големи честоти силата така бързо изменя своята посока, че системата не успява забележимо да се отмени от равновесното си положение.

От формула (2.1.135) се вижда, че при достатъчно малки стойности на коефициента на затихване β , такива, че $\beta \ll \omega_0$, амплитудата при резонанс приблизително е

$$A_p \approx \frac{f_0}{2m\beta\omega_0}. \quad (2.1.137)$$

Нека разделим този израз за резонансната амплитуда с граничната стойност на амплитудата (2.1.136). В резултат, като се има предвид още, че $\beta = \lambda/T$ и $\omega_0 = 2\pi/T$, се получава

$$\frac{A_p}{A_{\text{гр}}} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda} = Q. \quad (2.1.138)$$

По този начин величината Q , наричана коефициент на доброкачественост на трептящата система, показва колко пъти резонансната амплитуда е по-голяма от отклонението на системата от равновесното положение под действието на постоянна сила с големина, равна на амплитудата на принуждаващата сила.

Явлението резонанс играе важна роля при редица явления, като в някои случаи тя е полезна, а в други – вредна. Например то широко се използва в радиотехниката (за настройка на радиоприемниците за приемане на една или друга радиостанция), в акустиката и при други раздели от техниката. Редица оптични явления, например аномалната дисперсия, се обясняват с резонанса.

В различните съоръжения и машини с въртящи се части резонансът е вреден. При въртенето на ротора на един мотор при наличие на ексцентричност (неравномерно разпределение на масата) се получава периодично променлива сила, която действа върху поставката на мотора и може да я доведе в принудени трептения. В

случай на резонанс амплитудата на принудените трептения на поставката може да стигне до стойност, опасна за здравината ѝ. Затова при проектирането на съвременни машини и други съоръжения, подложени на действието на периодично изменящи се сили, се извършват специални пресмятания и се вземат мерки за изключване на възможността за възникване на явлението резонанс.

2.2. ВЪЛНИ

2.2.1. Обща характеристика на вълните

Процесът на разпространение на трептения в пространството се нарича вълни. Както беше отбелязано, математическото описание на трептенията на различни физични величини е аналогично. Тъй като вълната е процес на разпространение на трептения, вълните могат да бъдат най-различни в зависимост от това трептенията на каква физична величина се разпространяват. При това математическото описание на различните видове вълни ще бъде отново аналогично. Затова, както и при изучаване на трептенията, при разглежданията по-нататък ще имаме предвид еластични вълни, като получените изводи и съотношения могат да се прилагат и в случай на други вълни, например електромагнитни в оптиката и т.н.

Еластичните вълни могат да възникнат само в еластична среда. Това е среда (твърда, течна или газообразна), в която между изграждащите я частици съществуват еластични сили на взаимодействие.

Ако в някое произволно място от дадена еластична среда частиците бъдат приведени в трептения, вследствие на еластичното взаимодействие между тях тези трептения ще се предават към съседните частици, които от своя страна предават трептението на своите „съседни“ и т.н. Постепенно в трептеливото движение ще се въвличат все повече и повече частици. Разпространението на трептенията се извършва не мигновено, а винаги с определена крайна скорост и чиято стойност зависи от свойствата на средата.

Частиците на средата, в която се разпространява вълната, не се преместват постъпателно заедно с трептението, т.е. няма пренасяне на вещество. Те само извършват трептеливи движения около своите равновесни положения. В зависимост от направлението на трептенията на частиците по отношение на направлението, в което се разпространява вълната, се различават два основни вида вълни: напречни и надлъжни.

Напречни вълни са тези, при които трептенията на частиците се извършват в направления, перпендикулярни на направлението на разпространението на вълната. В случаите, когато трептенията са в направлението на разпространението

на трептението, вълните се наричат **надлъжни**.

Характерът на вълните зависи от еластичните свойства на средата. В течностите и газовете еластичните сили се появяват само при свиване и разширение, без да се появяват еластични сили при хлъзгане (отместване на един слой спрямо друг). Следователно в тях могат да се разпространяват само надлъжни вълни, или както се казва още, при тях се разпространява еластичната деформация свиване – разширение. В твърдите тела се появяват еластични сили и при хлъзгане, и при свиване. Затова в тях могат да се разпространяват и надлъжни, и напречни вълни. Или в твърдите тела е възможно едновременно да се разпространяват както еластична деформация на хлъзгане, така и еластична деформация на свиване – разширение.

Под скорост v на разпространение на вълната се разбира скоростта на разпространение на определена фаза на трептене, затова често пъти се нарича **фазова скорост**.

Дължината на вълната λ се нарича разстоянието между две най-близки точки, които трептят с еднакви фази (фиг. 2.22).

Дължината на вълната очевидно е разстоянието, на което се разпространява определена фаза на трептене за един период T (когато източникът на трептенията е неподвижен спрямо средата):

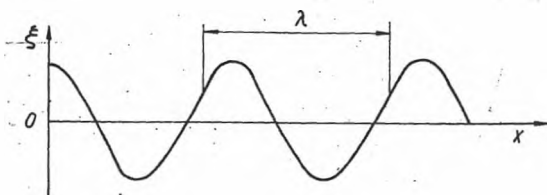
$$\lambda = vT. \quad (2.2.1)$$

Като се има предвид, че

$$T = \frac{1}{\nu}, \quad (2.2.2)$$

където ν е честотата на разпространяващото се трептене, от (2.2.1) се получава връзката

$$v = \lambda\nu. \quad (2.2.3)$$



Фиг. 2.22

Геометричното място на точките от една среда, които трептят с еднаква фаза, се нарича вълнова повърхност. Вълновата повърхност, отделяща областта от пространството, в която все още трептения не са възникнали, от тази, в която вече частиците участвуват във вълнообразното движение, се нарича фронт на вълната. Или фронтът на вълната е геометричното място на точките, до които в даден момент е достигнало трептението.

През всяка точка от пространството, което е обхванато от вълнообразния процес, може да се прекара вълнова повърхност. Следователно съществуват безкрайно много вълнови повърхности, докато във всеки момент от времето има само един фронт на вълната. Вълновите повърхности остават неподвижни и минават през равновесното положение на частиците, трептящи с еднаква фаза, а фронтът на вълната през цялото време се премества със скорост v . Очевидно е, че фронтът на вълната е частен случай на вълновата повърхност.

Вълновите повърхности могат да имат най-различна форма. В най-простите случаи те са равнинни или сферични повърхнини и тогава съответните вълни се наричат *плоски* или *сферични* вълни. При плоските вълни вълновите повърхности са множество успоредни една на друга равнини, а при сферичните – множество концентрични сфери с център източника на трептение.

Посоките, в които се разпространяват трептенията, се наричат *лъчи*. В однородна изотропна среда лъчите са перпендикулярни на вълновите повърхности.

2.2.2. Уравнение на плоска вълна

Под уравнение на вълна се разбира израз, който дава отклонението ξ на трептящите частици като функция на нейните координати x, y, z в равновесното положение и времето t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t). \quad (2.2.4)$$

Тази функция трябва да бъде периодична както спрямо времето t , така и спрямо координати x, y, z . Периодичността по времето следва от факта, че ξ описва трептението на частиците с координати x, y, z . Периодичността по координатите произтича от това, че точки, намиращи се на разстояние една от друга, равно на дължината на вълната λ , трептят с еднаква фаза.

Ние ще разгледаме случая на т.нар. *хармонични вълни*, при които трептящите точки на средата извършват *хармонични трептения* с еднаква честота. Такива вълни се наричат *монохроматични*.

Приемаме, че имаме плоска вълна, която се разпространява в однородна изотропна среда в посоката на оста Ox . Тогава вълновите повърхности ще бъдат равнини, перпендикулярни на оста Ox , и

Тъй като всички точки от вълновата повърхност трептят еднакво, отклонението ξ ще зависи само от x и t :

$$\xi = \xi(x, t). \quad (2.2.5)$$

Нека трептението на точките, лежащи в равнината $x = 0$ (фиг. 2.23), се извършва по закона

$$\xi_0 = A \cos \omega t, \quad (2.2.6)$$

където A е амплитудата на трептението;

ω — кръговата честота;

t — времето, отчетено от момента, когато началната фаза на трептението е нула.

Това трептение се предава в посока на оста Ox със скорост v . Следователно в точките от една произволна равнина, намираща се на разстояние x от равнината $x = 0$, то ще се появи след време

$$\tau = \frac{x}{v}. \quad (2.2.7)$$

Или както се казва, трептението на частиците, лежащи в равнината x , ще изостава по време с τ от трептението на частиците в равнината $x = 0$ и се описва от съотношението

$$\xi = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (2.2.8)$$

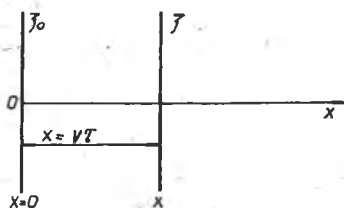
Това уравнение дава отклонението ξ на една коя да е точка от равновесното ѝ положение, лежаща в равнината x , и в кой да е момент от времето t . Затова (2.2.8) е възприето да се нарича уравнение на плоска вълна, която се разпространява в положителна посока на Ox със скорост v .

Като се използва комплексната показателна функция, уравнението на плоска вълна може да се представи във вида

$$\xi = A e^{i\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)}, \quad (2.2.9)$$

ИЛИ

$$\xi = A e^{-i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right)}. \quad (2.2.9)$$



Фиг. 2.23

При по-нататъшните разглеждания често ще се използва комплексното представяне, като се има предвид, че трябва да се взема само реалната част на съответния израз.

Величината A (амплитудата на трептението) често се нарича амплитуда на вълната, а величината $\omega(t - \frac{x}{v})$ – фаза на вълната. Тъй като $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $\lambda = vT$, уравнението на вълната (2.2.9) се представя във вида

$$\xi = Ae^{i2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})}. \quad (2.2.10)$$

Оттук се вижда, че дължината на вълната λ по отношение на координатата x играе точно такава роля, както периодът T на трептението по отношение на времето t . Следователно дължината на вълната може да се разглежда като пространствен период: трептението се повтаря след разстояние $\lambda = vT$. По такъв начин наистина функцията ξ е периодична както по отношение на времето, така и по отношение на координатата x . Ще отбележим обаче, че докато честотата на трептението ν (респективно периодът T) не зависи от свойствата на средата, то дължината на вълната λ зависи от тях, тъй като скоростта на вълната е различна в различните среди.

Величината

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}, \quad (2.2.11)$$

която показва колко дължини на вълната се нанасят на разстояние 2π , се нарича вълново число. Като се използва вълновото число k , за уравнението на плоска вълна (2.2.10) се получава

$$\xi = Ae^{i(\omega t - kx)}. \quad (2.2.12)$$

Скоростта на разпространение на трептенията в дадена среда въз основа на (2.2.11) се определя по съотношението

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (2.2.13)$$

До същия резултат за скоростта v може да се достигне и по следния начин. Нека вземем една каква да е определена (фиксирана) стойност на фазата в уравн. (2.2.12), като положим

$$\omega t - kx = \text{const.} \quad (2.2.14)$$

Този израз определя връзката между времето t и координатата x на точка, в която фазата има фиксирана стойност. От (2.2.14) за зависимостта на x и t се получава

$$x = \frac{1}{k}(\omega t - \text{const.}) \quad (2.2.15)$$

В такъв случай скоростта, с която се разпространява дадена фаза, е

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (2.2.16)$$

По такъв начин скоростта на разпространение на вълната v в уравн. (2.2.9) е скоростта на разпространение на фазата, във връзка с която се нарича фазова скорост.

Съгласно (2.2.16) $\frac{dx}{dt} > 0$. Следователно уравнение (2.2.12) описва вълна, разпространяваща се в посоката на нарастването на x . Вълна, разпространяваща се в посока на намаление на x , се описва с уравнението

$$\xi = Ae^{i(\omega t + kx)}. \quad (2.2.17)$$

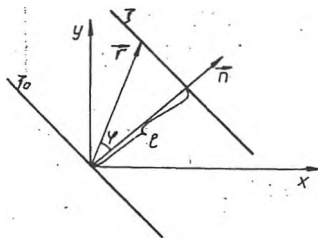
И наистина в този случай за скоростта v се получава

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k} \quad (2.2.18)$$

Да разгледаме по-общия случай, когато плоска вълна се разпространява в произволна посока, определена от единичния вектор \vec{n} , перпендикулярен на равнината, която е източник на трептения. Точка трептенията в равнината, минаваща през началото на координатната система (Фиг. 2.24), се описват с функцията

$$\xi_0 = Ae^{i\omega t}. \quad (2.2.19)$$

Фиг. 2.24



Трептенията във вълновата повърхност, намираща се на разстояние l от началото O на координатната система, изостават от тези, извършващи се в равнината, минаваща през началото, с време τ :

$$\tau = \frac{l}{v} \quad (2.2.20)$$

И следователно

$$\xi = Ae^{i\omega(t - \frac{l}{v})} = Ae^{i(\omega t - kl)}. \quad (2.2.21)$$

Между разстоянието l , радиус-вектора \vec{r} , определящ положението на коя да е точка от разглежданата повърхност, и единичния вектор \vec{n} съществува следната връзка:

$$l = r \cos \varphi = \vec{n} \cdot \vec{r}. \quad (2.2.22)$$

Като се замени l с неговото равно в (2.2.21), получава се

$$\xi = Ae^{i(\omega t - k\vec{n}\cdot\vec{r})}. \quad (2.2.23)$$

Векторът

$$\vec{k} = k\vec{n}, \quad (2.2.24)$$

чиято големина е равна на големината на вълновото число, а посоката му съвпада с посоката на разпространение на вълната \vec{n} , се нарича вълнов вектор.

Или уравнението на плоска вълна, разпространяваща се в произволна посока (посоката на вълновия вектор \vec{k}), има вида

$$\xi = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \quad (2.2.25)$$

или

$$\xi = Ae^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \quad (2.2.26)$$

Реалната част на функцията (2.2.25) дава отклонението от равновесното положение на точка с радиус-вектор \vec{r} в момент от времето t .

Като се изрази скаларното произведение чрез компонентите на векторите по координатните оси

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$

уравнението (2.2.25) приема вида

$$\xi = Ae^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}. \quad (2.2.27)$$

В случай че \vec{n} съвпада с посоката на оста x , $k_x = k$, $k_y = k_z = 0$, и (2.2.27) преминава в (2.2.12).

2.2.3. Уравнение на сферична вълна

Нека сега видим какъв ще бъде видът на уравнението на сферичните вълни. Всеки реален източник на вълни притежава определени крайни размери. Ако обаче се разглеждат вълни на разстояния, значително по-големи от неговите размери, то източникът може да се разглежда като точков. Тогава в еднородна и изотропна среда вълната, породена от точков източник, ще бъде сферична.

Да приемем, че фазата на трептението на източника е

$$\varphi = \omega t + \alpha. \quad (2.2.28)$$

За да установим вида на вълновото уравнение, нека получим вторите частни производни по координатите x , y и z и времето t на функцията (2.2.27), която описва плоска вълна, разпространяваща се в произволна посока. След двукратно диференциране се получава

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi \quad (2.2.31)$$

и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi. \quad (2.2.32)$$

Сумата на вторите частни производни по координатите дава

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k^2 \xi. \quad (2.2.33)$$

От (2.2.32) следва $\xi = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, което като се замести в (2.2.33) и се има предвид, че $k = \frac{\omega}{v}$, се получава

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.2.34)$$

Последното уравнение може да се напише в по-кратък вид, като се използва операторът на Лаплас $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.2.35)$$

В частни случаи, когато трептенията се разпространяват само в посока на оста x , уравнението (2.2.34) приема вида

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.2.36)$$

Може да се покаже, че уравнението (2.2.35) е диференциално уравнение не само на плоска вълна, но и на каква да е вълна. Затова именно уравнение (2.2.35) е възприето да се нарича диференциално вълново уравнение. В зависимост от допълнителни условия, които трябва да удовлетворява решението на (2.2.35), се получава уравнение на един или друг вид вълна.

2.2.5. Принцип на суперпозицията, интерференция на вълни

В една среда могат да се разпространяват едновременно две и повече системи вълни, получени от различни източници. За такива

е в сила т.нар. принцип на суперпозицията на вълните (или принцип на наслагването). Същността на принципа на суперпозицията се състои в това, че вълните се разпространяват независимо една от друга. Резултатното отклонение на произволна точка от средата е равно на алгебрата на сумата на отклоненията, предизвикани от отделни вълни. С други думи казано, разпространението на вълненията в средата от всеки източник става по такъв начин, сякаш другите източници въобще ги нямаше.

Принципът на суперпозицията е валиден само за разпространение в линейни среди. Това са такива среди, в които възникващите еластични деформации в резултат на разпространението на вълненията се подчиняват на закона на Хук. В нелинейни среди, за които не е в сила законът на Хук, се наричат нелинейни.

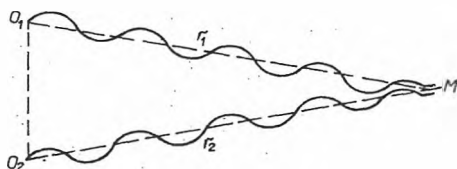
Опитно е установено, че при разпространение на вълни с големи амплитуди в нелинейни среди принципът на суперпозицията не е в сила. Това е така например при разпространение на ултразвукови вълни ($\nu > 20\,000\text{ Hz}$) с голяма мощност (в акустиката) или лазерни лъчи.

При нашите разглеждания ще считаме, че средите, в които се разпространяват вълните, са линейни.

Нека разгледаме две вълни, разпространяващи се от точковите източници O_1 и O_2 в еднородна изотропна среда, трептящи с постоянна амплитуда и фазова разлика. Да определим резултатното трептене в коя точка M от средата, намираща се на разстояния r_1 и r_2 от двата източника, значително по-големи от разстоянието между източниците (фиг.2.26)

$$O_1O_2 \ll r_1, O_1O_2 \ll r_2. \quad (2.2.37)$$

При това условие с голямо приближение може да се приеме, че вълните от двата източника се разпространяват в еднаква посока. Ето трептенията, предизвикани в точка M от всяка от вълните, са еднакви по амплитуда и фаза, имат еднакви направления.



Фиг. 2.26

Нека кръговите честоти на трептенията на източниците са еднакви: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, а началните фази за простота да приемем,

че са равни на нула: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогава уравненията на трептенията в O_1 и O_2 са

$$\xi_1(0, t) = A_1 e^{i\omega t}, \quad \xi_2(0, t) = A_2 e^{i\omega t}. \quad (2.2.38)$$

В точка M трептенията, пристигащи от двата източника, съгласно (2.2.25) се извършват по закона

$$\xi_1(r_1, t) = A_1 e^{i(\omega t - kr_1)}, \quad \xi_2(r_2, t) = A_2 e^{i(\omega t - kr_2)}, \quad (2.2.39)$$

където k е вълновото число;

A_1 и A_2 са амплитудите на трептенията.

В съответствие с принципа на суперпозицията резултантното трептение в т. M е равно на сумата от двете трептения

$$\xi = \xi_1 + \xi_2. \quad (2.2.40)$$

Амплитудата на резултантното трептение (вж. §2.1.5.A) ще бъде

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[k(r_1 - r_2)]}. \quad (2.2.41)$$

От получената формула се вижда, че резултантната амплитуда A в дадената точка M е постоянна с времето, тъй като фазовата разлика на събираните трептения с течение на времето не се изменя

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = \text{const.}$$

Вълни, фазовата разлика на които във всяка точка от пространството е постоянна с времето, се наричат кохерентни вълни, а съответните източници на трептения – кохерентни източници.

Явлението, при което в резултат от наслагването на две или повече кохерентни вълни в едни точки от пространството възниква устойчива картина на увеличаване, а в други на намаляване на амплитудата на резултантната вълна, се нарича интерференция на вълните.

Нека намерим условията, при които се получава съответно максимална и минимална стойност на амплитудата на резултантното трептение при интерференция на вълните.

Съгласно (2.2.41) максимална амплитуда в точки от средата ще се получава, ако фазовата разлика на наслагващите се вълни е равна на четно число π :

$$k(r_1 - r_2) = \pm 2n\pi, \quad (2.2.42)$$

където $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Резултантното движение ще представлява хармонично трептение с честота ω и амплитуда

$$A_{\max} = A_1 + A_2. \quad (2.2.43)$$

В точки, за които фазовата разлика на наслагващите се вълни е равна на нечетно число π

$$k(r_2 - r_1) = \pm(2n + 1)\pi, \quad (2.2.44)$$

където $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, резултантното движение ще представлява хармонично трептение със същата честота ω и минимална амплитуда

$$A_{\min} = |A_1 - A_2|. \quad (2.2.45)$$

В частния случай, когато $A_1 = A_2$, трептения в тези точки ще отсъствуват.

Като се има предвид, че $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, условията за максимум (2.2.42) и минимум (2.2.44) на амплитудата могат да бъдат записани и по следния начин:

$$r_2 - r_1 = 2n \frac{\lambda}{2} \quad (2.2.46)$$

$$r_2 - r_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (2.2.47)$$

Или амплитудата на резултантното трептение е максимална в точките, за които разликата в пътищата на вълните е равна на четно число половин дължина на вълните. В точки, за които разликата в пътищата е нечетно число половин дължина на вълните, амплитудата на резултантното трептение има минимална стойност.

2.2.6. Стоящи вълни

Частен случай на интерференция на вълните е получаването на т.нар. стоящи вълни. Стояща вълна се получава в резултат от интерференцията на две хармонични вълни с еднакви направления на трептенията, еднакви амплитуди и честоти, но с противоположни посоки на разпространение. Например, ако единият край на еластичен шнур се закрепва неподвижно, а другият се привежда в трептение, в точката на закрепването става отразяване на напредващата еластична вълна. В резултат на интерференцията на двете напредващи вълни в противоположни посоки – падаща и отразена, се получава стояща вълна в еластичния шнур.

Да намерим уравнението на стоящата вълна. За целта нека предположим, че в положителната посока на оста x се разпространява плоска вълна (падаща вълна), а в отрицателната посока – отразена плоска вълна. Техните уравнения са

$$\xi_1 = A_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{и} \quad \xi_2 = A_0 e^{i(\omega t + kx)}, \quad (2.2.48)$$

където ξ_1 и ξ_2 са отклонения от равновесното положение на точки от средата, предизвикани от разпространяващите се вълни. Съгласно принципа на суперпозицията на вълни произволна точка от средата, лежаща в равнина с координата x , в момента от време t ще има отклонение от равновесното положение

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_0(e^{-ikx} + e^{ikx})e^{i\omega t}. \quad (2.2.49)$$

Като се има предвид формулата на Ойлер (2.1.41), от (2.2.49) следва

$$\xi = 2A_0 \cos(kx)e^{i\omega t}. \quad (2.2.50)$$

Само реалната част на (2.2.50) е

$$\xi = 2A_0 \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (2.2.51)$$

Полученото уравнение (2.2.50) или (2.2.51) е уравнение на плоска стояща вълна.

От последното уравнение се вижда, че в резултат на наслагването на двете насрещни вълни (падаща и отразена) частиците от средата започват да трептят с честота, равна на честотата на падащата вълна.

Амплитудата A на стоящата вълна е

$$A = 2A_0 |\cos(kx)|, \quad (2.2.52)$$

т.е. е периодична функция на координатата x и не зависи от времето. (Тъй като амплитудата на трептението е положителна величина, а функцията $\cos(kx)$ се мени от -1 до $+1$, е необходимо да се вземат нейната абсолютна стойност.)

Както се вижда, амплитудата на стоящата вълна се изменя в зависимост от стойностите на x от 0 до $2A_0$.

В точките, координатите на които удовлетворяват условието

$$kx = \pm(2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (2.2.53)$$

където $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\cos(kx) = 0$, амплитудата на трептенията е равна на нула. Такива точки се наричат възли на стоящата вълна. Точки от средата, намиращи се във възлите, не се отклоняват от равновесното си положение. От (2.2.53) следва, че координатите на възлите са

$$x_{\text{вз}} = \pm \frac{2n + 1}{k} \frac{\pi}{2} = \pm(2n + 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (2.2.54)$$

Разстоянието между два съседни възела на стоящата вълна е

$$\Delta x_{\text{вз}} = [2(n + 1) + 1] \frac{\lambda}{4} - (2n + 1) \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}, \quad (2.2.55)$$

т.е. е равно на половината на дължината на вълната.

В точките, координатите на които удовлетворяват условието

$$kx = \pm 2n \frac{\pi}{2}, \quad (2.2.56)$$

където $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $|\cos(kx)| = 1$, амплитудата на трептенията достига максимална стойност $2A_0$. Такива точки се наричат върхове на стояща вълна. От (2.2.56) следва, че координатите на върховете са

$$x_{\text{вх}} = \pm \frac{2n \pi}{k} = \pm 2n \frac{\lambda}{4}. \quad (2.2.57)$$

Разстоянието между два съседни върха на стоящата вълна е

$$\Delta x_{\text{вх}} = \frac{\lambda}{2}, \quad (2.2.58)$$

т.е. също е равно на половината от дължината на напредващата вълна, или

$$\Delta x_{\text{вз}} = \Delta x_{\text{вх}}. \quad (2.2.59)$$

Като се имат предвид (2.2.54) и (2.2.57), вижда се, че възелът и върхът са отместени един спрямо друг на четвърт дължина на вълната:

$$(2n+1) \frac{\lambda}{4} - 2n \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}. \quad (2.2.60)$$

Трептенията на всички точки между два съседни възела се извършват с различни амплитуди - $A = A(x)$, но съгласно (2.2.51) с еднакви фази ($\Phi = \omega t$). При преминаване през възел фазата на трептението се променя с π (става противоположна), защото се променя знакът на $\cos(kx)$. Това означава, че ако в даден момент от времето отклонението ξ от едната страна на един възел е положително, то от другата страна на възела е отрицателно.

Нека намерим скоростта u на частиците и относителната деформация ϵ на участък от средата, в която има вече стояща вълна. Съгласно (2.2.50) имаме

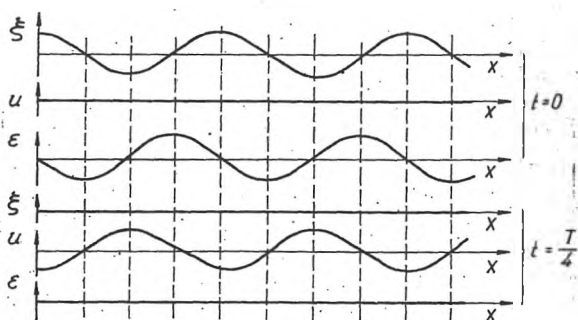
$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega A_0 \cos(kx) \sin(\omega t) = \\ &= 2\omega A_0 \cos(kx) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.2.61)$$

Чрез диференциране на (2.2.50) по x се намира относителната деформация

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2k A_0 \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (2.2.62)$$

Последните две уравнения (2.2.61) и (2.2.62) описват стоящата вълна: първото чрез скоростта на частиците от средата, а второто чрез относителната деформация.

От сравнението на (2.2.51) и (2.2.61) се вижда, че възлите и върховете на скоростта съвпадат с възлите и върховете на отклонението по място, но са отместени по фаза с $t = \frac{T}{4}$. От (2.2.51) и (2.2.62) се вижда обаче, че възлите и върховете на относителната деформация съвпадат с върховете и възлите на отклонението. В едно и също време, когато ξ и ϵ се изменят от нула до своите максимални (минимални) стойности, скоростта u става равна на нула и обратно: когато ξ и ϵ са равни на нула, скоростта се изменя по големина от нула до максималната си стойност (фиг.2.27).



Фиг. 2.27

Като се имат предвид изразите за скоростта на частиците и относителната деформация (2.2.61) и (2.2.62), не е трудно да се види, че кинетичната енергия на стоящата вълна има най-голяма стойност в местата, където се намират върховете на стоящата вълна. Обратно, потенциалната енергия има максимална стойност в местата, където се намират възлите на стоящата вълна. Затова за интервал от време, равен на един период от трептението на частиците, се наблюдава два пъти преминаване на пълната енергия на стоящата вълна от кинетична в потенциална и обратно. В резултат на това се извършва непрекъснат преход на енергията от всеки възел към съседните върхове и обратно (фиг.2.27). Средният по време поток на енергията през кое да е сечение на вълната ще бъде равен на нула. Следователно в стоящата вълна не се пренася енергия за разлика от напредващата вълна. Именно затова такива вълни се наричат стоящи

вълни.

Стоящи вълни, както вече беше казано, обикновено се получават при интерференцията на падащата и отразената вълна.

При отразяване на падащата вълна на границата с по-плътна среда настъпва изменение във фазата на трептене с π или както е възприето да се казва, отразяването става със загуба на половин дължина на вълната. Затова върху граничната повърхност в този случай винаги се намира възел на стоящата вълна. Такава картина се наблюдава например при отразяване на звукови вълни от водна повърхност.

При отразяване на границата със среда с по-малка плътност се получава връх, защото не става изменение във фазата и съответно не става загуба на половин дължина на вълната.

Изменението или неизменението на фазата при отражение на границата на две среди се обяснява в общата теория на еластичността.

МОЛЕКУЛНА ФИЗИКА

3.1. МОЛЕКУЛНО-КИНЕТИЧНА
ТЕОРИЯ НА ИДЕАЛНИЯ ГАЗ

3.1.1. Основни положения.

Статистически и термодинамичен метод

В механиката се изучава движението и взаимодействието на макроскопични тела, без да се държи сметка за техния вътрешен строеж. Приема се, че те са системи от материални точки, здраво свързани помежду си.

Молекулната физика изучава явления, които се извършват вътре в макроскопичните тела, и следователно е непосредствено свързана с теорията за строежа на веществото. Доказано е, че всички тела в природата се състоят от малки частици (атоми и молекули), които се намират в непрекъснато хаотично топлинно движение.

В газовете, течностите и твърдите тела характерът на движение на молекулите е различен. Това се обяснява с наличието на междумолекулни сили на привличане и отблъскване. Без да се спираме на този въпрос, ще отбележим, че колкото е по-малко разстоянието между молекулите, в толкова по-голяма степен се проявяват силите на тяхното взаимодействие.

Молекулите в газовете за разлика от твърдите и течните тела се намират на достатъчно голямо разстояние една от друга, така че силите на взаимодействие между тях са достатъчно малки и могат да се пренебрегнат. Приема се, че се движат от „удар до удар“ помежду си или със стените на съда равномерно и праволинейно. Това движение е свободно, хаотично, т.е. средно във всяко направление във всеки момент от времето се движат еднакъв брой молекули.

Движението на всяка молекула от дадено тяло може да се опише със законите на класическата механика. Броят на молекулите във всяко тяло обаче е извънредно голям, а посоката и големината на скоростта за всяка молекула в даден момент са случайни. Затова на пръв поглед изглежда, че въз основа на законите на класическата механика е невъзможно да се направят каквито и да са изводи за поведението на молекулите. В действителност това не е така. Свойствата на огромния брой молекули, образуващи тялото, се подчиняват на определени статистически закономерности и могат да се изучат с помощта на т.нар. статистически методи. Макар скоростта и посоката на движение на всяка молекула във всеки момент да са случайни, в общото движение на огромен брой молекули се

е онова състояние, в което идва системата при неизменни външни условия и остава в него безкрайно дълго време. Температурата на всички части на системата, намираща се в равновесие, е еднаква и е толкова по-голяма, колкото е по-голяма енергията на системата.

От молекулно-кинетична гледна точка температурата на равновесна система характеризира интензивността на топлинното движение на атомите, молекулите и другите частици, образуващи системата. Например за равновесна система от частици, описвани от законите на класическата статистическа физика, средната кинетична енергия на топлинното движение на частиците е право пропорционална на абсолютната температура на системата. В този смисъл може да се говори, че температурата характеризира степента на нагрятоост на тялото.

За измерване на температурата може да се използва добре известният факт, че при нагряване или охлаждане на телата се изменят почти всички техни физични свойства: обем, плътност, еластични свойства, електропроводимост и др. Изменението на кое да е от тези свойства може да се използва за измерване на температурата. За целта е необходимо да се знае за определено тяло, наречено термометрично тяло, каква е функционалната зависимост на даденото свойство от температурата.

Съгласно решението на IX генерална конференция по мерки и теглилки от 1948 г. е приета за практическа употреба международна стогорадусова температурна скала. В тази скала температурата се измерва в целзиеви градуси и се означава $t^{\circ}\text{C}$, като се приема, че при нормално налягане $p = 1,01325 \cdot 10^5$ Pa (една атмосфера) температурата на топене на леда е 0°C , а на кипенето на водата е 100°C .

През 1954 г. X генерална конференция по мерки и теглилки установява т.нар. абсолютна термодинамична температурна скала, в която температурата се измерва в келвини (K) и се означава с T . Връзката между абсолютната температура T и температурата t по стогорадусовата скала е

$$T = 273,15 + t.$$

Температурата $T = 0$ K (по стогорадусовата $t = -273,15^{\circ}\text{C}$) се нарича абсолютна нула.

3.1.3. Закони за идеалните газове

Най-прост обект за изследване в статистическата физика са идеалните газове. Под идеален газ се разбира газ, молекулите на който имат пренебрежимо малък собствен обем и не взаимодействуват помежду си от разстояние. В реалните газове се вземат предвид силите на междумолекулно привличане и отблъскване.

Много газове (азот, водород, хелий, кислород, въздух и др.) могат да се разглеждат като идеални при плътности, съответстващи на обикновено атмосферно налягане и температура. И наистина

ви условия концентрацията на молекулите на газа е $n_0 = 10^{25}$ средното разстояние между молекулите е $d \approx 10^{-8}$ m, т.е. до-но голямо, за да могат да се пренебрегнат силите на взаимно-ичане на молекулите.

а основата на експерименти с достатъчно разреждени газове са-вени редица закони, които са валидни за идеалните газове. Те

Закон на Бойл-Мариот: при постоянна темпера-произведението от числената стойност на налягането p и обема-аден идеален газ е постоянна величина:

$$pV = \text{const.} \quad (3.1.1)$$

Закон на Гей-Люсак: при постоянно налягане-е на дадена маса m идеален газ е пропорционален на неговата-отна температура T

$$V = \alpha V_0 T = V_0 \frac{T}{T_0} \text{ или } \frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{const,} \quad (3.1.2)$$

V_0 е обемът на газа при температура $T_0 = 273, 15$ К,
 $\alpha = \frac{1}{T_0}$ — температурен коефициент на обемно разширение.

Закон на Шарл: при постоянен обем V и маса m -н газ налягането на газа p е правопрпорционално на неговата-атура T :

$$p = \alpha p_0 T = p_0 \frac{T}{T_0} \text{ или } \frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{const,} \quad (3.1.3)$$

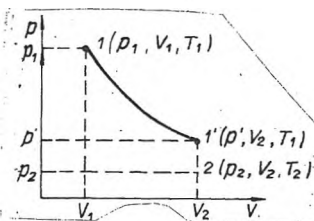
p_0 е налягането на газа при $T_0 = 273, 15$ К.

V . С помощта на законите на Бойл-Мариот и Гей-Люсак (или-рл) е лесно да се намери връзката между налягането, обема и-атурата за произволно равновесно състояние на идеалния газ.

ека на диаграмата (pV) вземем-роизволни състояния 1 и 2, опреде-ъответно от стойностите на пара-ге $p_1 V_1 T_1$ и $p_2 V_2 T_2$ (фиг.3.1). Пре-ането от състояние 1 до състояние-е да се разгледа като изотермичен-от 1 до 1' ($T_1 = \text{const}$) и като изо-преход от 1' до 2 ($V_2 = \text{const}$). При-и преход температурата се проме- T_1 до T_2 , а налягането от p' (в 1')

Състоянието 1-1' лежи на една-ма. Следователно

$$p_1 V_1 = p' V_2. \quad (3.1.4)$$



Фиг. 3.1

Състояния 1 и 2 лежат на една изохора, следователно

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p'}{T_1}, \quad p' = T_1 \frac{p_2}{T_2}. \quad (3.1.5)$$

Заместваме в (3.1.4) и получаваме

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \frac{T_1}{T_2},$$

или

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \quad (3.1.6)$$

Тъй като състояния 1 и 2 са произволни, то

$$\frac{pV}{T} = C. \quad (3.1.7)$$

Това съотношение показва, че за дадена маса идеален газ отношението от произведението на налягането p и обема V към абсолютната температура е постоянна величина, която се нарича газова константа. Нейната числена стойност зависи от масата и химичния състав на газа, а също от избора на единиците за измерване на p , V и T .

Единицата за количество вещество в SI е мол: количество вещество, в което се съдържат такъв брой частици (атоми или молекули), който е равен на броя на атомите в маса, равна на 0,012 kg от изотопа на въглерод ^{12}C . Съгласно определението на тази величина е ясно, че молекулите на различните газове съдържат еднакъв брой молекули, наречен число на Авогадро.

През 1811 г. Авогадро формулира следния закон: молекулите на различните газове при еднакви налягания и температура заемат еднакви обеми V_M . Следователно ако се разглежда какъв да е газ с маса, равна на 1 мол, константата C от (3.1.7) ще има една и съща стойност за всички газове – R , наречена универсална газова константа:

$$pV_M = RT. \quad (3.1.8)$$

Уравнението (3.1.8) е получено за първи път от Клапейрон и е известно под името уравнение на Клапейрон. Очевидно то може да бъде обобщено за газ с произволна маса m . При еднакви температури и налягане в тази маса ще има N мола и съответно обемът, който тя заема, ще бъде $V = NV_M$.

Величината M , равна на отношението на масата на газа към броя на молекулите N , съдържащи се в нея, се нарича моларна маса

$$M = \frac{m}{N}, \quad N = \frac{m}{M}. \quad (3.1.9)$$

че съставлящите \vec{u}_{iy} и \vec{u}_{iz} на скоростта не се изменят, а съставлящата \vec{u}_{ix} сменя своята посока на противоположна и става $-\vec{u}_{ix}$. Пълното изменение на импулса на молекулата при удара ѝ с $ABCD$ е

$$\Delta(m_i \vec{u}_i) = -2m_i \vec{u}_{ix}. \quad (3.1.12)$$

Съгласно втория закон на Нютон изменението на импулса $\Delta \vec{p}$ на молекулата е равно на импулса на силата $-\vec{f}_i$, действаща на молекулата от страна на стената за време δt_i :

$$-\vec{f}_i \delta t_i = -2m_i \vec{u}_{ix}, \quad \vec{f}_i = \frac{2m_i \vec{u}_{ix}}{\delta t_i}. \quad (3.1.13)$$

„Отразявайки“ се от стената $ABCD$, молекулата достига срещуположната стена $O EFG$, „отразява“ се от нея, достига отново $ABCD$ и т.н. Т.е. наблюдава се един непрекъснат процес на преминаване на молекулата от едната стена до другата. Затова е целесъобразно силата f_i да се замени с една средна сила \bar{f}_i , която действа за време Δt_i между два последователни удара. Следователно

$$\bar{f}_i \Delta t_i = f_i \delta t_i = 2m_i u_{ix}. \quad (3.1.14)$$

Времето Δt_i между два последователни удара е

$$\Delta t_i = \frac{2l}{u_{ix}}, \quad \bar{f}_i = \frac{2m_i u_{ix}}{\Delta t_i} = \frac{m_i u_{ix}^2}{l}. \quad (3.1.15)$$

Средната сила \bar{F}_x , действаща на стената $ABCD$ от n молекули на газа, затворени в съда, е равна на сумата от средните сили \bar{f}_{ix} , отнасящи се за 1 молекула:

$$\bar{F}_x = \sum_{i=1}^n \bar{f}_{ix} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i u_{ix}^2}{l}. \quad (3.1.16)$$

Налягането p_x , упражнявано от газа върху стената $ABCD$, е:

$$p_x = \frac{\bar{F}_x}{l^2} = \frac{1}{l^3} \sum_{i=1}^n m_i u_{ix}^2. \quad (3.1.17)$$

По пътя на аналогични разсъждения могат да се получат наляганята p_y върху $BCEF$ и p_z върху $ABFG$:

$$p_y = \frac{1}{l^3} \sum_{i=1}^n m_i u_{iy}^2, \quad p_z = \frac{1}{l^3} \sum_{i=1}^n m_i u_{iz}^2. \quad (3.1.18)$$

Движението на молекулите, както се прие, е изцяло хаотично, т.е. нито едно от направленията на тяхното движение няма предимство пред другите. Следователно налягането на газа върху всички стени на съда е еднакво:

$$p = p_x = p_y = p_z.$$

От (3.1.17) и (3.1.18) следва

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ix}^2 = \sum_{i=1}^n m_i u_{iy}^2 = \sum_{i=1}^n m_i u_{iz}^2. \quad (3.1.19)$$

От друга страна, известно е, че $u_i^2 = u_{ix}^2 + u_{iy}^2 + u_{iz}^2$. Тогава

$$m_i (u_{ix}^2 + u_{iy}^2 + u_{iz}^2) = m_i u_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ix}^2 + \sum_{i=1}^n m_i u_{iy}^2 + \sum_{i=1}^n m_i u_{iz}^2 = \sum_{i=1}^n m_i u_i^2. \quad (3.1.20)$$

Такова

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ix}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 \quad (3.1.21)$$

налягането на газа върху стените на съда е

$$p = \frac{1}{3l^3} \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 = \frac{2}{3} \frac{W_k}{V},$$

където

$$V = l^3 \text{ е обемът на съда,}$$

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i u_i^2}{2} \text{ — сумарната кинетична енергия на постъпателното движение на всички молекули на газа, намиращи се в съда.}$$

По такъв начин се получава

$$pV = \frac{2}{3} W_k. \quad (3.1.22)$$

Изразът (3.1.22) се нарича основно уравнение на кинетичната теория на газовете. От него следва, че произведението от налягането на идеалния газ и неговия обем е равно на две трети от кинетичната енергия на постъпателното движение на всички негови молекули.

3.1.5. Средна квадратична скорост на молекулите

В случай на еднороден газ масата на всички негови молекули е една и съща ($m_i = m_0$), а скоростите u_i са различни. Следователно

$$W_k = \frac{m_0}{2} \sum_{i=1}^n u_i^2 \quad (3.1.23)$$

и затова е целесъобразно да се въведе величината средна квадратична скорост. Средна квадратична скорост $v_{кв}$ на постъпателното движение на молекулите на газа се нарича величината, равна на квадратен корен от средната аритметична стойност на квадрата на скоростите на всички негови молекули:

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2}. \quad (3.1.24)$$

Като се има предвид последният израз, за кинетичната енергия на еднороден газ, получава се

$$W_k = \frac{1}{2} n m_0 v_{кв}^2. \quad (3.1.25)$$

В такъв случай основното уравнение (3.1.22) придобива вида

$$pV = \frac{2}{3} \frac{1}{2} n m_0 v_{кв}^2 = \frac{1}{3} m v_{кв}^2, \quad (3.1.26)$$

където $m = n m_0$ е масата на газа. От (3.1.22) и (3.1.26) следва, че

$$p = \frac{2}{3} W_{k_0} \quad (3.1.27)$$

и

$$p = \frac{1}{3} n_0 m_0 v_{кв}^2 = \frac{1}{3} \rho v_{кв}^2, \quad (3.1.28)$$

където $W_{k_0} = \frac{W_k}{V}$ е кинетичната енергия в единица обем;
 $n_0 = \frac{n}{V}$ — броят на молекулите в единица обем;
 $\rho = n_0 m_0$ — плътността на газа.

За един мол на газа $m = M$ и уравнение (3.1.26) придобива вида:

$$pV_M = \frac{1}{3} M v_{кв}^2. \quad (3.1.29)$$

3.1.6. Парциални налягания в газова смес

Като се излезе от основното уравнение (3.1.22) на кинетичната теория на газовете и израза (3.1.33) за средната кинетична енергия на постъпателното движение на молекулите, за налягането се получава

$$p = \frac{2}{3} \frac{\overline{W}_k}{V} = \frac{2}{3} \frac{3}{2} \frac{n}{V} kT = n_0 kT. \quad (3.1.34)$$

Последната формула показва, че при определена температура T налягането на един газ зависи само от броя на молекулите в единица обем n_0 , като не зависи от техния вид.

Нека имаме смес от няколко газа, които не си взаимодействуват. Броят на молекулите в единица обем на отделните газове съответно са $n_{01}, n_{02}, n_{03}, \dots$, а техните парциални (частични) налягания – p_1, p_2, p_3, \dots . Тогава, ако n_0 означава общият брой на молекулите в единица обем, а p общото налягане, то съгласно (3.1.34)

$$\begin{aligned} p &= (n_{01} + n_{02} + \dots)kT, \\ p &= p_1 + p_2 + p_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

Последната формула изразява закона на Далтон: в газова смес общото налягане е равно на сбора от парциалните (частичните) налягания на отделните газове.

3.1.7. Разпределяне на енергията по степени на свобода

Както видяхме, средната кинетична енергия на постъпателното движение на една молекула се дава с израз (3.1.32), което е валидно само ако молекулите на газа могат да се разглеждат като материални точки. Това до голяма степен се отнася за едноатомните газове, тъй като масата на такива частици (атоми) е съсредоточена в ядрото, размерите на което са пренебрежимо малки. Такива молекули имат три степени на свобода, определящи средната кинетична енергия на тяхното постъпателно движение. Като се има предвид напълно хаотичният характер на движението на молекулите, може да се покаже, че средно на всяка степен на свобода на постъпателното движение на едноатомни молекули се пада еднаква кинетична енергия, равна на една трета от \overline{W}_k :

$$\overline{W}_k^1 = \frac{1}{3} \overline{W}_k = \frac{1}{2} kT. \quad (3.1.36)$$

Молекулите, състоящи се от два, три и повече атоми, не могат да се разглеждат като материални точки и те притежават по-го-

пени на свобода – освен степените на свобода, определителното движение, се появяват степени на свобода с въртеливото и трептеливото им движение. Възсът, какъв е приносът на всяка степен на свобода в кинетична енергия на молекулите. Отговор на този въпрос дава един от най-важните закони на статистическата физика – законът за равномерното разпределение на енергията по степени на свобода: на всяка степен на свобода молекулата средно съответствува еднаква кинетична енергия, равна на $\frac{1}{2}kT$. Това е енергията, която има една степен на свобода на молекулите на едноатомен газ при същата температура, както и газът със сложни молекули. Следователно средната кинетична енергия на молекули, които имат i степени на свобода, ще бъде

$$\overline{W}_k^i = \frac{i}{2}kT. \quad (3.1.37)$$

Средната енергия U на идеален газ е равна на сумата от кинетичната енергия на хаотичното движение на неговите молекули. Според предвид (3.1.37), вътрешната енергия на 1 мол идеален

$$U_m = \overline{W}_k^i N_A = \frac{i}{2}RT. \quad (3.1.38)$$

вижда, вътрешната енергия на идеален газ зависи линейно от температурата T и от броя на степените на свобода на молекули, образуват.

Средната енергия на идеален газ с маса m е

$$U = \frac{m}{M}U_m = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT, \quad (3.1.39)$$

молярната маса на газа.

При разглеждания се предполага, че енергията има непрекъснат характер и може свободно да се обменя между степените на свобода. В действителност това не е точно така – в квантовата механика се показва, че енергията на молекулите, свързана с въртеливото и трептеливото движение $W_{тр}$, има дискретен характер и не може да се отнема или да се добавя по произволно или отнемането на енергия на молекулите става във вид на отделни порции (кванти). Ако W_v и $W_{тр}$ са много по-малки от средната енергия на молекула, дискретността няма съществено значение и формулите (3.1.39) остават в сила.

1.8. Топлинни капацитети на идеален газ

Средната топлинна енергия (топлина), което е необходимо да се даде на дадено тяло, за да се повиши температурата му с 1

K , се нарича топлинен капацитет на тялото. Съгласно това определение

$$C_{\text{Тяло}} = \frac{dQ'}{dT}. \quad (3.1.40)$$

Топлинният капацитет, отнесен към единица маса от веществото, се нарича специфичен топлинен капацитет – количеството топлина, което трябва да се предаде на 1kg от това вещество, за да се повиши температурата му с 1K:

$$c = \frac{dQ}{m dT}. \quad (3.1.41)$$

Единицата за c в SI е J/(kg.K).

В случаите, когато масата е изразена в молове, се получава физичната величина моларен топлинен капацитет C . Очевидно

$$C = M c = \frac{dQ}{n dT}, \quad (3.1.42)$$

където M е моларна маса на веществото, а n е броя на моловете. Единицата за C в системата SI е J/(mol.K).

При газовете е съществено да се знае при какви условия се определя моларният топлинен капацитет, т.е. при какви условия се извършва нагриването – при постоянен обем или при постоянно налягане. За газовете тези величини съществено се различават, докато за течностите и твърдите тела тяхното различие е несъществено.

При нагриването на газ при постоянен обем V (изохорен процес) предаденото количество топлина dQ отива само за изменение на вътрешната енергия на газа, т.е. $dQ = dU_m$. В такъв случай моларният топлинен капацитет C_V съгласно (3.1.38) и (3.1.42) ще бъде

$$C_V = \frac{dU_m}{dT} = \frac{i}{2} R. \quad (3.1.43)$$

При нагриването на газа при постоянно налягане p (изобарен процес) газът се разширява и предаденото количество топлина dQ отива не само за нарастване на вътрешната му енергия, но и за извършване на работа $dA = p dV_M$, т.е.

$$dQ = dU_m + p dV_M. \quad (3.1.44)$$

В такъв случай за моларния топлинен капацитет при постоянно налягане C_p се получава

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU_m}{dT} + \frac{p dV_M}{dT}. \quad (3.1.45)$$

ението на Клапейрон (3.1.8) следва

$$pdV_M = RdT. \quad (3.1.46)$$

ма предвид (3.1.43), (3.1.45) и (3.1.46) за C_p се получава

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R. \quad (3.1.47)$$

отношението на двата моларни топлинни капацитета κ се получава

$$\kappa = \frac{i+2}{2}R / \frac{i}{2}R = \frac{i+2}{i}. \quad (3.1.48)$$

ение е характерна величина за газа и зависи само от броя степенности на свобода на газовите молекули.

теоретичните и опитните стойности на κ за едноатомните газове съгласуват добре помежду си, а за двуатомните и многоатомните газове отклонението е приблизително. Това показва, че изводите на основната теория за моларния топлинен капацитет са неточни. По-късна теория моларният топлинен капацитет на газовете не зависи от температурата. В действителност, както показват експерименталните изследвания, за всички вещества, включително и за газовете, топлинният капацитет расте с нарастването на температурата. При достатъчно ниска температура топлинният капацитет на газовете намалява с понижаването на температурата и се стреми към $T \rightarrow 0$ К.

Попълнено обяснение на температурната зависимост на моларния топлинен капацитет и съответно различието между теоретичните и експерименталните резултати за κ се дава от квантовата теория за топлинния капацитет, развита от А.Айнщайн.

3.2. СТАТИСТИЧЕСКИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

3.2.1. Закон на Максвел за разпределение на молекулите по скорости

Изхождайки от основното уравнение на кинетичната теория на газове, приемаме, че скоростите на молекулите имат различни стойности. И наистина това се потвърждава от опитните данни. Квадратичната скорост, която въведохме вече (3.1.31), е една

от характеристиките на движението на цялата съвкупност от молекули, но не може да се използва за описание движението на една отделна каквато и да е молекула или за малък брой молекули.

Независимо от напълно хаотичния характер на движение на молекулите се установява, че скоростите им се подчиняват на определена закономерност, на известно разпределение. За първи път задачата за разпределение на молекулите на идеалния газ по скоростите на постъпателното им движение се решава теоретично от Д.К.Максуел (1869 г.). Той установява закон, който позволява да се определи какъв е броят на молекулите dn от общия им брой n_0 в единица обем, чиито скорости са в граници от u до $u + du$ при дадена температура. При това се приема, че газът е химически еднороден и се намира в термодинамично равновесие. Без да се спираме на извода на закона на Максвел, ще разгледаме неговия физичен смисъл и някои следствия, които произтичат от него.

Законът за разпределение на молекулите по големината на скоростите има следния вид:

$$dn = An_0 \exp\left(-\frac{m_0 u^2}{2kT}\right) u^2 du, \quad (3.2.1)$$

където: m_0 е масата на една молекула в газа, k – константата на Болцман, T – абсолютната температура на газа, A – величина, която зависи само от температурата и играе ролята на нормировачен множител. Пресмятанията показват, че $A = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}$. Изразът

$$\frac{dn}{n_0} = A \exp\left(-\frac{m_0 u^2}{2kT}\right) u^2 du, \quad (3.2.2)$$

дава относителния брой молекули със скорости от u до $u + du$. Тази величина може да се разглежда и по друг начин, а именно: тя дава вероятността, с която дадена молекула може да има скорост в граници от u до $u + du$

$$dw = \frac{dn}{n_0} = f(u) du. \quad (3.2.3)$$

Величината

$$f(u) = \frac{dn}{n_0 du} = A \exp\left(-\frac{m_0 u^2}{2kT}\right) u^2 \quad (3.2.4)$$

се нарича функция на разпределението на Максвел. Числено тя е равна на относителния брой молекули, които се намират в единица интервал по изменението на скоростта ($du = 1$) или по друг начин – това е плътността на вероятността, отнасяща се за единица интервал по скоростта.

ерно за функцията на Максвел е, че в показателя на експонентата има знак минус и отношение на кинетичната енергия $m_0 u^2/2$, съответстваща на скорост u на молекулата, на kT , която характеризира средната кинетична енергия на движение на молекулите. Тъй като множителът $\exp\left(-\frac{m_0 u^2}{2kT}\right)$ с нарастването на u намалява по-бързо, отколкото расте $f_2 = Au^2$, функцията започва своето изменение от $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f(u) = 0$, достига определен максимум и след това отново клони към нула (при $u \rightarrow \infty$, $f_1 \rightarrow 0$, $f(u) \rightarrow 0$).

Максимум на функцията $f(u)$ се определят от най-вероятна скорост, която имат молекулите. Нейната стойност може да се определи, като се вземе първата производна на функцията по разпределението df/du и се постави равна на нула:

$$\left. \frac{d}{du} \left[\exp\left(-\frac{m_0 u^2}{2kT}\right) u^2 \right] \right|_{u=u_B} = 0.$$

Условието на диференцирането

$$\exp\left(-\frac{m_0 u^2}{2kT}\right) \left(2 - \frac{m_0 u^2}{kT}\right) u = 0.$$

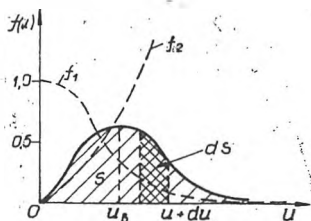
Експонентата (експонентата) е нула при $u \rightarrow \infty$, а третият член (u) при $u = 0$. Обаче както видяхме по-горе, в тези гранични случаи функцията на разпределението придобива минимална стойност. Следователно стойностите на скоростта u , при които функцията придобива максимум, се получават, като се приравни на нула вторият множител: $2 - \frac{m_0 u^2}{kT} = 0$. Оттук

$$u_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = v_{кв} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (3.2.5)$$

където $v_{кв}$ е средната квадратична скорост (3.1.31). Както се вижда, максималната скорост u_B и $v_{кв}$ зависят само от температурата T на газа и молярната маса M .

Интересно е също да се види, че относителният брой на молекулите с определена скорост са в интервала от u до $u + du$, числено е равен на площта на ивицата с основа du и височина $f(u)$ (фиг.3.4), т.е.

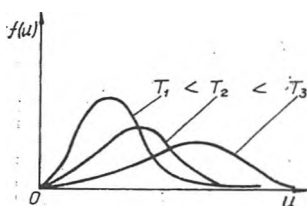
числената площ S , ограничена от кривата на разпределението и абсцисата u , числено е равна на частта от молекулите, скоростите



Фиг. 3.4

на които имат всички възможни стойности от нула до безкрайност. Естествено това условие удовлетворява всичките n_0 молекули и следователно разглежданата площ трябва да бъде приета равна на единица. С други думи, вероятността една молекула да има скорост в интервала от нула до безкрайност е равна на единица, т.е.

$$\int_0^{\infty} f(u) du = \int_0^{\infty} dw = 1. \quad (3.2.6)$$



Фиг. 3.5

Ако даден газ се намира при различни температури, например при $T_1 < T_2 < T_3$, функциите на разпределението на молекулите по скорости се променят. С увеличаване на температурата на газа максимумите на кривите се отместват към по-високите скорости и стават по-малки (фиг.3.5). Това е така, защото при нагряване на газа частта от молекулите, притежаващи малки скорости, се намалява, а частта от молекулите с по-големи скорости се увеличава.

При тези разглеждания е необходимо да се има предвид, че при всяка температура остава в сила условието за нормировка на функцията на разпределението (3.2.6).

Законът на разпределение на молекулите по скорости позволява да се пресметне средната аритметична скорост на постъпателното движение на молекулите на идеалния газ. Пресмятанията водят до следната формула:

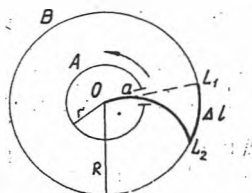
$$\bar{u} = v_{\text{ср}} \sqrt{\frac{8}{3\pi}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (3.2.7)$$

Трите скорости $v_{\text{кв}}$, \bar{u} и $u_{\text{в}}$, характеризиращи състоянието на идеален газ, не се различават значително една от друга, като $v_{\text{кв}} > \bar{u} > u_{\text{в}}$.

3.2.2. Експериментална проверка на закона на Максвел

Експерименталната проверка на закона за разпределение на молекулите по скорости е направена значително по-късно от неговото формулиране. През 1920 г. О. Щерн е провел опити, които позволяват непосредствено да се определи скоростта на молекулите и да се установи тяхното разпределение по скоростта при определена температура T . Принципната схема на уреда на Щерн е показана на фиг.3.6. Има два коаксиални цилиндъра, като радиусът R на външния е значително по-голям от този на вътрешния r . По оста им

нат тънък платинов проводник O , по-късно сребро. В уреда е създаден висок вакуум. При пропускане на електричен ток по проводника последният се загрева до температурата на изпаряване на среброто. В резултат на това атомите на Ag излитат равномерно във всички посоки. За формиране на атомни снопове сферичен сноп е направен през образуващата на вътрешния цилиндър B , очертавайки образа на процепа. При това, за да бъде картината



Фиг. 3.6

на външния цилиндър се охлажда – в такъв случай отлагането на Ag -атоми е по-лесно. Вижда се добре очертана посребрена ивица L_1 . След това двата цилиндъра се привеждат в равномерно въртене около проводника с ъглова скорост ω . За времето Δt , което сребърните атоми изминават разстоянието от процепа a до външния цилиндър $\Delta R = R - r$, последният е успял да се завърти с ъгъл $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. В резултат на това се получава нов образ L_2 , отделен от първия на разстояние Δl . Нека скоростта на атомите е u . За $\Delta t = \frac{R-r}{u}$ и за скоростта се получава

$$u = \omega \frac{R - r}{\Delta\varphi}. \quad (3.2.8)$$

Експерименталните изследвания показват, че вместо рязко очертаване на процепа се наблюдава сравнително по-широка ивица, а не с най-голяма плътност около средата и постепенно намалява към краищата. Това показва, че в тази област попадат най-голямата скоростна група на молекулите, т.е. скоростите на молекулите не са разпределени равномерно, а се групират около най-вероятната им стойност. За самото разпределение този опит дава твърде качествени резултати.

При изследване на по-точни резултати методиката на Шерн е подобрена по-нататък от други експериментатори. Най-по-точно е методът, разработен от Б. Ламерт (г.). При него се използват селектори на скоростта на молекулите в снопа, работещи на принципа на зъбните колела. Това позволява да се определи относителният брой молекули в различни скоростни групи на молекулите.

3.2.3. Барометрична формула

При извода на основното уравнение на кинетичната теория на газове (3.1.22) се предполага, че молекулите се движат свободно,

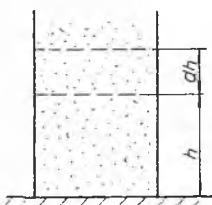
т.е. не им действуват никакви външни сили. Затова може да се приема, че са равномерно разпределени по целия обем, заеман от газа. В действителност това не е така – молекулите на всеки газ включително и на въздуха, се намират в гравитационното поле на Земята. В такъв случай, ако не съществуваше топлинно движение на молекулите на атмосферния въздух, всички те биха паднали върху земната повърхност. Ако пък не съществуваше земното привличане, атмосферният въздух би се разсеял равномерно по цялата Вселена. В крайна сметка силата на земното привличане и топлинното движение на молекулите привеждат въздуха в състояние, при което концентрацията на неговите молекули, а следователно и налягане, са най-големи на морското равнище и намаляват с увеличаване на височината.

Нека видим по какъв закон се изменя налягането с нарастването на височината.

Известно е, че хидростатичното налягане се определя по формулата на Паскал

$$p = \rho gh, \quad (3.2.9)$$

където ρ е плътността на течността;
 h — височината на водния стълб;
 g — земното ускорение.



Фиг. 3.7

Газовете за разлика от течностите са лесно свиваеми и плътността на атмосферния газ зависи от налягането. Следователно формулата на Паскал (3.2.9) може да се използва само за сравнително тънки слоеве, в които плътността може да се приеме за еднаква. Освен това приемаме, че газът се намира в състояние на термодинамично равновесие ($T = \text{const}$) и че имаме еднородно силово поле ($g = \text{const}$). Тогава, ако на височина h от условно избрано хоризонтално равнище налягането на газа е p , то с увеличаване на височината с dh налягането

намалява с dp (фиг. 3.7):

$$dp = -\rho g dh. \quad (3.2.10)$$

От уравнението на Менделеев – Клапейрон (3.1.10) за плътността на газа се получава

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (3.2.11)$$

Тогава изразът за налягането (3.2.10) придобива вида

$$dp = -\frac{pM}{RT} g dh,$$

или

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh. \quad (3.2.12)$$

Като се приеме, че на височина $h = 0$ налягането е p_0 , а на височина h е p , то

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh; \quad \ln \frac{p}{p_0} = -Mgh/(RT),$$

или

$$p = p_0 \exp(-Mgh/RT). \quad (3.2.13)$$

Ако с помощта на барометър се измери налягането p_0 и p , от тази формула по изменението на налягането може да се определи височината

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (3.2.14)$$

Тази формула (3.2.13) е известна като барометрична формула. Тя показва, че налягането на идеален газ намалява с увеличаването на височината по експоненциален закон, и то толкова по-бързо, колкото е по-голяма моларната му маса и се намира при по-ниска температура.

3.2.4. Разпределение на Болцман. Закон на Максвел – Болцман

Барометричната формула (3.2.13) позволява да се намери съотношението между концентрациите на газа на различни височини. И наистина, като се има предвид изразът за налягането (3.1.34), то $\frac{p}{p_0} = \frac{n_0}{n_{00}}$, където n_{00} е броят на молекулите на газа в единица обем при налягане p_0 , а n_0 – при налягане p . Затова формула (3.2.13) може да се запише във вида

$$n_0 = n_{00} \exp(-Mgh/RT). \quad (3.2.15)$$

За еднороден газ $R/M = k/m_0$, където m_0 е масата на една молекула на газа, горната формула придобива вида

$$n_0 = n_{00} \exp(-m_0 gh/kT). \quad (3.2.16)$$

В тази формула величината $m_0 gh$ е потенциалната енергия на една молекула в гравитационно поле на Земята на височина h . Следователно

$$n_0 = n_{00} \exp(-W_p/kT). \quad (3.2.17)$$

Болцман е показал, че за разлика от (3.2.15) и (3.2.16) законът за разпределение (3.2.17) има универсален характер. Той е в сила за

какви да са частици, намиращи се в произволно потенциално поле на външни сили и е известен като закон на Болцман.

От формулата (3.2.16) следва, че при $T \rightarrow \infty$ $n_0 \rightarrow n_{00}$, т.е. повишаването на температурата води до изравняване на концентрацията на молекулите на газа в целия предоставен му обем. При $T \rightarrow 0$ К $n_0 \rightarrow 0$, т.е. всички молекули под действието на силата на тежестта ще се спускат към дъното на съда. Земната атмосфера съществува в такъв вид в какъвто е само благодарение на топлинното движение на частиците на въздуха и на действието на силата на земното привличане.

Както видяхме, законът на Максвел установява какво е разпределението на частиците по скорости, въз основа на което може да се установи разпределението им по стойности на кинетичната енергия, а законът на Болцман дава разпределението на частиците в потенциално поле по стойности на потенциалната енергия. Характерно за двата вида разпределения е наличието на експоненциален множител в показателя, на който се намира отношението на кинетичната или съответно на потенциалната енергия на една молекула към величината kT , определяща средната енергия на топлинното движение на молекулите. Като се има предвид тази аналогия между двата закона, те могат да бъдат обединени в един общ закон – закон на Максвел – Болцман, който гласи: броят на молекулите dn в единица обем, компонентите на скоростите на които са в граници от u_x, u_y, u_z до $u_x + du_x, u_y + du_y, u_z + du_z$, а координатите на молекулите са в граници от x, y, z до $x + dx, y + dy, z + dz$, е

$$dn = A \exp\left(-\frac{W_k + W_p}{kT}\right) du_x du_y du_z dx dy dz. \quad (3.2.18)$$

В този израз A е величина, която зависи от броя на молекулите в единица обем n_0 , масата на една молекула m_0 и температурата T на газа. Освен това необходимо е да се отбележи, че потенциалната енергия е функция на координатите $W_p = W_p(x, y, z)$, а кинетичната енергия е функция на компонентите на скоростта $W_k = W_k(u_x, u_y, u_z)$.

3.3. ЯВЛЕНИЯ НА ПРЕНАСЯНЕ

3.3.1. Среден свободен пробег на молекулите

При разглежданията досега се приемаше, че молекулите на идеалния газ са материални точки, т.е. имат пренебрежимо малки размери. Това дава възможност да не се вземат под внимание „ударите“ между хаотично движещите се молекули. В действителност те имат крайни размери, в резултат на което се намират в непрекъснато „стълкновение“ една с друга. Терминът стълкновение не бива да се

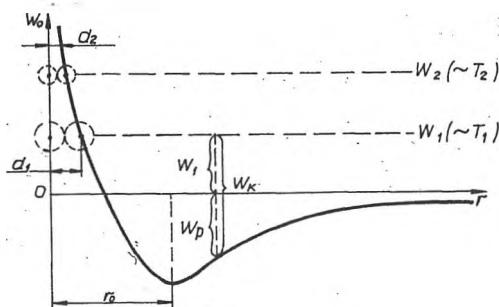
Правилно в буквалния смисъл на думата като удар между твърди сферични тела. Под стълкновение (удар) на молекулите се разбира процесът на взаимодействие между тях, в резултат на което те изменят посоката на своето движение. С други думи, в този случай е необходимо да се вземат предвид междумолекулните сили на взаимодействие или по-точно потенциалната енергия на взаимодействие между молекулите.

Известно е, че между молекулите действуват сили на привличане и на отблъскване. Тяхната големина зависи от разстоянието r между центровете им. Видът на потенциалната енергия на взаимодействие между две молекули в зависимост от r е показан на фиг.3.8. При $r \rightarrow \infty$ силите на взаимодействие са практически равни на нула и следователно $W_p \rightarrow 0$.

С намаляване на r потенциалната енергия намалява ($W_p < 0$) и при $r \rightarrow r_0$ достига минимална стойност $W_p = W_{p \min}$, след което бързо нараства. При $r > r_0$ се проявяват силите на привличане, а при $r < r_0$ силите на отблъскване между молекулите.

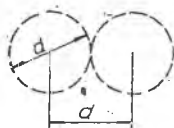
Като се има предвид това, нека разгледаме процеса на приближаване (на „стълкновение“) между две молекули. Да приемем, че първата молекула е неподвижна и центърът ѝ съвпада с началото на координатната система rOW_p , а втората се премества по оста Or към първата. На достатъчно голямо разстояние $W_p = 0$ и пълната механична енергия $W_1 = W_k^1$. Приближавайки се към първата молекула, втората под действието на силите на привличане се движи с нарастваща скорост. В резултат на това кинетичната енергия W_k също расте, а следователно W_p намалява ($W_1 = \text{const}$).

При достигане на разстояние r_0 силите на привличане се сменят със сили на отблъскване – молекулата започва да се движи с по-малка скорост. В тази област се наблюдава бързо намаляване на кинетичната енергия W_k и съответно бързо нарастване на потенциалната енергия W_p . В момента, когато потенциалната енергия W_p стане равна на пълната енергия W_1 , скоростта на втората молекула става равна на нула. В този момент центровете на двете молекули се намират на най-близко разстояние един от друг. Минималното разстояние, на което се приближават двете молекули в резултат на



Фиг. 3.8

тяхното „стълкновение“, се нарича ефективен диаметър d на молекулата (фиг.3.9). Величината $\sigma = \pi d^2$ се нарича ефективно сечение на молекулата.



Фиг. 3.9

Не е трудно да се разбере, че ако втората молекула се приближава към първата, имайки по-голяма пълна енергия ($W_2 \sim T_2, W_1 \sim T_1, W_2 > W_1, T_2 > T_1$), минималното разстояние, на което се приближават центровете на двете молекули, е по-малко от първото ($d_2 < d_1$). Следователно ефективният диаметър на молекулите зависи от температурата, при която се намират – по-висока температура по-малък ефективен диаметър.

Между два последователни удара молекулите се движат праволинейно и равномерно, изминавайки определено разстояние, наречено дължина на свободния пробег. Като се има предвид напълно хаотичният характер на движението на молекулите, съвсем е естествено тези разстояния да бъдат най-различни. Затова се въвежда величината средна дължина на свободния пробег $\bar{\lambda}$. Дефинира се като средно аритметична от голям брой отделни свободни пробези, изминати от една и съща молекула или от различни молекули $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i / n$.

За определяне на $\bar{\lambda}$ ще използваме модела, който вече беше приет, молекулите да се разглеждат като сфери с определен ефективен диаметър d , големината на който зависи от химичната природа на газа и температурата. Нека намерим средния брой на ударите, които изпитва една молекула при своето движение в еднороден газ за единица време. За опростяване на задачата допускаме, че всички молекули с изключение на разглежданата са неподвижни, а разглежданата се движи със скорост, равна на средната аритметична скорост \bar{u} . За една секунда центърът ѝ ще опише сложна начупена линия с дължина \bar{u} . Да допуснем, че тази линия е права линия. В такъв случай молекулата ще бъде в „стълкновение“ с всички молекули, центровете на които лежат вътре в цилиндъра с дължина \bar{u} и радиус на основата d (фиг.3.10). Ако n_0 е броят на молекулите в единица обем на газа, то средният брой на ударите за единица време ще бъде:

$$Z_0 = \pi d^2 \bar{u} n_0, \quad (3.3.1)$$

където $\pi d^2 \bar{u}$ е обемът на разглеждания цилиндър.

Предположението, че всички молекули с изключение на една са неподвижни, разбира се, не е вярно. В действителност всички молекули се движат и възможността за взаимодействие между две частици зависи от тяхната относителна скорост. Затова във формула (3.3.1) вместо \bar{u} е необходимо да се използва средната относителна

Скорост на молекулите $\bar{u}_{отн}$. В случаите, когато разпределението на молекулите по скорости се подчинява на закона на Максвел, се показва, че средната относителна скорост на две молекули от еднороден газ е $\sqrt{2}$ пъти по-голяма от средната аритметична скорост

$$\bar{u}_{отн} = \sqrt{2}\bar{u}. \quad (3.3.2)$$

По такъв начин за средния брой на ударите се получава

$$Z = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{u} n_0. \quad (3.3.3)$$

Средният път, изминат от молекулата за единица време, числено е равен на \bar{u} . Затова средната дължина на свободния пробег ще бъде

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{u}}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}. \quad (3.3.4)$$

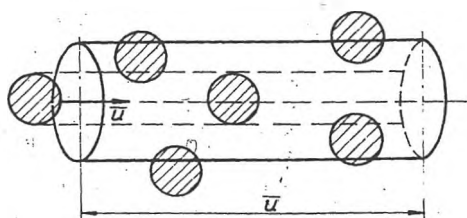
От получената формула следва, че при постоянна температура ($p = n_0 kT$) средната дължина на свободния пробег е обратнопропорционална на налягането. Следователно за даден газ при $T = \text{const}$ и различни налягания, например p_1 и p_2 , ще имаме

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{p_2}{p_1}, \quad \bar{\lambda}_1 p_1 = \bar{\lambda}_2 p_2. \quad (3.3.5)$$

Или произведението от големината на средния свободен пробег и съответното налягане за даден идеален газ при постоянна температура е постоянна величина. При намаляване на налягането средният свободен пробег расте и при свръхвисок вакуум достига стотици метри.

3.3.2. Основни закони при явленията на пренасяне

При изследването на някои явления и закономерности досега се предполагаше, че газовете се намират в равновесни състояния. Сега накратко ще разгледаме процеси, които възникват при нарушаване на равновесното състояние на дадена система, предизвикано от външни фактори. Опитът показва, че ако такава система се остави



Фиг. 3.10

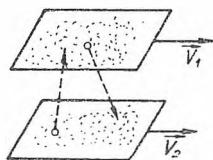
без външно въздействие, тя постепенно възстановява първоначалното (равновесното) си състояние. Затова ще предположим, че под действие на външни фактори неравновесното състояние се запази практически неограничено дълго време и процесите, които възникват в резултат на това, са стационарни, т.е. независещи от времето.

Нарушаването на равновесието в дадена система води до насочен пренос на една или друга величина (тази, за която е нарушено равновесието) от едно до друго място на средата. Величината, която се пренася, може да бъде маса, топлинна енергия, импулс, електрични заряди и т.н. Интензивността на процеса на пренасянето се характеризира с величината поток на съответната величина – количеството от величината, преминаваща през каква да е въображаема повърхност за единица време, – например поток на течност през напречното сечение на токова тръба, поток на електрични заряди през напречното сечение на проводник и т.н.

Потокът е скаларна алгебрична величина и знакът зависи от избора на посоката на направлението, в което се премества съответната величина. В случай на затворени повърхности потокът, изтичащ навън, се приема за положителен и, обратно – потокът, втичащ се навътре, за отрицателен. При нашите разглеждания ще имаме предвид потоци през равнинни повърхности, перпендикулярни на предварително избрано направление, например оста Oz . Ако потокът е в посока на оста Oz , ще се счита за положителен, ако е в обратната посока – отрицателен.

Тук например ще разгледаме явленията вътрешно триене, топлопроводност и дифузия на газовете, при които физическата величина на среден свободен пробег играе важна роля.

1. Вътрешно триене. Явлението вътрешно триене (визкозитет) е свързано с възникването на сили на триене между слоевете на газа, които се преместват успоредно един на друг с различни по големина скорости. От страна на слоя, движещ се с по-голяма скорост, върху слоя, движещ се с по-малка скорост, действа ускоряваща сила. И обратно – по-бавно движещият се слой действа успоредно на по-подвижния слой. Силите на триене, които възникват, са по допирателната към повърхността на триещите се слоеве.



Фиг. 3.11

Причината за възникване на вътрешното триене от гледна точка на молекулно-кинетичната теория на газовете е наслагването на насочното движение на слоевете с различни скорости \vec{v} и хаотичното топлинно движение на молекулите. Нека например имаме два

$(\overline{W}_k = \frac{3}{2}kT)$. Заедно с хаотичното топлинно движение на молекулите се наблюдава и насочено пренасяне на енергия. Молекулите, попаднали от по-нагreti места на газа в по-студени, отдават част от своята енергия на заобикалящите ги други по-студени молекули. И обратно, по-бавните студени молекули, попадайки в местата с по-висока температура, увеличават своята енергия, удряйки се с молекулите, притежаващи по-големи скорости.

Както се вижда, явлението топлопроводност възниква, ако в различни места на газа температурата не е еднаква, т.е. молекулите притежават различна вътрешна енергия. Процесът на предаване на вътрешна енергия във вид на топлина (топлинна енергия) протича така, че количеството топлина dQ , пренасяна за време dt през площ S , е право пропорционална на скоростта на изменение на температурата на дължина dz в посоката на нормалния вектор \vec{n} към тази площ:

$$dQ = -\kappa S dt \frac{dT}{dz} \quad (3.3.9)$$

Тази зависимост е установена експериментално от Ж. Фурие и е известна като закон за топлопроводността на Фурие.

В закона (3.3.4) величината κ е т.нар. коефициент на топлопроводност. Той показва какво количество топлинна енергия се пренася през единица площ за единица време при градиент на температурата, равен на единица:

$$[\kappa] = \text{J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Знакът минус показва, че енергия се пренася в посоката на намаление на температурата.

3. Дифузия. Явление, при което се наблюдава самопроизволно взаимно проникване и смесване на молекулите на два газа, течности или даже твърди тела при тяхното съприкосновение. В химически чисти газове явлението дифузия възниква вследствие на нееднаквата плътност в различните части на обема на газа. В случай на газови смеси причината за дифузия е разликата в концентрацията на отделните газове в различните части на обема на сместа.

Експериментално е установено, че пренасянето на маса на веществата при явлението дифузия се подчинява на закона на А. Фик: масата от даден газ dm , която се пренася за време dt през повърхност S , взета във вътрешността на газа, е право пропорционална на изменението на плътността на газа $d\rho$ на

дължина dz в посока на нормалата \vec{n} към разглежданата площ S

$$dm = -DS dt \frac{d\rho}{dz} \quad (3.3.10)$$

Ако повърхността S е избрана така, че нормалата \vec{n} съвпада с посоката на най-бързото намаление на плътността ρ , то $d\rho/dz$ числено е равно на градиента на плътността. Величината D се нарича коефициент на дифузията. Това е физична величина, числено равна на масата на веществото, пренасяна през единица повърхност за единица време при градиент на плътността, равен на единица:

$$[D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

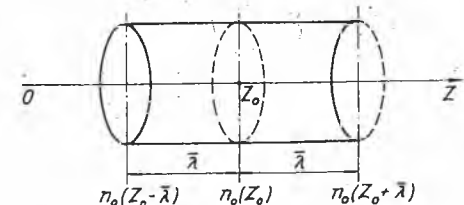
Знакът минус в (3.3.5) показва, че пренос на маса се извършва в посока на намаление на плътността – от места с по-голяма плътност към места с по-малка плътност.

3.3.3. Молекулно кинетична теория за явленията на пренасяне

Експериментално установените закони на Нютон за вътрешното триене (3.3.8), на Фурие за топлопроводността (3.3.9) и на Фик за дифузията в газовете (3.3.10) може да се разглеждат като диференциални закони – валидни са за достатъчно малки площи и достатъчно малък интервал от време dt . Както се вижда, те са доста аналогични и се явяват макроскопични, без да разкриват молекулно-кинетичния смисъл на коефициентите на пренасяне η , κ и D . Задачата на кинетичната теория е да се установи каква е връзката на тези коефициенти с физичните величини, които характеризират топлинното движение на молекулите (средна дължина на свободния пробег на молекулите, средна скорост на движение, средна енергия и т.н.).

Строгото разглеждане на явленията на пренасяне от молекулно-кинетична гледна точка е свързано със значителни трудности. Затова тук ще се ограничим само с качествено разглеждане, например за явлението дифузия, а за другите явления ще бъдат приведени само крайните резултати.

Нека предположим, че плътността на химически еднороден газ зависи от координатите и е различна в различните части на обема на газа. За да съществува непрекъснат, не-



Фиг. 3.12

зависещ от времето стационарен пренос на маса, необходимо е външно въздействие. То трябва да поддържа постоянно разпределението на плътността по целия обем на газа и да компенсира изравняването на плътността вследствие на процеса дифузия. Ще считаме също, че дължината на средния свободен пробег на молекулите $\bar{\lambda}$ е значително по-малка от размерите на съда, в който се намира газът, така че ударите им със стените могат да се пренебрегнат.

Да разгледаме най-простия случай, когато плътността ρ зависи само от координатата z [$\rho = \rho(z)$], което означава, че плътността е еднаква във всички точки на равнина, перпендикулярна на оста Oz (например еднороден газ, намиращ се в цилиндричен съд с основи, перпендикулярни на Oz , като оста на цилиндъра съвпада с оста z - фиг.3.12). Тъй като топлинното движение на молекулите е напълно хаотично, то от общия им брой в единица обем n_0 една трета се движи в направление Ox , една трета по Oy и една трета по Oz . Движението в трите направления Ox , Oy и Oz е равновероятно в двете посоки – положителна и отрицателна. Затова в положителната посока на оста Oz ще се движи една шеста част от всички молекули, а в отрицателната посока също една шеста част. По-нататък нека предположим, че всички молекули имат една и съща скорост на топлинно движение, равна на тяхната средна аритметична скорост \bar{u} . Ако плътността на газа е еднаква в целия обем, то през единица площ на равнинна повърхност, перпендикулярна на Oz , в точката $z = z_0$ за единица време биха преминали наляво и надясно еднакъв брой молекули

$$n_s = \frac{1}{6} n_0 \bar{u}. \quad (3.3.11)$$

Но в нашия случай се приема, че $\rho = \rho(z)$, а следователно и броят на молекулите в единица обем (концентрацията) n_0 не е постоянна величина, а е функция на z , $n_0 = n_0(z)$. Затова за единица време през повърхността S се пренасят в положителната и отрицателната посока на оста Oz различен брой молекули, т.е. в газа се реализира насочен пренос на молекули, а следователно и на маса. При това трябва да се има предвид, че до повърхността S свободно достигат всички молекули, намиращи се от двете страни на повърхността на разстояние, равно на средния свободен пробег $\bar{\lambda}$. За да се намери броят на молекулите n_1 , които преминават през S в положителната посока на Oz , е необходимо да се има предвид концентрацията на молекулите в равнина, пресичаща оста z , в точката $z = z_0 - \bar{\lambda}$, а за пресмятане на броя на молекулите n_2 , преместващи се за единица време през S в отрицателната посока на Oz , в точка $z = z_0 + \bar{\lambda}$. Разликата

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{1}{6} \bar{u} [n_0(z_0 - \bar{\lambda}) - n_0(z_0 + \bar{\lambda})] \quad (3.3.12)$$

ще характеризира плътността на потока на молекулите на газа през повърхността S .

Като се вземе предвид, че $\bar{\lambda} \ll z_0$, то функциите $n_0 = n_0(z_0 \pm \bar{\lambda})$ могат да се представят по следния начин:

$$n_0(z_0 \pm \bar{\lambda}) \approx n_0(z_0) \pm \bar{\lambda} \frac{dn_0}{dz}, \quad (3.3.13)$$

където величината dn_0/dz числено е равна на градиента на концентрацията на молекулите.

Тогава, като се умножи (3.3.12) с масата на една молекула m_0 и се има предвид (3.3.13), ще се получи израз за масата Δm на газа, която се пренася през единица площ за единица време в направлението на оста Oz :

$$\begin{aligned} \Delta n m_0 = \Delta m &= \frac{1}{6} m_0 \bar{u} [n_0(z_0) - \bar{\lambda} \frac{dn_0}{dz} - n_0(z_0) - \bar{\lambda} \frac{dn_0}{dz}] = \\ &= -\frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \frac{d(n_0 m_0)}{dz} = -\frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \frac{d\rho}{dz}, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

където $n_0 m_0 = \rho$ е плътността на газа, а $d\rho/dz$ – градиентът на плътността.

Полученият израз (3.3.14) съвпада със закона на Фик (3.3.10), при положение че $S = 1 \text{ m}^2$, $d\tau = 1 \text{ s}$. Следователно

$$D = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda}. \quad (3.3.15)$$

Вижда се, че коефициентът на дифузия е право пропорционален на една трета от произведението на средната аритметична скорост на молекулите и средната дължина на свободния пробег.

По аналогичен начин от молекулно-кинетична гледна точка могат да се разгледат и явленията топлопроводност и вътрешно триене. За коефициентите на вътрешно триене η и топлопроводност κ се получават следните зависимости:

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \rho, \quad (3.3.16)$$

$$\kappa = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \rho C_V, \quad (3.3.17)$$

където C_V е моларният топлинен капацитет на разглеждания газ при постоянен обем. Между трите коефициента на пренасяне, както се вижда от (3.3.15), (3.3.16) и (3.3.17), са валидни връзките

$$\eta = D\rho, \quad \kappa = \eta C_V = D\rho C_V. \quad (3.3.18)$$

Тези формули показват, че по опитно измерените стойности на един от коефициентите е възможно да се определят другите коефициенти, а така също да се направи преценка за величините, характеризиращи топлинното движение на молекулите.

ЕЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗЪМ

4.1 ЕЛЕКТРОСТАТИЧНО ПОЛЕ ВЪВ ВАКУУМ

4.1.1. Електричен заряд

Електростатиката изучава закономерностите при взаимодействията на неподвижни електрични заряди. Електродинамиката изучава подвижните електрични заряди, които освен електрично поле създават и магнитно поле. Тя дава единно описание на електричните и магнитните явления.

Електричният заряд е величина, която се въвежда за характеризиране степента на наелектризираност на телата. В природата съществуват два вида противоположни електрични заряди, които могат да се компенсират взаимно. Това дава възможност да им се припише условно положителен или отрицателен алгебричен знак. В електрически неутралните тела и техните градивни частици – атомите и молекулите – електричните заряди с противоположни знаци са в равни количества.

Още в законите за електролизата на Фарадей прозира идеята за дискретност на електричните заряди, т.е. съществуването на „елементарен“ електричен заряд, на който са целочислено кратни всички заряди в природата. Доскоро се считаше, че това е зарядът на електрона e . В последните 2–3 десетилетия се утвърди схващането, че най-малките градивни частици на веществото са кварките с електричен заряд, по-малък от този на електрона; d -кварките имат заряд $-1/3e$, а u -кварките $+2/3e$. Така протонът е съставен от 3 кварки uud и има електричен заряд $+e$. Неутронът е съставен от 3 кварки udd и е електрически неутрален.

На въпроса, какво представлява електричният заряд на микро-частиците, не може да се отговори много по-убедително, отколкото на въпроса за тяхната маса. Общият отговор е, че и масата, и зарядът са основни характеристики на частиците и определят в значителна степен свойствата им. Така например в зависимост от масата на частиците в покой материята се дели на веществена (съставена от частици, които имат маса в покой, като електрони, протони и др.) и полева (от частиците на полетата с маса в покой нула това са фотоните за електромагнитното поле, глюоните за полетата на ядрените взаимодействия и др.). Първите се движат със скорост винаги по-малка от скоростта на светлината, а вторите могат да съществуват

само в движение със скоростта на светлината. По аналогичен начин електричният заряд заедно с други характеристики на частиците на веществото разделят последните на частици (електрони, протони и т.н.) и античастици (позитрони, антипротони и т.н.); античастиците имат еднакъв заряд с частиците, но с обратен знак. При „среща“ на частица с нейната античастица те „анихилират“ („изчезват“), при което се излъчват няколко високоенергетични частици. Обратният процес също е възможен, високоенергетични фотони „раждат“ двойка частица и античастица. Тези процеси се управляват от закона за запазване на електричния заряд: алгебричната сума от електричните заряди в една затворена система остава постоянна при всички процеси, които протичат в нея. Този закон е в сила и за затворена система от макроскопични тела.

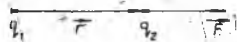
4.1.2. Закон на Кулон

Законът на Кулон е намерен опитно и се отнася за силата на взаимодействие между точкови електрични заряди (заредени тела, размерите на които са пренебрежими спрямо другите разстояния в конкретната задача). Той гласи: *силата на взаимодействие между точкови заряди е пропорционална на големината на зарядите и обратнопропорционална на квадрата на разстоянието между тях, като направлението ѝ съвпада със съединителната права* (фиг.4.1)

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}. \quad (4.1.1)$$

Коефициентът на пропорционалност k зависи от избора на единиците за измерване на участващите в зависимостта величини.

Може да се покаже, че за да се включат единиците за измерване на електричните и магнитните величини към системата за измерване на механичните величини, е достатъчно да се избере произволна единица за измерване само на една електрична или магнитна величина. Единиците за останалите електромагнитни величини се избират така, че коефициентите на пропорционалност във физичните закони да бъдат максимално прости. Изглежда естествено тази величина да бъде електричният заряд, а изборът на единицата да бъде такъв, че коефициентът на пропорционалност в основния закон на електростатиката, закона на Кулон, да бъде единица. Такава система единици съществува и се нарича CGSE. В нея единица електричен заряд (абсолютна единица количество електричество) е този, който на равен нему заряд от разстояние 1 cm действа със сила една дина. В този случай $k = 1$ и



Фиг. 4.1

законът на Кулон добива вида

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (4.1.2)$$

Този избор е коректен, но не достатъчно практичен, тъй като води до появата на сложни коефициенти във формули, които често се използват в практиката. По-рационален би бил изборът, при който коефициентите в интересните за практиката формули са единици. Системи от такива единици се наричат рационализирани и една от тях е системата SI. В нея произволно е избрана единицата за големина (сила) на тока, а единицата за електричен заряд се определя от връзката между големината на тока I и пренесения заряд през сечението на проводника q за време t : $I = q/t$. Електричен заряд един кулон (1 С) е този, който се пренася от ток с големина 1А за 1 s: $1\text{C}=1\text{A}\cdot 1\text{s}$. При този избор за коефициента на пропорционалност в закона на Кулон се получава

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F/m},$$

а законът има вида

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \quad (4.1.3)$$

Константата ϵ_0 се нарича електрична константа.

По опитен път е установена връзката между посочените две единици за електричен заряд: $1\text{C}=3 \cdot 10^9$ абс. един. кол. електричество. Елементарният електричен заряд е най-малкият опитно наблюдаван заряд в природата. За първи път е измерен от Миликън и има стойност $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

Електричните заряди на ядрата и електронните обвивки на атомите са целочислено кратни на елементарния заряд. Тази дискретност, или квантуване на електричния заряд (така също на масата, енергията и други характеристики), е характерна за микрочастици и системи от тях и е проява на тяхната квантова природа. Когато броят на частиците в системата е много голям, т.е. тя е макросистема, дискретността на характеристиките ѝ става незабележима и те се изменят плавно. Поради това всекидневният ни опит от общуване с макросистеми ни внушава идеята за непрекъснатост в строежа и свойствата на околния свят.

4.1.3. Електрично поле

Взаимодействията между електричните заряди се осъществяват чрез електричните полета, които възникват в пространството около тях. Физичната същност на електричното поле (и на полето вобщо) се изяснява в релативистката квантова механика, която

третира въпросите, свързани с превръщането на веществената форма на материята в полева и обратно („анихилацията“ на частици и античастици и „раждането“ на такива двойки в силни полета). Електрично поле, създавано от неподвижни електрични заряди, се нарича електростатично и то в значителна степен прилича на гравитационното поле (като него се създава от заряди, силите на полето са конзервативни, а линиите на интензитета са отворени). Електрично поле възниква винаги и като „партньор“ на променливото магнитно поле и не е свързано с електрични заряди. Силвите линии на това поле са затворени, т.е. то е вихрово и повече прилича на магнитното поле. Именно тези две полета Максвел описва с единен подход и разглежда като две компоненти на едно електромагнитно поле. Разпространението на това електромагнитно поле в пространството образува електромагнитна вълна, частен случай на която е светлината. Разглежданите зависимости и характеристики по-нататък се отнасят за електростатичното поле, т.е. поле, създавано от неподвижни електрични заряди.

За изследване на електростатичното поле се използва пробен електричен заряд q_0 – малък точков положителен заряд. Силата, с която полето действа върху този заряд, се използва за количествена характеристика на полето във всяка негова точка чрез величината интензитет на полето. Тя е числено равна на силата, с която полето действа върху единица положителен заряд в дадената точка, има посоката на силата и се измерва във V/m : $\vec{E} = \vec{F}/q_0$.

Когато точков заряд q създава полето, може да се приложи законът на Кулон и за интензитета на полето се получава изразът

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (4.1.4)$$

Интензитетът на полето в дадена точка зависи само от заряда, който го създава, и от координатите на точката и следователно е негова характеристика.

Полученият резултат лесно може да се обобщи за поле на повече точкови заряди или на наелектризирано тяло, което може да се разглежда като съвкупност от точкови заряди:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i; \vec{E} = \vec{F}/q_0 = \sum_i \vec{F}_i/q_0 = \sum_i \vec{E}_i.$$

Сумирането е по всички заряди. Следователно интензитетът на резултатното поле от много заряди е векторна сума от интензитетите на полетата на отделните заряди. Това твърдение е съдържанието на принципа на суперпозицията на електричните полета.

Електростатичното поле се представя нагледно чрез линиите на интензитета при следното съответствие:

- а) във всяка точка на полето векторът на интензитета е по дотирателната към линията и определя посоката \dot{y} ;
- б) гъстотата на линиите (броят им през единица площ, перпендикулярна на вектора на интензитета) е равна на големината на интензитета.

Линиите на интензитета са отворени, започват от положителните и завършват в отрицателните заряди или в безкрайност. В случай на изолиран точков заряд линиите на интензитета са радиални с център зарядът.

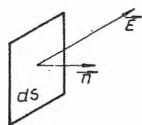
Интензитетът на полето с аналогична дефиниция се използва при описанието на електричната компонента на електромагнитното поле.

4.1.4. Теорема на Гаус

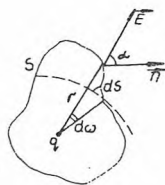
В описанието на векторните полета (електрично, магнитно и др.) се използва величината поток на вектор през повърхност Φ . За големината на елементарния поток на интензитета на електростатичното поле $d\Phi$ през елемент от повърхността dS с нормален единичен вектор \vec{n} съгласно означенията на фиг. 4.2 .

$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = E dS \cos \alpha$. За потока през произволна повърхност получаваме

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int E dS \cos \alpha.$$



Фиг. 4.2



Фиг. 4.3

Теоремата на Гаус свързва потока на вектора на интензитета през затворена повърхност с големината на електричните заряди, които повърхността огражда. Ще изведем тази връзка в частния случай на поле на точков заряд.

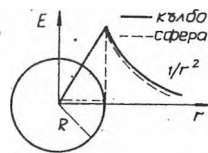
Нека S е произволна затворена повърхност, която огражда точков заряд q , както е показано на фиг.4.3. За потока през елементар-

сферичната повърхност. Действително, ако намаляваме радиуса на заредената сфера спрямо този на сферичната повърхност, заредената сфера с добро приближение може да се разглежда като точков заряд, чиито линии на интензитета са радиални. По същите причини интензитетът на полето има еднаква стойност във всички точки на сферичната повърхност. Тогава за потока през сферичната повърхност получаваме

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi R^2 \sigma = \frac{q}{\epsilon_0};$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (4.1.6)$$

Полученият резултат показва, че интензитетът на полето на равномерно заредена сфера вън от нея е еднакъв с интензитета на полето на точков заряд със същата големина на заряда, разположен в центъра на сферата.



Фиг. 4.4

Аналогична процедура може да се приложи за определяне на интензитета на полето в точка от вътрешността на сферата. Сферичната повърхност, построена във вътрешността на заредената сфера, няма да огражда електричен заряд и следователно потокът, а оттам и интензитетът на полето за точките от тази повърхност ще са нули. Получените резултати са показани графично на фиг. 4.4.

б) равномерно заредено кълбо с радиус R и обемна плътност на електричните заряди ρ ($\rho = q/\frac{4}{3}\pi R^3$).

Разсъжденията и резултатите за полето вън от кълбото са същите, както и при равномерно заредена сфера. Вътре в кълбото построените сферични повърхности ограждат ненулев заряд. Например сферична повърхност с радиус $r < R$ огражда заряд с големина

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Потокът през тази повърхност е

$$\Phi = 4\pi r^2 E.$$

За интензитета на полето вътре в кълбото на разстояние r от центъра му получаваме

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}. \quad (4.1.7)$$

Следователно полето е нула само в центъра на кълбото и нараства линейно до повърхността му, след което намалява, както квадратът от разстоянието до центъра му.

Със същия подход може да се пресметне полето на безкрайна равномерно заредена повърхност ($E = \sigma/2\epsilon_0$) или на две успоредни безкрайни заредени повърхности с еднакви плътности, но разноименни заряди (плосък кондензатор, $E = \sigma/\epsilon_0$). В тези случаи повърхностите, през които ще се пресмята потокът, трябва да имат равнинна симетрия (напр. цилиндър или паралелепипед), съответстваща на симетрията на задачата.

4.1.5. Работа на силите на електростатичното поле

Направеното дотук описание на електростатичното поле чрез силите, с които полето действа върху зарядите, може да се нарече силово описание. Тъй като в резултат на действието на сили се извършва работа и се изменя енергията на телата, може да се потърси и друг начин за описание на полето, условно да го наречем енергетичен. За целта нека пресметнем работата, която извършват силите на полето за преместване на електричен заряд в него. Ще направим това при следните опростяващи условия, което не снижава общността на крайния резултат: полето се създава от точков заряд q , точковият заряд q_0 се премества от т. 1 до т. 2 по произволен път под действието на силите на полето (фиг. 4.5).

Елементарната работа за преместване на разстояние dl се записва по следния начин:

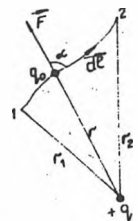
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2} dl \cos \alpha,$$

където $dl \cos \alpha = dr$. За пълната работа получаваме

$$A = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (4.1.8)$$

Този резултат разкрива някои характерни свойства на полето:

1. Работата на силите на полето не зависи от формата на пътя, а само от началното и крайното положение на заряда. Следователно при преместване по затворен път работа не се извършва и енергията на заряда не се променя, ако в системата от два заряда действуват само електростатични сили. Такива сили, които запазват енергията на системата при връщането ѝ в началното положение, се наричат



Фиг. 4.5

консервативни, а полетата, в които действуват такива сили, се наричат потенциални. Освен електростатичното поле такива свойства има и гравитационното поле.

2. Работата при преместването силите на полето извършва за сметка на намаляването на потенциалната енергия на взаимодействие между зарядите

$$A = U_1 - U_2,$$

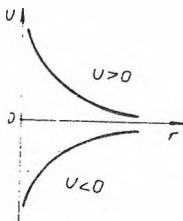
където U е потенциалната енергия на заряда q_0 в полето на заряда

$$U = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} + C. \quad (4.1.1)$$

Тук C е произволна константа, която изразява неопределеността абсолютната стойност на потенциалната енергия; извършената работа измерва само изменението на потенциалната енергия.

Определянето на стойността на C е произволно и е свързано избора на началото на „скалата“, по която се измерва U . С подобна ситуация се среща в геометрията: разстоянието между две точки в пространството (аналог на работата) се определя еднозначно чрез разликата в координатите им (аналог на потенциалната енергия) въпреки че стойностите на самите координати зависят от избора на координатната система, в която се отчитат.

Най-естествено е да приемем потенциалната енергия на взаимодействие между две заредени тела да бъде нула, когато те са много отдалечени ($r \rightarrow \infty$). При това допускане $C = 0$ в израза за потенциалната енергия.



Фиг. 4.6

Зависимостта на потенциалната енергия на взаимодействие между два заряда от разстоянието и знака им е показана графично на фиг.4.6. Полученият резултат заслужава кратък коментар. Условието система от взаимодействащи тела да бъде в равновесие е потенциалната ѝ енергия да има минимум. Може да се покаже най-общо, че това условие не е изпълнено за каква да е система от електрични заряди, едноименни или разноименни, т.е. не е възможно да съществува устойчива система от неподвижни електрични заряди. Стабилността на атомите и молекулите се постига за сметка на периодичното движение на заредените частици в тях. Поради подобие на електростатичните и гравитационните полета направените заключения са в сила и за гравитационните системи. Например устойчивостта на Слънчевата система се постига чрез движението на планетите около Слънцето.

Потенциалната енергия зависи от големината на зарядите и разстоянието между тях и може да се използва като характерни-

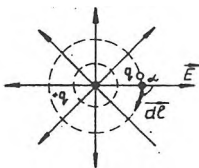
чрез еквипотенциални повърхнини – повърхнини, във всички точки на които потенциалът е еднакъв. При поле на точков заряд те представляват концентрични сфери с център заряда, а при система заряди формата на еквипотенциалните повърхнини е по-сложна.

Ще покажем, че във всяка точка на полето интензитетът е перпендикулярен на еквипотенциалната повърхнина. Доказателството ще направим за частния случай на поле на точков заряд.

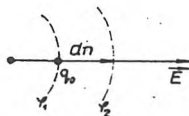
Елементарната работа за преместване на точков заряд q_0 на разстояние dl върху еквипотенциалната повърхнина ($d\varphi = 0$), както е показано на фиг. 4.7, може да се изрази по следния начин:

$$dA = q_0 E dl \cos \alpha = -q_0 d\varphi = 0.$$

Тъй като по условие полето, преместването и зарядът не са нули, следва, че $\cos \alpha = 0$, т.е. $\alpha = \pi/2$, с което твърдението е доказано.



Фиг. 4.7



Фиг. 4.8

Количествената връзка между интензитета и потенциала ще покажем в същия частен случай (фиг. 4.8) чрез елементарната работа за преместване на заряда по линията на интензитета на разстояние dn , на което разстояние потенциалът намалява с $-d\varphi$. За елементарната работа получаваме

$$dA = q_0 E dn = -q_0 d\varphi,$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dn}. \quad (4.1.11)$$

Интензитетът е равен на изменението на потенциала на единица дължина и е насочен обратно на нарастването на потенциала (знак минус).

В общия случай преместването не е в направлението на интензитета и може да се разложи по трите координатни оси, а съответните компоненти на интензитета да се изразят чрез изменението на потенциала в направлението на координатните оси:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

тата на векторното смятане тази зависимост се записва в
н вид по следния начин:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi, \quad (4.1.12)$$

е векторен диференциален оператор, който свързва ком-
е на вектор с изменението на скалар. Следователно интен-
та електростатичното поле е равен на градиента на потен-
е в посока на намаляването на потенциала. Например за
положителен точков заряд потенциалът нараства към за-
и заряда е насочен градиентът на потенциала) и съгласно
интензитетът трябва да бъде насочен от заряда към безкрай-
го вече знаем от предишните разглеждания.

ученият резултат има по-голяма степен на общност и за-
известен коментар:

Възможно е при събиране на полета от различни заряди
бласти, в които интензитетът е нула, но потенциалът, а
лно и потенциалната енергия не са нули. Например резул-
поле на два еднакви точкови заряда има интензитет нула
а половин разстояние между зарядите, но в тази точка по-
ата енергия не е нула.

ко умножим двете страни на равенствата (4.1.11) и (4.1.12)
чаваме

$$\vec{F} = -\text{grad}U, \quad (4.1.13)$$

та на взаимодействие е равна на градиента на потенциал-
гия на взаимодействие. Тъй като в равновесно състояние
не действуват сили, на него съответствува екстремум на
лната енергия. Тази връзка между потенциална енергия
взаимодействие, изведена в потенциално поле, е в сила и
олно силово поле. Например в равновесното състояние на
молекулите и йоните в течна и твърда фаза потенциалната
отрицателна и има минимум (те се намират в потенциална
производната на енергията и силата на взаимодействие са

4.2. ЕЛЕКТРИЧНО ПОЛЕ В ДИЕЛЕКТРИК

мите и молекулите са изградени от електрически заредени
въпреки че самите те са електонеутрални. В електрично
ектроните и ядрата действуват сили, които променят свой-
атомите и молекулите, включително и техния химичен
. По такъв начин външните електрични полета в значи-
епен могат да изменят свойствата на телата и да оказват
върху химичните процеси в тях.

обни ефекти могат да предизвикат и външни магнитни по-
кцент върху ефектите на електричното поле веществата,

които нямат свободни електрични заряди, се наричат диелектрици. В случай на магнитно поле се използва терминът магнетици. И поведението на веществата като диелектрици и магнетици има много общо или аналогично и неговият анализ води до по-задълбочено разбиране на свойствата им.

4.2.1. Диполни моменти на молекулите

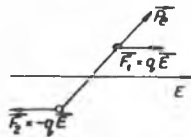
Какво е поведението на отделната молекула (атом) в електрично поле?

Обемния заряд на молекулата можем да считаме съсредоточен в центровете на положителните и отрицателните заряди – точки в обема на молекулата, в които можем да считаме, че са съсредоточени всички положителни, респ. отрицателни заряди в молекулата. Когато тези центрове съвпадат, в молекулата няма обособени полюси и тя е неполярна. В обратния случай двата центъра са два полюса и молекулата, тя е полярна и представлява електричен дипол.

Интуитивно е ясно, че молекулите със симетрична структура са неполярни (H_2 , N_2 и др.), а тези с несиметрична конфигурация са полярни (H_2O , NH_3 и др.). За количествена характеристика на електричния дипол се въвежда векторната величина електричен момент на дипола или диполен момент $\vec{p}_e = q\vec{l}$ с означенията от фиг. 4.9.



Фиг. 4.9



Фиг. 4.10

При полярните молекули диполните моменти са резултат от асиметрията в структурата им и почти не се изменят по големина под действие на външни електрични полета. Последните действуват върху дипола с двойка сили, което води до ориентирането на дипола в направлението на полето, както е показано на фиг. 4.10. Ако електричното поле не е хомогенно, силите \vec{F}_1 и \vec{F}_2 не са равни по големина, т.е. освен че ще се ориентира, диполът ще се премества в посока на нарастването на полето.

Във външно електрично поле неполярните молекули ще се поляризират, тъй като под действието на силите на полето ще се „отместят“ центровете на положителните и отрицателните заряди в обратни посоки и в молекулата ще се индуцира електричен диполен момент в посока на външното поле. Големината на диполния

пропорционална на интензитета на полето (при не много рични полета)

$$\vec{p}_c = \epsilon_0 \beta \vec{E}, \quad (4.2.1)$$

нарича поляризуемост на молекулата и зависи само от и премахване на външното поле молекулата възстаноачалния си вид и отново става неполярна.

4.2.2. Диелектрична поляризация

гледаме поведението на диелектриците като цяло в елек-

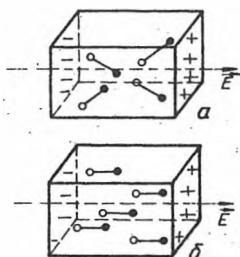
ствие на външно електрично поле диполните моменти роизволно малък обем от диелектрика (в който има все брой молекули, макроскопичен обем) имат произволни и резултантният диполен момент за обема е нула, т.е. ът не е поляризиран. Причина за това е топлинното двиго диполите участвуват. При внасяне в електрично поле ът се поляризира, т.е. резултантният диполен момент за волен обем вече не е нула и е насочен по посока на вън-

електриците с полярни молекуцията е следствие от ориентираолите в посока на полето. Тази на поляризация на диелектриа (фиг. 4.11, а) поради противоа топлинното движение, което отичност в ориентацията на ди-

диелектрици с неполярни молекуцират диполни моменти в наа външното поле (фиг. 4.11, б) и ризация се нарича електронна, следствие от деформирането на ге обвивки. Като се има предндуцираните диполни моменти, ляризацията на диелектрика, са

ални на интензитета на електричното поле, което ги по-

исталните диелектрици не може да се говори за обособеи и за диполни моменти на молекулите. Тяхната полярилтат от действието на полето върху целия диелектрик. ри диелектрици с йонна кристална решетка (готварска на полето „отместват“ една спрямо друга двете подретриевите и хлорните йони и кристалът като цяло полелен момент. Такава поляризация се нарича йонна. За



Фиг. 4.11

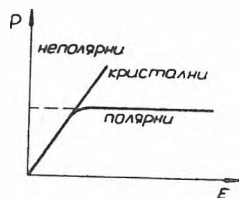
количествена характеристика на поляризацията на диелектриците се въвежда величината вектор на поляризация или поляризованост на диелектрика \vec{P} , числено равна на диполния момент в единица обем

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_i \vec{p}_{ei}}{\Delta V} \right) \quad (4.2.2)$$

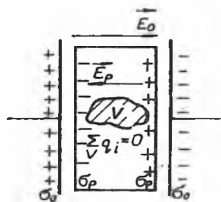
За хомогенен диелектрик с неполярни молекули с обемна плътност на молекулите n поляризоваността може да се изрази по следния начин:

$$\vec{P} = n\vec{p}_e = n\beta\epsilon_0\vec{E} = \kappa_e\epsilon_0\vec{E}, \quad (4.2.3)$$

където $\kappa_e = n\beta$ се нарича диелектрична възприемчивост на диелектрика. Тя е важна характеристика на електричните свойства на диелектрика, свързана е с особеностите в строежа му и определя поведението му в електрично поле. Получената зависимост показва, че поляризацията на диелектрика е пропорционална на интензитета на полето, което я създава. Тя е в сила също за кристални диелектрици (фиг.4.12). За диелектрици с полярни молекули пропорционалност между поляризацията и интензитета на външното поле има само при слаби електрични полета. С нарастването на интензитета на полето настъпва насищане поради практически пълната ориентация на диполните моменти на молекулите по посока на полето.



Фиг. 4.12



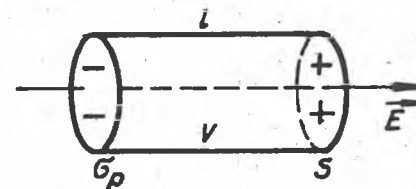
Фиг. 4.13

Поляризацията на диелектрика води само до „подреждане“ на електричните заряди в него, но електронейтралността му се запазва във всеки макроскопичен обем във вътрешността на диелектрика. Единствено на повърхността му в направление на външното поле се появяват повърхностни електрични заряди, наречени поляризационни, както е илюстрирано на фиг. 4.13 за диелектрик между плочите на зареден плосък кондензатор.

В резултат на зареждането на кондензатора с електрични заряди с повърхностна плътност σ_0 между плочите му се създава електрично поле с интензитет E_0 . Под действието на това поле диелек-

трикът се поляризира и на повърхността му се появяват поляризационни заряди с плътност σ_p . Между зарядите на плочите на кондензатора и тези на повърхността на диелектрика има съществена разлика. Първите са свободни заряди и могат да се преместват. Например, ако свържем с проводник двете плочи на кондензатора, свободните заряди ще се преместят, ще се компенсират взаимно и кондензаторът ще се разрежи. Зарядите на повърхността на диелектрика са свързани, участвуват в структурата на молекулите му и не могат да се преместват или да се отнемат. Ако по подобен начин свържем двете заредени повърхности на диелектрика с проводник, няма да протече електричен ток и повърхностите ще останат електрически заредени.

Естествено е да съществува връзка между поляризоваността на диелектрика и индуцираните поляризационни заряди. Тя се получава лесно в частния случай на цилиндричен хомогенен диелектрик в хомогенно електрично поле по оста на цилиндъра (фиг.4.14).



Фиг. 4.14

Цилиндърът може да се разглежда като макродипол с диполен момент \vec{p}_e :

$$p_e = ql = \sigma_p Sl.$$

От определението за поляризованост може да запишем

$$P = \frac{p_e}{V} = \frac{\sigma_p Sl}{Sl} = \sigma_p = \kappa_e \epsilon_0 E, \quad (4.2.4)$$

т.е. поляризоваността е равна на повърхностната плътност на поляризационните заряди и се определя от диелектричната възприемчивост на веществото и интензитета на полето, което създава поляризацията.

4.2.3. Електрично поле в диелектрик

Какви промени в електричното поле поражда присъствието на диелектрик? Отговор на въпроса ще потърсим за частен случай с конфигурация на полето и диелектрика, показани на фиг. 4.13. Получените закономерности може да се покаже, че са валидни и в общия случай.

И свободните, и свързаните електрични заряди създават електрични полета \vec{E}_0 и \vec{E}_p , като резултантното поле има интензитет

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p.$$

Именно резултатното поле определя поляризацията на диелектрика и се има предвид в предишните формули и разсъждения.

В разглеждания случай полето на кондензатора може да се разглежда като поле между безкрайни равномерно заредени равнини. Същото се отнася и за полето на поляризационните заряди

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

С отчитане на противоположните посоки на интензитетите може да запишем

$$E = E_0 - E_p = E_0 - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\kappa_e \epsilon_0 E}{\epsilon_0} = E_0 - \kappa_e E,$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \kappa_e} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon}, \quad (4.2.5)$$

където $\epsilon = 1 + \kappa_e$ се нарича относителна диелектрична проницаемост и е характерна за диелектрика; $\epsilon = 1$ за вакуум и $\epsilon > 1$ за останалите диелектрици, като за по-голямата част от тях има стойност няколко единици. Тази величина се определя опитно и характеризира диелектричните свойства на материалите. Например пропорционални на диелектричната проницаемост са т.нар. диелектрични загуби на енергията на променливото електрично поле в диелектрика. От тях се определя поглъщателната способност на диелектрика, когато върху него падат електромагнитни вълни, и е важна характеристика на много от произвежданите материали – текстил, покрития, бои и др.

В теорията на електромагнитните вълни на Максвел показателят на пречупване на вълната n на границата на вакуум – диелектрик е свързан с относителната диелектрична проницаемост със закона на Максвел

$$n = \sqrt{\epsilon\mu},$$

където μ е относителната магнитна проницаемост на веществото.

В отговор на поставения въпрос в началото на параграфа може да кажем, че присъствието на диелектрик води до отслабване на полето на свободните заряди ϵ пъти. Този факт намира непосредствено практическо приложение при направата на кондензатори; поставянето на диелектрик между плочите на кондензатора намалява полето между тях ϵ пъти и толкова пъти увеличава капацитета му.

Основният закон на електростатиката, законът на Кулон, в общия случай не е в сила в присъствие на диелектрик поради появата на поляризационни заряди. Когато диелектрият е хомогенен и запълва цялото пространство около взаимодействащите точки

заряди (например течна или газова среда с размери, много по-големи от разстоянията между зарядите), индуцираните поляризационни заряди са много отдалечени от взаимодействащите и за тях може да не се държи сметка. В този случай законът на Кулон е в сила, но взаимодействието между зарядите е ϵ пъти по-слабо:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (4.2.6)$$

В такива диелектрици интензитетът на полето също намалява ϵ пъти.

Характерно е, че във всички диелектрици индуцираното поле е в обратна посока на външното (представката „диа“ от гръцки означава „в обратна посока“); поради което те отслабват външното електрично поле. Магнитното отнасяне на веществото е по-различно: някои вещества също отслабват външното магнитно поле (диамагнетици), но други го усилват (парамагнетици и феромагнетици).

4.2.4. Особени диелектрици

Някои вещества имат особени диелектрични свойства, което им отделя особено място в природата и практиката.

1) *Вода*. Тя е сред най-разпространените и най-прости съединения. Молекулите на водата са силно асиметрични, с голям диполен момент, а оттам и голяма диелектрична проникваемост на водата $\epsilon = 81$. Поради това водата е добър разтворител за много вещества и играе важна роля в процесите, протичащи в живите организми и в неживата природа. Взаимодействието между водните молекули с голям диполен момент, а също така и с други полярни молекули води до образуването на т.нар. водородни връзки, които създават известна подреденост на водните молекули дори в течно състояние със съществено значение за много биологични процеси.

2) *Електрети*. Това са група диелектрици (ебонит, сяр, титанити на металите, полимери и др.), които запазват състоянието си на поляризованост и след премахването на външното електрично поле (електретно състояние). Основен начин за привеждане на телата в такова състояние е разтопяването им и постепенното им охлаждане в много силно електрично поле (термоелектрети). В подобно (фотоелектретно) състояние веществата могат да се доведат чрез облъчването им със светлина в силно външно поле, например монокристал на сяр. Очевидно електретите могат да се използват като постоянни източници на електростатично поле и това определя областите на приложението им: в електрофилтри за почистване на газове в промишлени инсталации, в дозиметрията, виброприемниците и др.

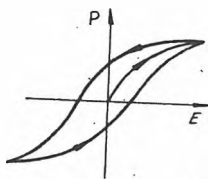
3) *Сегнетоелектрици*. Тази група диелектрици (сегнетова сол, бариев титанат и др.) имат следните особености в електричното поведение:

а. Диелектричната им проницаемост е много голяма (няк хиляди) спрямо тази на обикновените диелектрици.

б. Диелектричната проницаемост зависи от температурата като при обикновените диелектрици температурната зависимост е незначителна. Освен това след определена критична температура (точка на Кюри) те загубват особените си свойства и се превръщат в обикновени диелектрици.

в. Диелектричната проницаемост зависи от интензитета на полето, следователно поляризоваността на диелектрика ще зависи нелинейно от полето (вж. формула 4.2.3).

г. Поляризацията на диелектрика проявява хистерезис, поляризацията на диелектрика изостава от изменението на интензитета на външното поле, което я поражда, подобно на магнитния хистерезис при феромагнетиките (фиг. 4.15).



Фиг. 4.15

Тези особени свойства на сегнетоелектриците са следствие от съществуването на области (домени) с висока степен на спонтанна поляризация.

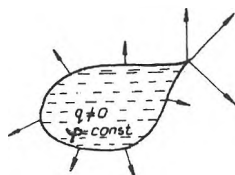
Във външно поле се ориентират отделни диполи, а домениите като цяло.

Поради голямата стойност на диелектричната проницаемост те се използват при изготвянето на кондензатори с малки размери и голям капацитет.

Сегнетоелектриците са нелинейни диелектрици, $\epsilon(E)$ и се използват като нелинейни елементи в електрониката (диелектрични усилватели, стабилизатори и др.) и като елементи на паметри в компютрите.

4) *Пиезоелектрици*. Някои кристали, които нямат център на симетрия (кварц, турмалин и др.) при прилагане на механично въздействие, натиск или опън, се поляризират така, че на две от стени им се появяват поляризационни заряди с плътност, пропорционална на въздействието. Този ефект е известен като прав пиезоелектричен ефект. Съществува и обратният ефект – при поставяне на такива кристали в подходящо ориентирано електрично поле размерите им се променят (кристалите се свиват или разширяват). Пиезоелектричният ефект е резултат от разместването на подрешетките на кристала под действие на външни фактори – механично въздействие и електрично поле. Пиезокристалите най-общо се използват в авиационната електроника като преобразуватели (датчици) на електрични сигнали в механични и обратно. Особена група преобразуватели са електричните приемници на ултразвук.

Когато трябва да се измери общият заряд, пренесен от спондирени частици (йони или електрони), снопът се насочва към уловка, която по същество е разновидност на Фарадеев цилиндър и на която снопът отдава заряда си. Големината на заряда може да се определи по изменението на потенциала на уловката.



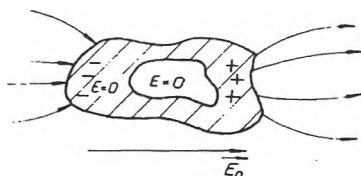
Фиг. 4.16

Интензитетът на полето на повърхността на проводника е перпендикулярен към нея, тъй като тя представлява екипотенциална повърхност (фиг.4.16).

Разпределението на зарядите върху повърхността на проводника не е равномерно и зависи от формата му. Повърхностната плътност на зарядите и интензитетът на полето са по-големи там, където кривината на проводника е по-голяма (изпъкналите части на проводника).

4.3.2. Проводник във външно електрично поле

Във външно електрично поле проводникът се наелектризира по индукция (електростатична индукция), което се изразява в преместване на свободните електрични заряди в него, така както е показано на фиг.4.17. Индуцирани електрични заряди се преместват по повърхността на проводника до настъпване на електростатично равновесие – резултатното електрично поле (външно поле и поле на индуцираните заряди) да бъде нула навсякъде в проводника и в заграденото от него пространство, ако има такова. Този резултат е в основата на електростатичната защита от външни електрични полета.



Фиг. 4.17

Метални калъфи се използват за защита от външни електрични полета на апарати или възли от тях, когато тези полета могат да предизвикат смущения в нормалното им функциониране. Особено важна форма на защита от външни електрични и магнитни полета е ширмовката – „обличане на проводник“ с метална оплетка. Тя се прилага за защита на проводник със слаб електричен сигнал и значително намалява нивото на шумовете, които се добавят към сигнала.

По аналогичен начин за защита на сгради от силни атмосферни електрични полета и попадане на мълнии (най-често високоволтажни станции) върху покривите им се поставя заземена метална мрежа със същия електричен ефект като непрекъснатата метална по-

електростатичното поле в заграденото пространство е го не се индуцират електрични заряди.

4.3.3. Капацитет на проводник и кондензатори

Потенциалът на наелектризирано тяло зависи от големината на заряда, формата на тялото и от средата, която го околнурва. Ако тялото е изолирано в еднороден диелектрик и е много малко по отношение на големината на заряда, между изменението на заряда q и породеното от него изменение на потенциала му φ има линейна зависимост

$$\frac{dq}{d\varphi} = C.$$

C се нарича собствен капацитет на тялото, числено е равно на количеството електричество, което изменя с единица потенциал, и се измерва във фаради: $1 \text{ F} = 1 \text{ C}/1 \text{ V}$.

Изчислим капацитета на проводяща сфера с радиус R в диелектрик с относителна диелектрична проникваемост ϵ

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

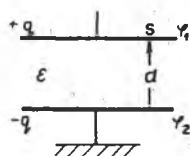
Външното поле на сферата е еднородно с полето на точков заряд (вж. 4.1.6), а самата сфера представлява еквипотенциална повърхност с потенциал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{R}.$$

Капацитета на сферата получаваме

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (4.3.2)$$

Важно е да отбележим, че капацитетът на проводника и собственият капацитет на телата зависят много малък и силно зависи от разстоянието на околните тела. По тази причина телата да натрупват върху себе си електрични заряди намира практическо приложение, когато се използват не отделно, а в комбинация от тела, чийто капацитет зависи не зависи от останалите. Тази комбинация се нарича кондензатор. Такава независима комбинация може да има само ако електричното поле почти изцяло е съсредоточено



Фиг. 4.18

вътре в него. Типичен представител на кондензаторите е плоският кондензатор, показан на фиг.4.18.

Когато горната плоча на кондензатора се зарежда с положителни електрични заряди, върху долната плоча се индуцират положителни и отрицателни заряди; отрицателните се задържат върху плочата, а положителните се отвеждат от нея чрез заземяването ѝ с проводник.

При разстояние между плочите, много по-малко от размерите им, те могат да се разглеждат като две успоредни заредени безкрайни равнини и за интензитета на полето може да запишем

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S}, \quad E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

а за капацитета

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}. \quad (4.3.3)$$

Следователно капацитетът на плоския кондензатор е пропорционален на площта на плочите му и обратнопропорционален на разстоянието между тях. Поставянето на диелектрик с диелектрична проникваемост ϵ между плочите на кондензатора увеличава капацитета му ϵ пъти. При изготвянето на кондензатори се търси компромис между тези фактори в зависимост от конкретната задача. Така например постигането на големи капацитети на кондензатор се ограничава от допустимите размери (S), от икономическата целесъобразност на използването на специални диелектрици (ϵ) и от възможността за електричен пробив между плочите, което зависи от свойствата на диелектрика и дебелината му (d).

Направените разсъждения могат да внушат идеята за използването на водата като диелектрик в кондензаторите поради ниската ѝ цена, високата диелектрична проникваемост и др. Въпреки това такива кондензатори не се правят. Защо?

Като използвате само формула 4.3.3 за капацитет на плосък кондензатор, докажете, че при последователно свързване на n еднакви кондензатори в батерия капацитетът на батерията е n пъти по-малък от капацитета на отделен кондензатор, а при паралелно свързване – n пъти по-голям от този на отделен кондензатор.

4.3.4. Енергия на електростатичното поле

Ще пресметнем потенциалната енергия на зареден плосък кондензатор. Тъй като полето му почти изцяло е съсредоточено в обема на кондензатора, естествено е да считаме, че енергията на кондензатора е равна на енергията на полето.

Зареждането на плосък кондензатор (фиг.4.18) освен чрез предаване на електричен заряд на една от плочите може да се разглежда

и като пренасяне на електричен заряд от едната плоча на другата. Например ако двете плочи са електронеутрални, зареждането на кондензатора може да стане, като положителен заряд от долната плоча се пренася върху горната, при което тя се зарежда толкова положително, колкото отрицателно се зарежда долната. При това зареждане работа извършват външните сили, тъй като пренасят положителен заряд срещу силите на електричното поле. За пренасянето на елементарен електричен заряд dq' между двете плочи, когато потенциалната разлика между тях е $U' = \varphi_1 - \varphi_2$, се извършва елементарна работа

$$dA' = dq' \cdot U',$$

а за зареждането на кондензатора със заряд q до потенциална разлика U се извършва работа

$$A = \int_0^q U' \cdot dq' = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C}. \quad (4.3.4)$$

Чрез останалите величини, които характеризират кондензатора, изразите за работата и енергията на кондензатора имат вида

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}, \quad (4.3.5)$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon V E^2, \quad (4.3.6)$$

където $V = Sd$ е обемът на кондензатора, в който е съсредоточено електричното поле.

За обемната плътност на енергията получаваме

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2. \quad (4.3.7)$$

Следователно обемната плътност на енергията на електричното поле зависи от квадрата на интензитета му. Получената връзка е в сила за всяко електрично поле.

4.4. ПОСТОЯНЕН ЕЛЕКТРИЧЕН ТОК

4.4.1. Електричен ток

Електричен ток се нарича насоченото движение (пренасянето) на електрични заряди. Понятието ток, поток се използва

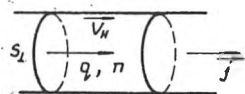
като характеристика и на много други процеси: масов поток при дифузията, топлинен поток при топлообмена, информационен поток и др. Когато електричните заряди се пренасят от микрочастици (токови носители) в телата, се говори за ток на проводимост.

Условие за протичане на електричен ток е наличието на токови носители – електрони в металите и йони в електролитите и газовете. Второто условие за протичане на електричен ток е наличието на електрично поле, което придава насочено движение на токовите носители за сметка на енергията на полето. Това насочено движение се „наслажда“ върху топлинното им движение.

Когато електричният ток променя посоката и/или големината си, нарича се променлив, а когато ги запазва – постоянен. Основни характеристики на постоянния ток са посока, големина и плътност.

Посоката на тока се избира условно, тъй като токови носители могат да бъдат положителни или отрицателни заряди. За посока на тока се приема посоката на движение на положителните заряди.

Големината (силата) на тока е величина, числено равна на количеството електричество, пренесено през кое да е сечение на проводника за единица време:



$$I = \frac{dq}{dt}$$

Фиг. 4.19

и се измерва в амperi. Големината на тока е основната електромагнитна величина в системата SI и единицата за нея е избрана произволно, като е използвано взаимодействието между проводници, по които тече ток. Чрез единицата за големина на ток се дефинират единиците за останалите електромагнитни величини.

Плътността на тока е негова векторна характеристика с посока, съвпадаща с посоката на тока и числено равна на тока през единица повърхност, перпендикулярна на посоката му: $j = \frac{I}{S_1}$. Плътността на тока може да се свърже с концентрацията n , заряда q и скоростта на насоченото движение \bar{v}_n на токовите носители (фиг.4.19):

$$\vec{j} = qn\bar{v}_n. \quad (4.4.1)$$

4.4.2. Електродвижещо напрежение

Ако в краищата на проводник се създаде потенциална разлика (фиг.4.20,а), под действието на електричните сили токовите носители се преместват, в проводника протича краткотраен ток до изравняване на потенциалите в целия проводник. За да поддържа електричния ток продължително време, краищата на проводника се свързват с източник на ток и се образува електрична верига с външна и вътрешна част (фиг.4.20,б).

Във външната част на веригата положителните заряди се движат под действието на кулоновите сили в посока на намаляване на потенциала. Вътре в източника зарядите се движат срещу електричните сили и следователно са тях действуват други, неелектрични сили, наречени странични сили $F_{\text{стр}}$. По своята природа тези сили може да бъдат химични (сулите елементи), електромагнитни (електромагнитна индукция, фотоелементи) и др.

За характеристика на страничните сили и източниците на ток се въвежда величината електродвижещо напрежение \mathcal{E} . За даден участък от веригата тя числено е равна на работата на страничните сили за пренасяне на единица положителен заряд от единия до другия край на участъка и има размерност на напрежение:

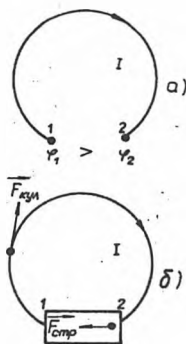
$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \int \frac{\vec{F}_{\text{стр}} \cdot d\vec{l}}{q} = \int \vec{E}_{\text{стр}} \cdot d\vec{l}. \quad (4.4.2)$$

Участък от веригата, в който няма електродвижещо напрежение, се нарича еднороден, а такъв с електродвижещо напрежение – нееднороден. Работата на страничните сили $F_{\text{стр}}$ и кулоновите сили $F_{\text{кул}}$ на преместването на заряд q в нееднороден участък 1-2 може да се изрази по следния начин:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}_{\text{стр}} + \vec{F}_{\text{кул}}) \cdot d\vec{l} = q\mathcal{E} + q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \mathcal{E} + \varphi_1 - \varphi_2. \quad (4.4.3)$$

Величината U_{12} е равна на работата за пренасяне на единица заряд от кулоновите и страничните сили в участъка и се нарича пад на напрежение. За хомогенен участък $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ е просто потенциалната разлика в края на участъка. За затворен нехомогенен участък $\varphi_1 = \varphi_2$, $U_{12} = \mathcal{E}$ и в този участък протича електричен ток.



Фиг. 4.20

4.4.3. Закон на Ом

а) за еднороден участък от веригата ($\mathcal{E} = 0$, $U = \varphi_1 - \varphi_2$)

Опитно е установено, че силата на електричния ток в участък е пропорционална на напрежението в краищата на този участък и обратнопропорционална на съпротивлението R :

$$I = \frac{U}{R}. \quad (4.1)$$

Електричното съпротивление е характеристика на участъка и измерва в оме. За хомогенен проводник то е пропорционално на дължината му l и обратнопропорционално на сечението му S :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (4.2)$$

ρ -се нарича специфично съпротивление, числено е равно на съпротивлението на проводник с дължина единица и сечение единица и зависи от материала на проводника. Реципрочната му величина се нарича специфична проводимост

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Тези две величини характеризират електричните свойства на материалите. Например металите и сплавите са типични представители на проводниците с висока концентрация на токови носители и имат много малко специфично съпротивление, от порядъка на $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Обратно, добрите изолатори (янтар, порцелан и др.) са бедни на токови носители и имат много голямо електрично съпротивление. В тях специфичното електрично съпротивление достига до $10^{18} \Omega \cdot \text{m}$.

Характерно за материалите от двете групи е слабата зависимост на електричните им свойства от примеси и други външни фактори, например температурата. В междинната област по скалата на специфичното съпротивление се намират полупроводниците. Специфичното съпротивление е от порядъка на $10^5 \Omega \cdot \text{m}$ и много бързо се изменя на порядъци при добавяне на примеси или при изменение на температурата.

б) температурна зависимост на съпротивлението

Специфичното съпротивление расте с температурата за твърдите проводници – металите, и в широки граници тази зависимост има вида

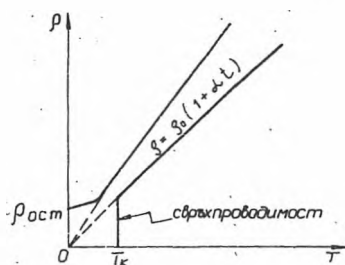
$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (4.3)$$

където $\rho = \rho_0$ при $t = 0^\circ\text{C}$, а α се нарича температурен коефициент на електричното съпротивление на проводника и е важна характеристика на електричните свойства на материала, от който е направен. За чисти метали температурният коефициент остава постоянен.

и много широк температурен интервал и се определя с голяма точност. Това свойство се използва в съпротивителните термометри, в които по измереното съпротивление на проводник от чист метал се определя температурата с много висока точност – до хилядни от градуса. Такива термометри са особено ефективни при ниски температури.

Температурният коефициент на съпротивление на сплавите обикновено е много по-малък (стотици пъти) от този на чистите метали, например за константан $\alpha \sim 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Следователно електричното съпротивление на такива сплави е слабо чувствително на температурни промени. Поради това те се използват за изготвяне на еталонни съпротивления, които слабо се променят при изменение на температурата. Използват се също за изготвяне на специални съпротивления в електроизмерителните уреди (шунтове), с помощта на които се променя обхватът им.

При много ниски температури, близо до абсолютната нула, линейната зависимост на специфичното електрично съпротивление от температурата се нарушава. За по-голяма част от металите и сплавите, които са много добри проводници (мед, злато, сребро), съпротивлението се стреми към една ненулева стойност $\rho_{ост}$. Това остатъчно съпротивление се дължи главно на примесите и дефектите в кристалната решетка на метала (фиг.4.21).



Фиг. 4.21

За някои проводници бе установено (за първи път при живака, 1911 г. от Камерлинг-Онес), че при температури, по-ниски от някаква критична температура T_k , съпротивлението на проводника рязко спада до нула, т.е. проводникът преминава в състояние на свръхпроводимост. Индуцираният електричен ток в такъв проводник тече без топлинни загуби практически безкрайно дълго време. Съществува и да се отбележи, че в състояние на свръхпроводимост съпротивлението на проводника не просто намалява, а става нула, отсъствува напълно. Критичната температура е специфична за материала на проводника и е от порядъка на няколко градуса по абсолютната скала. В състояние на свръхпроводимост магнитното поле не прониква в проводника, а самото състояние се разрушава, когато външното магнитно поле е по-голямо от някаква критична стойност.

През 80-те години бяха получени неметални (керамични) свръхпроводници с много висока критична температура (до 125 К).

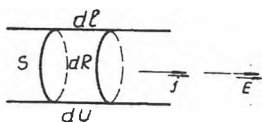
За откриването и изследването на тази високотемпературна свръхпроводимост бе дадена дори Нобелова награда по физика за 1987

Засега най-широко приложение свръхпроводниците нами при изготвянето на свръхпроводящи магнити с голяма стойност на магнитната индукция и висок коефициент на полезно действие. Очакваният бум в използването на свръхпроводниците след откриването на високотемпературната свръхпроводимост не се реализира.

Свръхпроводимостта се дължи на специфични квантови ефекти в проводниците и намира обяснение в квантовата теория на металите.

в) закон на Ом в диференциална форма

Законът на Ом може да се изрази в по-компактна форма чрез интензитета E на полето, което поражда електричния ток, и проводимостта σ на проводника. За елемент от хомогенен токов проводник с характеристики, означени на фиг.4.22, може да напишем



Фиг. 4.22

$$I = jS; \quad dU = E \cdot dl;$$

$$dR = \rho \frac{dl}{S}; \quad jS = \frac{E \cdot dl}{\rho \cdot \frac{dl}{S}};$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (4.4)$$

Следователно плътността на тока в проводника е пропорционална на специфичната му проводимост и интензитета на полето в него.

г) за нееднороден участък от веригата ($\mathcal{E} \neq 0, U = \mathcal{E} + \varphi_1 - \varphi_2$)

Законът на Ом лесно се обобщава за нееднороден участък от веригата и има вида

$$I = \frac{\mathcal{E} + \varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (4.4)$$

Някои частни случаи представляват интерес:

1. Затворена верига ($\varphi_1 = \varphi_2$)

Големината на тока във веригата се определя от електродвижещото напрежение и пълното съпротивление на веригата

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Пълното съпротивление може да се раздели на съпротивление на източника r , или вътрешно съпротивление, и съпротивление на останалата част от веригата, или външно съпротивление $R_{\text{вън}}$,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{вън}} + r}.$$

Зависимостта (4.4.11) се използва за дефиниране на извънсистемната единица за работа киловатчас (kWh), която широко се използва за измерването на произведената или консумирана електроенергия. Енергия 1 kWh произвежда (потребява) уред с електрична мощност 1 kW, когато работи в продължение на един час:

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Работата на електричния ток отива за преодоляване на електричното съпротивление на проводниците. По такъв начин енергията на източника на ток се превръща в топлинна енергия и загрева токовете проводници. От еквивалентността между работата и количеството топлина като две форми за изменение на топлинната енергия на телата може да запишем

$$A = Q = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t. \quad (4.4.12)$$

Тази зависимост е била намерена опитно и е известна като закон на Джаул и Ленц. Той е в сила както за еднороден, така и за нееднороден участък от веригата. Ако отделената топлина се измерва в калории (1 J=0,24 cal), законът се записва във вида

$$Q = 0,24IUt \text{ cal},$$

като помним, че калорията е извънсистемна единица за измерване на количеството топлина.

Законът на Джаул–Ленц може да бъде записан по-компактно в диференциална форма. В елемент от проводник, показан на фиг.4.22, се отделя количество топлина dQ за време t :

$$dQ = IdUt = jSEdlt = \sigma E^2 Sdlt.$$

За обемната плътност на отделената топлинна мощност (отделената топлина в единица обем за единица време) получаваме

$$w = \frac{dQ}{dV \cdot t} = \sigma E^2, \quad (4.4.13)$$

т.е. тя е пропорционална на специфичната проводимост и на квадрата на интензитета на полето.

Електричното съпротивление, което превръща електричната енергия в топлинна, се нарича активно съпротивление и е еднакво за прав и променлив ток. Електричните съпротивления, които възникват допълнително за променливия ток при протичането му през

и (капацитивно) и бобини (индуктивно), се наричат реверсиранието на електричната енергия в топлинна в акротивления най-често е нежелан ефект, тъй като води ни загуби и налага охлаждане на електросъоръжени-ителна енергетична консумация, например трансфор-тромотори и др. Радикалното намаление на огромните загуби в световен мащаб вследствие на топлинното дей-тричния ток е възможно само при широко използване водниците.

4.4.5. Правила на Кирхоф

формулира две правила за пресмятане параметрите на вериги, които се основават на законите за запазване на заряд (първо правило) и закона за запазване на енер-правило).

правило

ичната сума от токо-ка възлова точка на ула. Възлова точка е се събират повече от ика. Това правило се едния начин:

$$I_i = 0. \quad (4.4.14)$$

т на положителен или знак за влизащите възловата точка (рес-ратен знак за излиза-) е произволен и съ-на смяна на знаците в нство.

повата точка на фиг.4.23 получаваме

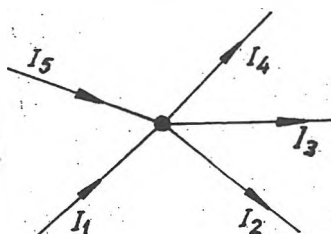
$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0.$$

о правило

ичната сума от падовете на напреженията ($I_k R_k$) във гъщи на токов контур е равна на алгебричната сума от ещите напрежения в контура:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (4.4.15)$$

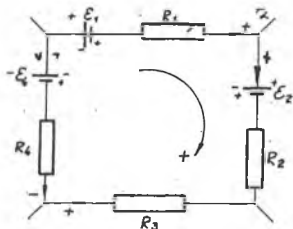
еделяне на алгебричните знаци се избира условно поло-ока за обикаляне на контура. Токовете са положителни,



Фиг. 4.23

когато посоката им съвпада с избраната посока, а електродвижещите напрежения са положителни, когато създават ток в положителна посока. За контура на фиг.4.24 може да запишем

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_4.$$



Фиг. 4.24

Може да се покаже, че броят на независимите уравнения, които могат да се напишат по правилата на Кирхоф за токова верига, е равен на броят на неизвестните токове и дава възможност за тяхното определяне.

Като илюстрация ще използваме изучените закони и правила при постоянен ток, за да оценим показанията на волтметра, включен към краищата на източник на ток с електродвижещо напрежение \mathcal{E} и вътрешно съпротивление r при съпротивление на волтметра R_V . Като приложим второто правило на Кирхоф за образува-

ния контур и като изберем посоката на тока в него като положителна посока за обикаляне на контура (или от закона на Ом за цялата верига), получаваме

$$IR_V + Ir = \mathcal{E}. \quad (4.4.16)$$

Волтметърът винаги показва разликата в потенциалите, т.е. напрежението в краищата си. Действително от закона на Ом за хомогенния участък, който съдържа само волтметра, може да запишем

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = IR_V. \quad (4.4.17)$$

От последните две равенства за показанията на волтметра получаваме

$$U = \mathcal{E} - Ir. \quad (4.4.18)$$

Следователно показанията на волтметра не е равно на електродвижещото напрежение и винаги е по-малко от него. Разликата между тях е толкова по-малка, колкото по-малък е последният член в равенство 4.4.18, т.е. колкото по-малка е големината на тока или колкото по-голямо е съпротивлението на волтметра, което определя тока във веригата. Така че „по-добър“ е този волтметър, който има по-голямо електрично съпротивление и „консумира“ по-малко ток при измерване.

4.5.1. Основни идеи на теорията

Теорията е предложена от Друде (1900 г.) и развита от Лоренц. Те се отчитат квантовите ефекти в поведението на електроните в метала, т.е. те се разглеждат като нютонови частици. Точността и нагледност в картината на електричните процеси и техните свойства, но и приблизителност в описанието, в този случай поставя теорията в противоречие с опитните данни, но и по-сложна теория за електропроводимостта не е създадена на основата на квантовата теория за строежа на метала.

Основните идеи на класическата електронна теория за електропроводимостта на металите могат да се формулират по следния начин:

Свободните носители в металите са свободните електрони. Според класическата теория представя за строежа на металите това са свободните електрони, които при образуването на кристалната решетка губят от атомите поради слабата връзка и стават „колективни“ частици на метала. Тези електрони са „свободни“ само в смисъл на преместването им в обема на метала, но не могат да се движат поради привличането на кристалната решетка. Тяхната енергия е отрицателна и заедно с решетката на положителните йони образуват свързана система, или казваме, че свободните електрони намират в енергетична потенциална яма. Количествено измерването на потенциалната яма на електроните е свързано с работата на метала.

Проверка на това предположение е бил направен опитът на Холтова верига, съставена от различни метали, е протекъл електричен ток продължително време. След опита в метала се наблюдават примеси от съседните им метали във веригата. Това е доказателство, че металните йони не участвуват в електричния ток. Толмен и Стюарт и Манделщам и Папалекси доказват действително съществуването на свободни електрони в метала. Действително спиране на метален проводник (например въртяща се верига) „свободните“ електрони продължават движението си по време на спирането поради потенциална разлика, която поражда токов импулс. Енергията на импулса може да се пресметне специфичният ток на свободните носители и той съвпада с този на електроните.

Свободните електрони се движат хаотично подобно на атомите в класически едноатомен газ (електронен газ). Ударите между електроните са малко вероятни, тъй като те са практически точкови частици. В резултат на ударите на електроните в йоните на кристалната решетка електронният газ е в топлинно равновесие с решетката.

шетката. Средната кинетична енергия на електроните е еднаква с тази на атомите на газ при същата температура

$$W_k = \frac{3}{2}kT$$

и при стайна температура е няколко стотни електронволта. За сравнение отделителната работа на метала е от няколко десети до няколко електронволта. По тази причина отделителната работа на метала слабо зависи от температурата.

Свободните електрони в метала имат максуелово разпределение по скорости и кинетична енергия. При висока температура има много електрони, чиято кинетична енергия е по-голяма от отделителната работа и при подходяща посока на скоростта те напускат метала. Така теорията обяснява термоелектронната емисия на металите.

3. При създаване на електрично поле електроните се движат равноускорително в посока, обратна на полето. Това насочено движение се наслага върху хаотичното и води до протичането на електричен ток. При удари с йоните на решетката електроните отдават цялата си енергия на насоченото движение. Такъв е според теорията механизъмът на трансформиране на енергията на електричното поле в топлинна енергия на решетката.

4.5.2. Извод на законите на Ом и Джаул-Ленц

Тези най-общи и „естествени“ предположения на теорията позволяват да се изведат опитно намерените закони при постоянния ток на Ом и Джаул-Ленц.

а) закона на Ом

Плътността на тока j е свързана с плътността на токовете носители n , заряда им q и средната скорост на насоченото им движение v_n със зависимостта 4.4.1.

Насоченото движение на свободните електрони под действието на електричното поле е равноускорително с ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$$

Средната продължителност на движението между два последователни удара е $\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_x}$, където $\bar{\lambda}$ е средният свободен пробег на електроните, а \bar{v}_x е средната скорост на хаотичното им движение. Следователно максималната скорост на насоченото движение на електроните преди удара е

$$(\bar{v}_n)_{\max} = a\bar{\tau} = \frac{eE}{m} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_x} \quad (4.5.1)$$

средната скорост на насоченото движение между два удара
та от максималната скорост преди удара. За плътността
ичния ток получаваме

$$j = en \frac{1}{2} \left(\frac{eE \bar{\lambda}}{m \bar{v}_x} \right) = \frac{e^2 n \bar{\lambda}}{2m \bar{v}_x} E. \quad (4.5.2)$$

равнението със закона на Ом в диференциална форма за
тата електрична проводимост на металите получаваме

$$\sigma = \frac{e^2 n \bar{\lambda}}{2m \bar{v}_x}. \quad (4.5.3)$$

симост разкрива връзката между плътността на токовете
и специфичната електрична проводимост на металите (и
проводници и полупроводници): увеличаването на плъ-
токовете носители води до повишаване на електропрово-

кон на Джаул-Ленц

ният на Джаул-Ленц в диференциална форма свързва обем-
ност на отделената топлинна мощност в проводника с
специфична електропроводимост и интензитета на полето.
плътност на топлинната мощност може да представим по
ачин:

$$\dot{w} = \bar{W}_k \bar{Z} n, \quad (4.5.4)$$

е средната кинетична енергия, която електроните отда-
ите на решетката при удар

$$W_k = \frac{m(\bar{v}_n)^2_{\max}}{2},$$

ният брой на ударите на един електрон за единица вре-
заместим горните изрази в (4.5.4) и имаме предвид (4.5.1),
рни преобразувания получаваме закона в диференциална

4.5.3. Трудности на класическата електронна теория за електропроводимостта на металите

еки лекотата, с която в теорията се извеждат законите
ния ток, тя е в противоречие с някои опитни факти и
ги. Ще посочим само някои от тях.

да се обясни голямата електропроводимост на металите,
опорционална на средния свободен пробег на електроните
трябва да се приеме, че средният свободен пробег е равен

на няколко хиляди междуатомни разстояния, като се има предвид, че йоните в метала са плътно опаковани, а размерите им са около 10^{-10} m. От позициите на класическата механика не е обяснимо как такава „гъста“ метална решетка е толкова „прозрачна“ за електроните. Този парадокс не съществува при квантовото разглеждане на електропроводимостта на металите. С отчитане на вълновата природа на електроните се доказва, че метална решетка без дефекти е напълно прозрачна за електроните, т.е. те не се разсейват при движението си в нея.

2. В теорията температурната зависимост на специфичната проводимост е следствие от температурната зависимост на средната скорост на хаотичното движение

$$\bar{v}_x = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Съгласно формула (4.5.3) $\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$. Опитно намерената температурна зависимост при металите в широк температурен интервал е

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \sim T$$

и не се съгласува с теорията.

3. Опитно намереният закон на Дюлонг и Пти гласи: моларните топлинни капацитети на химически простите тела в кристално състояние са еднакви и равни на $3R$. Към тази група принадлежат и металите и те се подчиняват на този закон при достатъчно високи температури. Според класическата електронна теория към този топлинен капацитет на металите, свързан с кристалната решетка и еднакъв за проводници и диелектрици, трябва да се добави и топлинният капацитет на електронния газ в металите $\frac{3}{2}R$. Това предсказание на теорията е в противоречие с опита, т.е. приносът на свободните електрони в топлинния капацитет на металите е пренебрежимо малък. Това противоречие има естествено обяснение в квантовата теория на металите. Там се показва, че при стайна температура само малка част, около 1 %, от свободните електрони в металите участвуват в електропроводимостта им и оказват влияние върху топлинния им капацитет.

Въпреки посочените трудности на класическата електронна теория за електропроводимостта на металите тя запазва своята привлекателност, тъй като дава нагледна и в основни линии вярна картина на електропроводимостта на металите.

4.6.1. Йонизация на газове

Обикновени условия в газовете има само електрически неактивни молекули и те не провеждат електричен ток. При някои въздействия молекулите им се йонизират и те стават проводими. За йонизиране на газовата молекула трябва да ѝ се предаде енергия, равна на енергията на свързване на най-слабо свързаните електрони в нея, за да могат да напуснат молекулата. Минималната енергия, която трябва да се предаде на молекулата, т.е. работата, която трябва да се извърши за йонизацията ѝ, се нарича йонизационна работа и е характерна константа за даден вид молекули. За даден вид газове тя е в границите на 10–20 eV. От връзката между йонизационен потенциал $\varphi = \frac{A}{e}$. Избитите електрони при йонизацията могат да останат свободни или да се прилепят към неактивна молекула.

Външните фактори, които йонизират газовете, се наричат йонизиращи и те могат да бъдат енергетични електромагнитни лъчи — ултравиолетови, рентгенови или гама-лъчи, потоци енергични частици, като електрони, протони и др., или нагряване на газа до много висока температура. Йонизационната работа се изчислява за сметка на енергията на йонизатора.

Едновременно с йонизацията на газа протича и обратният процес — рекомбинация: при среща на положителни и отрицателни йони поради кулоновите сили на привличане те могат да се свързват отново в неутрална молекула. В отсъствие на външно електрическо поле двата процеса са в динамично равновесие, при което броят на двойките йони, получени при йонизацията за единица време и единица обем Δn , е равен на броя на двойките йони $\Delta n'$, които се рекомбинират за единица време в единица обем $\Delta n = \Delta n'$. Очевидно Δn е пропорционално на плътността на положителните n_+ и отрицателните n_- йони в газа, които са равни: $n_+ = n_- = n$

$$\Delta n = \beta n_+ n_- = \beta n^2. \quad (4.6.1)$$

Коефициентът на пропорционалност β се нарича коефициент на рекомбинация и е характерен за молекулите на газа. За концентрационното равновесие двойките йони в равновесно състояние получаваме

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n}{\beta}}, \quad (4.6.2)$$

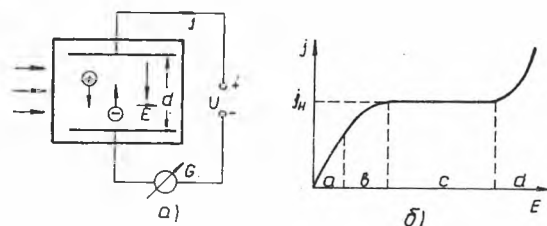
където динамично равновесие концентрацията на йоните се определя от работата на йонизатора (Δn) и вида на газа (β).

При обикновени условия въздухът в атмосферата е много слабо йонизиран под действието на космичните лъчи и радиоактивния фон и е добър изолатор.

Когато в йонизиран газ се създаде електрично поле, йоните се движат под действие на полето по посока на интензитета му (положителните) и обратно на него (отрицателните), което обуславя електричния ток (разряд) в газа. Ако токът прекратява след премахване на йонизатора, той се нарича несамостоятелен ток. Разряд, който не прекратява след премахване на йонизатора, тъй като в газа са възбудени други процеси, които поддържат йонизацията, се нарича самостоятелен.

4.6.2. Несамостоятелен електричен ток в газове

За изследване на несамостоятелния газов разряд е удобно да се използва опитната постановка, показана на фиг.4.25,а. Между катодата и анода е създадено електрично поле с интензитет E в резултат на прилагане на напрежение U и се измерва плътността на тока във веригата. Газът се йонизира от външен йонизатор.



Фиг. 4.25

Поради протичане на електричен ток плътността на йоните намалява, тъй като при достигане на йоните до електродите те неутрализират електричния си заряд. Ако $\Delta n''$ е броят на двойките йони, които достигат до електродите за единица време от единица обем, то условието за равновесие може да запишем така:

$$\Delta n = \Delta n' + \Delta n'', \quad (4.6.3)$$

а за плътността на тока получаваме

$$j = \frac{I}{S} = \frac{q\Delta n'' S d}{S} = q\Delta n'' d. \quad (4.6.4)$$

Зависимостта на плътността на тока от интензитета на електричното поле е намерена опитно и е показана на фиг.4.25,б. В участъка на кривата, означен с a , електричното поле е слабо, токът

е много малък и може да приемем, че $j \approx 0$. От (4.6.4) следва, че $\Delta n'' \approx 0$, т.е. рекомбинацията доминира, $\Delta n = \Delta n'$ и плътността на йоните в газа се определя от (4.6.2). За плътността на тока получаваме

$$j = qn(\bar{v}_+ + \bar{v}_-),$$

където \bar{v}_{\pm} е средната скорост на насоченото движение на йоните и е пропорционална на интензитета на полето [вж.(4.5.1)],

$$v_{\pm} = u_{\pm} E,$$

а u се нарича подвижност на йоните. Следователно

$$j = qn(u_+ + u_-)E = \sigma E, \quad (4.6.5)$$

което показва, че при много слаби полета токът в газовете се подчинява на закона на Ом.

В участъка b намалението на концентрацията на йоните не може да се пренебрегне поради по-големия ток. От (4.6.5) се вижда, че токът трябва да се отклонява от линейната зависимост и да расте по-бавно с нарастване на полето, което се съгласува с опитно намерената зависимост на фиг.4.25,б.

При достатъчно големи стойности на полето всички образувани йони в газа участвуват в проводимостта, няма рекомбинация и токът достига насищане (участък c), $\Delta n'' = \Delta n$. За големината на наситения ток получаваме от (4.6.4)

$$j_n = q\Delta n d, \quad (4.6.6)$$

т.е. наситеният ток се определя само от силата на йонизатора и разстоянието между електродите. Тази пропорционалност между наситения ток и силата на йонизатора е в основата на някои измерителни уреди (йонизационна камера) и се използва широко в дозиметрията; при подходяща калибровка на дозиметъра с големината на наситения ток се измерва дозата на радиоактивното лъчение, което представлява йонизаторът.

При много силни полета (участък d) йоните се ускоряват между два последователни удара с молекулите до енергии, по-големи от йонизационната работа, поради което при удар те йонизират молекулите и създават нови йони. Този процес на ударна йонизация става лавинообразен. Ако концентрацията на електроните при катодата е n_k , в резултат на ударната йонизация тази концентрация нараства и при анода тя е n_a . Отношението $\frac{n_a}{n_k}$ се нарича коефициент на усилване и достига до 10^5 .

4.6.3. Самостоятелен електричен ток в газове

Токът в участъка d (фиг.4.25,б) се дължи главно на ударната йонизация, но той все още не е самостоятелен; премахването на йонизатора лишава от „зародиш“ електронната лавина и разрядът спира. Следователно, за да бъде разрядът самостоятелен, е необходимо да протичат и други процеси, при които се образуват електрони, способни да подхранват ударната йонизация. Такъв процес е отделяне на електрони от катода вследствие на ударите на положителните йони върху него (вторична емисия). Друг такъв процес е фотойонизацията – излъчване на фотони от бързите електрони, които при взаимодействие с молекулите ги йонизират. При загряване на катода от ударите на положителните йони температурата му може да се повиши значително и да настъпи интензивна термоелектронна емисия.

Преходът от несамостоятелен към самостоятелен газов разряд може да се получи при увеличаване интензитета на електричното поле и/или при намаляване налягането на газа (увеличаване на средния свободен пробег на йоните). Този преход се нарича пробив на газа, а напрежението, при което той настъпва, се нарича пробивно напрежение $U_{пр} = E_{пр} \cdot d$. То зависи още от формата и размерите на електродите, материала, от който са направени, и от някои външни фактори. Зависимостта на пробивното напрежение от разстоянието между електродите се използва за измерване на много високи напрежения, като се измерва разстоянието, при което между електродите прескача искра (искров волтметър).

Ще разгледаме основните видове самостоятелен газов разряд.

а) тлеещ разряд

Той настъпва в газ при понижено налягане (няколко десетки милиметра живачен стълб) и сравнително високи напрежения (неколкокостотин волта). Това е разрядът, който протича в неоновите и люминисцентните лампи, използвани за осветление, реклами и като индикаторни лампи. Тлеещият разряд се поддържа от вторична емисия на електрони от катода и от ударната йонизация.

Положителните йони, които бомбардират катода, могат да избиват от повърхността му не само електрони, но и много фини частици от материала на катода, т.е. да го „разпрашват“. Това катодно разпрашване е в основата на съвременни технологии за нанасяне на много тънки слоеве върху повърхности и се използва при изготвяне на елементи за микроелектрониката.

б) коронен разряд

Той се наблюдава в много силни и нехомогенни полета (остриета, проводниците на далекопроводите и др.) при нормално налягане. Например при далекопроводите има голям градиент на електричното поле в близост до проводника, поради което случайни йони породжат лавина и протича газов разряд между проводника и земята. Ударната йонизация и рекомбинацията са най-интензивни около

при специални лабораторни условия: газоразрядни тръби, мълнии и др.

За да съществува плазмата устойчиво, необходимо е кинетичната енергия на топлинното движение на йоните да бъде по-голяма от кулоновото взаимодействие между тях. За газа в приземния слой на атмосферата това условие не е изпълнено: средната енергия на хаотичното движение е $kT \sim 0,03 \text{ eV}$, а йонизационната работа, например на азота, е $14,5 \text{ eV}$. По тази причина степента на йонизация на въздуха (отношението на йонизираните молекули към общия им брой) е много ниска, около 10^{-13} .

Плазмата има особени свойства, най-характерното от които е колективното поведение на частиците ѝ. При обикновения газ взаимодействието става главно при ударите между молекулите и тъй като силите на това взаимодействие намаляват както $\frac{1}{r^6}$ (r е разстоянието между центровете на молекулите), и взаимодействието се разпростира само върху най-близките молекули. В плазмено състояние доминира електричното взаимодействие, което е пропорционално на $\frac{1}{r^2}$ и обхваща по-голям брой молекули. Поради това всяко локално изменение в плазмата се „чувства“ както от близките, така и от по-отдалечените съседи и плазмата има поведение на еластична среда, в която се възбуждат и разпространяват еластични трептения и вълни. Освен това електропроводимостта на плазмата е голяма и при високи температури е близка до тази на медта.

Изучаването на плазмата е много интензивно след 50-те години във връзка с използването ѝ в управляемия термоядрен синтез. Използването ѝ в технологиите обособи модерно направление, известно като плазмени технологии – осъществяване на химични и технологични процеси с използване на нискотемпературна плазма. Високата концентрация на йони в плазмата и мощното електромагнитно излъчване се използват за стимулиране на йонни и фотохимични реакции.

В плазмената металургия плазмата се използва за термична дисоциация на минерали и руди, за получаване на труднотопими съединения и композиционни материали, за нанасяне на покрития, рязане и заваряване, за получаване на монокристали и др. Отличителни черти на плазмената металургия са високите температури и точен контрол на състава и свойствата на получените материали, недостъпни за конвенционалните технологии.

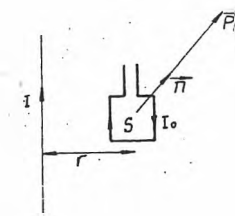
4.7. МАГНИТНО ПОЛЕ ВЪВ ВАКУУМ

4.7.1. Магнитна индукция

Около проводник, по който тече ток (най-общо около движещ се електричен заряд), настъпват изменения в свойствата на пространството, т.е. възниква магнитно поле. То ориентира малки магнити близо до проводника и действа върху други токови проводници. Магнитното действие на електричния ток е основно негово

действие за разлика от топлинното и химичното, които не се проявяват винаги. Посочете в кои случаи?

За изучаване характеристиките на магнитното поле ще считаме, че проводниците, които го създават, се намират във вакуум. За количествена оценка на полето във всяка негова точка се използва токова рамка (аналог на пробния заряд при електростатичното поле). Тя представлява малка метална рамка, по която тече слаб ток I_0 . Поставена свободно в магнитно поле, тя се ориентира подобно на магнитна стрелка. Това означава, че на рамката действа двойка сили с момент M , който е нула, когато рамката е в равновесно положение (равнината на рамката съдържа проводника, който създава полето на фиг.4.26), и има максимална стойност M_{\max} , когато е перпендикулярна на равновесното си положение. Самата рамка се характеризира с магнитен момент \vec{p}_m , числено равен на произведението от тока по площта на рамката и насочен по посоката на положителната нормала на рамката, определена по правилото на десния винт



Фиг. 4.26

$$\vec{p}_m = I_0 S \vec{n}.$$

Максималният момент на силите зависи от p_m , но отношението $\frac{M_{\max}}{p_m}$ зависи само от тока I в проводника и от разстоянието на рамката до него и следователно това отношение може да се използва за количествена характеристика на полето. Величината

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} \quad (4.7.1)$$

се нарича магнитна индукция и се приема, че посоката ѝ съвпада с посоката на нормалата към рамката. Магнитната индукция е силова характеристика на магнитното поле и е аналог на интензитета на електричното поле.

Важно е да се отбележи, че магнитното поле се създава само от движещи се заряди и действа само върху движещи се електрични заряди (токове), докато електричното поле се създава и действа както на подвижни, така и на неподвижни електрични заряди. Въпреки тези различия и електричните, и магнитните явления се пораждат от едни и същи електрични заряди. Единно описание на електричните и магнитните явления е направено в електромагнитната теория на Максвел (1865 г.) и това е решителна крачка към по-задълбоченото им познаване.

В наши дни (70-те и 80-те години) бе показано, че електромагнитните взаимодействия могат да се обединят с онази част от ядрените взаимодействия, които са свързани с β -радиоактивното разпадане на ядрата, наречени слаби ядрени взаимодействия, в т.нар. електрослаби взаимодействия. За значимостта на този успех по пътищата на познанието говорят и двете нобелови награди, присъдени за създаването на теорията на електрослабите взаимодействия и за нейната експериментална проверка.

4.7.2. Закон на Био-Савар-Лаплас

Опитните изследвания на Био и Савар за зависимостта на магнитната индукция от големината на тока, формата на проводника и разстоянието до него са обобщени от Лаплас в диференциален закон за големината на магнитната индукция, създадена от елементарен участък dl на токов проводник с големина на тока I на разстояние r от него:

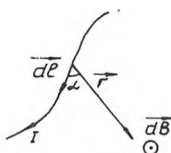
$$d\vec{B} = kI \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (4.7.2)$$

където означенията са както на фиг.4.27.

Коефициентът k зависи от избора на единиците за измерване на участващите величини. В система SI

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2,$$

а μ_0 се нарича магнитна константа. Единицата за магнитна индукция в тази система е тесла (Т). В скаларна форма законът има вида



Фиг. 4.27

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}. \quad (4.7.3)$$

Магнитната индукция на полето от краен проводник с дължина l се получава като векторна сума от полетата, създавани от отделните участъци:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B},$$

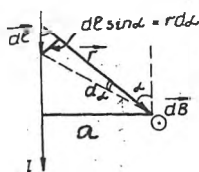
като интегрирането се извършва по целия проводник. В общия случай векторното равенство трябва да се замени с три скаларни равенства, съответстващи на трите компоненти на вектора на магнитната индукция на полето.

Ще илюстрираме приложението на закона на Био-Савар-Лаплас за определяне на магнитната индукция, като се ограничим със случаи на симетрични конфигурации на токовете проводници, при които интегралът се пресмята лесно.

а) поле на прав безкрайно дълъг токов проводник

Магнитните индукции, създавани от всички елементи на проводника (фиг.4.28), са в една и съща посока – от чертежа към нас, и в същата посока ще бъде насочена резултантната магнитна индукция. Проекциите на векторите на магнитната индукция са различни от нула само в посоченото направление, поради което може да запишем

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2}.$$



Фиг. 4.28

Грите променливи величини под интеграла са корелирани и можем да изключим две от тях:

$$dl \sin \alpha = r d\alpha;$$

$$r = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\frac{dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\sin \alpha d\alpha}{a}.$$

След интегриране по α от 0 до π получаваме

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{a}. \quad (4.7.4)$$

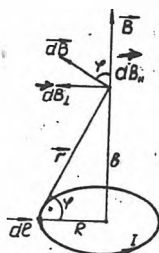
Може да се покаже, че магнитната индукция на поле, създадено от праволинейно движещ се заряд q със скорост v и същите означения, както на фиг.4.28, се определя от зависимостта

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \alpha}{r^2}. \quad (4.7.5)$$

б) поле на кръгов ток проводник

Елементарната магнитна индукция $d\vec{B}$ може да се разложи на две компоненти, както е показано на фиг.4.29. Сумата от $d\vec{B}_\perp$ за всички елементи на проводника е нула, а всички компоненти $d\vec{B}_\parallel$ са насочени по нормалата към равнината на проводника и сумата им определя големината на магнитната индукция:

$$B = \int dB_\parallel = \int dB \cos \varphi = \frac{\mu_0 I \cos \varphi \sin \alpha}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl.$$



Фиг. 4.29

Ъгълът между \vec{dl} и \vec{r} е $\frac{\pi}{2}$, а $\cos \varphi =$
 Като изключим r , $r = \sqrt{R^2 + b^2}$, за магнитната индукция получаваме

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.7.4)$$

В центъра на токовия проводник ($b = 0$) за магнитната индукция получаваме

$$B = \frac{\mu_0 2\pi I}{4\pi R}.$$

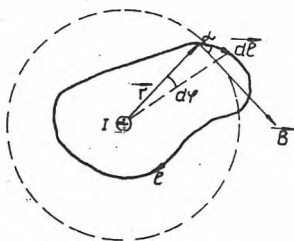
4.7.3. Циркулация на вектора на магнитната индукция

Важна характеристика на всички векторни полета е величината циркулация на вектора по затворен контур. Например за електростатичното поле може да се покаже, че циркулацията на вектора на интензитета по произволен затворен контур е нула:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 = 0.$$

Да пресметнем циркулацията на вектора на магнитната индукция по затворен контур, който огражда праволинеен безкрайно дълъг токов проводник с ток I (фиг.4.30).

С означенията на чертежа може да запишем



Фиг. 4.30

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B dl \cos \alpha$$

$$dl \cos \alpha = r d\varphi.$$

Като заместим израза (4.7.4) за магнитната индукция на праволинеен безкрайно дълъг проводник, получаваме

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \int_0^{2\pi} \frac{r d\varphi}{r} = \mu_0 I. \quad (4.7.7)$$

т.е. тя е пропорционална на броя на навивките на единица дължина и на големината на тока в тях. Величините n и I са равноправни при формиране стойността на магнитната индукция и на практика полето на соленоида се характеризира с произведението им, наречено жаргонно „ампер-навивки“ на соленоида.

Полученият резултат за индукцията е с единственото ограничение елементът d на контура да бъде успореден на оста на соленоида независимо от мястото му във вътрешността на соленоида. Следователно магнитната индукция е еднаква във всички точки вътре в соленоида и е успоредна на оста му, т.е. полето е хомогенно. Това е един от практически използваните методи за получаване на хомогенно магнитно поле в голям обем от пространството. Зависимостта (4.7.9) е в сила и за реален краен соленоид, при условие че дължината му е значително по-голяма от радиуса.

4.7.4. Теорема на Гаус

Теоремата се отнася за потока на вектора на магнитната индукция през затворена повърхност. При електростатичното поле потокът на вектора на интензитета се определя от електричните заряди, които повърхността огражда. Магнитното поле не се създава от магнитни заряди, а линиите на вектора на индукцията, аналогични на линиите на интензитета в електростатичното поле, са затворени. Може да се покаже, че потокът на магнитната индукция през произволна затворена повърхност е нула или по-малко прецизно – колкото линии „влизат“ през повърхността, толкова линии „излизат“:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (4.7.10)$$

Без да привеждаме доказателството на теоремата в общия случай, ще го илюстрираме в следния частен случай: поток на магнитната индукция през цилиндър около прав безкраен токов проводник, както е показано на фиг. 4.32.



Фиг. 4.32

Във всички точки на образувателната повърхнина на цилиндъра векторът на магнитната индукция е тангенциален към повърхността, следователно скаларното му произведение с нормалата към повърхността е нула и оттам е нула и потокът през тази част от повърхността.

Потокът през основите на цилиндъра е нула, защото векторът на индукцията лежи в равнините на основите. Следователно потокът на интензитета през цилиндъра е нула, което е твърдението на теоремата.

В разглежданите дотук свойства на електричните и магнитните полета като че ли преобладават техните различия пред тяхното

подобие и това сякаш ни „отдалечава“ от идеята за обединяването им в електромагнитно поле. Нека прецизираме: дотук изучаваме свойствата на електростатичното поле на неподвижни заряди и магнитното поле на постоянен ток. Подобие и взаимна връзка съществува между променливите електрични и магнитни полета: всяко променливо магнитно поле поражда непременно променливо (всичко вихрово) електрично поле и обратно. Именно тези вихрови електрични и магнитни полета са подобни и в теорията на електромагнитното поле се разглеждат като негови две компоненти.

4.7.5. Действие на магнитно поле върху електричен ток

Действието на магнитното поле (от движещи се електрични заряди) върху електричен ток (също движещи се заряди) има подобен ранг на фундаменталност, както взаимодействието между неподвижни електрични заряди в електростатиката. Закономерностите във взаимодействията между подвижни електрични заряди са намерени в опитните изследвания на Оерщед и Ампер и количествено са изразени в закона на Ампер

$$F = kIBl \sin \alpha, \quad (4.7.11)$$

където F е силата, с която полето с магнитна индукция B действа върху проводник с дължина l и ток I , а α е ъгълът между проводника и вектора на индукцията. Коефициентът k зависи от избора на единиците за електромагнитните величини. Този избор е направен така в системата SI, че $k = 1$.

В общия случай на нехомогенно поле законът се записва в диференциална и векторна форма в следния вид:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}). \quad (4.7.12)$$

Важното практическо значение на този закон се вижда дори само от факта, че силите, които „въртят“ всеки електромотор, са резултат от действието на магнитното поле върху токовете проводници и се определят от този закон. Оттук се вижда също, че магнитната индукция е силова характеристика на магнитното поле, такава, каквато е интензитетът за електричното поле. Действително, ако проводникът е перпендикулярен на електромагнитната индукция, на големината ѝ получаваме

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl},$$

т.е. магнитната индукция числено е равна на силата, с която полето действа на токов проводник с дължина единица и ток единица,

когато е перпендикулярен на направлението на магнитната индукция.

Ще илюстрираме възможността за пресмятане на действието на полето върху токов проводник, като пресметнем силата на взаимодействие между два безкрайно дълги успоредни токови проводника, както са показани на фиг. 4.33.

За силата, с която полето, създадено от първия проводник, действа върху елемент dl_2 от втория проводник, може да вземем съгласно закона на Ампер

$$d\vec{F}_2 = I_2(\vec{dl}_2 \times \vec{B}_1),$$

където B_1 е магнитната индукция на полето от първия проводник

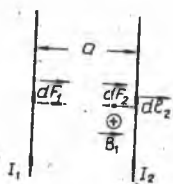
$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{a}.$$

За големината на силата получаваме

$$dF_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{a} dl_2. \quad (4.7)$$

За да се „освободим“ от нежеланите ефекти на безкрайностите, удобно е да пресметнем силата с която полето действа върху единица дължина от проводника, а тя вече е крайна величина:

$$\frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{a}. \quad (4.7.1)$$



Фиг. 4.33

Именно тази сила на действие (и взаимодействие) между два безкрайни успоредни проводника е използвана за дефиниция на единицата на големината на тока. По определение ток с големина на 1 А е този ток, който тече по два успоредни проводника на разстояние 1 m един от друг и поражда сила на взаимодействие между тях на единица дължина $\frac{F}{l} = 2 \cdot 10^{-7}$ N/m. Оттук се вижда и стойността на константата μ_0 :

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A}}{1 \text{ m}},$$

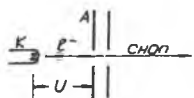
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (4.7.15)$$

И така при избора на единица за електромагнитна величина абсолютната CGSE-система предпочитанието за опростяване е дадено на закона на Кулон, а в рационализираните системи това предпочитание е дадено на друг фундаментален закон, този на Ампер.

на преместването. Тя променя само посоката на скоростта и следователно играе роля на центростремителна сила, която закривява траекторията на частицата. По такъв начин силата, с която полето действа върху токов проводник (сила на Ампер), може да се разглежда като сума от силите, с които полето действа на всички токови носители (сили на Лоренц).

4.8.2. Движение на заредени частици в електрично поле

В практиката снопове частици и преди всичко електронни снопове се формират с помощта на електрични полета. Нагретият катод отделя електрони, които се ускоряват от електричното поле, и с помощта на бленди или фокусировка се формират тесни електронни снопове (фиг. 4.34).

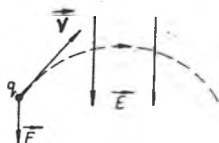


Фиг. 4.34

При ускоряване на електроните в полето се увеличава енергията им за сметка на работата на силите на полето:

$$A = eU = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.8.2)$$

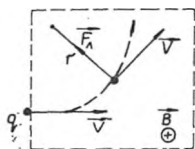
Когато заредените частици навлизат в електричното поле по направление на линиите на интензитета на полето, те не променят направлението на движението си, но изменят скоростта си, съответно енергията си.



Фиг. 4.35

Ако скоростта на частиците сключва ъгъл с линиите на полето и последното е хомогенно (и в следващите примери ще считаме, че електричните и магнитните полета са хомогенни), лесно може да се покаже, че те ще се движат по парабола подобно на тяло, хвърлено под ъгъл към хоризонта (фиг. 4.35).

4.8.3. Движение на заредени частици в магнитно поле



Фиг. 4.36

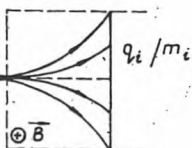
На фиг. 4.36 е показана траекторията на движение на заредена частица в хомогенно магнитно поле, когато скоростта ѝ е перпендикулярна на магнитната индукция. Лоренцовата сила играе роля на центростремителна сила, и резултат на което частицата се движи по дъга от окръжност с радиус на кривината r , за който получаваме

$$F_{\text{л}} \equiv F_{\text{цс}}; \quad qvB = \frac{mv^2}{r}; \quad r = \frac{v}{B} \frac{1}{q/m}. \quad (4.8.3)$$

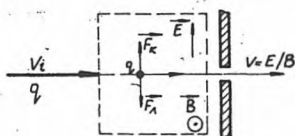
q/m се нарича специфичен електричен заряд. При по-големи радиусите на кривините за различните частици ще зависи от специфичните им заряди. Следователно, ако частици с еднакви скорости в постоянно магнитно поле с направление перпендикулярна на скоростта (фиг. 4.37), снопът ще се разширява по специфични заряди. Такава конфигурация се нарича „селектор“ на частиците по специфичен заряд. Тази зависимост (4.8.3) свързва импулса на частицата с радиусите на траекторията ѝ в магнитно поле и тази зависимост се използва за определяне импулса на частицата в много

$$p = rqB. \quad (4.8.4)$$

Частиците влизат в магнитното поле под ъгъл към вектора на магнитното поле, траекторията на движението им е спирала. Действието на магнитното поле може да се разложи на две компоненти; едната, която дава движение на частицата по окръжност v_{\perp} , и другата, която е успоредна на магнитното поле v_{\parallel} , която не поражда никакви ефекти в магнитно поле. Само „разтяга“ окръжността в направление на магнитното поле, т.е. получава се спирала.



Фиг. 4.37



Фиг. 4.38

Частичка се движи в пространство с две взаимно перпендикулярни електрично и магнитно полета със скорост, перпендикулярна и на двете полета, на нея ще действуват едновременно електрична и кулонова F_K сила (фиг. 4.38). При подходяща ориентация посоката на движението си ще запазят само тези частици, които двете сили се уравновесяват:

$$F_L = F_K; \quad qvB = qE; \quad v = \frac{E}{B}. \quad (4.8.5)$$

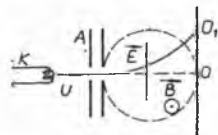
Частички с различна от тази скорост няма да минат през отвора на апарата поставена на пътя им. Такава конфигурация на двете

полета може да се разглежда като селектор на частиците по скорости и се използва в маспектрометрите и други прибори.

В сноповете частиците се движат практически по успоредни траектории и създават магнитни полета, които се наслажават. Поради това всяка частица се движи в резултатното магнитно поле на снопа, действуват ѝ лоренцови сили, насочени към центъра на снопа, и това води до радиално „свиване“ на снопа. Едновременно с това на частиците действуват кулонови сили на отблъскване, които са причина за „разширяването“ на снопа. Лоренцовите сили са по-малки от кулоновите толкова повече, колкото по-малка е скоростта на частиците. Крайният резултат е разширяването на сноповете, което създава грижи в случаите, когато сноповете трябва да се поддържат дълго време с малко напречно сечение, например при ускорителите на частици. Обосновете горното твърдение в случай на снап само от две еднакви частици, които се движат успоредно една до друга, като използвате формули (4.1.3), (4.7.5) и (4.8.1). Покажете, че лоренцовата и кулоновата сила биха се изравнили, ако частиците се движеха със скоростта на светлината във вакуум ($v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$).

4.8.4. Определяне специфичния заряд на частици

Специфичният заряд на електрона може да се определи по няколко начина и като илюстрация ще разгледаме метода на Томсън. Електронен снап се формира от нагрят катод, ускоряващо напрежение между катода и анода и бленди след него (фиг. 4.39). Електронният снап се пропуска през селектор по скорости, в който първоначално е включено само магнитното поле B и електроните попадат в точка O_1 върху флуоресциращ екран. По разстоянието OO_1 и другите размери в опита се определят радиусът на кривината на траекторията им r . За специфичния заряд получаваме



Фиг. 4.39

$$e/m = \frac{v}{Br},$$

където неизвестна е скоростта на електроните v . Тя може да се определи, като се включи и електричното поле в селектора по скорости и интензитетът му се изменя, докато електронният снап се „върне“ в точка O , т.е. електроните не променят посоката на скоростта си: $v = E/B$. За специфичния заряд се получава изразът

$$e/m = \frac{E}{B^2 r}. \quad (4.8.6)$$

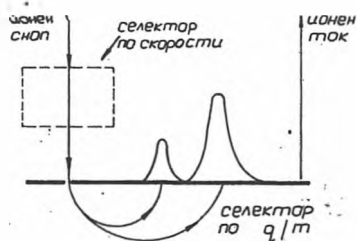
Грешката в определянето на специфичния заряд на електрона по този метод е в шестия знак след десетичната точка. Като се знае

на електричния заряд, определени в опита на Миликън, точност може да се определи масата на електрона.

инето на йонизираните атоми и молекули по техните заряди е същността на масовата спектроскопия. От поктри по специфичен заряд (масови спектри) се определя на масата и относителното съдържание на компонентиното вещество. Масовата спектроскопия е универсален метод, който широко се използва във физиката, химията, техниката и др. Точността на метода е много волява да се открият със сигурност примесни атоми в $1 : 10^6$ спрямо основните атоми.

юстрация на устройството и принципа на работа на фите ще разгледаме този на Бейнбридж, схематично иг. 4.40.

вото, което се анализида в газова фаза (атоми йонизира се и йоните до образуване на йо-следният се пропуска р по скорости и се отама с определена ског от тези йони се проелектор по специфичен то те се разлагат поният спектър предстацни линии с различна ответстващи на йо-то q/m . Плътността на



Фиг. 4.40

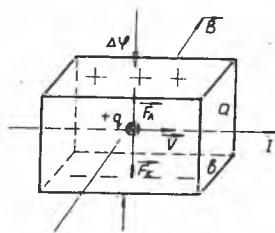
ке да се свърже с големината на йонен ток, измерван преобразувател, поставен в същата равнина, и по този определи относителната концентрация на съответните

ности на съвременните технологии за производство и върхчисти материали главно за нуждите на електронината техника стимулират изследванията, насочени към точността на масовия спектрален анализ. През 80-те издаден масспектрограф с резонансна йонизация, чиято ост е около 10^3 пъти по-висока от тази на обикновените етри, т.е. той може със сигурност да открива примесни молекули при концентрация $\sim 10^{-7}$ %. Принципът на този спектограф е следният: лазер се настройва с висока одходяща дължина на вълната, така че да приведе във стояние примесните атоми или молекули; възбудените щат втори фотон от лазерното лъчение и се йонизират. те йони се образува йонен сноп, който се анализира в строграф, но вече без фона от основните йони. Имен-

но отсъствието на този голям фон позволява да се регистрират с голяма сигурност много по-слаби сигнали от примесите, което и повишава точността на уреда. Този метод на анализ е много подходящ за „търсене“ на определени примесни атоми в чисти вещества.

4.8.5. Ефект на Хол

При протичане на ток I през проводяща пластинка в магнитно поле с индукция B , перпендикулярна на посоката на тока, между двете стени на пластинката възниква потенциална разлика $\Delta\varphi$:



Фиг. 4.41

$$\Delta\varphi = R \frac{I \cdot B}{b}, \quad (4.8.7)$$

където R е константата на Хол, характерна за веществото на пластинката, а останалите означения са както на фиг. 4.41. Този ефект на Хол е резултат от действието на магнитното поле върху токовите носители. Динамично равновесие настъпва при изравняване на кулоновата и лоренцовата сила:

$$qvB = qE; E = vB = \frac{\Delta\varphi}{a}; \Delta\varphi = avB.$$

За възникналата потенциална разлика получаваме

$$I = jS = qn_0 v \cdot ab; v = \frac{I}{qn_0 ab}; \quad (4.8.8)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{qn_0} \frac{IB}{b}; R = \frac{1}{qn_0}$$

Вижда се, че константата на Хол се определя от плътността и заряда на токовите носители, а знакът на константата съвпада със знака на електричния заряд на токовите носители. Това е физичната основа на широко използваната методика за изучаване проводимостта на материалите, главно полупроводници. От опитно определената големина и знак на константата се определя доминиращата проводимост (на положителни или отрицателни токови носители) и тяхната концентрация.

Ефектът на Хол се използва и за измерване на магнитната индукция на полето непосредствено чрез зависимостта (4.8.8).

4.9. МАГНИТНО ПОЛЕ ВЪВ ВЕЩЕСТВО

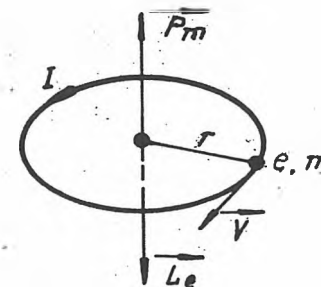
4.9.1. Магнитни моменти на атомите

При внасяне в магнитно поле веществата се намагнитват, в резултат на което се изменя и магнитното поле. Това е следствие от действието на магнитното поле върху атомите на веществото. При изучаването на тези явления ще разглеждаме атомите като класически системи от електрони, които обикалят по орбити около ядрата, т.е. ще пренебрегваме тяхната квантова природа. Отчитането на последната не води до съществени изменения на получените резултати.

Орбиталното движение на електрона в атома е еквивалентно на токов контур с големина на тока

$$I = ev = ev/2\pi r.$$

Използуваните означения в този израз са показани на фиг. 4.42, а v е честотата на обикаляне на електрона около ядрото. Магнитният момент на токовия контур, който в този случай се нарича орбитален магнитен момент на електрона, е перпендикулярен на равнината на орбитата и се определя от израза



Фиг. 4.42

$$P_m = IS = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} evr. \quad (4.9.1)$$

На орбиталното движение на електрона съответствува и орбитален момент на импулса

$$L_e = mrv,$$

който е насочен в обратна посока на магнитния момент. Отношението на магнитния към орбиталния момент на електрона е характерна константа, наречен жиромагнитно отношение g :

$$g = \frac{P_m}{L_e} = \frac{evr}{2mrv} = \frac{1}{2} \frac{e}{m}, \quad (4.9.2)$$

$$\vec{P}_m = -g \vec{L}_e. \quad (4.9.3)$$

За атомите като цяло орбиталните магнитни и механични моменти се получават като векторна сума от съответните моменти на електроните им:

$$\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{mi}; \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_{ei}. \quad (4.9.4)$$

Очевидно при тях съществува същата връзка, както при електронните моменти:

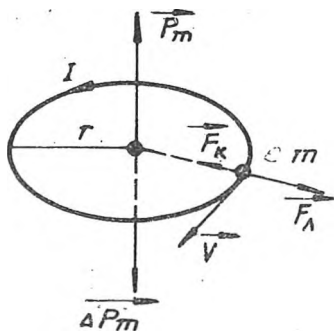
$$\vec{P}_m = -g\vec{L}.$$

За всички запълнени електронни слоеве в атомите векторните суми на магнитните и механичните моменти на електроните в слоя са нули поради симетричната конфигурация на електронните „орбити“. Следователно механичните и магнитните моменти на атомите се определят от техните незапълнени електронни слоеве и главно от валентните електрони. Резултантните магнитни моменти на атомите определят техните магнитни свойства.

Известно е също така, че атомните ядра притежават магнитни моменти, които трябва да се добавят към орбиталните магнитни моменти на електроните. Ядрените магнитни моменти обаче са около 1000 пъти по-малки от орбиталните и затова в много случаи при разглеждане на магнитните свойства на веществата те могат да се пренебрегват.

4.9.2. Атом в магнитно поле

Орбиталното движение на електрона в атома се осъществява благодарение на електричните сили на привличане между електроните и ядрото, които играят ролята на центростремителни сили на въртеливото движение:



Фиг. 4.43

$$F_K = F_{цс} = \frac{mv^2}{r} = m\omega_0^2 r, \quad (4.9.5)$$

където ω_0 е ъгловата скорост на електрона, а другите означения са както тези на фиг. 4.43.

Когато атомът е поставен в магнитно поле с индукция \vec{B} в направлението на \vec{p}_m , на електрона действа лоренцова сила $F_L = evB$, обратно насочена на кулоновата сила, и за центростремителната сила се получава

$$F_{цс} = F_K - F_L = m\omega^2 r. \quad (4.9.6)$$

В магнитно поле ъгловата скорост на електрона ω ще бъде по-малка, $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$. На намалението на ъгловата скорост съответствува

намаление на „орбиталния“ ток с ΔI и респективно на орбиталния магнитен момент с Δp_m :

$$\Delta p_m = \Delta I \cdot S.$$

Прието е да се казва, че външното магнитно поле индуцира допълнителен магнитен момент на електрона, който е в обратна посока на магнитната индукция и на p_m и е много по-малък от орбиталния момент ($\Delta p_m \ll p_m$)

$$\Delta \vec{p}_m = -k \vec{B}, \quad (4.9.7)$$

където коефициентът k зависи от размерите на орбитата.

В общият случай, когато магнитната индукция склучва ъгъл с магнитния момент на атома, векторите на механичния и магнитния момент описват съосни конични повърхности с общ връх в центъра на орбитата и ос, успоредна на вектора на магнитната индукция. Такова движение се нарича прецесия на Лармор. (Аналогично движение извършва оста на пумпал при опит да я отклоним от вертикалното ѝ положение.) Въпреки по-сложния характер на това движение може да се покаже, че и в този случай се индуцира допълнителен магнитен момент на електрона, пропорционален на магнитната индукция и в обратна на нея посока. Индуцираният момент в атома като цяло е векторна сума от индуцираните моменти на електроните му:

$$\Delta \vec{p}_m = \sum_i \Delta \vec{p}_{mi} \sim -\vec{B}. \quad (4.9.8)$$

Индуцирането на допълнителен магнитен момент в атома под действието на външно магнитно поле се нарича диамагнитен ефект. Този ефект се появява в атомите на всички вещества независимо от магнитния им момент и това води до намагнитването на веществата в посока, обратна на външното магнитно поле.

4.9.3. Намагнитване на веществото

Атомите и молекулите на веществото могат да имат или да нямат магнитни моменти в зависимост от конфигурацията им. Тези със симетрични конфигурации нямат магнитен момент (подобно на неполярните диелектрици), а тези с несиметрични конфигурации имат магнитни моменти. В отсъствие на външно магнитно поле магнитните моменти са хаотично ориентирани и веществото като цяло няма магнитен момент, т.е. не е намагнитено.

При всички вещества се появява диамагнитен ефект във външно магнитно поле независимо от стойностите на магнитните моменти на атомите им. Намагнитването се свежда до ориентирането

на съществуващите магнитни моменти в посоката на външното поле и индуциране на магнитни моменти в посока, обратна на полето. Вследствие на намагнитването от външно магнитно поле с индукция B_0 във веществото се създава вътрешно магнитно поле с индукция B_v , което се сумира векторно с външното. За резултантното поле получава

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_v. \quad (4.9)$$

По аналогия с диелектриците за количествена характеристика на намагнитването на магнетика се използва величина, числено равна на магнитния момент на магнетика в единица обем, наречена намагнитеност:

$$\vec{H}_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V} \right). \quad (4.9)$$

Може да се покаже, че големината на магнитното поле от намагнитването на веществото се определя от намагнитеността му

$$\vec{B}_v = \mu_0 \vec{H}_i. \quad (4.9)$$

4.9.4. Магнитно поле в магнетици

Какви изменения настъпват в магнитното поле в присъствието на магнетик?

Нека полето се създава от токове, които протичат по проводници, $\sum_k I_k$, за краткост наречени макротокове. Във вакуум те създават магнитно поле с индукция B_0 , която можем да определим с теоремата за пълния ток, приложена за произволен контур l , който огражда тези токове:

$$\oint_l \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k.$$

В присъствие на магнетик се появява допълнително магнитно поле от намагнитването му и може да запишем

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} + \oint_l \vec{B}_v \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k + \mu_0 \oint_l \vec{H}_i \cdot d\vec{l},$$

или в по-компактна форма

$$\oint_l (\vec{B}/\mu_0 - \vec{H}_i) \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k.$$

б) парамагнетици

Атомите и молекулите на тези вещества имат собствени магнитни моменти в отсъствие на външно магнитно поле. Към тях се отнасят алкалните и алкалоземните метали, алуминий, платина и др. В магнитно поле магнитните моменти се ориентират в посока на полето, но тази ориентация е частична, защото ѝ противодейства топлинното движение, водещо към хаотична ориентация. Именно то внася температурна зависимост в намагнитването, известна като закон на Кюри:

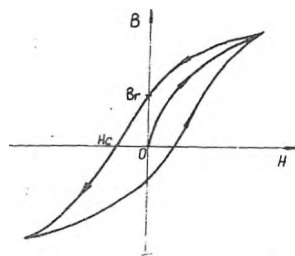
$$\chi = \frac{C}{T},$$

където C е константа.

В резултат на диамагнитния ефект се индуцират магнитни моменти в посока, обратна на полето. Крайният резултат от ориентирането на магнитните моменти и диамагнитния ефект е намагнитване на веществото в посока на външното поле, т.е. магнитната възприемчивост е положителна. И при парамагнетиците намагнитването е слабо, $\chi = 10^{-5} \div 10^{-3}$, и ефектът на усилване на външното магнитно поле няма практическо значение. Парамагнетиците нямат аналог в поведението на веществата в електрично поле.

в) феромагнетици

Това са особен вид магнетици, които се намагнитват толкова силно, че вътрешното им поле е много по-голямо от външното ($\mu_r \sim 10^6$) и силно зависи от външни въздействия – полета, деформации, температура и др. Феромагнетици са преходните метали (желязо, никел, кобалт) и редица сплави. Характерна особеност на феромагнетиците е зависимостта на магнитната възприемчивост от външното магнитно поле (при диа- и парамагнетиците тя не зависи от външното поле): тя нараства с увеличаването на полето и след определена стойност на полето остава постоянна, т.е. достига се до магнитно насищане.



Фиг. 4.44

Друга особеност на феромагнетиците е съществуването на хистерезис (изоставане на изменението на магнитната индукция в магнетика B спрямо изменението на интензитета на външното поле H , което го намагнитва), илюстриран на фиг. 4.44.

Намагнитването на образеца феромагнетик започва от точка O и магнитната индукция нараства с нарастването на външното поле по средната крива. При размагнитването (намаляването на външното поле) полето в магнетика намалява по горната кри-

става спрямо намалението на външното поле. Когато H на външното поле е нула, магнетикът запазва остатъчна намагнитеност, която количествено се измерва с B_r , наречена остатъчна индукция. Намагнитеността му става нула при стойност на външното поле (обратна на критична сила) на външното поле, ориентирано в обратна посока. Освен величините B_r и H_c характеристика на феромагнетика е и площта на кривата на пренамагнитване (хистерезисна крива), която е пропорционална на количеството топлина, необходима за намагнитване на феромагнетика при пренамагнитването (загуби във феромагнетика, които са за сметка на намагнитващо поле).

В зависимост от големината на тези характеристики феромагнетиките се делят на магнитно меки и магнитно твърди. Магнитно меки са тези, за които B_r , H_c и топлинните загуби са малки (например силициевите стомани). Такива са силициевите стомани. Те се използват при конструиране на уреди и съоръжения, в които намагнитването пренамагнитват с висока честота, например сърцевини на трансформатори, електромотори, генератори и др. При магнитно твърди феромагнетици посочените характеристики имат големи стойности. Това практическо значение има голямата остатъчна индукция B_r . Такива са въглеродните и хромовите стомани. Те се използват при изготвянето на постоянни магнити с приложение в електрониката, магнитни носители на информация и др. При удар остатъчната намагнитеност намалява и затова се предпазват от такива въздействия.

Едно от характерните свойства на феромагнетиците е характерно, че при температури над критична температура, специфична за феромагнетика (температура на Кюри), те загубват специфичните си свойства и превръщат се в обикновени парамагнетици.

Феромагнетизмът се състои от малки области (домени), които са намагнитени до насищане и в отсъствие на външно магнитно поле са хаотично ориентирани. В домените са ориентирани магнитните моменти, а собствените магнитни моменти на електроните, с които е свързан техният спин. Затова пълното обяснение на феромагнетизма се даде при квантовото му разглеждане. Основният ефект при намагнитването във външно магнитно поле е преместването на домените, което се изразява в увеличаване на намагнитването. Домените с ориентация на магнитните моменти в посока на външното поле, за сметка на останалите

домените от свойствата си феромагнетиците са подобни на сегнетоелектриците, но при тях се проявяват и ефекти, подобни на сегнетоелектричните, наречени магнестрикционни ефекти – измерват се промените на феромагнитни образци при намагнитването (магнестриктивен ефект) и обратният ефект, който се състои в намагнитването на феромагнетика в резултат на механична деформация. Това

свойство се използва при изготвянето на датчици, релета и магнитострикционни генератори и приемници на ултразвук.

4.9.6. Магнитомеханичен ефект

Когато парамагнитно тяло се постави в магнитно поле, магнитните моменти на атомите му се ориентират в посока на полето и тялото се намагнитва. Поради връзката между магнитните и механичните моменти на атомите механичните моменти се ориентират в посока, обратна на вектора на магнитната индукция, и тяхната сума вече не е нула. От закона за запазване момента на импулса на изолирана система следва, че моментът на импулса на парамагнитното тяло трябва да остане нула, както преди намагнитването, което е възможно само ако тялото се завърти около ос, успоредна на външното магнитно поле с такава ъглова скорост, така че да е изпълнен законът

$$I\vec{\omega} + \vec{L} = 0,$$

където I е инерционният моменти на тялото спрямо оста на въртене, а \vec{L} е сумарният механичен момент на импулса на атомите му.

За хомогенно парамагнитно тяло с обем V и обемна плътност на атомите n може да запишем чрез използваните вече означения

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{L}_i = -\frac{1}{g} \sum_i \vec{p}_{mi} = -\frac{1}{g} \vec{H}_i V = -\frac{1}{g} \kappa V \vec{H}; \\ I\omega &= \frac{\kappa V H}{g}; \quad g = \frac{\kappa V H}{I\omega}. \end{aligned} \quad (4.9.15)$$

Това завъртане на тялото представлява магнитомеханичният ефект и се използва за определяне на жиромагнитното отношение (4.9.2). Експериментално ефектът е изучаван за първи път от Айнщайн и де Хаас, а по-късно и от други учени с помощта на желязна пръчка.

При опита се измерва ъгловата скорост на завъртане на пръчката и като се знаят размерите ѝ и индукцията на магнитното поле, се пресмята жиромагнитното отношение. Получената стойност е около два пъти по-голяма от предсказаната в теорията. Тази разлика в стойностите на жиромагнитното отношение е обяснена около 10 години по-късно, когато се въвежда една нова характеристика на електрона – спин.

ВЪЛНОВА ОПТИКА

5.1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ НА СВЕТЛИНАТА

ката е сред най-старите дялове на физиката и изучава явления (излъчване, разпространение и взаимодействие на с веществото) и закономерностите при тях. С разширяването и дълбочаването на научните знания за света се развива , като последователно възникват геометричната оптика, оптиката и квантовата оптика.

та е геометричната оптика, която се базира на концепцията за праволинейното разпространение на светлината в еднородна среда, свързаното с нея понятие светлинен лъч. Тя изучава законите в разпространението на светлината (отражение, преломление), които са в основата на много оптични уреди, като микроскоп, телескоп и др.

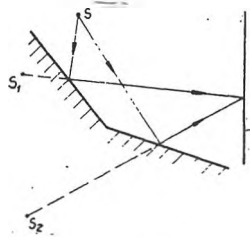
Вълновата оптика изучава явления, които са проява на вълновата природа на светлината, такива като интерференцията, дифракцията, поляризацията на светлината. Тя се развива в тясна връзка с електромагнетизма, което доведе до възникването на електромагнетната теория за светлината. Така се стигна до единно описание на явления, които привидно не изглеждат свързани. Вълновата оптика са в основата на много съвременни оптични уреди и методики, широко използвани в научноизследователската дейност.

В края на века възниква квантовата оптика върху концепцията за дискретна природа на светлината. Според нея светлината се състои от специфични „частици на светлината“, наречени фотони, които подчиняват на законите на квантовата механика. На квантовата оптика дължим съвременните представи за излъчването и взаимодействието на светлината, взаимодействието ѝ с веществото, както и взаимодействието на много явления, такива като фотоелектричния ефект, фотоизлъчването и др., с широко техническо приложение.

Особености при интерференция на светлинни вълни

2 бе показано, че условието за получаване на наблюдаема интерференционна картина (стабилна във времето) е интерфериращите

вълни да бъдат кохерентни, т.е. да имат еднакви честоти и постоянна фазова разлика. Получаването на кохерентни вълни от два светлинни източника е принципно невъзможно поради самия механизъм на излъчване на светлината. Възбудените атоми на източниците излъчват спонтанно и независимо един от друг и поради това светлинните вълни от два източника не са синхронизирани, т.е. не са кохерентни.



Фиг. 5.1

това интерферират. Един от тях е методът на огледалата на Френел, илюстриран на фиг.5.1.

Светлината от точков източник S пада върху две огледала, които сключват малък ъгъл помежду си. Отразените от тях светлинни вълни са кохерентни и интерферират върху екрана като вълни, идващи от образите S_1 и S_2 на източника в двете огледала.

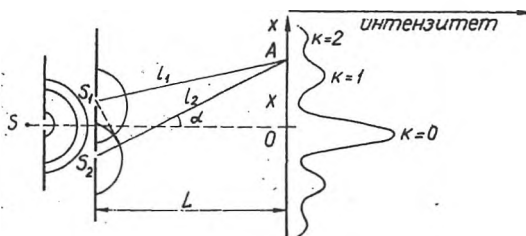
Нови възможности за получаване на кохерентни вълни се откриха след създаването на лазерите. Тяхното излъчване е с много висока степен на кохерентност и освен това излъчването на два лазера може да бъде синхронизирано, при което се получават много интензивни кохерентни вълни. Това постави началото на т.нар. кохерентна оптика с големи постижения и перспективи.

5.1.2. Опит на Юнг

Ще получим характерните особености и закономерности при интерференцията чрез класическия опит на Юнг за интерференция на светлината, схематично показан на фиг.5.2.

Сферичните вълни от точковия източник S достигат едновременно двата процепа S_1 и S_2 на много малко разстояние d един от друг. Те стават центрове на нови кохерентни вълни, които интерферират в пространството след процепите. На разстояние L ($L \gg d$) е поставен екран за наблюдаване на интерференчната картина.

Върху екрана се наблюдават редуващи се тъмни и светли ивици (минимумите и максимумите на интензитета на светлината върху екрана). Ако с екрана свържем координатна ос x , както е пока-



Фиг. 5.2

Фигурата, интерференчната картина може да се разглежда
 деление на интензитета на светлината по x .

риантна величина в оптиката е оптичният път – произве-
 геометричния път l и показателя на пречупване на среда-
 тата за едно и също време светлината изминава различни
 ни пътища в различни среди, но оптичните ѝ пътища са

$$l = vt = \frac{c}{n}t; \quad ln = ct.$$

олна точка A върху екрана разликата в геометричните
 а вълните от двата източника е $l_2 - l_1$, а разликата в опти-
 щища е $\Delta = n(l_2 - l_1)$. Разликата в геометричните пътища
 пресметне от геометрията на опита. Като вземем предвид,
 α е много малък и следователно $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$,

$$\frac{l_2 - l_1}{d} = \frac{x}{L}; \quad \Delta = \frac{nx d}{L}.$$

е вълни в точка A се усилват и на екрана се наблюдава
 нчен максимум, когато те пристигат в точката с еднакви
 разликата във фазите им е $\delta = 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots$. На та-
 а във фазите съответствува разлика в оптичните пътища
 дето λ е дължината на вълната във вакуум. Следователно

$$k\lambda = \frac{ndx_{\max}}{L}; \quad x_{\max} = \frac{kL\lambda}{nd} \quad (5.1.1)$$

вкупността от координатите на интерференчните макси-
 ку екрана, т.е. на светлите ивици; централният максимум
 вува на $k = 0$ със симетрично разположени максимуми от
 ядък ($k = 1$), от втори порядък ($k = 2$) и т.н.

С подобни разсъждения може да се получат координатите на интерференчните минимума, в които двете вълни се срещат с противоположни фази, $(2k + 1)\pi$, на което съответствуват разлика в оптичните пътища $(2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ и координати на минимумите

$$x_{\min} = \frac{(2k + 1)L}{nd} \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (5.1.2)$$

Лесно се показва, че разстоянията между съседните максимуми и минимума са еднакви, а ширината на интерференчните ивици зависи от геометрията на опита и оптичната плътност на средата:

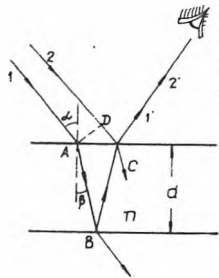
$$x_{k+1} - x_k = \frac{L}{nd} \lambda. \quad (5.1.3)$$

Ако S е източник на бяла светлина, интерференчните максимуми на вълни с различни дължини ще се получават на различни места върху екрана, т.е. ще се получава спектрално разлагане на светлината в максимумите (освен в централния максимум). Получените интерференчни спектри от първи, втори и т.н. порядък са пропорционални, $x \sim \lambda$, което е тяхно съществено предимство пред призменият спектър, получени при разлагане на светлината след преминаване през призма. При тях няма линейна зависимост между дължината на вълната и ъгълът на отклонението ѝ от направлението на падащия лъч.

Когато опитната постановка на фиг.5.2 се премести от въздух ($n_1 = 1$) в друга среда с показател на пречупване n_2 , интерференчната картина ще се свие n_2 пъти. Докажете това твърдение.

5.1.3. Интерференция от пластинка с успоредни стени

Често пъти тънки слоеве течности са ответени в резултат на интерференцията на светлината, отразена от тях (сапунени ципи, маслени петна и др.). Интерференцията на светлината от тънки слоеве намира и практическо приложение за контролиране качеството на обработката на плоски и сферични повърхности. Основните закономерности ще получим при разглеждане интерференцията на светлината от тънка пластинка с успоредни стени, показана на фиг.5.3.



Фиг. 5.3

Отразените лъчи от горната ($2'$) и долната стена ($1'$) на пластинката се разпространяват в едно и също направление и интерферират (ако окото гледа към пластинката, в това направление ще наблюдава интерференчната картина).

Да пресметнем разликата в оптичните пътища на лъчите, които интерферират:

$$\Delta = (AB + BC)n - DC - \frac{\lambda}{2} \quad (5.1.4)$$

Последният член изразява загубата на половин вълна при отразяване на вълната от оптически по-плътна среда, както е случаят с лъча 2.

При преобразуването на този израз с отчитането на $n = \sin \alpha / \sin \beta$ получаваме

$$AB + BC = \frac{2d}{\cos \beta}; \quad DC = AC \sin \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta.$$

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos \beta} - \frac{2d \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} - \frac{\lambda}{2};$$

$$\sin \beta = \sin \alpha / n; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha / n^2};$$

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} \quad (5.1.5)$$

Разликата в оптичните пътища на интерфериращите лъчи зависи от параметрите на пластинката (n , d) и тези на падащата светлина (α , λ). Условието за получаване на интерференчен максимум в направлението на отразените лъчи се записва по следния начин:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 0, 1, \dots$$

Да анализираме зависимостта на интерференчната картина от величините във формулата.

Ако върху пластинката пада успореден сноп бяла светлина, при увеличаване дебелината на пластинката, като се започне от стойности, близки до нула, условието за максимум ще бъде изпълнено последователно за вълни с нарастваща дължина на вълната и цветът на пластинката ще се изменя последователно от виолетов към червен. Такъв е произходът на цветните ивици, в които се виждат тънки маслени слоеве върху водна повърхност, чиято дебелина не е еднаква навсякъде.

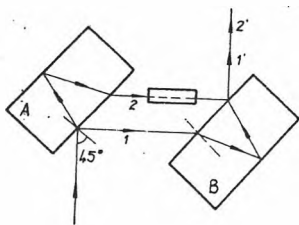
Когато пластинката има различна дебелина и върху нея пада успореден сноп светлина, интерференчната картина представлява тъмни и светли ивици, като всяка от тях възниква в резултат на отражение на светлината от участъци на пластинката с еднакви дебелини. Поради това ги наричат ивици на еднаквата дебелина. Дефектите върху повърхността на пластинката (вдлъбнатини

и изпъкналости) предизвикват деформации на линиите на е вата дебелина и това е физичната основа на методика за пре контролиране качеството на обработка на повърхности: върху троллираната повърхност се поставя еталонна пластинка със с паралелни стени под малък ъгъл към повърхността, така че м тях се образува тънък въздушен клин, от който се получава и ференчна картина в отразена светлина. С тази методика може контролира паралелност на равнинни повърхности с точност 0,01 от дължината на вълната и затова се използва в оптико ничната промишленост.

Особен въздушен клин се образува между изпъкналата п хност на плоскоизпъкнала леща и пластинката, върху която опира. При облъчване на лещата с нормално падаща светлин разената от клина светлина интерферира и се наблюдават иви еднаквата дебелина, които представляват концентрични пръб и се наричат нютонови пръстени. Те се използват за контро точността на обработка на сферични повърхности в оптичната мишленост.

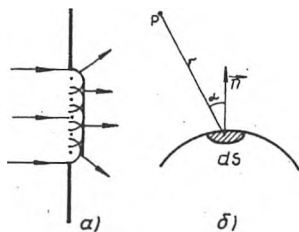
5.1.4. Интерферометри

Интерферометрите са оптични измерителни уреди, в коит терферираат два светлинни снопа с разлика в оптичните пътищ тях може да се измерва показател на пречупване на оптични ди или неговото изменение. Показателят на пречупване е свъ с други физико-химични характеристики, които чрез него мог се определят с висока точност. С оптични интерферометри мог се измерват също така дължини и техните изменения. Тези у намират широко приложение в изследователската работа и в тролните лаборатории в промишлеността, поради което съществ голямо разнообразие в конструкциите им. Ще илюстрираме с вните идеи на принципа на работа и приложението им, като ра даме интерферометъра на Жамен (фиг.5.4).



Фиг. 5.4

А и В са прозрачни пластинки поредни стени и успоредни помежд. Светлината от източника се раздел два снопа при отражение от повър стите на пластинката А. След отр ние от пластинката В двата лъча ин ферират. Ако на пътя на един от лъ се постави проба от прозрачно веще с показател на пречупване n_2 , разли от този на въздуха n_1 , разликата в о чните пътища на интерфериращите пове ще се промени с $\Delta = (n_1 - n_2)$ интерференчната картина ще се отм



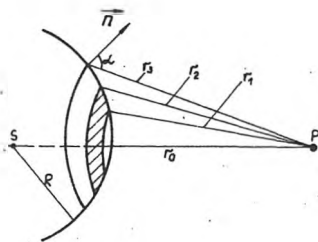
Фиг. 5.5

Принципът на Хюйгенс обяснява дифракцията само качествено. Възможност за количествена оценка на дифракционната картина дава допълнението на принципа, направено от Френел. То се състои в следното: всеки елемент от вълновия фронт с площ dS (фиг.5.5,б) излъчва кохерентни сферични вълни, чиято амплитуда е пропорционална на dS , намалява на разстояние r , както $1/r$, и намалява, когато ъгълът между направлението на разпространение и нормалата расте (при ъгъл $\pi/2$ амплитудата е

нула). Амплитудата на трептенията в произволна точка пред вълновия фронт се получава в резултат от интерференцията на елементарните вълни, излъчени от целия вълнов фронт. Според принципа на Хюйгенс и Френел дифракцията на светлината се свежда до интерференция на голям брой кохерентни сферични вълни.

5.2.3. Френелови зони

Принципът на Хюйгенс и Френел дава възможност да се пресметне амплитудата на трептене в произволна точка, т.е. осветеността \dot{y} , но в общия случай тази задача е трудна. Само в някои частни случаи поради симетрията определянето на амплитудата се свежда до елементарни геометрични или алгебрични операции. Като илюстрация на идеята на принципа и метода на приложението му ще покажем, че светлината се разпространява праволинейно в хомогенна среда, което е добре известен опитен факт. За тази цел ще пресметнем амплитудата на светлинната вълна от източника S в точка P , както е показано на фиг.5.6.



Фиг. 5.6

Фронтът на светлинната вълна от източника S след някакво време има сферична форма с радиус R . Според принципа на Хюйгенс и Френел всеки елемент от този вълнов фронт излъчва кохерентни вълни, които интерферират в точка P и определят осветеността \dot{y} . Като отчитаме осевата симетрия на задачата, удобно е вълновият фронт да се раздели на симетрични пръстени, отрязвани от концентрични сфери с радиуси r_1 , r_2 и т.н.,

плетворяват условието

$$\begin{aligned}r_1 &= r_0 + \lambda/2 \\r_2 &= r_0 + 2\lambda/2 \\&\vdots \\r_n &= r_0 + n\lambda/2.\end{aligned}$$

Разликата в пътищата на вълните от два съседни пръстена (Френел) до точка P е половин вълна и те взаимно ще се амплитудата в точка P получаваме

$$A_P = a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_n. \quad (5.2.1)$$

Точка P е избрана за положителна амплитудата от първата зона. Аналогично за останалите амплитуди се приписва знак $+$ или $-$ според зоната (съответно на нечетни и четни).

Сигналите на амплитудите според принципа се определят от разликата. Може да се покаже, че площите на зоните слабо се изменят. Амплитудите намаляват с нарастване номера на зоната главно поради нарастването на r и α , т.е. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$. При не много много зони амплитудата намалява монотонно

$$a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2} \quad (5.2.2)$$

Амплитудата в точка P получаваме

$$+ \left(\frac{a_1 + a_3}{2} - a_2 \right) + \left(\frac{a_3 + a_5}{2} - a_4 \right) + \dots \approx \frac{a_1}{2} \dots \quad (5.2.3)$$

Разликите в скобите са нули при предположението за монотонно намаляването на амплитудите.

Полученият резултат показва, че амплитудата на вълната и освободената в точка P идват само от вълната от първата зона, която се освобождава в тесен цилиндър около правата SP , т.е. в едноразмерната площ се разпространява практически праволинейно до точка P .

5.2.4. Дифракция на вълни от кръгъл отвор

Характерни особености на явлениято може да се разкрият при анализа на дифракцията на сферични вълни от кръгъл

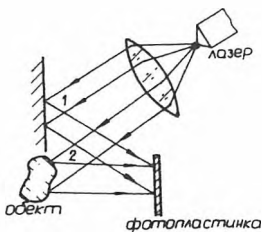
(5.2.6) е в сила и при тях, а увеличаването на броя на отвори ди до повишаване интензитета и контрастността на максимум точността на измерването.

5.2.6. Понятие за холография

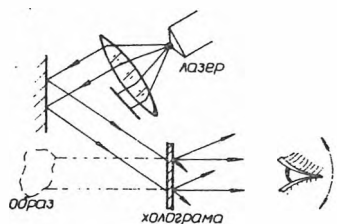
Холографията е оптичен метод за запис и възпроизвежда пространствени образи на предмети чрез интерференция и дифракция на вълни. Холо означава пълн и графия – запис.

Светлинните вълни, които интерферират при холографски запис, трябва да бъдат кохерентни и затова холографията се развива интензивно след откриването на лазерите през 60-те години.

Принципната схема на холографски запис на образа на обекта е илюстрирана на фиг.5.9. Лазерният сноп се разширява с помощта на леща, като половината от него се отразява от огледало и се нарича реперен сноп (1), а другата половина се отразява от предмета и се нарича предметен сноп (2). В резултат на интерференцията на кохерентните снопове 1, 2 се получават области на усиление и отслабване със сложни форми. Именно тази интерференчна картина се записва върху фотопластинката (холограма) и тя съдържа информация не само за интензитета на отразената светлина от всички точки на обекта, но и за разликата във фазите ѝ спрямо реперния сноп. В този смисъл записът е пълн, докато при обикновената фотография се записва само интензитетът на светлината от обекта, който се фотографира. По тази причина на холограмата се „вижда“ образът на обекта.



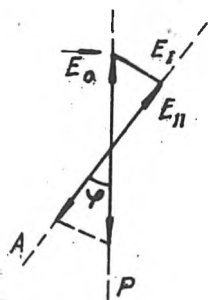
Фиг. 5.9



Фиг. 5.10

„Четенето“ (възпроизвеждането) на холограмата става по оптична схема, показана на фиг.5.10. Холограмата се осветява с реперен лъч, който дифрактира върху записаната интерференчна картина от светли и тъмни места в качеството на своеобразна дифракционна решетка. В „просветлената“ холограма наблюдателят вижда обектен образ на обекта. При движение на наблюдателя спрямо

получена опитно и е известна като закон на Малюс.



Фиг. 5.11

Нека поляризаторът пропуска вълни с трептения на електричния вектор в направлението P , показано на фиг.5.11, а амплитудата на трептенията да бъде E_0 . Поляризираната светлина пада върху анализатор, който пропуска трептения в направление A . През него ще премине само компонентата на вектора на интензитета на електричното поле на поляризираната светлина в направлението на A , $E_{||} = E_0 \cos \varphi$, а напречната компонента, $E_{\perp} = E_0 \sin \varphi$, ще се гаси изцяло. Тъй като интензитетът на светлинната вълна е пропорционален на квадрата от амплитудата на трептението, $I \sim E^2$, получаваме

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (5.3.1)$$

което и представлява законът на Малюс. Следователно интензитетът на преминалата през анализатора светлина може да се изменя от нула до I_0 .

Ако върху анализатора пада естествена, а не поляризирана светлина, направените разсъждения могат да се повторят, като се има предвид, че направлението P сключва ъгъл φ с направлението A , който за различните вълни с еднаква вероятност може да има стойности от нула до π . В този случай интензитетът на светлината след анализатора може да намерим пак по закона на Малюс, като вместо $\cos^2 \varphi$ използваме средната му стойност за посочения интервал:

$$\langle \cos^2 \varphi \rangle_{\pi} = 1/2.$$

Може да се докаже (направете сами това упражнение), че средната стойност на квадрата от косинуса в посочения интервал е $1/2$ и следователно всеки поляризатор намалява два пъти интензитета на падналата върху него естествена светлина.

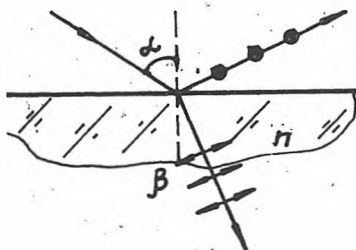
5.3.2. Получаване на поляризирана светлина

а) При отражение и пречупване. При отражение и пречупване на светлината на границата между две среди тя се поляризира частично. Векторът на интензитета на електричното поле в отразената вълна трепти предимно перпендикулярно на равнината на падането, а в пречупената вълна – в равнината на падането, както е показано на фиг.5.12.

ененият лъч става напълно поляризиран, когато е изпълнено

$$\alpha_0 + \beta_0 = \pi/2.$$

на падането α_0 се нарича ъгъл на Брустер и е свързан с ъгъла на пречупване на средата на Брустер



Фиг. 5.12

$$\sin(\pi/2 - \alpha_0) = \text{tg } \alpha_0 \quad (5.3.2)$$

ененият лъч е винаги напълно поляризиран.

Двойно пречупване на светлината. Когато съставът на една среда е еднакъв в целия обем, средата е хомогенна, а когато свойствата са еднакви във всички направления, тя е изотропна. Някои вещества проявяват оптична анизотропия, известна като двойно пречупване на светлината – при падане на светлинен сноп върху кристала той се разделя на два снопа, наречени обикновен и необикновен. В такива кристали има направление (оптична ос), в която светлината се разпространява без двойно пречупване. Равнината, определена от оптичната ос в точката на падането и падащия лъч, е главното сечение и двата пречупени лъча лежат в нея

важни особености на двата пречупени лъча:

1. Обикновеният лъч се подчинява на законите на геометричната оптика и законите на Френел на падането, а необикновеният лъч не се подчинява на тези закони.



Фиг. 5.13

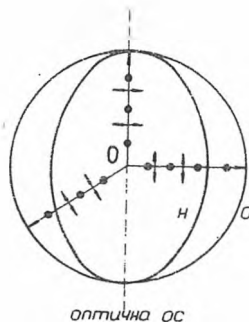
2. Скоростта на разпространение на обикновения лъч, а следователно и по-точно на пречупване на средата са еднакви във всички направления, а за необикновения лъч не са еднакви във всички направления.

3. В направление на оптичната ос показателите на пречупване на обикновения лъча са еднакви и затова при разпространение на светлината в това направление не се наблюдава двойно пречупване.

4. Двата лъча са напълно (линейно) поляризирани; трептенията на обикновения лъч са перпендикулярни на главното сечение, а трептенията на необикновения лъч са паралелни на главното сечение.

5. Оптичната анизотропия на кристалите е следствие от асиметричното разположение и свойствата на градивните им частици или на

силите на взаимодействие между тях. Това води до различни стойности на диелектричната проникваемост на кристала в различни направления, а оттам до различни скорости на разпространение на светлината и различни показатели на пречупване. Например в кристали с една оптична ос (има кристали и с две оптични оси) диелектричната проникваемост в направление, перпендикулярно на оста, е ϵ_{\perp} , в направлението на оста е ϵ_{\parallel} , а в останалите направления има междинни стойности в зависимост от ъгъла, сключван с оптичната ос.



Фиг. 5.14

на двата вълнови фронта с равнината на чертежа.

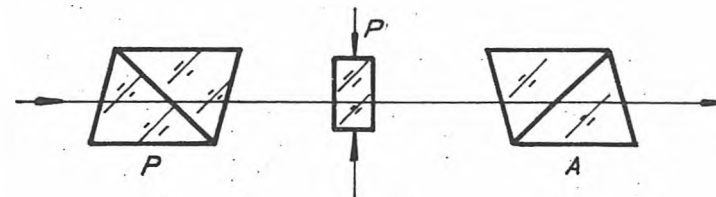
5.3.3. Изкуствена анизотропия

Изкуствена анизотропия може да бъде създадена в някои прозрачни тела и течности като резултат от външно въздействие. За количествена мярка на оптичната анизотропия се използва разликата между показателите на пречупване на обикновения и необикновения лъч $n_o - n_n$, която зависи от интензивността на външното въздействие.

а) *Механооптичен ефект.* При упражняване на механичен натиск върху някои прозрачни тела те придобиват оптична анизотропия (стъкло, плексиглас и др.), като оптичната ос е в направление на приложеното налягане p . Този ефект се нарича механооптичен. Опитно е установено, че разликата между показателите на пречупване на двата лъча е пропорционална на налягането:

$$n_o - n_n \sim p. \quad (5.3.3)$$

Практически ефектът може да се наблюдава с постановката, показана схематично на фиг.5.15. Поляризатор и анализатор са кръстосани (направленията им на пропускане са взаимноперпендикулярни), когато светлината не преминава зад анализатора. При упражняване



Фиг. 5.15

на натиск върху пластинката в нея възниква оптична анизотропия и светлина частично преминава през анализатора, като в зрителното поле се виждат цветни ивици от интерференцията на обикновения и необикновения лъч. Всяка ивица съответствува на област в пластинката с еднакво напрежение. Следователно по интерференчната картина може да се съди за разпределението на деформацията в пластинката и това е в основата на оптичен метод за изследване на напреженията и за контрол на остатъчните вътрешни напрежения в прозрачни изделия на стъklarската промишленост. С този метод може да се онагледява разпределението на напрежението в различни детайли и конструкции при механично въздействие. За целта се прави прозрачен макет на изследваната конструкция, който се поставя на мястото на пластинката в горната постановка и върху нея се упражняват механични въздействия, имитиращи реалните такива.

б) *Електрооптичен ефект (ефект на Кер).* Някои течности и аморфни тела придобиват оптична анизотропия под действието на електрично поле. Причина за това е различната поляризуемост на молекулите им в различни направления при поставянето им във външно електрично поле, което води до различна диелектрична възприемчивост и диелектрична проникваемост.

Ефектът на Кер може да се наблюдава с постановка, аналогична на показаната на фиг.5.15, като вместо пластинка се постави т.нар. клетка на Кер – това е затворен съд с течност, в която са поставени плочите на кондензатор, създаващ електрично поле с интензитет E . Направлението на оптичната ос съвпада с направлението на интензитета на полето.

Опитно е установена връзката между разликата в показателите на пречупване и интензитета на полето

$$n_o - n_n \sim E^2. \quad (5.3.4)$$

Клетката на Кер позволява електричен сигнал, прилаган върху кондензатора, да се трансформира в светлинен сигнал след анализатора. Характерно за ефекта на Кер е неговата малка инертност, около 10^{-10} s (времето за поляризация на диелектрика или за разру-

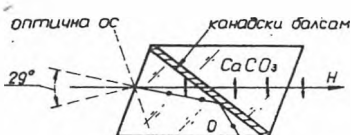
шзването ѝ). Поради това клетката на Кер се използва като пертен оптичен затвор (прекъсвач на светлинен поток), за оп запис на звук в киното и др.

в) *Магнитооптичен ефект*. Магнитооптичният ефект е логичен на електрооптичния, но при него анизотропията възниква под действие на външно магнитно поле. Възникналата оптична анизотропия е пропорционална на квадрата от интензитета на магнитното поле

$$n_o - n_H \sim H^2.$$

5.3.4. Поляризационни прибори

Поляризационните прибори се използват за поляризиране и анализирание на светлина. Основен елемент в голяма част от тях е призмата на Никол или просто никол, показана на фиг. 5.16.



Фиг. 5.16

Две еднакви призми от исландски шпат са изрязани с подходящ наклон на стъкло спрямо оптичната ос и са склепени с канадски балсам. Неговият пречупвателен индекс е по-голям от този на стъклото, затова на пречупване има стопанско отражение на обикновения лъч, който е между стойностите на пречупвателните индекси на стъклото и канадския балсам. Поради това обикновения лъч търпи пълно вътрешно отражение на границата с канадския балсам и се поглъща от почернената долна стена на призмата. След никола преминава само необикновения лъч, който е линейно поляризиран.

Основен недостатък на никола е малката му апертура – равна на максималното изменение на ъгъла на падане на светлината, при което обикновения лъч все още се поглъща напълно. След преминаването светлината е напълно поляризирана. За никола апертурата е 29° . Съществуват и други видове поляризационни призми.

Особен интерес представляват поляроидите, които използват явленията дихроизъм – свойство на някои двойнопречупващи кристали да поглъщат много силно един от двата лъча. Например стинка от турмалин с дебелина 1 mm поглъща изцяло обикновения лъч. Заедно с това нееднакво се поглъщат различните дължини на вълните от другия лъч и затова кристалите са оцветени.

Поляроидите представляват тънък слой от кристал със свойство дихроизъм. За практически нужди те се изготвят, като на прозрачна подложка, например целулоид, се нанася тънък слой ориентирани кристали. Широкото им приложение се дължи на ниската

5.4.1. Взаимодействие на електромагнитните вълни с веществото

Електромагнитната вълна представлява разпространение на трептенията на електричния и магнитния вектор на електромагнитен осцилатор на вълната. Действието на електромагнитната вълна върху веществото се свежда до действията на електричното и магнитното поле на вълната върху електрически заредените градивни частици на веществото. Поради това е естествено оптичните свойства на веществата да се свързват с техните електрични и магнитни свойства.

В електромагнитната теория на светлината показателят на пречупване на светлината при преминаване от вакуум в диелектрик n се свързва с неговата относителна електрична и магнитна проникваемост ϵ и μ чрез известния закон на Максвел

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

Тъй като $\mu \approx 1$ за почти всички диелектрици, то $n = \sqrt{\epsilon}$, т.е. електричните свойства на веществото са определящи при взаимодействието на светлината с него. В тази теория обаче липсва зависимостта на показателя на пречупване от дължината на вълната, с която е свързана дисперсията ѝ.

Лоренц допълва максвеловата теория с електронната теория, която отчита електронния строеж на атомите и молекулите и механизма на тяхното взаимодействие със светлината. Според тази теория интензитетите на електричното и магнитното поле на светлината са малки, но не пренебрежими. Честотите на трептения на електричния и магнитния вектор са много големи, около $10^{14} - 10^{15} \text{ s}^{-1}$ във видимата област на светлината. Трептенията на електричния вектор възбуждат принудени трептения на електричните заряди в атомите и молекулите със същата честота. Поради голямата честота на трептенията само електрични заряди с много малка маса могат да „реагират“ на тях, това са електроните. Протоните и тежките йони са „чувствителни“ към трептенията на електричните полета на вълните едва в инфрачервената област.

При принудените трептения на електроните те излъчват вторични вълни със същата честота, които са кохерентни помежду си и с падащата вълна. Интерференцията на вторичните вълни помежду им и с първичната вълна са в основата на разглеждането на взаимодействието на светлината с веществото. Така например при падане на светлина на границата вакуум – диелектрик от тази граница се разпространяват вторични вълни, които вътре в диелектрика гасят падащата вълна и след наслагването им в диелектрика се разпространяват като пречупена вълна с друга фазова скорост, а назад във вакуума – като отразена вълна със същата фазова скорост. При правилно отчитане на интерференцията на вторичните вълни (тяхната амплитуда и фаза) могат да се получат законите на пречупване и отражение, както и интензитетите на съответните вълни. Със същия

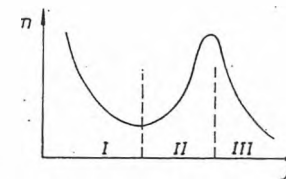
подход могат да се разглеждат явленията на границата между два диелектрика или в кристални тела.

5.4.2. Дисперсия на светлината

Зависимостта на скоростта на разпространение на светлината в дадена среда от дължината на вълната се нарича дисперсия $v(\lambda)$. Тъй като показателят на пречупване е свързан със скоростта, $n = c/v$, следва че той също зависи от дължината на вълната. Следствието от тази зависимост може лесно да се наблюдава при пропускане на светлина през призма, зад която се наблюдава разлагане на светлината или призмен спектър, както е показано на фиг.5.17. Това явление е било изучавано още от Леонардо да Винчи и Нютон.



Фиг. 5.17



Фиг. 5.18

За количествена характеристика на дисперсията се въвежда величината дисперсия $D = dn/d\lambda$. Тя може да бъде отрицателна, т.е. показателят на пречупването намалява с нарастването на дължината на вълната, и се нарича нормална. Такава дисперсия проявяват прозрачните вещества в тези части на спектъра, които са далече от областите на поглъщане (области I и III на фиг.5.18). Обикновеното стъкло например е прозрачно за видимата светлина и има нормална дисперсия в тази част на спектъра. То поглъща в инфрачервената и ултравиолетовата част на спектъра.

В областта на поглъщане зависимостта на показателя на пречупване от дължината на вълната е много по-сложна. Такава е областта II на фиг.5.18, в която показателят на пречупване расте с дължината на вълната и такава дисперсия се нарича аномална. По такъв начин дисперсията е свързана с другите оптични свойства на веществото.

5.4.3. Поглъщане на светлината

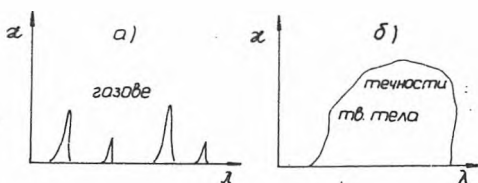
Част от енергията на електромагнитната вълна, която пада върху веществото, се трансформира в енергия на атомите и молекулите му, поради което интензитетът на преминалата светлина отслабва, т.е. светлината се поглъща от веществото. Опитно Бугер

получава връзката между интензитетите на падналата (I_0) и налата (I) светлина през прозрачно вещество с дебелина x :

$$I = I_0 e^{-kx}$$

Интензитетът на светлината намалява експоненциално, като k се нарича коефициент на поглъщане, характерен за средата, и на който зависи от дължината на вълната.

За вещества в газово състояние, при които взаимодействието между атомите или молекулите може да се пренебрегне, коефициентът на поглъщане е почти нула и само в някои области на спектъра има тесни максимуми, които съответствуват на резонансните честоти на трептене на електроните в атомите (фиг.5.19,а). При поглъщане на светлината се нарича резонансно.



Фиг. 5.19

При твърдите и течностите вследствие на взаимодействието между атомите и молекулите максимумите на поглъщане се разширяват и образуват непрекъснат спектър на поглъщане, изразена зависимо от дължината на вълната (фиг.5.19,б). Част от енергията на падналата електромагнитна вълна се разходва за поляри-

зация и деполаризация на атомите или молекулите на диелектриката и се губи. Това се нарича диелектричните или поляризационни загуби.

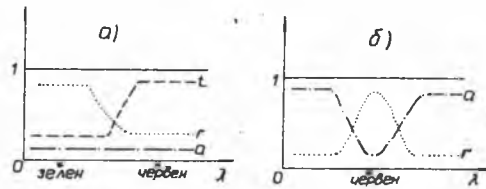
Металите, като типичен представител на непрозрачните водещи среди, имат голям коефициент на поглъщане на видима светлина $k \sim 10^6 \text{ m}^{-1}$, докато за стъклото $k \sim 1 \text{ m}^{-1}$. Голямата поглъщателна способност на металите е резултат от наличието на свободни електрони в тях. Електричното поле на електромагнитната вълна индуцира в метала високочестотни токове, които от своя страна преобразоват електромагнитната енергия в джаулова топлина за сметка на енергията на светлината.

5.4.4. Разсейване на светлината

При преминаване на светлина през прозрачна хомогенна среда, поради интерференцията на вторичните вълни води до тяхното отклоняване във всички направления освен в направлението на първичната вълна и затова не се наблюдава разсейване на светлината. Вторичните вълни не се гасят при разпространение на светлината в оптично еднародни, мътни среди (дим, мъгла, суспензии, емулсии и др.).

КВАНТОВА ОПТИКА

И трите коэффициента зависят от дължината на вълната по различен начин, поради което се променя спектралният състав на светлината при отражение и преминаване през веществото. Голямото различие в зависимостите на коэффициентите от дължината на вълната при различните вещества води до голямо цветово разнообразие. Например прозрачен спиртен разтвор на хлорофил, осветен с естествена (бяла) светлина, изглежда зелен в отразена светлина (каквото е и цветът на листата в отразена светлина, в която ние ги виждаме) и червен в преминала светлина. Тази „смяна“ на цветовете е резултат от различната спектрална зависимост на трите коэффициента (фиг.5.20,а). В областта на зеления цвят коэффициентът на отражение е голям, а другите два коэффициента са малки, поради което този цвят се отразява най-силно и това определя зеления цвят на хлорофила в отразена светлина. В областта на червения цвят коэффициентът на пропускане е голям, а другите два коэффициента са малки и през разтвора преминава предимно червеният цвят.



Фиг. 5.20

При безцветните тела коэффициентите a , r и t практически не зависят от дължината на вълната и поради това не се променя спектралният състав на преминалата и отразената светлина. При непрозрачните тела коэффициентът на пропускане е нула и цветът на тялото се определя само от спектралната зависимост на a и r , като процесите на поглъщане и отражение протичат в много тънък повърхностен слой. Ако искаме да придадем определен цвят на тялото, трябва да го покрием със слой вещество, за което r има голяма стойност при λ на съответния цвят и почти нула за останалите цветове. От условието $a + r = 1$ следва, че коэффициентът на поглъщане ще има огледална спектрална зависимост (фиг.5.20,б). На езика на електронната теория това означава, че падналата върху повърхността на тялото бяла светлина ще възбужда принудени трептения на атомите и молекулите на оцветителя, които ще се усилят резонансно в областта на съответния цвят. Отразената вълна, която виждаме, определя цвета на тялото и се получава при интерференцията на вторичните вълни.

Разгледаните зависимости имат важно значение за практиката. В много случаи се разработват специални материали за покрития (бои, пълнители и др.) с голяма поглъщателна или отразителна способност в избрана област на спектъра. Нанесени върху работно облекло, детайли или съоръжения, те служат за тяхната защита от нежелани лъчения.

В края на XIX и началото на XX век физичната картина за света е изглеждала близо до своята завършеност. Механиката, електродинамиката и термодинамиката вече са били аксиоматично изградени и по елегантен начин са обяснявали известните физични знания, а широкото им техническо приложение засилвало вярата в тяхната непоклитост. Съвкупността от тези знания и идеи е съдържанието на класическата физика.

Въпреки безспорния триумф на класическата физика няколко явления в областта на оптиката не са се „вписвали“ в създадената от нея картина за света. Спектралното разпределение на енергията на електромагнитните вълни, които излъчва нагрятото тяло, може да се измери опитно и да се пресметне теоретично, като се използват основните постижения на електродинамиката и термодинамиката. Противоречието между опитните резултати и теоретично пресметнатите остава дълго време непреодолимо. Едно друго явление, фотоэффектът – избиване на електрони от метал под действието на светлина, – се оказва също „костелив орех“ за класическата физика. Вътрешната хармония и успехите на класическата физика са подхранвали надеждата за остроумно преодоляване на тези трудности, а неуспехите по този път са доказвали потребността от нови идеи. Такава нова идея, квантовата, изказана в началото на века (1900 г.) от Макс Планк: електромагнитното лъчение има дискретна природа и представлява поток от особени частици, наречени фотони, които имат свойства и на вълни, и на частици, е в принципно противоречие с класическата физика. След този „пробив“ квантовата идея е разширена и за гравитните частици на веществото: Дьо Бройл изказва предположението, а по-късно това опитно е доказано, че не само частиците на светлината (на полето), но и частиците на веществото имат двойствена корпускуларно-вълнова природа. Така се ражда квантовата физика като развитие на класическата при изучаването на микросвета.

В търсенето на решение на други „оптични проблеми“ на класическата физика (опитно е установено, че скоростта на светлината не зависи от движението на източника и приемника, уравненията

на електродинамиката не са инвариантни относно трансформации на Галилей) са изказани други плодотворни идеи и е създадена релятивистичната физика. Тя може да се разглежда като разширение на класическата физика в областта на големите скорости, близки до тази на светлината.

В развитието на класическата физика оптиката е имала особено важна роля поради високата точност на оптичните експерименти, която е дала възможност да се „видят“ противоречията в класическата физика, а също така пътищата за тяхното преодоляване. Именно поради това оптиката става „люлка“ на квантовите и релятивистичните идеи.

В тази глава предмет на разглеждане са оптичните явления, които светлината има поведение и на поток от частици, а не само на вълни, както бе подчертавано в предишната глава при изучаване на интерференцията, дифракцията и поляризацията.

6.1. ТОПЛИННО ИЗЛЪЧВАНЕ

6.1.1. Характеристики на топлинно излъчване

Атомите и молекулите на нагретите тела (тела с температура над абсолютната нула) излъчват електромагнитни вълни за сметка на енергията на топлинното им движение и това излъчване се нарича топлинно. Характерно за топлинното излъчване е, че е в равновесие, т.е. лъчението и тялото са в термодинамично равновесие вследствие на взаимодействието между тях. Например, ако повиши температурата на тялото, а следователно и енергията, то излъчва по-интензивно и расте енергията на лъчението, което е в равновесие с него и обратно, ако тялото се охлажда, то поглъща енергията си, отколкото излъчва, и това намалява енергията на лъчението.

При опитното изучаване на топлинното излъчване измервателни величини са площта на тялото, излъчената енергия за определено време и разпределението на тази енергия по честоти или дължини на вълни. С помощта на тези величини може да се дефинират количествените характеристики на тялото, свързани с това явление, те са следните:

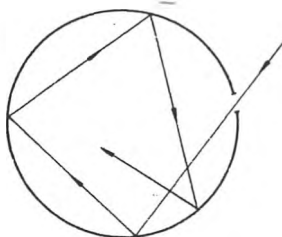
а) *Диференциална излъчвателна способност.* Това е величина, числено равна на излъчената енергия от единица площ на тялото за единица време в единица интервал на дължини на вълните:

$$e_{\lambda} = \frac{d^3W}{dS dt d\lambda}, \text{ J/m}^3 \cdot \text{s.}$$

Тя е различна за различните области на спектъра (различно λ) и очевидно очакваме да зависи от температурата T . Опитът показва, че освен от дължината на вълната и температурата излъчвателната

Тази зависимост е известна като закон на Кирхоф. $E_{\lambda}(\lambda, T)$ се нарича функция на Кирхоф и може да се отъждестви с диференциалната излъчвателна способност на тяло, чиято диференциална поглъщателна способност е единица за всички дължини на вълните, $A_{\lambda} = 1$, т.е. тяло, което изцяло поглъща падналата върху него светлина. В отразена светлина такова тяло би изглеждало черно и се нарича абсолютно черно тяло. Реалните тела могат да имат близки свойства (например саждите), но за тях винаги $a_{\lambda} < 1$. Като модел на абсолютно черно тяло може да служи отвор в сфера с почернена вътрешна повърхност, както е показано на фиг.6.1. Падналата върху отвора светлина се отразява многократно от вътрешната ѝ повърхност, докато се погълне напълно, без да успее да се върне обратно през отвора, което е условие за абсолютно черно тяло.

От (6.1.1) се вижда, че ако познаваме излъчвателната способност на абсолютно черно тяло – спектралното разпределение и температурната зависимост – зададена с функцията на Кирхоф, може да се получи излъчвателната способност на всяко реално тяло.



Фиг. 6.1

В практически аспект законът на Кирхоф може да бъде формулиран и така: тяло, което силно излъчва, силно и поглъща. Тази връзка намира приложение при топлинната защита на обекти – например при Дюаровите съдове, които се използват за пренасяне и съхранение на втечени газове. Основен проблем е намаляването на топлообмена с околната среда, която се намира при много по-висока температура. Основните форми на топлообмен при тях са топлопроводността (обмен на топлинна енергия с посредничеството на веществена среда) и лъчист топлообмен (чрез излъчване и поглъщане на електромагнитни вълни). За намаляване на топлопроводността съдът се прави с двойни стени и въздухът между тях се изтегля до много висок вакуум. За намаляване на лъчистия топлообмен между стените се поставя метално фолио с много малка поглъщателна способност в целия спектър.

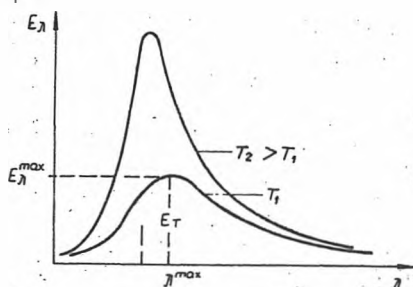
6.1.2. Закони при топлинно излъчване на абсолютно черно тяло

Функцията на Кирхоф зависи от дължината на вълната и температурата и затова може да се говори за спектрална и температурна зависимост. Спектралното разпределение на диференциалната излъчвателна способност на абсолютно черно тяло е получено опитно и е показано на фиг.6.2. То се характеризира със силно изразен максимум на излъчвателната способност E_{λ}^{\max} при дължина на вълната

щта под кривата е интегралната излъчвателна способност
тно черно тяло E_T .

пературната зави-
а излъчвателната
г се свежда до
рна зависимост на
рактеристики на
ото разпределение
на също опитно:
исочината на мак-
араства, както пен
н на температура-
 T^5 .

Интегралната из-
а способност ра-
четвъртата степен
атурата:



Фиг. 6.2

$$E_T = \sigma T^4. \quad (6.1.2)$$

симост е известна като закон на Стефан-Болцман, а кон-
г се нарича константа на Стефан-Болцман и има стойност
 $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}^4)$.

Максимумът на излъчвателната способност се премества
ките дължини на вълните с повишаване на температу-
д зависимостта

$$\lambda^{\max} = \frac{b}{T}, \quad (6.1.3)$$

като закон на Вин, $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$.

законали закони показват, че с повишаване на температурата на
ивата на спектралното разпределение на излъчената енер-
по-остра ($\sim T^5$), максимумът се отмества към по-късите
на вълните, а пълната излъчена енергия нараства, както
а степен на температурата.

пературната зависимост на излъчвателната способност е в
на хилядолетния опит на хората в обработката на мета-
че желязо преди поставяне в пещта за загряване е сиво в
светлина. При загряване максимумът на излъчвателната
ност, който определя цвета му вече в собствена, излъчена
се премества постепенно от инфрачервената към видимата
о в началото е тъмночервено, след това по-светло до жълто
ветло жълто. Цветът на желязото е свързан с температу-
старите занаяти и със съответната обработка за придаване
ени качества на изделието.

6.1.3. Обяснение на топлинното излъчване

Според класическата физика атомите и молекулите на телата представляват електромагнитни осцилатори. При удари помежду им или при поглъщане на електромагнитно лъчение в тях се възбуждат електромагнитни трептения, които се разпространяват като електромагнитни вълни. Загубата на енергия при излъчването на осцилаторите се компенсира от енергията на топлинното им движение. Съществено е, че тези осцилатори излъчват непрекъснато, сумарният ефект от което е спектърът на топлинното излъчване. Именно с този механизъм на излъчване в класическата физика се оказва невъзможно теоретично да бъде изведена опитно намерената функция на Кирхоф.

Планк прави предположение, че електромагнитните осцилатори в тялото не излъчват непрекъснато, а на отделни порции, на кванти, като енергията на кванта е свързана с честотата на лъчението ν със зависимостта

$$E = h\nu, \quad (6.1.4)$$

където $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s се нарича константа на Планк. Това предположение е в противоречие с един неписан закон на класическата физика, според който енергията на всяка система се изменя плавно, а състоянията, които тя може да заема, образуват непрекъснат спектър. Очевидната непримиримост на това предположение с основните концепции на класическата физика е причина то да бъде считано (главно от самия Планк) само като сполучлив трик при извода на функцията на Кирхоф, без особен физичен смисъл. Развитието на физиката след това му даде заслужено място като основополагаща идея за дискретност (квантуване) на енергията на микроскопичните системи, каквито са атомите и молекулите. Както е известно сега, в тези системи се квантуват всички техни основни характеристики – електричен заряд, маса, импулс и др. Предположението за квантуване на енергията им допълва тази картина и утвърждава схващането, че дискретността в характеристиките на микросистемите има универсален характер.

На основата на направеното предположение Планк получава спектралното разпределение на излъчената енергия от абсолютно черно тяло и зависимостта му от температурата

$$E_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (6.1.5)$$

където c е скоростта на светлината във вакуум, а k е константата на Болцман.

От получената функция лесно могат да се изведат опитно намерените зависимости от температурата. Така например максимумът

елението ще получим от условието за екстремум на фун-
 (1.5)

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda} = 0.$$

тарно преобразуване на полученото равенство се достига
 и междинен резултат:

$$5 \cdot \lambda^4 \cdot \frac{1 - \frac{hc}{\lambda kT} - e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}} = 0,$$

о се редуцира до уравнението

$$1 - \frac{hc}{\lambda kT} = e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}.$$

изпълнено това равенство при всички стойности на тем-
 ера, която участва неравномерно в двете страни на ра-
 би трябвало равенството да не зависи от температурата,
 възможно само ако

$$\lambda^{\max} T = \text{const},$$

законът на Вин (6.1.3).

ималната излъчвателна способност ще получим, като за-
 в (6.1.5):

$$E_\lambda^{\max} = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hcT}{b\lambda kT}} - 1} \sim T^5,$$

рвият закон при топлинното излъчване.

интегриране по дължината на вълната на функцията
 е да се получи законът на Стефан-Болцман (6.1.2).

ултата на Планк често пъти се задава с честотата на въл-
 го се използва връзката $\nu = c/\lambda$:

$$E_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (6.1.6)$$

6.1.4. Оптична пирометрия

ката между спектъра на топлинното излъчване на тялото
 температура дава възможност за измерване температу-
 рно нагрети тела. (Защо не се използва тази връзка за
 е температурата на слабо нагрети тела?) Методите, които

използват тези зависимости за измерване температурата на телата, са обединени в общото название оптична пирометрия. Главните предимства на тези методи пред останалите са две:

1. Те са дистанционни, безконтактни методи за измерване на температура и нямат конкуренция при измерване на температури на небесни тела, взривове, вулканични изригвания и др.

2. С тях могат да се измерват високи температури, при които не могат да се използват контактни термометри, например електрична дъга, пещи с много висока температура и др.

В зависимост от използваните закономерности при определянето на температурата се говори за радиационна, цвetoва и яркостна пирометрия.

В радиационната пирометрия се използва законът на Стефан-Болцман, като се измерва интегралната излъчвателна способност на тялото E_T , и от закона се определя температурата. Определената температура е на абсолютно черно тяло. За да определим от нея температурата на тялото, необходимо е да познаваме интегралната му поглъщателна способност a_T , която се нарича степен на чернота $a_T = e_T/E_T$. За температурата на тялото получаваме

$$T_{\text{тяло}} = T_{\text{а.ч.тяло}} / \sqrt[4]{a_T}.$$

Този метод е подходящ за измерване температура на тела, от които идва слаб светлинен сигнал, например звездите.

При цвetoвата пирометрия се определя мястото на максимума в излъчвателната способност на тялото λ^{max} и от закона на Вин (6.1.3) се определя температурата. И тук определената температура е на абсолютно черно тяло и трябва да се коригира със степента на чернота на тялото. Методът е приложим, когато от тялото идва силен светлинен поток и може да се изследва спектралното разпределение на енергията му.

При яркостната пирометрия се сравняват яркостите на тялото и на нагрятата нишка, която има ролята на еталон. Нейната температура е известна от големината на електричния ток, който я загарява. В яркостната термометрия се използва високата чувствителност на човешкото око при сравняване яркостите на телата; при наслагване в зрителното поле на образите на две тела с еднаква яркост границите на образите се заличават. Еднаквостта на яркостите означава равенство на яркостните температури, от които може да се определят истинските температури на телата.

В промишлеността с методите на оптичната пирометрия се измерват температури на пещи и други силно нагрети тела.

6.2. ФОТОЕЛЕКТРИЧЕН ЕФЕКТ

При поглъщането на светлината от веществото са възможни няколко ефекта. Най-тривиалният от тях е топлинният, при който

на електромагнитните вълни интензифицира топлинното на частиците на веществото и тялото се загрева. В другата енергия променя енергетичното състояние на частицата и осигурява енергетичния баланс на химични реакции без нея не биха се реализирали. Такива реакции са фотохимични и техен ярък представител е фотосинтезата, която е жизнено важна за живата природа. Фотоелектричният ефект е този, при който се променя енергетичното състояние на частиците, което води до химични промени. Когато падналата светлина пада на веществото, главно метал, избива електрони вън от него, се наблюдава външен фотоелектричен ефект, който е в основата на функционирането на вакуумните лампи и фотоелектричните клетки. Ако частицата, която „поглъща“ падналата светлина, не напуска веществото, а само променя енергетичното си състояние, говорим за вътрешен фотоелектричен ефект. Например електроните в полупроводниците при облъчване със светлина преминават от валентна зона в проводимостта и значително намаляват електричното им съпротивление. Този ефект се използва във фотоелектричните устройства за светлинни сигнали в електрични системи. В някои системи под действието на светлината възниква електрогальваничен ефект и се говори за фотогальваничен ефект, например в слънчевите батерии. Тази примамила възможност за трансформация на слънчевата енергия се използва в някои специални приложения и все още с ограничен принос в решаване на проблемите на енергетиката.

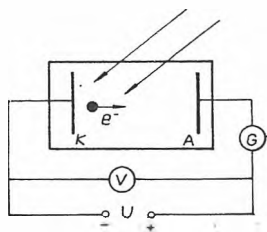
Законите на фотоелектричния ефект в най-чист вид се наблюдават при външния фотоелектричен ефект и в разглежданията по-нататък ще се занимаваме само с него.

6.2.1. Закони при външния фотоелектричен ефект

Фотоелектричният ефект е открит 1887 г. от Херц, който доразвива електричната теория на Максвел и опитно доказва съществуването на електромагнитни вълни като следствие от разпространението на електромагнитни трептения. Ето какво пише Херц две години след откритието на фотоелектричния ефект: „От времето на Юнг и Френел знаем, че светлината това е вълново движение. Невъзможно е повече да се каже за този факт; недостижимо за физиката е да опровергаем теорията“. Този убеден привърженик на класическата концепция за природата на светлината не е подозирал, че с откриването на фотоелектричния ефект той подготвя най-силния удар срещу нея.

Законите на фотоелектричния ефект са изследвани от Херц (брат на генерал Столетов), Ленард, Томсон и др. с опитна установка, показана схематично на фиг.6.3. Метален катод във вакуумна стъклова лампа се измества в зависимостта на фототока във веригата от променливо напрежение и от характеристиките на светлината (интензитет и дължина на вълната). При постоянно осветление на

катода е получена волт-амперната характеристика на фотоефекта, показана на фиг.6.4.



Фиг. 6.3

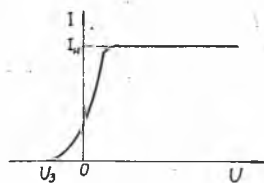
При отсъствие на електрично напрежение между анода и катода фототокът е малък, но не нула. При избиването на електрони от катода те образуват пред него отрицателен обемен електричен заряд, а самият катод получава положителен потенциал. Поради това по-голяма част от електроните се връщат обратно в катода под действие на възникналите електрични сили. Само малка част от електроните с по-голяма енергия и с подходяща посока на скоростта преодоляват тези сили и достигат до анода, което поражда слаб ток.

Увеличаването на напрежението между катода и анода съдействува на електроните при движението им към анода и фототокът нараства. При достатъчно високи напрежения между електродите полето „засмуква всички“ избити електрони от катода, те достигат до анода и токът има максимална стойност. Нарастването на напрежението след тази стойност само ускорява електроните, но не увеличава броя на достигналите електрони до анода, т.е. анодният ток остава постоянен или имаме насищане. Големината на наситения ток I_n зависи само от интензитета на светлината, с която се облъчва катодът.

За да се намали фототокът до нула, между електродите трябва да се приложи напрежение с обратен поларитет, което да задържа електроните при движението им към анода; електроните изразходват кинетичната си енергия за извършване на работа срещу силите на полето. Когато стойността на задържащото напрежение U_3 нарасне достатъчно и може да задържа и най-бързите електрони, токът става нула и е в сила зависимостта

$$eU_3 = \frac{mv_{\max}^2}{2} \quad (6.2.1)$$

При изменение на параметрите на светлината, с която се облъчва катодът, са установени опитно следните закономерности:



Фиг. 6.4

1. Големината на наситения фототок зависи от интензитета на светлината (енергетичната осветеност на катода) и не зависи от честотата ν .

2. Максималната скорост на фотоелектроните, определена чрез задържащото напрежение, зависи от честотата на светлината и не зависи от интензитета ν .

3. Съществува червена граница на фотоефекта, т.е. най-малка честота на светлината ν_0 , под която не се наблюдава вече фотоефект. Тази граница зависи от веществото на катода.

4. Не съществува забележимо закъснение между облъчването на катода и появяването на фотоелектроните.

6.2.2. Обяснение на фотоефекта

Според класическата физика електричната компонента на светлинната вълна възбужда принудени трептения на електроните с честотата на трептене на електричния вектор и трептенията са най-интензивни за свободните електрони в метала. Амплитудата и енергията на трептения на електроните се определят от амплитудата на принуждаващата сила, която е пропорционална на интензитета на светлинната вълна. Електроните ще увеличават амплитудата и енергията на трептението си за сметка на енергията на вълната и когато тази енергия стане по-голяма от отделителната работа за метала на катода, електроните напускат метала. Ето такъв е механизмът на избиване на електрони от метала под действието на светлината, но с него не може да се обяснят опитно намерените закономерности при фотоефекта. За краткост ще се ограничим само с качествени разсъждения върху трудностите, които изпитва класическата физика при обяснението на закономерностите на фотоефекта.

Задържащото напрежение и червената граница би трябвало да зависят от интензитета на светлината, а не от честотата ν ; с намаляване на интензитета на светлината би трябвало да намалява енергията, с която електроните напускат метала, следователно и задържащото напрежение и под някаква критична стойност на интензитета електроните няма да натрупат необходимата им енергия и няма да напускат метала. Освен това колкото интензитетът на светлината е по-малък, би трябвало да расте времето за „натрупване“ на енергия от електроните и да се появи интервал между падането на светлината и излизането на електроните, което е в противоречие с опита.

Невъзможността на класическата физика да обясни фотоефекта е доказана по безспорен начин и показва необходимостта от привличането на нови идеи. Такава нова идея върху природата на светлината вече е изказана от Планк във връзка с топлинното излъчване и Айнщайн я използва за обяснение на фотоефекта. Според него светлината не само се излъчва на порции, на кванти, но тя се разпространява и поглъща на порции, т.е. дискретността е в природата

на светлината и тя се проявява при излъчването, разпространето и поглъщането ѝ. Освен това той приема, че при фотоефекта в сила законът за запазване на енергията (този закон е докато макроскопични мащаби и валидността му в микросвета е по-голяма на проверка). Записът на закона за запазване на енергията при фотоефекта е известен като уравнение на Айнщайн:

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + A.$$

Енергията на фотона $h\nu$ се изразходва за извършване на определена работа A за отделяне на електрона от повърхността на металната катода, а остатъкът електронът отнася като кинетична енергия. Между класическите и квантовите представи за светлината може да се направи, ако освен пропорционалност между енергията на фотона и честотата на вълната, $E = h\nu$, се приеме още пропорционалност между интензитета на светлината и броя на фотоните.

От квантовите представи за светлината обяснението на фотоефекта е много естествено:

1. Интензитетът на светлината е пропорционален на броя на фотоните, които падат върху катода за единица време, респективно на броя на избитите електрони, които пък определят големият наситения ток.

2. Уравнението (6.2.2) може да бъде записано чрез задържаното напрежение в следния вид:

$$h\nu = eU_3 + A,$$

и представлява непосредствено вторият закон при фотоефекта.

3. Червената граница на фотоефекта се свързва непосредствено с отделителната работа на катода, $h\nu_0 = A$ при $mv^2/2 = 0$.

4. Електроните не натрупват енергия от светлинните вълни, а поглъщат изцяло и едноактно фотона, поради което няма забавяне и замедление на електроните след падането на светлината на катода.

Това развитие на квантовата идея на Планк и обяснение на фотоефекта донесат Нобелова награда на Айнщайн.

6.2.3. Опитна проверка на хипотезата на Айнщайн

Същността на тази хипотеза е, че светлината представлява поток от особени частици, наречени по-късно фотони, които са корпускуларни, и вълнови свойства. Както казахме, тя е в пълно противоречие с класическите представи за светлината, налага още по-многогранна опитна проверка на следствията.

Миликън прецизно проверява линейната зависимост между честотата и задържащото напрежение в (6.2.3), което може да се запише във вида

лъчи падат върху фолиото и според принципа на Хюйгенс и Френел всички частици на фолиото стават източници на нови вълни. Поради малките размери на фолиото може да го разглеждаме като точков източник, от който във всички посоки се разпространяват сферични вълни. Тези вълни ще достигат едновременно двата брояча и върху барабана ще се появяват винаги двойка белези, разположени един срещу друг.

По квантовия сценарий възбудените атоми на фолиото излъчват фотони спонтанно и независимо един от друг, така както независимо се възбуждат. При условията на опита (слаб интензитет на рентгеновите лъчи и малки размери на фолиото) вероятността едновременно да се излъчат два фотона и те да попаднат в двата брояча е пренебрежимо малка. Най-често излъчените фотони ще попадат или в единия, или в другия брояч с еднаква вероятност и белезите върху барабана няма да са групирани по двойки.

Опитът потвърждава втория сценарий, т.е. светлината има дискретна структура и фотоните съществуват като реални частици на светлината.

6.2.4. Фотони

Фотоните са частици на светлината, на електромагнитното поле, и те силно се различават от обикновените частици на веществото – електрони, протони, неутрони и др. Последните са градивни елементи на атомите и молекулите, а фотоните се излъчват от атомите и молекулите, без да се съдържат в тях в готов вид.

Фотоните приличат на обикновените частици по това, че като тях имат енергия E , маса m и импулс p :

$$E = h\nu;$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2};$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Но те и съществено се различават от тях. Те нямат маса в покой, т.е. те могат да съществуват само в движение, и то със скорост, равна на скоростта на светлината. За частиците на веществото, които могат да се намират и в покой, тази скорост е недостижима.

Въвеждането на фотоните сякаш внася „помирение“ между корпускулярната и вълновата теория за светлината. Светлината се разглежда като поток от частици, но не корпускули на Нютон, а такива, които притежават и вълнови свойства подобно на електромагнитните вълни, но в по-голяма степен от тях са локализиращи

в пространството. Тази двойственост в свойствата им – корпускулярни и вълнови – е характерна за всички микрочастици на полето и на веществото и няма аналог в света на макротелата. Това прави тази идея трудна за възприемане дори за основоположниците на модерната физика: „Безкрайните размисли през последните 50 години ни на йота не ме приближиха до отговора на въпроса: какво е това светлинен квант? В наши дни всяко момче си въобразява, че знае отговора. Но то дълбоко се заблуждава.“ (Айнщайн, 1951 г.)

6.3. ЕФЕКТ НА КОМПТЪН

Комптън установява, че част от разсеяните рентгенови лъчи от леки вещества (парафин, графит и др.) имат дължина на вълната, по-голяма от тази на падалите. Според класическата теория при разсейването на вълните е възможно само изменение на интензитета им, т.е. на амплитудата, но не на дължината на вълната. От тази позиция ефектът на Комптън не може да бъде обяснен. За нарастването на дължината на вълната опитно е получена зависимостта

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (6.3.1)$$

където m е масата на електрона в покой, а φ е ъгълът на разсейване на рентгеновите лъчи. Както се вижда, изменението на дължината на вълната не зависи нито от стойността λ , нито от веществото, върху което се разсейват лъчите.

При падане на светлината върху вещество са възможни поглъщане на светлината, съпроводено с избиране на електрони (фотоефект), или разсейване на светлината с изменение на дължината на вълната (комптънов ефект) и разбира се, класическото разсейване и поглъщане на светлината, свързано единствено с изменение на интензитета на светлината. Кога е възможен фотоефект и кога комптънов ефект? При взаимодействие на светлината със свързани електрони тя може да се поглъща и се наблюдава фотоефект, а при взаимодействие със свободни електрони тя може само да се разсейва и е възможен комптънов ефект. Това твърдение може да породи недоразумение, тъй като фотоефект се наблюдава при взаимодействието на светлината със свободните електрони в метала. Дали една частица е свободна или свързана зависи от съотношението между енергията на свързване и енергията на външното въздействие; когато енергията на свързване е значително по-голяма от енергията на външното въздействие, частицата е свързана, а в обратния случай е свободна или квазисвободна. Свободните електрони в метала са само условно свободни, в смисъл че могат свободно да се преместват в обема на метала. Иначе те се намират в потенциална яма, дълбочината на която се измерва с отделителната работа на метала. Енергията на фотоните, които падат върху метала, е от порядъка на отделителната работа и следователно тези електрони са свързани. Електро-

ните от ниските слоеве са силно свързани с ядрото, а валентните електрони са слабо свързани, тъй като са на голямо разстояние от ядрото и освен това останалите електрони „екранират“ ядрото. Валентните електрони го „виждат“ с по-малък заряд. Енергията на връзката на валентните електрони е равна на йонизационната работа и е няколко електронволта. При облъчване на веществото с високоенергетични рентгенови лъчи („твърди“ рентгенови лъчи) тези електрони изглеждат почти свободни и е възможен комптънов ефект. Казаното е в сила за валентните електрони на всички вещества, но при леките вещества относителният дял на слабо свързаните електрони е по-голям и комптънов ефект се наблюдава по-често.

Ще покажем, че е невъзможно свободен електрон да погълне фотон. Такъв процес е забранен от законите за запазване на енергията и импулса.

Нека допуснем, че е възможен такъв процес и за него запишем законите за запазване на енергията и импулса:

$$h\nu + mc^2 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2};$$

$$\frac{h\nu}{c} + 0 = p.$$

От дясната страна на първото равенство е енергията, която носи електронът след поглъщането на фотон, записана в релативистична форма, а p е полученият от електрона импулс. След заместване във второто равенство в първото получаваме последователно

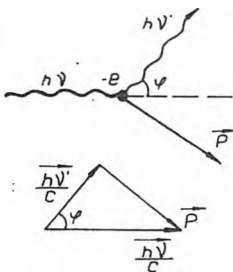
$$cp + mc^2 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2};$$

$$m^2c^2 + p^2 + 2mcp = p^2 + m^2c^2;$$

$$2mcp = 0.$$

Достигаме до абсурден резултат – величини отляво на нулевото равенство са различни от нула. Причината за това е, че законите са приложени за процес, който не съществува.

Комптъновият ефект има естествено обяснение, когато разглеждаме рентгеновите лъчи като поток от фотони. При взаимодействие с квазисвободните електрони фотоните им отдават част от енергията си, и се разсейват еластично, при което енергията и честотата на разсеяните фотони намаляват, а дължината на вълната им расте. Когато разглеждаме от този механизъм на взаимодействие, можем да изведем формулата на Комптън (6.3.1).

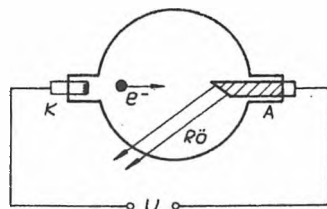


Фиг. 6.7

6.4. РЕНТГЕНОВИ ЛЪЧИ

6.4.1. Получаване и свойства

Немският професор Рентген открива особен вид енергетични лъчение, което той нарича X-лъчи, и с това име те се назовават досега в много страни. Те се получават в рентгенова тръба, която след малка модификация е добила съвременния си вид и е показана на фиг.6.8 (тръба на Кулидж).



Фиг. 6.8

Нагрят катод е източник на електрони, които се ускоряват от полето между катода и анода, между които се подава напрежение няколко десетки киловолта. Рентгеновите лъчи се излъчват от анода при падане на електроните върху него. Рентгенови лъчи, получени при напрежение катод-анод до около 40 kV, се наричат „мекки“, а при по-високи напрежения, до около 200 kV, се наричат „твърди“.

Много небесни тела интензивно излъчват рентгенови лъчи, от които се черпи информация за тях. Такова лъчение достига до Земята от високотемпературната плазма на Слънцето. Планетите също излъчват, когато върху тях падат протонни потоци, особено в периодите на слънчева активност.

Рентгеновите лъчи имат многостранно приложение в науката и практиката благодарение на особените си свойства. Сред тях на първо място е високата им прониквателна способност, която е обратнопропорционална на плътността на материала, през който преминават. По този начин те разширяват възможността на човека да „вижда“ и вътре в телата, където видимата светлина се поглъща напълно. Това им свойство е в основата на диагностиката и дефектоскопията. Рентгеновите лъчи имат голяма енергия и се използват за йонизация на газове в експериментални и промишлени установки. Не на последно място е биологичното действие на рентгеновите лъчи; при взаимодействие с живите клетки те променят биологичните им функции и това може да нанесе поражение на организма или да спре развитието на злокачествени образувания (рентгенова терапия).

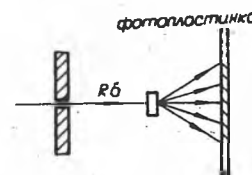
6.4.2. Дифракция на рентгенови лъчи

Откриването на рентгеновите лъчи става във време, когато лъчите са били на мода във физиката: катодни лъчи, които се излъчват от катода в тръби с разреден газ, анодни лъчи, излъчвани от анода в същите тръби, радиоактивни лъчения от нестабилни ядра и др. При изучаването им е било установено, че не се отклоняват в

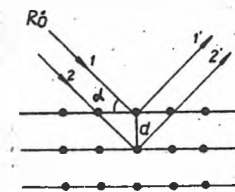
електрично и магнитно поле и следователно не са поток от електрически заредени частици, но подобно на тях те имат голяма йонизираща способност. Те не могат да бъдат поток от електрически неутрални частици, тъй като имат голяма йонизираща способност, но подобно на тях те имат голяма прониквателна способност. Друга възможност е да бъдат електромагнитни вълни, т.е. поток от фотони с голяма енергия. Това твърдение може да се приеме, ако се наблюдава дифракция на рентгенови лъчи, което е характерно явление за вълновите процеси.

Опитите за наблюдаване дифракция на рентгенови лъчи от дифракционна решетка, използвана при видимата светлина, са неуспешни повече от 15 години. Причина за това на езика на вълновата оптика е много малката дължина на вълната на тези лъчи. Съгласно формула (5.2.5) броят на откритите френелови зони от отворите на решетката е много голям, поради което дифракцията е незначителна и са в сила законите на геометричната оптика. Дифракция на рентгенови лъчи е наблюдавана за първи път от Лауе и сътрудниците при заменяне на оптичната дифракционна решетка с кристална решетка, чиято константа на решетката е много малка. Опитната постановка е показана схематично на фиг.6.9.

Сноп рентгенови лъчи пада на тънка кристална пластинка, а дифракционната картина се регистрира от фотопластинка, поставена след нея. Тя предствалва подредени в концентрични кръгове светли и тъмни петна, каквито се наблюдават при дифракция на светлина от кръгъл отвор. Получената дифракционна картина се нарича лауеграма, а този метод за получаване на рентгенова дифракция се използва и сега в рентгеноструктурния анализ.



Фиг. 6.9



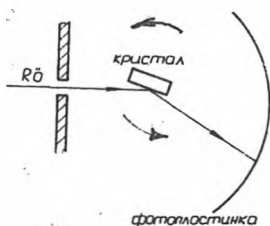
Фиг. 6.10

Друг метод за наблюдаване на рентгенова дифракция е предложен от Брег и Вулф. Същността му е илюстрирана на фиг. 6.10. Върху гладка повърхност на кристал пада успореден сноп рентгенови лъчи под ъгъл α и се разсейва във всички посоки (α не е ъгълът на падане, а неговият допълнителен до $\frac{\pi}{2}$). Показани са само лъчите 1' и 2' в посока на огледалното отражение. Те са успоредни и ще интерферират. От фигурата се вижда, че разликата в оптичните им пътища е $\Delta = 2d \sin \alpha$. Условието за усилване е $\Delta = k\lambda$, $k = 1, \dots$ Сле-

дователно условието за наблюдаване на дифракционен максимум е равенството

$$2d \sin \alpha = k\lambda; \quad 2d\alpha = k\lambda.$$

Тази връзка е известна като условие на Брег и Вулф. В него участват дължината на вълната, която е характеристика на вълната, и константата на решетката, която характеризира кристала. По измерването на едната позволява да се определи другата при измерване на ъгъла, под който се наблюдава максимумът.



Фиг. 6.11

Нека разгледаме принципа на работата на рентгенов спектрограф, показан на фиг.6.11. Рентгеновите лъчи се разяват от пластинка и дифракционната картина се регистрира от фотопластинка. При това кристалът може да се върти около ос, перпендикулярна на картината. С помощта на този уред могат да се решават следните два класа задачи:

1. Върху познат кристал (известна е константата на кристалната решетка) пада рентгенов сноп, който съдържа различни дължини на вълните. При измерването на кристала условието на Брег

Вулф ще се изпълнява за различни дължини на вълните и на фотопластинката ще се регистрират съответстващите на тях максимуми, т.е. снопът ще бъде разложен спектрално по дължини на вълните в него. Това е принципът на рентгеновия спектър анализ.

2. Ако върху неизвестен кристал пада монохроматичен рентгенов сноп с известна дължина на вълната, то от анализа на регистрираните максимуми върху фотопластинката може да се получи информация за структурата на кристала, т.е. за константата на дифракционната решетка. Това е принципът на рентгено-структурен анализ.

6.4.3. Рентгенови спектри

Спектралното разпределение на интензитета на рентгеновото излъчване, получено опитно, е показано на фиг.6.12. Това разпределение може да се разглежда като резултат от наслагването на два спектъра: непрекъснат спектър, който „стръмно“ започва от началото, и линеен спектър, който се състои от многобройни линии и появява, когато значително се повиши напрежението на рентгеновата тръба. Същественото външно различие между двата спектъра е това, че те възникват по различни механизми.

а) *Непрекъснат спектър*. Този спектър не е характерен за веществото на анода, рязко се прекъсва от страната на малките дължини на вълните и опитно е установена обратна пропорционалност на λ^{\min} и напрежението на тръбата U :

$$\lambda^{\min} \sim \frac{1}{U}. \quad (6.4.2)$$

Когато електроните падат върху анода, те рязко намаляват скоростта си. Поради взаимодействието със свободните електрони и металната решетка на анода. Всеки ускорено движещ се електричен заряд излъчва електромагнитни вълни. Следователно спиращите електрони излъчват спирачното рентгеново лъчение, което не зависи от веществото на анода.

Част от енергията на бързите електрони се изразходва за излъчване на рентгенов фотон с енергия $h\nu$, а останалата част се предава на металната решетка и загрева анода. За процеса на излъчване на спирачното рентгеново лъчение законът за запазване на енергията се записва със следното равенство:

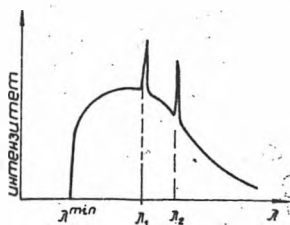
$$\frac{mv^2}{2} = h\nu + W, \quad (6.4.3)$$

където W е енергията, отдадена на метала. Разпределението на енергията между фотона и металната решетка има случаен характер, т.е. $0 < W < mv^2/2$, поради което излъченият спектър е непрекъснат. Рентгеновият фотон има максимална енергия, когато $W = 0$, и този фотон се намира на лявата граница на спектъра, показан на фиг. 6.12. За дължината на вълната на тези фотони може да получим

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= h\nu^{\max}, \\ \nu^{\max} &= \frac{c}{\lambda^{\min}}; \frac{mv^2}{2} = eU; \\ eU &= \frac{hc}{\lambda^{\min}}; \lambda^{\min} = \frac{hc}{eU}. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

При увеличаване приложеното напрежение на тръбата рязката граница на спирачното лъчение трябва да се премества наляво, което е в съгласие с опита.

б) *Линейен спектър*. Опитно е установено, че линейният спектър е характерен за веществото на анода и се състои от малък брой интензивни линии, групирани в серии. Спектрите от различните



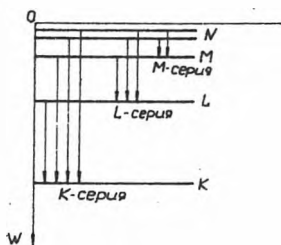
Фиг. 6.12

елементи са еднотипни, като се различават по отместването си по-късите дължини на вълни, когато се увеличава атомният номер Z на елемента. Тази закономерност е била установена опитно и снена от Мозли и е известна като закон на Мозли

$$\sqrt{\nu} = a(Z - b), \quad (6)$$

където константите a и b са различни за различните серии.

Обяснението на тези закономерности и свойства е изведено от позициите на съвременните представи за строежа на веществото и за квантовата природа на светлината. При падането на електрон с голяма енергия върху анода някои от тях проникват във вътрешността на електронната обвивка на атомите и могат да „изблъскат“ някой от електроните от ниските слоеве или да го „издигнат“ по-високо енергетично ниво. И в двата случая атомът е възбуден и се връща в основното си състояние, като запълва освободеното място с електрони от по-високите слоеве, при което се излъчват или повече рентгенови фотони, както е показано на фиг.6.13.



Фиг. 6.13

Както се вижда, характеристичното рентгеново лъчение се излъчва същия механизъм, с който се излъчват нейните спектри на видимата и ултраолетовата светлина, които също са характерни за атома. Видимата светлина се излъчва от валентните електрони, които са слабо свързани в атома, и затова енергията на излъчените фотони е малка. Обратно, рентгеновите фотони се излъчват от електроните от по-ниските слоеве, които са силно свързани с ядрото и затова имат по-голяма енергия.

кретният характер както на едните, така и на другите спектри е отражение на дискретния спектър на разположените енергетични състояния на електроните в атома. Структурата на вътрешните електронни слоеве за тежките елементи са много близки, което обяснява сходството в техните рентгенови спектри на различни серии. Отместването им към по-малките дължини на вълни при увеличаване на поредния номер на елемента, изразено със закон на Мозли, е резултат от засилване на връзката на електроните с ядрото, а оттам и по-голямата им енергия.

6.4.4. Приложение на рентгеновите лъчи

Приложението им е многостранно и може да се групира в зависимост от свойствата на рентгеновите лъчи, които лежат в основата на тях.

а) *Биологично действие.* То е резултат от йонизиращото действие

процеси, се наблюдават и при електромагнитните вълни в целия им спектър. При това с нарастването на честотата на лъчението тези явления се наблюдават по-трудно, което показва, че вълновите свойства на лъченията са по-слабо изразени. Например дифракцията на радиовълните в диапазона на дългите вълни е толкова силна, че те практически достигат всички точки зад преградите, което ги прави незаменими в навигацията. Дифракцията е много по-слаба още при късите и ултракъсите радиовълни, разпространението на които се съпътства от радиосенки от по-големи прегради на пътя им. Тези явления доказват вълновите свойства на електромагнитното лъчение и тяхното отслабване при увеличаване на честотата (енергията) им.

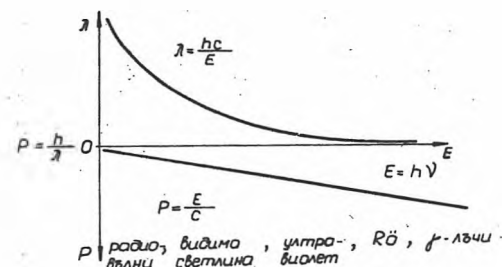
Друга група явления, свързани главно с взаимодействието на електромагнитните вълни с веществото, като топлинно излъчване, фотоефект, комптънов ефект и др., могат да бъдат обяснени само като се приеме, че лъчението има дискретна структура, т.е. представлява поток от особени частици, наречени фотони. Те са носители и на вълновите, и на корпускулярните свойства на светлината. Количествената връзка между тези свойства на фотоните е изразена в зависимостта на импулса p (типична характеристика на частиците) и дължината на вълната λ (характеристика на вълновите процеси)

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (6.4.6)$$

Ако приемем като количествена мярка за вълновите свойства на фотоните дължината на вълната λ , а за корпускулярните – импулса p , то изменението на тези свойства в зависимост от енергията на фотоните е показано на фиг. 6.14. Както се вижда от фигурата, с нарастване на енергията на фотоните отслабват техните вълнови свойства и все по-силно се проявяват техните корпускулярни свойства.

Така в първите десетилетия на нашия век се утвърди схващането, че електромагнитното лъчение, включително и видимата светлина, е сложен физичен обект, който притежава едновременно и корпускулярни, и вълнови свойства. Това свойство е известно под името корпускулярно-вълнов дуализъм в природата на електромагнитното лъчение. При това съотношението между корпускулярните и вълновите свойства се определя от енергията на лъчението; с увеличаването на енергията се засилват корпускулярните свойства и отслабват вълновите.

От позицията на това съвременно схващане за природата на светлината можем по-добре да разберем драматизма на съперничеството между корпускулярната и вълновата теория на светлината и победата на последната през миналия век. Основните експерименти са провеждани с видима светлина, при която вълновите свойства са все още силно изразени, а явленията, в които се проявяват корпускулярните свойства, са открити едва в края на миналия и началото



Фиг. 6.14

на нашия век. Освен това непознати са били и високоенергетичните лъчения като рентгенови и гама-лъчи, при които доминират корпускулярните свойства на електромагнитното лъчение.

Корпускулярно-вълновият дуализъм не е просто „помирение“ между вълни и частици, които в класическата физика имат несъвместими свойства, а решителна крачка към по-задълбочено познаване на електромагнитното лъчение и единно описание на неговите свойства. Изказана е хипотезата, че дуализмът, открит при лъчението, има универсален характер, т.е. корпускулярни и вълнови свойства притежават и частиците на веществото, такива като електрони, протони и др. Развитие на тази идея довежда до създаването на квантовата механика и цялата квантова физика.

КВАНТОВА МЕХАНИКА

7.1. УВОД

Изследванията на взаимодействието на електромагнитно излъчване с веществото, проведени в началото на нашия век късно и на атомните системи и елементарните частици по-късно, показват, че класическата механика и класическата електродинамика не са в състояние да обяснят свойствата на атомите, молекулите и елементарните частици – електрони, протони, неутрони и т.н., и взаимодействието им с електромагнитното излъчване.

Така например от опитите на Франк и Херц (1913 г.) следва, че физичната величина енергия, която характеризира състоянието на отделните атоми, има дискретен спектър, т.е. атомите могат да имат не всички, а само определени стойности на енергията. Също опитите на Щерн и Герлах дискретни стойности притежават величините магнитен момент и момент на импулса на атомите.

Дискретният спектър на величините, характеризиращи атомните системи, противоречи на представите на класическата механика. Съгласно тези представи всяко безкрайно малко възбуждане предизвиква безкрайно малко изменение на състоянието на атомната система. Следователно величините енергия, момент на импулса, които характеризират състоянието на системата, трябва да бъдат непрекъснати, а не дискретни, а непрекъснати стойности.

Самото съществуване на стабилни атоми е абсолютно несъвместимо от гледна точка на класическата физика.

Да разгледаме например най-простата атомна система – водородния атом, който се състои от един протон и един електрон. По класическите представи електронът се движи около протона по определена траектория, наречена орбита, която за простота ще считаме за кръгова. Съгласно закона на Кулон силата на взаимодействие между протона и електрона е от вида

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2},$$

където e е зарядът на електрона (и на протона), а r – разстоянието между тях. В случая кулоновата сила играе роля на центростре-

телна сила и следователно

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (7.1.1)$$

От тази формула, като се вземе предвид, че $r \approx 10^{-10}$ m, за скоростта на електрона v се получава $v \approx 10^6$ m/s. В такъв случай нормалното ускорение $a_n = \frac{v^2}{r}$ ще бъде от порядъка на 10^{22} m/s². Съгласно класическата електродинамика всеки електрон, движещ се с ускорение, излъчва електромагнитни вълни. В резултат на електромагнитното излъчване пълната енергия на електрона намалява и същият трябва да се приближи по спирала към ядрото. Лесно може да бъде изчислено, че такъв електрон би достигнал ядрото за време $\tau \approx 10^{-10}$ s, след което атомът трябва да прекрати своето съществуване, т.е. съгласно представите на класическата физика атомът не може да представлява устойчива система. Освен това при приближаване на електрона към ядрото се изменя непрекъснато неговото ускорение, а следователно и честотата на излъчваните електромагнитни вълни, т.е. електромагнитното излъчване трябва да има непрекъснат спектър, което е в пълно противоречие с експерименталните резултати.

Както е известно, в някои случаи светлината проявява вълнови свойства (явленията интерференция, дифракция, поляризация на светлината), а в други случаи – корпускулярни свойства (топлинно излъчване, фотоелектричен ефект, комптънов ефект, фотохимични реакции).

Двойствената корпускулярно-вълнова природа на светлината е абсолютно необяснима от гледна точка на класическите представи. Съгласно класическата механика частицата във всеки момент притежава напълно определени координати и скорост, т.е. тя е локализирана в пространството и при движението си описва някаква линия, наречена траектория. Такава частица ще наричаме по-нататък корпускула, за да я отличим от смисъла, който ще дадем на това понятие в квантовата механика. За вълната понятията координати и траектория губят всякакъв смисъл. Вълновият процес заема цялото пространство или част от пространството. Вълните притежават свойството да дифрактират и интерферират, което е немислимо за частиците. Изобщо от гледна точка на класическата механика представите за корпускули и вълни се изключват взаимно.

Отстраняването на тези противоречия и обяснението на основните физични свойства на атомите и молекулите стана възможно благодарение на създаването на една нова теория – квантовата механика, от редица забележителни физици на нашия век: Нилс Бор, Луи дьо Бройл, Вернер Хайзенберг, Ервин Шрьодингер, Волфганг Паули, Пол Дирак, Макс Борн.

Квантовата механика се основава на съвършено нови представи, формирането на които е съпроводено с отказването от редица

нагледни понятия и представи, широко използвани в класическа физика. Ние ще се спрем по-нататък на някои основни въпроси на нерелативистичната квантова механика, която изучава движението на частици със скорости, много по-малки от скоростта на разпространение на светлината във вакуум.

7.2. КОРПУСКУЛЯРНО-ВЪЛНОВИ СВОЙСТВА НА ЧАСТИЦИТЕ. ВЪЛНИ НА ДЪО БРОЙЛ

До създаването през 1923 г. на хипотезата за двойната корпускулярно-вълнова природа на частиците от Луи дьо Бройл е считало, че микрочастиците – атоми, молекули, електрони притежават само корпускулярни свойства. Корпускулярните свойства на тези частици се проявяват при взаимодействието им с други частици, при появяването и изчезването им. В такива случаи микрочастицата действа като едно пространствено локализирано цяло, например след проявяване на фотографска плака, поставена на един електронен сноп, се виждат множество тъмни точки, които са местата, в които електроните са си взаимодействували с атомите на плаката. Корпускулярните свойства на частиците се проявяват също така при преминаването им през камерата на Уйлстъун, която е напълнена с наситена пара. При преминаването си през камерата наелектризираните частици йонизират част от неговите атоми, а получените йони стават центрове на кондензация, в резултат на което се образува една видима следа на частицата, т.е. в случая можем да говорим за траектория на частиците, подобно на траекторията на корпускулите в класическата механика. Подобни следи оставят и в мехурчестите и искровите камери. Следователно микрочастицата се регистрира от някакъв уред, тя се проявява като локализирано неделимо цяло. Известно е също така, че от атомите могат да се отделят цяло число електрони, но не и части от електронът, т.е. електронът се проявява като неделимо цяло.

Луи дьо Бройл прави смелата хипотеза, че корпускулярният и вълновият дуализъм е характерен не само за фотоните, но и за микрочастиците.

Дьо Бройл предполага, че формулите

$$\epsilon = h\nu = \hbar\omega$$

и

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

които свързват енергията на фотона ϵ с кръговата честота ω и импулса на фотона \vec{p} с вълновия вектор \vec{k} , са валидни за всяка частица, т.е. на всяка частица с енергия W и импулс \vec{p} може да се съ

в класическата физика. Вълната на Дьо Бройл описва съгласно направената хипотеза движението на частицата, в смисъл че частица с енергия W и импулс p трябва да има поведението на една вълна с честота ω и вълнов вектор \vec{k} . Следователно такива частици би трябвало да могат да интерферират и дифрактират.

От (7.2.3) и (7.2.5) за дължината на вълната λ се получава

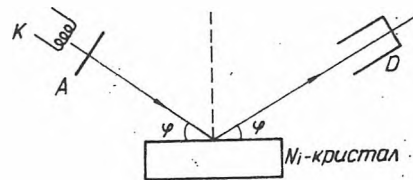
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW}}$$

За електрони, които се ускоряват в електрично поле между точки с потенциална разлика U , $W = eU$ и в този случай

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{1,225}{\sqrt{U}} \text{ nm.} \quad (7.2.7)$$

При $U = 100 \text{ V}$ $\lambda = 0,12 \text{ nm}$, т.е. тя е от порядъка на дължината на вълните на рентгеновите лъчи. Следователно дифракционна картина на такива електрони може да се получи по начина, по който се получава дифракционна картина на рентгенови лъчи, т.е. чрез използване на кристалната решетка на твърдото тяло като дифракционна решетка.

Хипотезата на Луи дьо Бройл за вълновите свойства на частиците е била потвърдена за първи път експериментално през 1927 г. от Дейвисън и Джермър, които получават дифракция на електрони при отразяване на електронен сноп от никелов монокристал. Използваният от тях метод е аналогичен на дифракция на рентгенови лъчи по метода на Вулф-Брег.



Фиг. 7.1

Схемата на опитната постановка е показана на фиг.7.1. Електрони, отделени от катода K чрез термоелектронна емисия, се ускоряват от електричното поле, създадено между катода K и анода A . Тесен моноенергичен сноп от електрони минава през отвора на анода и се отразява от никелов монокристал. Отразените електрони се регистрират от детектора D , представляващ цилиндричен електрод, свързан с гальванометър. Нека ъгълът φ (фиг.7.1) е постоянен, а се променя ускоряващото напрежение U между анода и катода. В такъв случай съгласно формула (7.2.7) се изменя дължината на вълната λ , която се съпоставя на движещите се електрони. Опитът на Дейвисън и

Джермър показва, че максимален брой отразени електрони се наблюдават при такива дължини на вълни λ_n , съответно стойности на U_n , за които е изпълнено условието на Вулф-Брег

$$\lambda_n = \frac{1}{n} 2d \sin \varphi \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.2.8)$$

където d е константата на кристалната решетка. Нека напрежението U между анода и катода остава постоянно, а се изменя ъгълът φ . Опитът показва, че и в този случай се получават максимуми в броя на отразените електрони за онези стойности на φ , за които е изпълнено условието на Вулф-Брег. Следователно Дейвисън и Джермър наблюдават опитно дифракция на електрони, аналогична на дифракцията на рентгенови лъчи при отражение от монокристал. Получените опитни резултати потвърждават верността на съотношението (7.2.7). Непосредствено след опитите на Дейвисън и Джермър Томсън и независимо от него Тартаковски установят също по експериментален път съществуването на вълнови свойства на електроните. Те пропускат електрони с енергия няколко десетки хиляди електронволта през тънка поликристална пластинка с дебелина от порядъка на 10^{-5} cm. Дифракционната картина, която се получава на фотографската плака, поставена зад пластинката, е напълно аналогична на картината, която се получава при дифракцията на рентгенови лъчи по метода на Дебай-Шерер, т.е. тя се състои от концентрично разположени интерференчни максимуми и минимуми.

Би могло да се предположи, че наблюдаваната в опитите на Дейвисън-Джермър и Томсън-Тартаковски дифракция на електрони дължи на обстоятелството, че през кристала едновременно преминават голям брой електрони и дифракционната картина представлява някаква тяхна колективна проява. През 1949 г. руските физици Шибрман, Сушкин и Фабрикант осъществяват прецизен опит, при който през поликристалната пластинка преминават последователно единични електрони. При пропускане по този начин на достатъчно голям брой електрони се наблюдава същата дифракционна картина, каквато се получава при обикновени интензитети на електронните снопове. По този начин е доказано експериментално, че вълновите свойства са присъщи на отделния електрон, но нагледно се проявяват при преминаването през дифракционната решетка на голям брой електрони.

През 1929 г. Щерн и сътрудниците му получават дифракция на атомни и молекулни снопове при отражението им от монокристали. Ако се приеме, че скоростта на частиците в снопа е равна на най-вероятната скорост при дадена температура T и се определи масата на отделната молекула по формулата $m = \frac{M}{N_A}$ (където M е моларната маса на веществото, а N_A - числото на Авогадро), от

(7.2.3) се получава

$$\lambda = \frac{h}{mv_n} = \frac{h}{\frac{M}{N_A} \sqrt{\frac{2RT}{M}}} = \frac{hN_A}{\sqrt{2RM T}}$$

Тогава при температура $T = 360$ К дължината на вълна присъща на водородните атоми, съгласно (7.2.9) ще бъде $\lambda = 0,9 \text{ \AA}$. Тези стойности на λ са съвместими с константите на кристалните решетки, което обуславя появата на дифракционна картина от такива атоми. Опитите и теоретичните доказателства доказват валидността на формулата на Дьо Бройл (7.2.3) за неутрални атоми и молекули.

Универсалният характер на формулата на Дьо Бройл е потвърдена по-късно и с опитите по дифракция на неутрони. Експерименталните изследвания показват, че всички микрообекти проявяват вълнови свойства, т.е. имат двойствена корпускулярно-вълнова природа. Независимо че съчетават свойствата на корпускули, микрообектите се отличават както от вълните, така и от корпускулите. Отличието от вълните се състои в това, че микрочастицата винаги се наблюдава като локализирано цяло на корпускулата. Отделната частица не може да дава само дифракционна картина, а попада в определена точка на фотоплака, поставена зад дифракционната решетка. За разлика от корпускулите областите на фотоплаката, в които попадат микрочастиците, се определят от свършено други закони, характерни за вълните, новите процеси, и понятието траектория на частицата загубва своя смисъл. С други думи, при попадането си върху дифракционната решетка микрочастицата се проявява като една вълна, която се разпространява едновременно през всички отвори на решетката. Следователно микрочастиците не са нито частици, нито вълни в класическия смисъл на тези думи; ние трябва да ги считаме като материални обекти за който нямаме нагледна представа.

Дифракцията на електроните се използва като метод за изследване структурата на веществата подобно на рентгено-структурния анализ. Този метод се нарича *електронография*. Поради прониквателна способност на електроните във веществото електронографията намира приложение главно при изучаване на повърхността на веществата, например при изучаване на корозията и катализа.

При един друг метод, наречен *неутронография*, се използва дифракцията на неутрони за изследване структурата на веществата съдържащи леки атоми, например водородосъдържащи органични кристали. В този случай поради ядреното взаимодействие на неутроните с водородните ядра разсейването на неутроните е по-силно отколкото разсейването на рентгеновите лъчи, и се получава по-ясно изразена дифракция на неутрони, отколкото дифракция на рентгенови лъчи.

на фотона в преминалия сноп. Следователно, за да се съгласуват вълновата и корпускулярната картина, трябва да се приеме, че поведението на отделния фотон може да се опише само *вероятностно*, при това квадратите от модулите на съответните амплитуди изразяват вероятността за намиране на фотона в отразения или преминалия сноп. Ние не можем да кажем дали даден фотон ще се отрази или ще премине през прозрачната пластинка. Ние можем само да определим с каква вероятност ще се получи единият или другият резултат.

До същия извод се стига, ако се разгледа явлението дифракция на микрочастици, например дифракция на електрони. Съгласно вълновата теория в резултат на интерференцията на вълни, идващи от различни отвори на дифракционната решетка (в случая ролята на дифракционната решетка играе тънка поликристална пластинка), върху поставения зад решетката екран се получават области, в които интензитетът на вълната е максимален, и области, в които интензитетът е минимален. Опитът показва, че максимален брой електрони попадат в областите с максимален интензитет на вълната. Следователно вероятността за намиране на частица в дадено място на пространството е пропорционална на квадрата от модула на амплитудата на вълната в това място.

Нека означим сега вълната, която описва движението на частицата, с $\psi(\vec{r}, t)$, където \vec{r} е радиус-векторът, съответстващ на различните точки от пространството, а t – разглежданият момент от времето. $\psi(\vec{r}, t)$ ще наричаме по-нататък *вълнова функция* на частицата. Ако частицата се движи свободно, вълновата функция съвпада с плоската монохроматична вълна на Дьо Бройл.

На основата на разглеждания, аналогични на дадените по-горе примери, през 1926 г. Макс Борн направи следната физична интерпретация на вълновата функция, потвърдена от целия по-нататъшен ход на развитие на квантовата механика. Вероятността dw за откриването на частицата в момента t в елементарния обем dV , съдържаща точка с радиус-вектор \vec{r} , е пропорционална на $|\psi|^2$ и на dV :

$$dw = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV. \quad (7.3.3)$$

Както се вижда от формула (7.3.3), физичен смисъл има не самата вълнова функция, а квадратът от нейния модул. Вълновата функция е изобщо комплексна величина, т.е. $|\psi|^2 = \psi\psi^*$, където ψ^* е комплексно спрегната величина на ψ . Величината $|\psi|^2 = \frac{dw}{dV}$ има смисъл на плътност на вероятността.

От физичния смисъл, който бе даден на $|\psi(\vec{r}, t)|^2$, следва, че трябва да бъде изпълнено условието

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1, \quad (7.3.4)$$

в което тройният интеграл се изчислява по цялото пространство.

Действително интегралът в (7.3.4) изразява вероятността за регистрирането на частицата в някакъв момент t в коя и да е точка на пространството, а това е вероятност на достоверно събитие, т.е. тя трябва да бъде равна на единица. Условието (7.3.4) се нарича *условие за нормировка* на вълновата функция.

Вероятността w за намиране на частицата в някакъв краен обем V в момента t съгласно теоремата за събиране на вероятностите ще бъде

$$w(V, t) = \int_V dw = \int_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV.$$

От (7.3.4) следва, че нормираната вълнова функция е определена с точност до множител, който има модул 1, т.е. с точност до множителя $e^{i\alpha}$, където α може да бъде произволна реална функция на координатите и времето.

Действително

$$\int |e^{i\alpha} \psi(\vec{r}, t)|^2 dV = \int |e^{i\alpha}|^2 |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = \int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1.$$

Тази нееднозначност на вълновата функция не се отразява на физичните резултати, тъй като, както ще видим по-нататък, физичните величини се определят от изрази, които съдържат $|\psi|^2$, а не самата вълнова функция ψ .

Трябва да се отбележи, че вероятностното описание на поведението на частиците не е следствие на нашето незнание за тяхното движение, а им е вътрешно присъщо. То отразява факта, че частиците проявяват както вълнови, така и корпускулярни свойства.

Така например движението на една свободна частица с маса в покой, отлична от нула, се описва с плоската монохроматична вълна на Дьо Бройл (7.2.4), която изобщо е разлята в цялото пространство, и въпросът, каква е координатата на частицата, е лишен от смисъл. В самия акт на взаимодействие на частицата с измерителния уред частицата проявява корпускулярни свойства и се локализира в дадена точка или в дадена област на пространството, т.е. придобива свойството да има координатата, като $|\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ ни дава вероятността за намиране на частицата в елементарния обем dV .

Вълновата функция, описваща движението на система от частици, се въвежда по аналогичен начин на вълновата функция, която се отнася за една частица. Нека например имаме система от N частици, които си взаимодействуват. На тази система ще съответствува вълнова функция $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t)$, като непосредствен физичен смисъл има величината $|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)|^2$, а именно

$$dw = |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)|^2 dV_1 dV_2 \dots dV_N, \quad (7.3.5)$$

където dw е вероятността в някакъв момент t първата частица намери в елементарния обем dV_1 , съдържащ точка с радиус-вектор \vec{r}_1 , втората – в обема dV_2 , съдържащ точка с радиус-вектор \vec{r}_2 .

Условието за нормировка на вълновата функция на системата от частици ще бъде

$$\int |(\psi(r_1, r_2, \dots, r_N, t))|^2 dV_1 \cdot dV_2 \dots dV_N = 1.$$

От (7.3.6) следва, че вълновата функция на системата от N частици не е нормирана в реалното тримерно пространство, а е нормирана в $3N$ -мерно пространство.

Ако имаме една система от невзаимодействащи помежду си частици, вероятността за намиране на i -тата частица в някакъв елементарен обем dV_i не зависи от вероятността за намиране на друга частица в обема dV_k и съгласно теоремата за умножение на вероятности формулата (7.3.5) добива вида

$$dw = dw_1 \cdot dw_2 \dots dw_N = |\psi_1(\vec{r}_1, t)|^2 dV_1 \dots |\psi_N(\vec{r}_N, t)|^2 dV_N$$

Следователно вълновата функция на системата от N невзаимодействащи частици ще бъде

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \psi_1(\vec{r}_1, t) \cdot \psi_2(\vec{r}_2, t) \dots \psi_N(\vec{r}_N, t).$$

7.4. СЪОТНОШЕНИЯ НА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

Независимо че микрочастиците по своята физична природа са материални обекти, които се различават значително от класическите частици (корпускулите), тяхното състояние може да се опише с известна степен посредством понятията и величините на класическата физика. Така например следите, които оставят на електронните екрани частици в камерата на Уйлсън и в междуръчестата камера дават основание в редица случаи, макар и с известно приближение, да прилагаме понятието траектория. Веднага следва да бъде поставен въпросът, в какви граници са приложими понятията на класическата физика при изучаване на физичните явления в микрочастиците. Този въпрос е съвсем естествено да се постави, тъй като в класическата физика съществуват понятия, които имат определени граници на приложимост. Така например понятието температура не е приложимо за отделните молекули. Оказва се, че класическите понятия като координати, импулс, момент на импулса и др. могат да се прилагат в квантовата механика в известни граници.

През 1927 г. В.Хайзенберг установява следните съотношения между компонентите на импулса и координатите на частиците, речени *съотношения на неопределеност*:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar,$$

подчертае, че съотношенията на неопределеност не изразяват нашето незнание на точните стойности на координатите и на импулса, а това, че тези величини не могат да имат едновременно определени стойности.

Следователно няма никакъв смисъл да се правят опити за едновременно определяне координатите и проекциите на импулса с по-голяма точност, отколкото допускат съотношенията на неопределеност.

Нека например предположим, че частицата е локализирана в някаква област с размери $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, т.е. неопределеностите на координатите на частицата са Δx , Δy , Δz . Това означава, че извън тази област трябва да бъде изпълнено условието $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = 0$. В такъв случай състоянието на частицата не може да се опише с плоска монохроматична вълна на Дьо Бройл, която изобщо е „разлята“ в цялото пространство, а трябва да се опише със система плоски вълни на Дьо Бройл с различни вълнови числа k и честоти ω и подходящо избрани амплитуди $A(k)$, така че при наслагването им да се получи $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = 0$ извън разглежданата област. Такава система от вълни няма да има определена честота и вълново число, а следователно и импулсът на частицата няма да има точно определена стойност - например може да се покаже, че проекцията му по направление на оста x ще има неопределеност $\Delta p_x \geq \frac{h}{\Delta x}$.

Нека сега предположим, че импулсът на частицата има точно определена стойност, т.е. $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = 0$. Тогава от (7.4.1) се получава $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \infty$, което означава, че координатите на частицата са напълно неопределени.

Действително движението на частица с определена стойност на импулса p се описва от плоската монохроматична вълна на Дьо Бройл

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Wt)}$$

Вероятността за намиране на частицата в елементарния обем dV ще бъде

$$dw = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = |A|^2 dV. \quad (7.4.2)$$

От (7.4.2) следва, че съществува еднаква вероятност за регистриране на частицата в коя и да е точка от пространството, тъй като $|A|^2$ не зависи от координатите. Следователно частица с точно определен импулс има напълно неопределени координати. Обратно, ако $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, от (7.4.1) се получава, че $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \infty$, т.е. импулсът на частицата ще бъде напълно неопределен.

На пръв поглед изглежда, че съществуването на следи на наелектризиращи частици в камерата на Уйлсън или във фотоемулсиите е в пълно съгласие с класическите представи за движение на частицата по определена траектория и е в противоречие със съотношенията на неопределеност. Това противоречие обаче е само привидно. Размерите на капките, които се образуват върху създадените

йони, дават точността, с която може да се регистрира на частицата в пространството. Размерите на капките са на 10^{-6} m и следователно неопределеността на координатата на частицата ще бъде от порядъка на 10^{-6} m. Тогава неопределеността на съответната компонента на импулса $\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-6}} = 10^{-28}$ (kg.m)/s. Ако частицата е $\approx 10^{-30}$ kg), неопределеността на компонентата на скоростта ще бъде $\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \approx \frac{10^{-28}}{10^{-30}} \text{ m/s} = 10^2 \text{ m/s}$. Скоростта, които оставят следи в камерата на Уйлсън, е обаче на $10^6 - 10^7$ m/s, т.е. $v_x \gg \Delta v_x$, и в този случай може с увереност да се говори за движение на частицата по определена траектория, с определена във всяка точка на тази траектория

а разгледаме движението на електрон в атом. В този случай неопределеността Δx в положението на електрона ще бъде от порядъка на размерите на атома, т.е. $\Delta x \approx 10^{-10}$ m, и за неопределеността на неговата скорост се получава $\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \approx 10^6$ m/s. От това следва, както видяхме, следва, че скоростта на електрона в атома е от порядъка на 10^6 m/s, т.е. $\Delta v_x \approx v_x$. Следователно не може да се говори за движение на електрона в атома по определена траектория с определена скорост.

Съотношението на неопределеност $\Delta x \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}$ следва, че за частици с голяма масата на частицата, с толкова по-голяма тогава се прилагат класическите понятия. Тъй като константата на Планк \hbar има много малка стойност, неопределеностите в позицията и скоростта стават пренебрежимо малки дори за атомни размери (но не атомни) размери и за такива частици могат да се прилагат законите на класическата механика. Нека например вземем, че неопределеността в координатата на частица с маса $m \approx 10^{-30}$ kg е $\Delta x \sim 10^{-8}$ m. В такъв случай неопределеността в скоростта ще бъде $\Delta v_x \approx 10^{-13}$ m/s и частицата практически момент ще има напълно определени стойности на позицията и скоростта.

Класическата механика съществува т.нар. принцип на съответствие, според който, ако се предположи, че ефектите, пропорционални на Планковата константа \hbar , могат да се пренебрегнат, т.е. ако $\hbar \rightarrow 0$, законите и съотношенията на квантовата механика се свиват в съответните закони и съотношения на класическата

механика. Ролята на \hbar в атомната и ядрената физика играе съотношение на неопределеност, което съществува между величините енергия

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar, \quad (7.4.3)$$

и време. Неопределеността на енергията в състояние, в което се намира за интервала време Δt . От (7.4.3) се вижда, че

неопределеността на енергията може да има значителна стойност, ако времето Δt е малко. Така например времето на живот на атома във възбудено състояние е $\tau \approx 10^{-8}$ s. На това време съответствува неопределеност на енергията $\Delta W \approx \frac{\hbar}{\tau} = 10^{-7}$ eV. В нормално състояние атомът може да се намира произволно дълго време, т.е. $\Delta t = \infty$, $\Delta W = 0$ и следователно нормалното състояние се характеризира с точно определена стойност на енергията. В такъв случай при преход на атома от възбудено в нормално състояние поради неопределеността на енергията в първото състояние не се излъчва спектрална линия със строго определена честота ν , а цял спектрален участък с ширина $\Delta\nu = \frac{\Delta W}{h}$. Величината $\Delta\nu$ се нарича *естествена ширина на спектралната линия*, съществуването на която е доказано експериментално.

От съотношенията на неопределеност се вижда, че понятията на класическата физика могат да се приложат към микрочастиците само в определени граници. Тогава възниква въпросът, защо поведението на микрочастиците трябва да се описва с помощта на класическите понятия, като например координата и импулс? Не е ли възможно да се въведат други величини, които да описват по-добре поведението на микрочастиците? Отговорът на последния въпрос е отрицателен. Необходимостта от въвеждане на класически понятия в квантовата механика се обуславя от следното обстоятелство: Изучаването на свойствата на микрочастиците е възможно благодарение на тяхното взаимодействие с макроскопските тела, наречени измерителни уреди, които изменят състоянието си в резултат на това взаимодействие. Измерителните уреди като макроскопски тела се подчиняват на законите на класическата физика и следователно техните показания могат да се изразят чрез термините на класическата физика, например чрез термините координата и импулс, но оттук следва, че и информацията за свойствата на микрочастиците се получава в същите термини. Следователно приложението на класическите понятия в квантовата механика е неизбежно.

7.5. УРАВНЕНИЕ НА ШРЪДИНГЕР

При описване движението на микрочастиците възниква важната задача да се намери такова уравнение, което да играе същата роля, каквато играе основното уравнение на движението в класическата механика (вторият закон на Нютон) $\vec{F} = m\vec{a}$. Както е известно, уравнението на Нютон дава възможност да се реши основната задача в механиката – по зададени сили, действащи върху тялото, и по определени начални условия (координатите и скоростта на тялото в началния момент) да се определят координатите и скоростта на тялото в кой и да е следващ момент. Като се вземе предвид, че съгласно съотношенията на неопределеност координатите и съответните проекции на скоростта не могат да имат едновременно напълно

За целта нека най-напред определим вида на диференциалното уравнение, чието решение е плоската монохроматична вълна на Дьо Бройл (7.5.1). За простота да разгледаме движението на частица в направление на оста x . В този случай (7.5.1) добива вида

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Wt)}. \quad (7.5.3)$$

Ако се диференцира (7.5.3) по времето t , се получава

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}W\psi,$$

или

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = W\psi. \quad (7.5.4)$$

При двукратно диференциране на (7.5.3) по координатата x ще имаме

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi. \quad (7.5.5)$$

Ако разделим двете страни на (7.5.5) на $2m$ (m е масата на частицата), ще получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m}\psi. \quad (7.5.6)$$

В случай на свободно движеща се частица енергията на частицата е само кинетична енергия и съгласно класическата механика

$$W = \frac{p^2}{2m}. \quad (7.5.7)$$

В такъв случай от (7.5.4), (7.5.6) и (7.5.7) следва

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (7.5.8)$$

Уравнението (7.5.8) се обобщава непосредствено за случая на движение на частица в тримерното пространство:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right),$$

или

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi. \quad (7.5.9)$$

ното уравнение представлява уравнение на Шрьодингер за движеща се частица, което има само комплексни решения (7.5.1), т.е. вълновите функции, които описват движението, са изобщо комплексни величини.

Сега разгледаме по-общия случай, когато частицата се намира в потенциално силово поле. Тогава пълната енергия на частицата класическата механика е

$$W = \frac{p^2}{2m} + U, \quad (7.5.10)$$

където W е кинетичната енергия, а U – потенциалната енергия на частицата. Ако се умножат двете страни на (7.5.10) с ψ , се получава

$$W\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + U\psi, \quad (7.5.11)$$

Ако приемем, че и в този случай (7.5.4) и (7.5.6) остават в сила, тогава

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi,$$

където ψ е вълновата функция на движеща се в тримерното пространство, ще имаме

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi,$$

където Δ е операторът на Лаплас. Това е уравнението на Шрьодингер (7.5.2), което бе въведено по-рано като постулат на квантовата механика.

От (7.5.2) следва, че видът на вълновата функция $\psi(\vec{r}, t)$ се определя от вида на потенциалната функция $U(\vec{r}, t)$, т.е. от характера на силите, които действуват върху частицата.

Уравнението (7.5.2) се нарича *временно (общо) уравнение на Шрьодингер*. То съдържа първата производна на $\psi(\vec{r}, t)$ по времето t . Втората производна на $\psi(\vec{r}, t)$ като решение на диференциалното уравнение (7.5.2) трябва да удовлетворява определени гранични условия, които зависят от характера на задачата, т.е. трябва да са определени стойности при дадени \vec{r} и t . Съществуват условни гранични условия, които се наричат *стандартни гранични условия*. Те са определени стойности при дадени \vec{r} и t . Съществуват условни гранични условия, които се наричат *стандартни гранични условия*. Те са определени стойности при дадени \vec{r} и t .

Вълновата функция трябва да удовлетворява при всички условия се наричат *стандартни гранични условия*. Те са определени стойности при дадени \vec{r} и t .

Вълновата функция трябва да бъде еднозначна функция на координатите \vec{r} и времето t . В противен случай плътността на вероятността $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ за откриване на частицата в съответното място в пространството няма да бъде еднозначно определена, а с това вълновата функция се лишава от своя физичен смисъл.

Вълновата функция трябва да бъде реална функция. Вълновата функция трябва да бъде реална функция. Вълновата функция трябва да бъде реална функция.

Вълновата функция трябва да бъде реална функция. Вълновата функция трябва да бъде реална функция. Вълновата функция трябва да бъде реална функция.

също така да бъде ограничена, т.е. да няма точки, в които тя да клоки към безкрайност. Стандартните гранични условия за непрекъснатост и ограниченост на $\psi(\vec{r}, t)$ се обуславят от обстоятелството, че вероятността за намиране на частицата в един или друг елементарен обем не може да се изменя скокообразно от точка в точка или да бъде безкрайно голяма. Вълновата функция трябва да бъде нормирана, т.е. трябва да бъде изпълнено условието (7.3.4):

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1.$$

В случай на стационарно потенциално поле, т.е. силово поле, което не се изменя с времето, потенциалната енергия U не зависи от времето. За такъв случай вълновата функция $\psi(x, y, z, t)$ може да се представи като произведение на две функции, едната от които зависи само от координатите, а другата – само от времето:

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z,)\theta(t). \quad (7.5.12)$$

Нека за простота разгледаме в началото едномерно движение на частицата по направление на оста x . Тогава уравнението на Шрьодингер (7.5.2) ще има вида

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi. \quad (7.5.13)$$

Ако положим

$$\psi(x, t) = \varphi(x)\theta(t) \quad (7.5.14)$$

и представим в (7.5.13) вълновата функция ψ чрез произведението $\varphi(x)\theta(t)$, ще получим

$$i\hbar \varphi(x) \frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \theta(t) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + U(x)\varphi(x)\theta(t).$$

Като разделим двете страни на последното уравнение на $\varphi(x)\theta(t)$, същото добива вида

$$i\hbar \frac{1}{\theta(t)} \frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + U(x). \quad (7.5.15)$$

Лявата част на уравнение (7.5.15) е функция само на t , а дясната – само на x . Тези две части могат да бъдат равни една на друга, ако поотделно са равни на една и съща постоянна величина. По-нататък ще бъде показано, че тази величина е пълната енергия на частицата и следователно от (7.5.15) се получава

$$i\hbar \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = W \quad (7.5.16)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + U(x) = W. \quad (7.5.17)$$

и движението на частицата в тримерното пространство произ-
 $\frac{d^2 \varphi}{dx^2}$ в (7.5.17) трябва да се замени с

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

уравнението добива вида

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi + U(x, y, z) \varphi = W \varphi$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi + (W - U) \varphi = 0. \quad (7.5.18)$$

Уравнение (7.5.18) се нарича стационарно уравнение на Шрьо-
 Неговото решение не зависи от времето (φ е функция само
 координатите x, y, z на точките от пространството).
 Ако се интегрира уравнението (7.5.16), се получава

$$\theta = \theta_0 e^{-i \frac{W}{\hbar} t}, \quad (7.5.19)$$

θ_0 е стойността на $\theta(t)$ в началния момент $t = 0$. (Ние можем
 да приемем $\theta_0 = 1$, без това да ограничава общността на наши-
 изчисления по-нататък.) Тогава съгласно (7.5.12) решението на
 уравнението на Шрьодингер ще бъде от вида

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) e^{-i \frac{W}{\hbar} t}. \quad (7.5.20)$$

Следователно зависимостта на пълната вълнова функция
 $\psi(x, y, z, t)$ от времето е хармонична, с честота $\omega = \frac{W}{\hbar}$. Вероятност-
 намиране на частицата в елементарния обем dV , съдържащ
 координати x, y, z , съгласно (7.3.3) и (7.5.20), ще бъде

$$dW = |\psi|^2 dV = |\varphi|^2 dV,$$

където вероятност не зависи от времето и се определя от фун-
 кцията $\varphi(x, y, z)$, която е решение на стационарното уравнение на
 Шрьодингер (7.5.18).

Стационарното уравнение на Шрьодингер се прилага за реша-
 ване на много задачи в квантовата механика, атомната физика и
 физиката на твърдото тяло, тъй като в много случаи вероятността

за регистриране на частицата в дадена област на пространството не зависи от времето. По-нататък, при разглеждането на редица физични явления, ние ще използваме само стационарното уравнение на Шрьодингер.

Ако в (7.5.18) означението на компонента $\varphi(x, y, z)$ на пълната вълнова функция $\psi(x, y, z, t)$ се замени с означението $\psi(x, y, z)$, стационарното уравнение на Шрьодингер добива вида

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + (W - U)\psi = 0,$$

или

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U)\psi = 0. \quad (7.5.21)$$

За изясняване физическия смисъл на величината W в стационарното уравнение на Шрьодингер (7.5.21) ще използваме аналогията, която прави Шрьодингер с вълновото уравнение от класическата физика. За случай на линейна вълна, разпространяваща се в посока на оста x , вълновото уравнение е от вида

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

където v е фазовата скорост на вълната. Решението на това уравнение е

$$\xi = A e^{i\omega(t - \frac{x}{v})}.$$

От горното уравнение след двукратно диференциране по x се получава

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A e^{i(\omega t - \frac{x}{v})} = -\frac{\omega^2}{v^2} \xi,$$

или

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \xi = 0. \quad (7.5.22)$$

Като имаме предвид, че $v = \nu \lambda$ и $\omega = 2\pi\nu$, уравнение (7.5.22) може да бъде представено във вида

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \xi = 0. \quad (7.5.23)$$

Идеята на Шрьодингер е, че вълновата функция трябва да представлява решение на вълново уравнение от типа (7.5.23). В такъв случай от сравнението на уравнения (7.5.21) и (7.5.23), които са от един и същ вид, се получава

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (W - U). \quad (7.5.24)$$

страна,

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = k^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2mW_k}{\hbar^2}. \quad (7.5.25)$$

и (7.5.25) ще имаме

$$\frac{2mW_k}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(W - U),$$

$$W = W_k + U.$$

елно константата W в стационарното уравнение на Шрьо- (7.5.21) има смисъл на пълна енергия на микрочастицата. теорията на диференциалните уравнения се доказва, че ура- г типа (7.5.21) имат решения, удовлетворяващи граничните в това число и стандартните гранични условия, изобщо не ки стойности на W , а само при определени стойности на чина, т.е. енергията на частицата се квантува. Следова- скретният характер на физичната величина енергия се явя- о естествен път като следствие от уравнението на Шрьо- Решението на стационарното уравнение на Шрьодингер, видим, дава възможност да се определят позволените стой- енергията и на други физични величини, характеризиращи ето на частиците.

йностите на енергията $W_1, W_2, \dots, W_i, \dots$, за които съще- решения на уравнението (7.5.21), удовлетворяващи грани- ловия, се наричат собствени стойности на енергията. В за- от вида на потенциална енергия $U(\vec{r})$ спектърът на соб- стойности може да бъде непрекъснат или дискретен.

всяка собствена стойност W_i съществува една или няколко функции $\psi_i(\vec{r})$, които са решения на (7.5.21) и удовлетворя- ячните условия. Тази функции се наричат *собствени въл- кции* или само *собствени функции*. Ако на дадена собствена W_i съответствуват n собствени функции, казваме, че тази а стойност е n -кратно изродена.

7.6. ЧАСТИЦА В БЕЗКРАЙНО ДЪЛБОКА ПОТЕНЦИАЛНА ЯМА

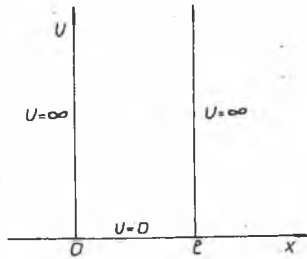
аването на уравнението на Шрьодингер обикновено изис- лзуването на сложен математически апарат. Ще се спрем ед на една по-проста задача, при което решаването на ста- то уравнение на Шрьодингер не представлява особен про-

а разгледаме движение на частица по направление на оста циално поле, в което потенциалната енергия на частицата

$U(x)$ има следния вид:

$$U(x) = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l, \quad (7.6.1)$$

$$U(x) = \infty \text{ при } x < 0 \text{ и } x > l,$$



Фиг. 7.2

т.е. на границата на интервала $[0, l]$ потенциалната енергия $U(x)$ става със скок безкрайно голяма (фиг.7.2). Потенциално поле, определено чрез условието (7.6.1), се нарича безкрайно дълбока правоъгълна потенциална яма. Оказва се, че с помощта на този прост модел могат да се получат редица резултати, които излизат извън рамките на модела, т.е. имат по-общ характер. Освен това моделът на потенциалната яма се използва с успех за по-грубо описание на редица системи, например електрони в метал или нуклони в ядро.

Стационарното уравнение на Шрьодингер (7.5.21) в разглеждания случай ще бъде от вида

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0. \quad (7.6.2)$$

От условието (7.6.1) следва, че частицата не може да се намира извън интервала $[0, l]$, тъй като, за да напусне границите на потенциалната яма, е необходимо да се извърши безкрайно голяма работа. Тогава вероятността за намиране на частицата, а следователно и вълновата функция $\psi(x)$ ще бъдат равни на нула извън този интервал. От условието за непрекъснатост на вълновата функция следва, че $\psi(x)$ трябва да бъде равна на нула и на границите на потенциалната яма ($x = 0$ и $x = l$), т.е.

$$\psi(0) = 0. \quad (7.6.3)$$

и

$$\psi(l) = 0. \quad (7.6.4)$$

Това са граничните условия, които трябва да удовлетворява решението на уравнението на Шрьодингер (7.6.2), описващо движението на частицата в потенциална яма.

В областта на потенциалната яма уравнение (7.6.2) добива вида

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mW}{\hbar^2}\psi = 0,$$

тъй като $U(x) = 0$ съгласно (7.6.1). Ако се положи

$$k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}, \quad (7.6.5)$$

получава се

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0. \quad (7.6.6)$$

Решението на уравнение (7.6.6), както е известно от теорията на хармоничното трептене, е

$$\psi(x) = a \sin(kx + \varphi).$$

То може да се представи лесно във вида

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

където A и B са константи. Стойността на B може да се определи с помощта на граничното условие (7.6.3). От граничното условие (7.6.3) се получава $B = 0$ и следователно решението на уравнението (7.6.6) ще бъде

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (7.6.7)$$

От граничното условие (7.6.4) следва

$$A \sin kl = 0. \quad (7.6.8)$$

Коефициентът $A \neq 0$, тъй като, ако $A = 0$, съгласно (7.6.7) $\psi(x) = 0$, но това означава отсъствие на частица и в потенциална яма, което противоречи на условието на задачата. Следователно $\sin kl = 0$, а това е възможно, ако

$$kl = n\pi, \quad (7.6.9)$$

където n е цяло число, по-голямо от нула, наречено квантово число ($n \neq 0$, тъй като при $n = 0$ $k = 0$ и следователно $\psi(x) = 0$).

Ако (7.6.9) се повдигне на квадрат и се вземе предвид, че $k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$ (7.6.5), се получава

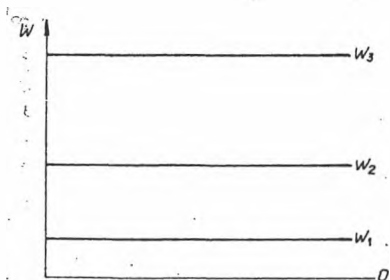
$$\frac{2mW}{\hbar^2} l^2 = n^2 \pi^2,$$

откъдето могат да се определят възможните стойности на енергията на частицата (собствените стойности на W):

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.6.10)$$

Последната формула показва, че уравнението на Шрьодер има решения, удовлетворяващи граничните условия не при всички стойности на енергията на частицата W , а само при определени стойности, т.е. W има *дискретен спектър*.

Схемата на позволените енергетични нива е показана на фиг.7.3.



Фиг. 7.3

Интересно е да се отбележи, че квантуването на енергията се получава по естествен път, а не се правят допълнителни предположения, както е в полукласическата теория на Бор. В случая дискретен спектър на енергията произтича непосредствено от граничните условия, които трябва да удовлетворява вълновата функция. Енергията на частицата с най-малка енергия се нарича *нормално основно състояние*, а всички останали състояния се наричат *вълновите състояния*. От (7.6.10) следва, че енергията на основното състояние е

$$W_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$$

По отношение на възможната най-малка енергия на частицата в потенциалната яма се проявява съществено различие между квантовата и класическата механика. Докато от гледна точка на класическата механика е възможно енергията на частицата в потенциална яма да бъде равна на нула, то съгласно квантовата механика енергията на частицата в потенциалната яма е винаги различна от нула. Следователно съгласно квантовата механика частиците в една кристална решетка, които могат да се разглеждат като частици в потенциална яма, няма да бъдат неподвижни при температура, равна на абсолютна нула, и ще извършват т.нар. „нулев трептения“, съществуването на които е доказано експериментално.

Нека сега определим посредством формула (7.6.10) разликата ΔW между две съседни енергетични нива ($\Delta n = 1$):

$$\Delta W_n = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n + 1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n. \quad (7.6.11)$$

Последната формула показва, че ΔW_n зависи от масата на частицата m и размера на потенциалната яма l . Така например за електрон с маса $m = 10^{-26}$ kg, движеща се в област с размери $l = 10^{-10}$ m,

разстоянието между съседните енергетични нива е

$$\Delta W_n \approx \frac{3,14^2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-68} \cdot n}{10^{-26} \cdot 10^{-2}} \approx 10^{-39} \cdot n \text{ J} \approx 10^{-20} \cdot n \text{ eV}.$$

Това разстояние е много малко и ние можем да считаме, че практически енергията на молекулата има непрекъснат спектър. Ако обаче размерите на потенциалната яма са от порядъка на $l \sim 10^{-10} \text{ m}$, т.е. от порядъка на атомните размери, и ако частицата е електрон ($m \approx 10^{-30} \text{ kg}$), от (7.6.11) се получава $\Delta W_n \approx 10^2 \cdot n \text{ eV}$. Следователно в този случай дискретният спектър на енергията ще се проявява съвсем ясно.

Собствените функции ψ съгласно (7.6.7) и (7.6.9) ще имат вида

$$\psi_n = A \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (7.6.12)$$

Константата A се определя от условието за нормировка на вълновата функция

$$\int_0^l |\psi_n|^2 dx = 1. \quad (7.6.13)$$

Като се има предвид, че

$$\int_0^l |\psi_n|^2 dx = |A|^2 \int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi n}{l} x \right) dx = |A|^2 \frac{l}{2},$$

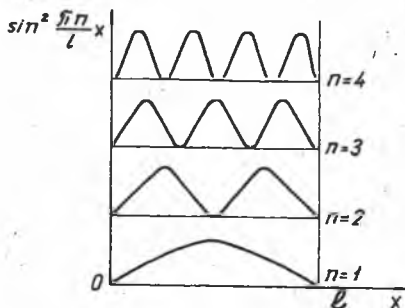
от (7.6.13) се получава

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Следователно собствените функции ще се дават с формулата

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В такъв случай вероятността за откриването на частицата в интервала $x, x + dx$ ще бъде



Фиг. 7.4

$$dW = |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{l} x \right) dx.$$

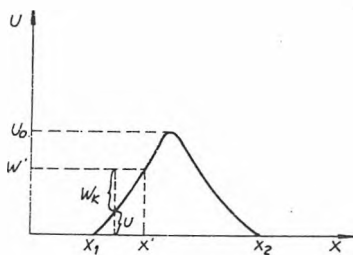
На фиг.7.4 са показани графиките на функциите \sin^2 (т.е. вероятността за намиране на частицата) за различни стойности на квантовото число n .

Тези графики показват още една съществена разлика изводите на класическата и квантовата механика. Според класическата механика частицата може с еднаква вероятност да се намери във всяка точка на потенциалната яма. Както се вижда от горните графики, вероятността за регистриране на частицата в различните точки на потенциалната яма е различна. Така например при $n = 2$ частицата не може да бъде намерена в средата на ямата. Този резултат е несъвместим с понятието траектория на частицата.

При увеличаване на квантовото число n (т.е. на енергията на частицата) максимумите в разпределението на вероятността се сближават и в граничния случай, когато $n \rightarrow \infty$, разпределението на вероятностите, получено при квантовомеханичното разглеждане, съвпада с разпределението на вероятността по класическата механика.

7.7. ПРЕМИНАВАНЕ НА ЧАСТИЦА ПРЕЗ ПОТЕНЦИАЛНА БАРИЕРА

Нека на частица, движеща се в положителната посока на x , действава силово поле, което може да бъде представено като потенциална бариера (фиг.7.5).



Фиг. 7.5

От фиг.7.5 се вижда, че частицата се намира под действието на силовото поле в ограничена област на пространството ($x_1 \leq x \leq x_2$), а извън тази област се движи свободно. Съгласно класическата механика, ако енергията W на частицата (равна на кинетичната енергия) е по-голяма от височината на потенциалната бариера ($W > U_0$), частицата ще премине през областта на потенциалната бариера, като в тази област ще се намали само нейната кинетична енергия. При $W = W' < U_0$ (фиг.7.5) частицата ще се отразави от бариерата и ще полети в обратна посока, т.е. тя няма да премине през бариерата. (При $W = W'$ частицата ще достигне до точка с координата $x = x'$, в която пълната ѝ енергия W става равна на нейната потенциална енергия, а кинетичната ѝ енергия W_k равна на нула, след което под действие на силовото поле ще започне да се движи в обратна посока.) Квантовомеханичното разглеждане води до съвсем други резултати. Както ще видим, съгласно квантовата механика при $W > U_0$ вероятността за отразаване на част

където $k_2' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W - U_0)}$ е имагинерно число, тъй като $W - U_0 < 0$.

Ако положим $k_2 = ik_2'$, където $k_2' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}$, от (7.7.5) ще получим

$$\psi_2(x) = A_2 e^{-k_2' x} + B_2 e^{k_2' x}.$$

Съгласно (7.2.4) свободното движение на частица в положителна посока на оста x се описва с плоската монохроматична вълна на Дьо Бройл $\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$, а в обратната посока – с вълната $\psi(x, t) = A e^{-i(kx - \omega t)}$. Като се изпусне в тези два израза зависимостта от времето (разглеждаме случай на стационарно потенциално поле), получава се съответно $\psi(x) = A e^{ikx}$ за частица, движеща се в положителна посока на оста x , и $\psi(x) = A e^{-ikx}$ – за частица, която се движи в обратна посока. Следователно в (7.7.3) и (7.7.4) $A_1 e^{ik_1 x}$, $B_1 e^{-ik_1 x}$ и $A_3 e^{ik_1 x}$ ще представляват съответно падащата вълна, отразената от потенциалната бариера вълна и вълната, преминала през потенциалната бариера. Тъй като в областта III съществува само преминалата вълна, която се разпространява в положителна посока на оста x , трябва в (7.7.4) да се положи $B_3 = 0$.

От стандартните гранични условия за непрекъснатост на вълновата функция и нейната първа производна на границите на потенциалната бариера:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0), & \psi_2(l) &= \psi_3(l), \\ \psi_1'(0) &= \psi_2'(0), & \psi_2'(l) &= \psi_3'(l), \end{aligned} \quad (7.7.6)$$

могат да бъдат определени отношенията $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_1}$ и $\frac{A_3}{A_1}$. (Намирането на стойностите на тези коефициенти няма да бъде предмет на нашето разглеждане.)

Отношението на интензитетите на отразената и падащата вълна $R = \frac{I_{отр.}}{I_{пад.}}$ дава вероятността за отразяване на частицата от потенциалната бариера. Това отношение се нарича коефициент на отражение. Очевидно коефициентът на отражение R се определя по формулата

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2},$$

където $|B_1|^2$ представлява квадратът от модула на амплитудата на отразената вълна, а $|A_1|^2$ – квадратът от модула на амплитудата на падащата вълна.

Отношението на интензитетите на преминалата и падащата вълна

$$D = \frac{I_{пр}}{I_{пад}} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

дава вероятността за преминаване на частицата през потенциалната бариера и се нарича коефициент на прозрачност на бариерата.

видно коефициентите R и D са свързани чрез съотношени-

$$R + D = 1.$$

о се използва пресметнатата по (7.7.6) стойност на отно-
 $\frac{A_3}{A_1}$, може да се определи коефициентът на прозрачност D
 циалната бариера. В разглеждания случай на правоъгълна
 лна бариера за D се получава следната формула:

$$D = D_0 e^{-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}}, \quad (7.7.7)$$

D_0 е константа със стойност ~ 1 ;

m — масата на частицата;

l — ширината на потенциалната бариера.

Та формула показва, че коефициентът на прозрачност D
 г l , m и $U_0 - W$, като очевидно е най-силна зависимостта

случай на бариера с произвол-

същата може да се разгле-

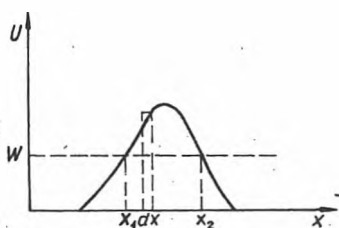
съвкупност от правоъгълни

ширина dx (фиг.7.7) и за ко-

на на прозрачност се получава

са

$$D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-W)} dx}$$



Фиг. 7.7

и x_2 са координатите на гра-

та потенциалната бариера за

стойност на пълната енергия (фиг.7.7), а $U = U(x)$. Явле-

еминаване на частица през потенциална бариера се нарича

тунелният ефект. Тунелният ефект може да се прояви при достатъчно

стойности на D . От (7.7.7) следва, че такива стойности на D

получат при $\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)} \approx 1$ и тогава $D \approx \frac{1}{e}$.

Това условие и изпълнено например, ако ширината на бари-

ера е от порядъка на атомните размери, частицата е електрон

($m \approx 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg) и $U_0 - W \approx 1$ eV.

От гледна точка на класическата механика тунелният ефект е

невъзможен, тъй като противоречи на закона за запазване на енер-

гията. Действително, ако пълната енергия е по-малка от височината

на бариерата, то в областта на бариерата, за която е изпълнено усло-

вие $U(x) > W$, кинетичната енергия W_k трябва да бъде отрицателна

формулата $W = W_k + U(x)$, а това е невъзможно. Трябва да

запомним, че тунелният ефект е специфично квантово явление,

което няма аналог в класическата физика. В квантовата механика

пълната енергия не може да се разглежда като сума от точно опреде-

ленности на кинетичната и потенциалната енергия, тъй като

това противоречи на съотношенията на неопределеност. Предполагаме, че кинетичната енергия $W_k = \frac{p^2}{2m}$ и потенциалната енергия $U(x)$ могат да имат едновременно определени стойности означава, че импулсът p и координатата x могат да имат едновременно точно определени стойности, което се изключва от съотношенията на неопределеност на Хайзенберг.

Ако частицата бъде регистрирана зад потенциалната бариера с ширина l и се приеме, че неопределеността $\Delta x \approx l$, то съгласно съотношенията на неопределеност неопределеността на нейния импулс ще бъде $\Delta p \geq \frac{\hbar}{l}$. Тази неопределеност на импулса обуславя неопределеност на кинетичната енергия

$$\Delta W_k = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ml^2} \quad (7.7.8)$$

От (7.7.7) при $D \approx \frac{1}{2}$ се получава

$$\begin{aligned} e^{-1} &\approx e^{-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}}, \\ 1 &\approx \frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}, \\ U_0 - W &\approx \frac{\hbar^2}{8ml^2}. \end{aligned} \quad (7.7.9)$$

Тогава от (7.7.8) и (7.7.9) следва, че

$$\Delta W_k > U_0 - W.$$

Следователно в резултат на измерването се получава неопределеност на кинетичната енергия ΔW_k , която е по-голяма от разликата между височината на потенциалната бариера U_0 и енергията на частицата W , т.е. в случая няма никакво нарушение на закона за запазване на енергията.

Чрез тунелния ефект се обясняват редица физични явления като студената емисия на електрони от метали, α -разпадането на радиоактивни ядра, контактните явления на границата между твърди тела и др. Нека например разгледаме явлениято студена емисия на електроните от метала. Това явление представлява отделяне на електрони от метала под действието на външно електрично поле. Експерименталните изследвания показват, че електроните се отделят от метала под действието на електрични полета, стотици пъти по-слаби от електричните полета, които би трябвало да се приложат, за да бъде преодоляна потенциалната бариера на границата метал – вакуум. Съгласно представите на квантовата механика в резултат на действието на външното електрично поле тази потенциална бариера

става по-тъсна и електроните се отделят от метала благодарение на тунелния ефект.

7.8. ЛИНЕЕН ХАРМОНИЧЕН ОСЦИЛАТОР

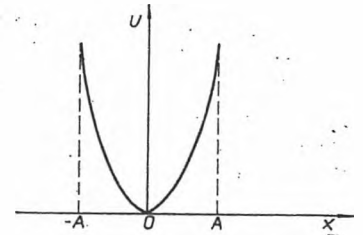
Линеен хармоничен осцилатор се нарича частица, която извършва хармонично трептене в едно направление. Както е известно, хармоничното трептене се извършва под действието на еластична или квазиеластична сила от вида $F = -m\omega^2 x = -kx$, където x е отклонението на частицата от равновесното положение, m – масата на частицата, а ω – собствената ѝ честота на трептене.

Моделът на хармоничния осцилатор има голямо значение във физиката, тъй като чрез него се обясняват редица физични явления. Например топлинните трептения на частиците, изграждащи кристалната решетка, се свеждат до система хармонични осцилатори. С помощта на този модел се обясняват явленията дисперсия на светлината, топлинно излъчване и др.

Потенциалната енергия на линеиния хармоничен осцилатор се дава с формулата

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \quad (7.8.1)$$

Зависимостта на потенциалната енергия от отклонението на хармоничния осцилатор от равновесното му положение е показана графично на фиг.7.8, където с A е означена амплитудата на трептене на осцилатора. Пълната енергия на хармоничния осцилатор е



Фиг. 7.8

$$W = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2.$$

Съгласно класическата механика пълната енергия W може да приема всяка една стойност.

Нека сега видим как се решава задачата за трептението на линеиния хармоничен осцилатор в квантовата механика. Както е известно, стационарното уравнение на Шрьодингер има вида

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0. \quad (7.8.2)$$

В разглеждания случай $\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2}$,

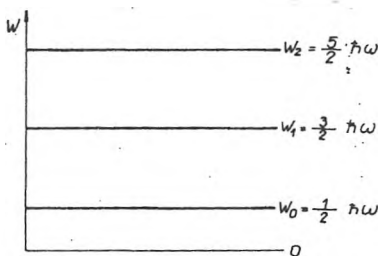
$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

и следователно уравнение (7.8.2) ще добие вида

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(W - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \psi = 0.$$

В теорията на диференциалните уравнения се доказва, че уравнение (7.8.3) има решения, удовлетворяващи стандартните гранични условия за непрекъснатост, еднозначност и ограниченост на всички стойности на енергията W , а само при определени стойности, които се дават с формулата

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$



Фиг. 7.9

Следователно енергията на осцилатора е квантувана, стойностите на W се определят от квантовото число n . Фиг.7.9 са представени графично част от позволените енергетични нива. Те са разположени на еднакво разстояние едно от друго.

Съгласно класическата механика най-малката енергия на осцилатора е равна на нула, т.е. осцилаторът не трепти, а остава в равновесно положение.

Това води непосредствено до извода, че при температура, равна на абсолютната нула, атомите в една кристална решетка, разглеждани в първо приближение като хармонични осцилатори (в слушайте примерни осцилатори), няма да трептят.

Квантовомеханичното разглеждане води до съвсем друг резултат. От (7.8.4) следва, че най-малката енергия на хармоничен осцилатор е $W_{min} = \frac{1}{2} \hbar\omega = \frac{1}{2} h\nu$, т.е. същата е отлична от нула. Извод на квантовата механика се потвърждава от съществуването на т.нар. „нулеви“ трептения на атомите.

Опитите по разсейването на светлината от кристали при ниски температури показват, че при $T \rightarrow 0\text{K}$ интензитетът на разсеяната светлина клони към някаква стойност, отлична от нула, която не зависи от по-нататъшното охлаждане на кристала. Това означава, че трептенията на атомите не се прекратяват при $T \rightarrow 0\text{K}$, тъй като разсейването на светлината се обуславя от тези трептения. Съгласно класическите представи при $T \rightarrow 0\text{K}$ се прекратява трептението на атомите и съответно разсейването на светлината.

Вълновите функции, които са решения на уравнение (7.8.3) за $n = 0, 1$ и 2 , са представени графично на фиг.7.10. От същата фи

се вижда, че броят на точките, в които вълновата функция става равна на нула, е равен на съответното квантово число.

Интересно е да се сравнят разпределенията по плътностите на вероятностите, получени в класическата и квантовата механика.

По класическата механика вероятността осцилаторът да се намира в координатния интервал $[x, x + dx]$ е

$$w_{кл} dx = \frac{dt}{\frac{1}{2}T}, \quad (7.8.5)$$

където dt е времето, за което осцилаторът се намира в участъка $x, x + dx$, а $T = \frac{2\pi}{\omega}$ е периодът на трептене на осцилатора. Като се има предвид, че $v = \frac{dx}{dt}$ е скоростта на хармоничния осцилатор, от (7.8.5) се получава

$$w_{кл} = \frac{\omega}{\pi v}. \quad (7.8.6)$$

Както е известно, големината на скоростта на осцилатора се дава чрез формулата

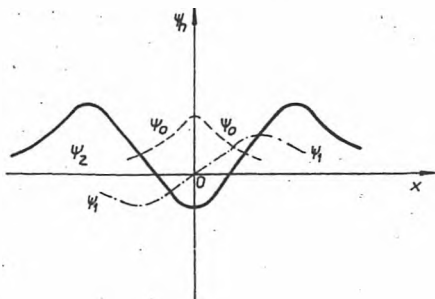
$$v = A\omega \sin \omega t = A\omega \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}. \quad (7.8.7)$$

От (7.8.6) и (7.8.7) следва

$$w_{кл} = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Плътността на вероятността $w_{кл}$ е изразена графично на фиг.7.11. От тази фигура се вижда, че минималната стойност на $w_{кл}$ съответствува на равновесното положение ($x = 0$), в което скоростта на класическия хармоничен осцилатор е максимална, и $w_{кл}$ нараства с приближаване към граничните точки $x = \pm A$, в които скоростта става равна на нула. На същата фигура е представена и плътността на вероятността $w_{кв}(x)$ при $n = 1$, получена в квантовата механика.

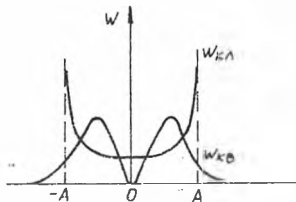
Както се вижда от разпределението по $w_{кв}(x)$, съществува отлична от нула вероятност за намиране на хармоничния осцилатор извън границите на интервала $[-A, A]$. Това обаче е невъзможно от гледна точка на класическата механика, тъй като в точките $x = \pm A$



Фиг. 7.10

потенциалната енергия на осцилатора става равна на неговата енергия, а кинетичната му енергия става равна на нула.

Изследванията показват, че при увеличаване на n раз между кривите $w_{кл}(x)$ и $w_{кв}(x)$ става все по-малка, т.е. при голями квантови числа n изводите на квантовата механика съвпадат с изводите на класическата физика. Този резултат изразява спомението на Бор за принципа на съответствието, установен от Бор.



Фиг. 7.11

В квантовата механика се допускат само такива преходи от едно енергетично състояние, при които квантовото число n се изменя с 1, т.е. изпълнено е условието

$$\Delta n = \pm 1.$$

Условието (7.8.8) се нарича *Планково правило*. От това правило следва, че енергията на хармоничния осцилатор може да се изменя само на порции $h\nu$. Този извод съвпада с предположението, което е направил Планк, когато получи известната формула за излъчвателната способност на абсолютно черното тяло.

7.9. ПРИНЦИП НА СУПЕРПОЗИЦИЯТА НА СЪСТОЯНИЯТА

Всяко решение на уравнението на Шрьодингер (7.5.2) описва едно възможно състояние на квантовомеханичната система. ψ_1 и ψ_2 са две решения на уравнението на Шрьодингер. Тогава ради обстоятелството, че уравнението на Шрьодингер е линейно диференциално уравнение всяка линейна комбинация $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, където c_1 и c_2 са произволни реални или комплексни коефициенти, също ще представлява решение на това уравнение. Следователно вълновата функция $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ определя също едно възможно състояние на системата. *Принципът на суперпозицията на състоянията* е обобщение на този резултат. Този принцип гласи: Ако квантовомеханичната система може да се намира в състояния, определени от вълновите функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, то суперпозицията на тези функции $\psi = \sum_{i=1}^n c_i\psi_i$ определя също едно възможно състояние на системата.

В квантовата механика се дава следното тълкуване на коефициентите c_i в израза $\psi = \sum_{i=1}^n c_i\psi_i$. Състоянието ψ едновременно съдържа състоянията $\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_n$. Ако се проведе опит, к

позволява да се отличат едно от друго тези състояния, то вероятността частицата да бъде регистрирана в състояние ψ_i се дава с $|c_i|^2$. В такъв случай очевидно трябва да бъде изпълнено условието

$$\sum_{i=1}^n |c_i|^2 = 1.$$

От принципа на суперпозицията се получава непосредствено едно важно следствие. Нека приемем, че когато частицата се намира в състояние ψ_i , физичната величина Q има стойност Q_i или, с други думи, нека на собствените стойности на $Q - Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ съответствуват собствените функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. В такъв случай в състоянието $\psi = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ микрочастицата ще се характеризира едно-

временно с всички възможни стойности на физичната величина Q , т.е. в това състояние величината Q няма определена стойност. Ако обаче проведем опит за определяне стойностите на физичната величина Q , ще получим една от стойностите Q_1, Q_2, \dots, Q_n , при това вероятността за получаване на стойността Q_i се дава с $|c_i|^2$.

Трябва да се отбележи, че за верността на принципа на суперпозицията и на направеното тълкуване на коефициентите c_i се съди от съвпадението на теоретичните изводи с опитните данни.

Ако знаем вероятностите за получаване на различните стойности на физичната величина Q при нейното измерване, можем да определим какъв ще бъде средният резултат, ако бъдат проведени голям брой измервания на тази величина. *Средната стойност* на Q ще се даде с формулата

$$\bar{Q} = \sum_i |c_i|^2 Q_i. \quad (7.9.1)$$

7.10 ОПЕРАТОРИ. СОБСТВЕНИ СТОЙНОСТИ И СОБСТВЕНИ ФУНКЦИИ НА ОПЕРАТОРИТЕ

Математическият апарат на квантовата механика – теорията на линейните оператори, е бил разработен още преди създаването ѝ. Ние ще разгледаме основите на тази теория и ще покажем по какъв начин с помощта на линейните оператори се решават задачите на квантовата механика.

Под оператор се разбира правило, по което на една функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на променливите x_1, x_2, \dots, x_n се съпоставя друга функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на същите променливи.

Операторите по-нататък ще се означават символично чрез буква с калпаче, например \hat{Q} . С помощта на този символ връзката между функциите f и φ може да бъде изразена по следния начин:

$$\hat{Q}f = \varphi,$$

т.е. в резултат на действието на оператора \hat{Q} върху функция f получава функцията φ . Така например, когато на функцията f съпоставя нейната първа производна по x , се казва, че върху функцията f действува операторът $\hat{Q} = \frac{d}{dx}$:

$$\varphi(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

т.е. в този случай операторът \hat{Q} символично се означава като $\frac{d}{dx}$. Действието на оператора \hat{x} върху функцията f се определя като умножение на функцията f по независимата променлива x :

$$\varphi = \hat{x}f = xf.$$

Операторът може да изразява също и умножение на функция f с някаква функция U . В такъв случай

$$\varphi = \hat{U}f = Uf.$$

В квантовата механика често се използва векторният диференциален оператор $\vec{\nabla}$ (набла). Компонентите на векторния оператор $\vec{\nabla}$ по направление на осите x, y и z символично се означава

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z},$$

или аналогично на векторните величини

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

където \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} са единичните вектори по направления на трите координатни оси. При действието на оператора $\vec{\nabla}$ върху скаларна функция f се получава

$$\vec{\varphi} = \vec{\nabla}f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Функцията $\vec{\varphi}$ е вектор с компоненти $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$. Този вектор нарича градиент от f и се означава чрез символа $\text{grad } f$.

Както вече бе отбелязано, операторът $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ нарича оператор на Лаплас. Прилагането на оператора на Лаплас върху някаква функция $f(x, y, z)$ означава намиране сумата от вторите производни на тази функция по координатите x, y, z .

Да приложим сега върху същата функция f оператора $\hat{B}\hat{A}$:

$$\hat{B}\hat{A}f = x \frac{df}{dx},$$

т.е.

$$\hat{B}\hat{A} = x \frac{d}{dx}.$$

Ясно е, че в този случай комутативният закон не е в сила, тъй като

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}.$$

Следователно с равенствата между операторите можем да се отнасяме като с равенства между обикновени числа. Разликата е само тази, че при първите равенства комутативният закон не е изобщо в сила.

Операторът $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ се нарича комутатор на операторите \hat{A} и \hat{B} и се означава с $[\hat{A}, \hat{B}]$.

Два оператора \hat{A} и \hat{B} се наричат комутиращи, ако е изпълнено условието

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0,$$

т.е. ако техният комутатор е равен на нула.

Нека при действието на оператора \hat{Q} върху функцията ψ се получава същата функция, умножен по каква константа Q :

$$\hat{Q}\psi = Q\psi. \quad (7.10.1)$$

Очевидно, че при даден вид на оператора \hat{Q} съотношението (7.10.1) не е в сила за всяка функция ψ , т.е. това съотношение представлява уравнение. За квантовата механика представляват интерес такива функции ψ , които удовлетворяват стандартните гранични условия за еднозначност, ограниченост и непрекъснатост. Оказва се, че уравнение (7.10.1) има решения, удовлетворяващи стандартните гранични условия изобщо не при всички стойности на Q , а само при определени стойности на тази величина, които се наричат *собствени стойности на оператора* \hat{Q} . Функцията ψ_i , която е решение на уравнението (7.10.1) при дадено Q_i , се нарича *собствена функция на оператора* \hat{Q} , принадлежаща на собствената стойност Q_i .

Съвкупността от собствените стойности на оператора \hat{Q} , която се нарича негов спектър, може да бъде както дискретна, така и непрекъсната. Ако на всяка собствена стойност на оператора \hat{Q} принадлежи само една собствена функция, спектърът е *неизроден*. Ако на една и съща собствена стойност принадлежат няколко собствени функции, например m собствени функции, казваме, че тази собствена стойност е m -кратно изродена.

равнение (7.10.1) се нарича уравнение за собствените стойности и собствените функции на оператора \hat{Q} .

Сега дефинираме понятието скалярно произведение на две функции. Скалярно произведение на две функции f и φ се определя по следната формула

$$(f, \varphi) = \int f^*(x)\varphi(x)dV. \quad (7.10.2)$$

Интегрирането в последната формула се извършва по цялата област на изменение на независимите променливи. С dV е означен елементът от тази област. Функцията $f^*(x)$ е комплексно спряганата на $f(x)$. Може лесно да се провери, че $(f, \varphi) \neq (\varphi, f)$. Скалярното произведение (f, f) се нарича норма на функцията f . Ако нормата на функцията f е равна на единица, функцията се нарича нормирана. Две функции се наричат ортогонални, ако тяхното скалярно произведение е равно на нула, т.е.

$$(f, \varphi) = 0,$$

когато $(f, f) \neq 0$ и $(\varphi, \varphi) \neq 0$.

Собствените стойности на операторите могат да бъдат както реални, така и комплексни числа. В квантовата механика се използват оператори, които имат реални собствени стойности. Това са т.нар. ермитови оператори. Един оператор се нарича ермитов, ако удовлетворява условието

$$(f, \hat{Q}\varphi) = (\hat{Q}f, \varphi). \quad (7.10.3)$$

Ако се използва формулата (7.10.2), условието (7.10.3) може да се представи във вида

$$\int f^* \hat{Q}\varphi dV = \int (\hat{Q}f)^* \varphi dV. \quad (7.10.4)$$

Функцията f и φ трябва да изпълняват изискванията за сходимост на интегралите в (7.10.4), иначе са достатъчно произволни.

Сега се спрем сега на свойствата на ермитовите оператори, когато се приложат в квантовата механика. Най-напред ще разгледаме, че собствените стойности на ермитовите оператори са реални. Нека ψ_n е собствена функция на ермитовия оператор \hat{Q} с собствена стойност Q_n . В такъв случай следва

$$\hat{Q}\psi_n = Q_n\psi_n. \quad (7.10.5)$$

Вземем комплексно спряганото на (7.10.5):

$$(\hat{Q}\psi_n)^* = Q_n^*\psi_n^*. \quad (7.10.6)$$

Ако умножим (7.10.5) с ψ_n^* , а (7.10.6) с ψ_n и интегрираме получените формули, ще получим

$$\int \psi_n^* \hat{Q} \psi_n dV = Q_n \int \psi_n^* \psi_n dV, \quad (7.10.7)$$

$$\int (\hat{Q} \psi_n)^* \psi_n dV = Q_n^* \int \psi_n^* \psi_n dV. \quad (7.10.8)$$

От условието (7.10.4) за ермитовост на оператора следва, че левите страни на последните две формули са равни. Ако извадим равенството (7.10.8) от равенство (7.10.7), ще получим

$$(Q_n - Q_n^*) \int \psi_n^* \psi_n dV = 0.$$

Обаче $\int \psi_n^* \psi_n dV \neq 0$, тъй като изобщо $\psi_n \neq 0$. Следователно

$$Q_n - Q_n^* = 0 \text{ или } Q_n = Q_n^*,$$

а това означава, че собствените стойности на ермитовия оператор са реални числа.

Нека ψ_n и ψ_m са две собствени функции на оператора \hat{Q} , принадлежащи съответно на две различни собствени стойности Q_n и Q_m на същия оператор, т.е. функциите ψ_n и ψ_m удовлетворяват уравненията

$$\hat{Q} \psi_n = Q_n \psi_n \quad (7.10.9)$$

$$\hat{Q} \psi_m = Q_m \psi_m. \quad (7.10.10)$$

Ако спрегнем комплексно уравнение (7.10.10), ще получим

$$(\hat{Q} \psi_m)^* = Q_m \psi_m^*. \quad (7.10.11)$$

Нека умножим уравнение (7.10.9) с ψ_m^* , а уравнение (7.10.11) с ψ_n и интегрираме получените формули:

$$\begin{aligned} \int \psi_m^* \hat{Q} \psi_n dV &= \int Q_n \psi_m^* \psi_n dV, \\ \int (\hat{Q} \psi_m)^* \psi_n dV &= \int Q_m \psi_m^* \psi_n dV. \end{aligned}$$

От условието за ермитовост на оператора \hat{Q} следва, че левите страни на последните формули са равни. В такъв случай ще имаме

$$\int Q_n \psi_m^* \psi_n dV - \int Q_m \psi_m^* \psi_n dV = 0,$$

$$(Q_n - Q_m) \int \psi_m^* \psi_n dV = 0. \quad (7.10.12)$$

по условие $Q_n \neq Q_m$, от (7.10.12) се получава

$$\int \psi_m^* \psi_n dV = 0. \quad (7.10.13)$$

Следователно собствените функции на ермитовите оператори, лежащи на различни собствени стойности, са *ортогонални* помежду си.

Ако функцията φ е решение на уравнение (7.10.1), то функцията $\alpha\varphi$, където α е произволна константа, ще бъде също решение на уравнение (7.10.1), тъй като разглеждаме линейни оператори. Константа α обаче може да се избере по такъв начин, че функцията ψ да бъде нормирана, т.е. $(\psi, \psi) = 1$. По-нататък ще считаме, че собствените функции на ермитовите оператори са нормирани. В такъв случай собствените функции на един ермитов оператор ще притежават следните свойства :

$$(\psi_m, \psi_n) = 0 \text{ при } m \neq n$$

$$(\psi_m, \psi_n) = 1 \text{ при } m = n.$$

Тези две формули могат да бъдат обединени в една, ако се въведе символът на Кронекер δ_{mn} :

$$(\psi_m, \psi_n) = \delta_{mn}. \quad (7.10.14)$$

Тъй като $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$ и $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$. Оказва се, че всяка функция (във всеки случай всяка от функциите, които се срещат в квантовата механика) може да се представи като *линейна комбинация* от собствените функции на ермитовия оператор \hat{Q} , взети с подходящи нормирани коефициенти:

$$\psi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x). \quad (7.10.15)$$

Коефициентите c_i в горното развитие може да се намерят, като използваме свойството ортогоналност на собствените функции.

Нека целта ни е да определим скаларното произведение на собствената функция ψ_m и функцията ψ . Съгласно (7.10.15) ще имаме

$$(\psi_m, \psi) = \sum_i c_i (\psi_m, \psi_i) = c_m.$$

Следователно

$$c_m = (\psi_m, \psi) = \int \psi_m^* \psi dV. \quad (7.10.10)$$

Всички направени дотук разглеждания се отнасят за случая, когато спектърът на собствените стойности на оператора е дискретен. Те могат да се обобщят лесно и за случая на непрекъснат спектър на собствените стойности.

7.11. ДИНАМИЧНИ ПРОМЕНЛИВИ И ОПЕРАТОРИ

Динамични променливи са физичните величини, които определят състоянието на системата, като зависят от вида на движението и се изменят с времето. Такива са например координатите, импулсът, моментът на импулса, енергията и др.

Нека сега видим каква е връзката между динамичните променливи, които характеризират свойствата на една квантовомеханична система, и математическия апарат на квантовата механика – *линейните ермитови оператори*.

Както е известно, стационарното уравнение на Шрьодингер

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = W \psi(\vec{r}) \quad (7.11.1)$$

има решения, които удовлетворяват стандартните гранични условия не изобщо при всички стойности на пълната енергия W , а само при някои определени стойности: $W = W_1, W_2, W_3, \dots$

Уравнение (7.11.1) може да се представи във вида

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}) = W \psi(\vec{r}),$$

или

$$\hat{H} \psi = W \psi, \quad (7.11.2)$$

където с \hat{H} е означен операторът

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}). \quad (7.11.3)$$

Ако се сравни уравнение (7.11.2) с уравнение (7.10.1), се стига непосредствено до извода, че уравнение (7.11.2) е уравнение за собствени стойности и собствените функции на оператора \hat{H} . Както се вижда от това уравнение, собствените стойности на оператора \hat{H} са възможните стойности на енергията W , а собствените функции ψ_i са решения на (7.11.2) при $W = W_i$, т.е. описват състоянията, в които енергията има определена стойност W_i . Следователно на физичната

енергия може да се съпостави операторът \hat{H} , който се нарича оператор на енергията или *Хамилтонов оператор*. Това дава основание да се направи следното предположение, което е един от постулатите на квантовата механика:

Всяка динамична променлива Q в квантовата механика може да се съпостави един линеен ермитов оператор \hat{Q} . Спектърът на собствени стойности на оператора $\hat{Q} - Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, представлява спектъра на стойностите, които могат да се получат при измерване на динамичната променлива Q , а собствените функции на този оператор ψ_i описват състоянията, в които динамичната променлива Q има стойности Q_i . Операторите, които се съпоставят на физически величини, трябва да бъдат линейни, за да бъде в сила принципът на суперпозицията, и ермитови, за да бъдат реални техните собствени стойности, тъй като собствените стойности на оператора съгласно класическата хипотеза представляват възможните стойности на измерването на физическа величина. Валидността на този основен постулат се установява от съвпадението на изводите на квантовата механика с експерименталните данни. Следователно в квантовата механика динамичните променливи, които характеризират състоянията на една система, се описват с линейни ермитови оператори. За да се определи видът на операторите, които съответствуват на измервани динамични променливи, се използва принципът на кореспонденцията. Предполага се, че между квантовомеханичните оператори и съществуват същите съотношения, каквито съществуват между измерваните динамични променливи в класическата механика, ако се знае видът на два оператора, може, като се използва съответните съотношения на класическата механика, да се определи видът на останалите динамични променливи.

За да определим вида на двата изходни оператора, нека разгледаме оператора на енергията \hat{H} . Този оператор може да се представи

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2 + U(\vec{r}).$$

Видът на този оператор с израза за пълната енергия в класическата механика

$$W = \frac{1}{2m}p^2 + U(\vec{r}),$$

показва, че Хамилтоновият оператор \hat{H} може да се получи от този оператор, ако в същия динамичната променлива p заменим с оператора на импулса \hat{p} , а динамичната променлива $U(\vec{r})$, представляваща функция на радиуса, заменим с оператора $\hat{U}(\vec{r})$, представляваща функция на радиуса „умножение по функция на \vec{r} “. Следователно на физическата величина импулс на частицата \vec{p} може да се съпостави операторът $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, а на радиус-вектора \vec{r} или на физически величини, които зависят от радиуса, съответно операторът „умножение по \vec{r} “ и операторите на енергията \hat{H} и $\hat{U}(\vec{r})$ „умножение по дадена функция на \vec{r} “. Операторите на

останалите динамични променливи се изразяват чрез операторите \hat{p} и \hat{r} , като се използват съответните съотношения на класическата механика, свързващи тези динамични променливи с величините p и r .

Така например физичната величина момент на импулс \vec{L} в класическата механика се определя по формулата

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Съгласно принципа на съответствието операторът \hat{L} , който се съпоставя в квантовата механика на тази величина, ще бъде от вида

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = -\vec{r} \times i\hbar \vec{\nabla}. \quad (7.11.4)$$

Операторът \hat{L} е един векторен оператор. Компонентите на този оператор по направленията на координатните оси x, y и z съгласно (7.11.4) ще бъдат

$$\hat{L}_x = -i\hbar(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}),$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}),$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}).$$

7.12. ОПРЕДЕЛЯНЕ СЪСТОЯНИЕТО НА КВАНТОВОМЕХАНИЧНАТА СИСТЕМА

От класическата механика е известно, че съвкупността от стойностите на физични величини, характеризиращи системата в даден момент, определя състоянието на системата в същия момент (тук се имат предвид само физичните величини, които се изменят с времето, като координатите, импулса, момента на импулса, кинетичната и потенциалната енергия и др., т.е. динамичните променливи). Законите на класическата механика дават възможност да се пресметнат физичните величини във всеки момент, ако са известни координатите и скоростите на всички частици от системата в същия момент. Следователно състоянието на системата се определя от съвкупността на тези координати и скорости. От друга страна, вторият закон на Нютон дава възможност да се пресметнат координатите и скоростите на частиците във всеки момент, ако са известни действащите сили и стойностите на координатите и скоростите в някакъв начален момент. Следователно, ако е известно състоянието на системата в един начален момент, като се използва основното уравнение

иката, може да се определи нейното състояние във всеки момент.

Освен постулат на квантовата механика е, че вълновата функция $\psi(\vec{r}, t)$, която удовлетворява уравнението на Шрьодингер, определя състоянието на микрочастицата. Уравнението на Шрьодингер е първата производна по времето. Това означава, че решението на уравнение $\psi(\vec{r}, t)$ е еднозначно, ако е известна вълновата функция в един начален момент. Следователно аналогично на класическата механика състоянието на микрочастицата е еднозначно във всеки следващ момент, ако е известно в един начален момент. За да може вълновата функция да определя състоянието на микрочастицата, трябва да се пресметнат стойностите на физичните величини за всяко състояние, описано от $\psi(\vec{r}, t)$. Освен това трябва да бъде възможно определянето на началното състояние на частицата, ако е известна стойността на $\psi(\vec{r}, t)$ в някакъв момент, избран за начален.

В квантовата механика състоянието на микрочастицата е еднозначно във всеки следващ момент, ако е известно в един начален момент. За да може вълновата функция да определя състоянието на микрочастицата, трябва да се пресметнат стойностите на физичните величини за всяко състояние, описано от $\psi(\vec{r}, t)$. Освен това трябва да бъде възможно определянето на началното състояние на частицата, ако е известна стойността на $\psi(\vec{r}, t)$ в някакъв момент, избран за начален.

В квантовата механика състоянието на микрочастицата е еднозначно във всеки следващ момент, ако е известно в един начален момент. За да може вълновата функция да определя състоянието на микрочастицата, трябва да се пресметнат стойностите на физичните величини за всяко състояние, описано от $\psi(\vec{r}, t)$. Освен това трябва да бъде възможно определянето на началното състояние на частицата, ако е известна стойността на $\psi(\vec{r}, t)$ в някакъв момент, избран за начален.

$$\hat{Q}\psi_i = Q_i\psi_i.$$

(7.10.15) вълновата функция ψ , която описва едно произволно състояние, може да се представи като линейна комбинация на собствените функции на оператора \hat{Q} :

$$\psi = \sum_i c_i \psi_i.$$

Коефициентите c_i се определят по формула (7.10.16):

$$c_i = (\psi_i, \psi) = \int \psi_i^* \psi dV.$$

От друга страна, съгласно направените предположения в §7.9, стойността $|c_i|^2$ изразява вероятността при измерването на физичната величина Q да се получи стойността Q_i (при това очевидно трябва да бъде изпълнено условието $\sum_i |c_i|^2 = 1$). Средната стойност на физичната величина Q се определя по формулата (7.9.1).

Следователно с помощта на направените хипотези ние можем да изведем вероятностно резултатите от опитите за измерване на физичните величини, при условие че е известно състоянието на микрочастицата.

$\psi(\vec{r}, t)$, в което се намира квантовомеханичната система. Така например, ако частицата се намира в състояние ψ и искаме да определим каква е вероятността при измерването на физичната величина A да се получи стойността A_m , трябва да разложим вълновата функция по собствените функции на оператора A . Тогава квадратът от модула на съответния коефициент $|c_m|^2$ ще ни даде търсената вероятност.

Нека сега се спрем на въпроса за определяне на началното състояние на системата. Нека микрочастицата се намира в състояние ψ , в което физичната величина Q няма определена стойност. При измерването на физичната величина Q се получава една от възможните стойности Q_i . Нека например се получи стойността Q_m . В резултат на това измерване състоянието ψ преминава в състояние ψ_m , в което физичната величина Q има стойност Q_m . По този начин може да се „формира“ началното състояние. Тук проличава едно съществено различие между класическата и квантовата механика. В класическата механика актът на измерването по принцип не внася изменение в състоянието на системата. В квантовата механика самият акт на измерването предизвиква изменение на състоянието на системата.

Ако на собствената стойност Q_m на оператора \hat{Q} съответствуват не една, а n собствени функции $\psi_m^{(1)}, \psi_m^{(2)}, \dots, \psi_m^{(n)}$, т.е. имаме n -кратно израждане, началното състояние не може да се определи еднозначно само чрез измерване на физичната величина Q . За да може в този случай да се определи еднозначно началното състояние, необходимо е да бъдат измерени и други физични величини. Най-малкият брой физични величини, измерването на които определя еднозначно състоянието на системата, се нарича пълен набор на физичните величини. За да могат две величини Q и R да влизат в пълния набор, същите трябва да имат общи собствени състояния. В противен случай, ако след измерването на величината Q измерим величината R , състоянието, „формирано“ при първото измерване, ще се разруши и ще се редуцира в някакво собствено състояние на физичната величина R . Две физични величини, които имат общи собствени състояния, т.е. техните оператори имат общи собствени функции, могат едновременно да притежават определени стойности – измерването на едната величина не пречи на измерването на другата величина, т.е. тези величини са едновременно измерими. Може да се докаже, че необходимото и достатъчно условие две физични величини да имат едновременно напълно определени стойности е техните оператори да комутират.

АТОМНА ФИЗИКА

8.1. АТОМНИ СПЕКТРИ

Изучаването на топлинното излъчване на твърдите тела, че същото представлява електромагнитно излъчване с непрекъснат спектър. Непрекъснатият спектър е характерен и за топлото излъчване на течности и газове с голяма плътност. Във всички тези случаи основна роля играе взаимодействието между разположените атоми и молекули. За светещите разредени газове е характерно, че светлинното излъчване има линеен спектър, който се състои от отделни спектрални линии с определени дължини на вълните. Опитът показва, че при преминаване на светещия газ от разрежен към плътен газ се поглъщат спектралните линии със същите дължини на вълната, които са излъчвани от светещия в резултат на нагряване или в резултат на електрически ток в разрежен газ, т.е. в непрекъснатия спектър се появяват тъмни линии. Полученият линеен спектър, състоящ се от тъмни линии, се нарича абсорбционен спектър. Поради обстоятелството, че в разрежените газове атомите се намират на големи разстояния един от друг и не си взаимодействуват, стига се непосредствено до излъчването, че линейните спектри се излъчват или поглъщат от невзаимодействащи си атоми. Линейните спектри на атомите са изиграли голяма роля за изясняване строежа на атомите. Едни от най-важните критерии за верността на всяка теория за атомите са нейните свойства на атомите е дали същата е в състояние да обясни наблюдаваните линейни спектри на атомите.

В 1885 г. швейцарският физик Балмер показва, че честотите на излъчваните на известните тогава девет спектрални линии на водородния атом, могат да се изчислят по формулата

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (8.1.1)$$

където $n = 3, 4, 5, \dots$, а R е т.нар. константа на Ридберг, за която е известна стойността $R = 3,2931 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Формула (8.1.1) се нарича формула на Балмер, а спектралните линии, на които съответствуват стойности на n , образуват т.нар. серия на Балмер. Границата на тази серия се получава при $n \rightarrow \infty$ и е равна на

$\frac{R}{2^2}$. Дължината на вълната, която съответствува на тази гранична честота, е $\lambda_0 = 365$ nm.

По-нататъшните изследвания показват, че съществуват и други серии спектрални линии, излъчени от водородните атоми. Така например в ултравиолетовата област на спектъра е била открита серията на Лайман, която се описва чрез формула, аналогична на (8.1.1):

$$\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

В инфрачервената област се намират:

$$\text{Серията на Пашен} \quad \nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, 6, \dots),$$

$$\text{Серията на Брекет} \quad \nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, 7, \dots),$$

$$\text{Серията на Пфунд} \quad \nu = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, 8, \dots),$$

$$\text{и серията на Хъмфри} \quad \nu = R \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 7, 8, \dots).$$

Горните формули за спектралните линии могат да се изразят чрез една обща формула от вида

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (8.1.2)$$

където за дадена серия цялото число m има постоянна стойност, а цялото число n може да взема стойностите $n = m + 1, m + 2, m + 3$ и т.н.

Поради голяма точност на спектралните измервания получените по емпиричен път формули за спектралните серии изразяват едни от най-точните закономерности във физиката.

Ридберг показва, че спектралните серии са характерни не само за водородния атом, но и за останалите атоми, като честотите на линиите от дадена серия се изразяват чрез формулата

$$\nu = T(n_2) - T(n_1).$$

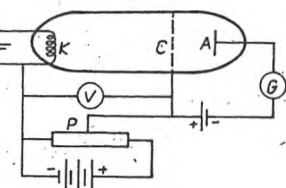
За дадена серия $n_2 = \text{const}$, а се изменя n_1 , като на всяка стойност на n_1 съответствува една спектрална линия от разглежданата серия. Величините $T(n_2)$ и $T(n_1)$ се наричат спектрални терми. Така например, за да се получи серията на Пашен, трябва да се положи $T(n_2) = \frac{R}{3^2}$ и $T(n_1) = \frac{R}{n_1^2}$, където $n_1 = 4, 5, 6, \dots$. За другите атоми термът $T(n)$ има по-сложен вид.

През 1908 г. е формулиран т.нар. комбинационен принцип на Рид, съгласно който честотите на спектралните линии, излъчени от всеки атом, могат да се представят като разлика от два терма. Различните комбинации на тези терми дават честотите на спектралните линии, които се излъчват от атома.

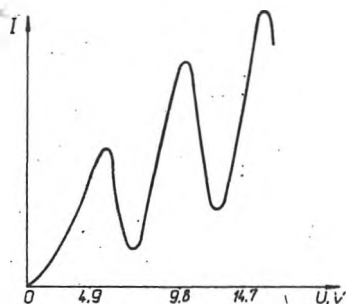
учените по експериментален път закономерности в спектъ-
ородния атом се обясняват от полукласическата теория на
асно която при преминаване на водородния атом от едно в
ионарно състояние се излъчва или поглъща фотон с енер-
авна на разликата между енергиите, съответстващи на
ионарни състояния. Както ще видим, горните закономер-
обясняват лесно и от квантовата механика. Квантовата
е в състояние да обясни и наблюдаваните закономерности
те на другите атоми.

8.2. ОПИТ НА ФРАНК И ХЕРЦ

в 1914 г. Франк и Херц провеждат опити, чрез които показ-
рви път, че атомите се характеризират с дискретен енерге-
ктър, което е в противоречие с представите на класическа-
а. Схемата на опитната постановка, използвана от Франк
показана на фиг.8.1.



Фиг. 8.1



Фиг. 8.2

тъклена тръба, напълнена с живачни пари при ниско наля-
до 1 mm Hg), са поставени три електрода: катод K , решетка
 A . При протичане на електричен ток през катода в ре-
загряването му се отделят електрони, които се насочват
етката C под действието на ускоряващото напрежение U ,
но между катода и решетката. Това напрежение може да
посредством потенциометрично свързания реостат P . Ме-
етката и анода е приложено ниско напрежение от порядъка
което създава електрично поле, забавящо електроните при
ето им към анода. Една част от електроните преминават
етката C и достигат до анода. Франк и Херц изследват за-
та между големината на получения аноден ток I , измерван
анометър G , и напрежението U , приложено между катода
ата. Резултатите от техните измервания са представени на

Получената експериментална зависимост между големината на тока I и напрежението U може да се обясни по следния начин: При ниски напрежения ударите между ускорените електрони и живачните атоми имат еластичен характер и тъй като масата на електрона е много по-малка от масата на живачния атом, енергията на електроните при ударите с живачните атоми практически не се изменя. С увеличаване на напрежението нараства анодният ток. Ако живачните атоми имат дискретен енергетичен спектър, то на тях може да се предава енергия само на порции, равни на разликата между енергиите, съответстващи на две позволени енергетични нива. Действително опитните данни показват, че когато електроните придобият енергия $4,9 \text{ eV}$, ударите им с живачните атоми стават нееластични – електроните отдават енергията си на атомите, които преминават на по-високо позволено енергетично ниво. Поради обстоятелството, че скоростите на електроните след нееластичния удар намаляват значително, приложеното напрежение между анода и решетката им оказва силно задържащо действие и анодният ток рязко намалява. При напрежение $U = 9,8 \text{ V}$ електроните могат да претърпят втори нееластичен удар с живачни атоми, в резултат на което токът I отново рязко намалява и т.н. Франк и Херц наблюдават излъчвателния спектър на живачни пари при бомбардировката им с електрони с енергия $4,9 \text{ eV}$ и установяват, че излъчената спектрална линия в резултат на преход на атома от възбудено в основно състояние се характеризира с дължина на вълната $\lambda = 253,6 \text{ nm}$, на която съответства фотон с енергия, равна точно на $4,9 \text{ eV}$. По такъв начин Франк и Херц доказват експериментално, че атомите могат да получават енергия само на порции, което означава, че те имат дискретен енергетичен спектър.

8.3. ВОДОРОДЕН АТОМ ОТ ГЛЕДНА ТОЧКА НА КВАНТОВАТА МЕХАНИКА

8.3.1. Квантуване на момента на импулса

Нека разгледаме най-простата атомна система – водородния атом. Тъй като масата на протона е 1836 пъти по-голяма от масата на електрона, ние можем да считаме, че протонът е неподвижен и да разгледаме само относителното движение на електрона около протона. Съгласно закона на Кулон силата на взаимодействието между протона и електрона се дава с израза $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$, където e е един елементарен електричен заряд, а r е разстоянието между двете частици. От тази формула се вижда, че силата F зависи само от r . Потенциалната енергия на електрона в кулоновото поле на протона е

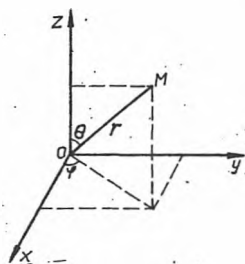
$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (8.3.1)$$

виси също само от r . Силовото поле с такива свойства се нарича централно поле или поле с централна симетрия. Нека координатната система е свързана с протона, който считаме за неподвижен. За да работим с поле с централна симетрия е по-удобно да се използва сферичната координатна система (фиг. 8.3). Свързките между декартовите и сферичните координати се дават с формули-

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$



Фиг. 8.3

и на поле с централна симетрия векторната величина играе ролята на момент на импулса на частицата

\vec{L} , (\vec{p} е импулсът на частицата), запазва с времето. Както е известно от

квантовата механика, операторът на тази величина е от

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = -\vec{r} \times i\hbar \nabla.$$

компонентите на векторния оператор \hat{L} по направление на осите

$$\hat{L}_x = i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$\hat{L}_z = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Големината от големината на момента на импулса, който в класическата механика се определя по формулата

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2,$$

в квантовата механика се съпоставя операторът

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2,$$

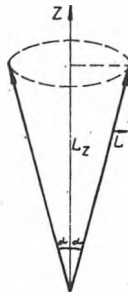
което може да се покаже, че операторите \hat{L}_x , \hat{L}_y и \hat{L}_z не комутират помежду си, т.е. съгласно изводите на квантовата механика компонентите на момент на импулса не могат да имат едновременно определени стойности. Нека предположим, че проекцията L_z има

определена стойност. В такъв случай останалите две проекции L_x и L_y са напълно неопределени. Физически направлението на оста z може да бъде определено чрез направлението на външно магнитно поле. Операторът \hat{L}^2 комутира поотделно с операторите \hat{L}_x , \hat{L}_y и \hat{L}_z , т.е. в сила са следните съотношения:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}^2] = [\hat{L}_y, \hat{L}^2] = [\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0.$$

Следователно големината на момента на импулса и една от неговите проекции могат да имат едновременно определени стойности. В такъв случай стигаме непосредствено до извода, че в квантовата механика моментът на импулса на частицата (в разглеждания случай – на електрона) се определя от големината му L и проекцията му по направление на оста z . Ясно е, че векторът момент на импулса \vec{L} не може да се представи чрез отрязък от права с определена посока, тъй като проекциите му L_x и L_y са напълно неопределени.

Графическото представяне на вектора \vec{L} е показано на фиг.8.4.



Фиг. 8.4

Векторът момент на импулса \vec{L} може с еднаква вероятност да бъде във всички направления по една конична повърхност, така че проекцията L_z да остава една и съща.

Нека най-напред определим възможните стойности на проекцията на момента на импулса L_z . За целта трябва да решим уравнението за собствените стойности и собствените функции на оператора \hat{L}_z . Операторът \hat{L}_z в сферични координати е от вида

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

В такъв случай уравнението на собствените стойности и собствените функции

$$\hat{L}_z \Phi = L_z \Phi$$

на оператора \hat{L}_z ще има вида

$$-i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = L_z \Phi.$$

Решението на това диференциално уравнение е

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \Phi_0(r, \theta) e^{i \frac{L_z}{\hbar} \varphi}, \quad (8.3.2)$$

$\Phi_0(r, \theta)$ е интеграционна константа, която може да зависи от сферичните координати r и θ . Собствената функция Φ да бъде еднозначна функция на координатите, откъдето

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Условието ще бъде изпълнено, ако отношението $\frac{L_z}{\hbar}$ е цяло число. Ако означим това число с m , ще получим

$$L_z = \hbar m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (8.3.3)$$

Числото m се нарича магнитно квантово число. Следователно проекцията на момента на импулса L_z се квантува, като възможности на тази проекция се определят от магнитното квантово

число. За да определим възможните стойности на големината на момента на импулса L , трябва да решим уравнението за собствените функции и собствените функции на оператора \hat{L}^2 :

$$\hat{L}^2 Y = L^2 Y, \quad (8.3.4)$$

Операторът \hat{L}^2 в сферични координати е от вида

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

Решението на уравнение (8.3.4) е доста трудно, поради което не даваме тук някои крайни резултати. Може да се докаже, че това дифференциално уравнение има решения, удовлетворяващи стандартни гранични условия само при стойности на L^2 , които се дават с

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.3.5)$$

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

където l е квантово число, наречено орбитално квантово число. Следователно подобно на проекцията L_z големината на момента на импулса L се квантува, като възможните стойности на L се определят от орбиталното квантово число l . Като се вземе предвид, че проекцията на даден вектор не може да бъде по-голяма от големината на вектора, следва че

$$|\hbar m| \leq \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

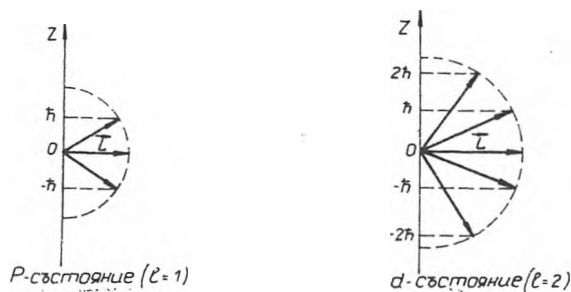
където l е максимално възможната стойност на магнитното квантово число.

Следователно при дадена стойност на орбиталното квантово число l , което определя стойността на големината на импулса L , са възможни $(2l+1)$ различни стойности на проекцията на момента на импулса L_z , които се дават с формулата

$$L_z = \hbar m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l). \quad (8.3.6)$$

Квантуването на момента на импулса се нарича още пространствено квантуване. Пространственото квантуване означава, че векторът момент на импулса \vec{L} може да има само такива ориентации в пространството, за които проекцията на момента на импулса L_z по направление на оста z приема квантувани стойности, равни на $\hbar m$.

На фиг.8.5 са дадени възможните ориентации на момента на импулса на електрони в p - и d -състояния.



Фиг. 8.5

В теорията на диференциалните уравнения се доказва, че за всяка стойност на орбиталното квантово число l съществуват $2l+1$ решения на (8.3.4), които се различават по магнитното квантово число m и имат вида

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (8.3.7)$$

където

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (x^2-1)^l$$

са т.нар. присъединени полиноми на Лежандър. Лесно може да се види, че функциите $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ са собствени функции на оператора $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} = \hbar m Y_{lm},$$

трябвало да се очаква, тъй като операторите \hat{L}_z и \hat{L}^2 което означава, че имат общи собствени функции.

8.4. ЕНЕРГИЯ НА ВОДОРОДНИЯ АТОМ

да определим възможните стойности на енергията на водородния атом, трябва да решим уравнението за собствените стойности на оператора на Хамилтон \hat{H} , т.е. да решим стационарното уравнение на Шрьодингер за движението на електрона в електричното поле на ядрото-протон. В декартови координати стационарното уравнение на Шрьодингер има вида

$$\Delta\psi(x, y, z) + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(W + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi(x, y, z) = 0,$$

m_e е масата на електрона;

W — неговата пълна енергия;

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ е потенциалната му енергия.

В сферични координати същото уравнение ще бъде от вида

$$\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(W + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0. \quad (8.4.1)$$

Ще да се покаже, че операторът на пълната енергия \hat{H} комутира с операторите \hat{L}^2 и \hat{L}_z , т.е. вълновата функция ψ трябва да бъде собствена функция и на операторите \hat{L}^2 и \hat{L}_z . Това условие ще бъде изпълнено, ако положим

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (8.4.2)$$

Ако се замести (8.4.2) в стационарното уравнение на Шрьодингер, се получава следното уравнение за функцията $R(r)$:

$$\left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2m_e}{\hbar^2} \left(W + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (8.4.3)$$

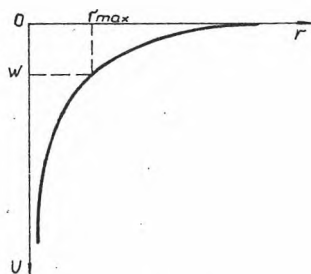
Следването на това уравнение показва, че то има решения, удовлетворяващи стандартните гранични условия, при всички позволени стойности на пълната енергия W и при квантувани орбитални стойности на енергията W , които се дават с формулата

$$W = -\frac{m_e e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{(n_r + l + 1)^2}, \quad (8.4.4)$$

където n_r е радиалното квантово число, което може да взема само цели неотрицателни стойности;

l — орбиталното квантово число.

На свързаните състояния, каквото представлява водородният атом, съответствува $W < 0$. Това може да се види от следните разсъждения. На фиг.8.6 е показана зависимостта на потенциалната енергия на електрона $U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$ от разстоянието му до атомното ядро.



Фиг. 8.6

Според класическата механика максималното разстояние, на което може да се отдалечи електронът от ядрото, е r_{\max} . Съгласно представителите на квантовата механика електронът може да бъде регистриран на разстояния $r > r_{\max}$, но вероятността за намирането на електрона на такива разстояния намалява по експоненциален закон. Следователно на свързани състояния съответствува отрицателна пълна енергия.

Нека сега въведем квантовото число n :

$$n = n_r + l + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (8.4.5)$$

което се нарича главно квантово число. В такъв случай от (8.4.4) се получава

$$W_n = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2}. \quad (8.4.0)$$

Следователно възможните стойности на пълната енергия на електрона във водородния атом се определят от главното квантово число. Най-ниското енергетично състояние съответствува на $n = 1$ и се нарича основно състояние, а всички останали състояния се наричат възбудени състояния на водородния атом. За коефициента пред множителя в (8.4.6), изразен в единици eV, се получава $\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = 13,6 \text{ eV}$ и тогава ще имаме

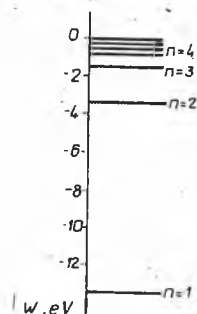
$$W_n = -13,6 \frac{1}{n^2} \text{ eV}. \quad (8.4.7)$$

На фиг.8.7 са представени възможните стойности на пълната енергия W на електрона във водородния атом, изчислена по формулата (8.4.7).

При $n = \infty$ от (8.4.7) се получава $W_n = 0$. Това състояние съответствува на йонизиран атом. Следователно минималната енергия, която трябва да се предаде на електрона във водороден атом, намиращ се в основно състояние, за да бъде отделен същият от атома, е $E = 13,6 \text{ eV}$.

Изследването на уравнение (8.4.3), което няма да правим, показва, че неговото решение $R(r)$ зависи от квантовите числа n и l . В такъв случай вълновата функция, която е решение на стационарното уравнение на Шрьодингер, съгласно (8.4.2) може да се представи във вида

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (8.4.8)$$



Фиг. 8.7

т.е. собствените функции, определящи различните състояния на електрона във водородния атом, зависят от квантовите числа n , l и m .

Направените разглеждания водят до заключението, че състоянието на електрона във водородния атом е еднозначно определено от квантовите числа n , l и m , т.е. от физичните величини пълна енергия W , големината на момента на импулса на електрона L и неговата проекция L_z по направление на оста z . Главното квантово число n определя възможните стойности на пълната енергия W . Големината на момента на импулса се определя от орбиталното квантово число l , което при дадена стойност на n може да има n различни стойности, а именно $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$. При дадено l магнитното квантово число m , определящо възможните стойности на проекцията L_z , може да приема стойностите $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. Следователно при дадено n съществуват

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

състояния с една и съща енергия, които се различават по орбиталното квантово число l и магнитното квантово число m . (Уравнението на Шрьодингер не третира въпроса за спина на електрона.) Състояния с еднаква енергия се наричат изродени, а броят на различните квантови състояния с една и съща енергия се нарича кратност на израждането.

В атомната физика се използват следните означения на състоянията на електрона с различни орбитални квантови числа l : Електрон, намиращ се в състояние с $l = 0$, се нарича s -електрон, а

съответното състояние - s -състояние; в състояние с $l = 1$ - p -електрон; с $l = 2$ - d -електрон; с $l = 3$ - f -електрон, след което следва g -електрон, h -електрон и т.н. по азбучен ред. Стойността на главното квантово число n се пише пред означението на l . Така например състоянието на електрон с $n = 3$ и $l = 1$ се означава чрез символа $3p$.

Поради това, че $l < n$, възможните състояния на електроните се означават както следва:

1s
2s, 2p
3s, 3p, 3d
4s, 4p, 4d, 4f

и т.н.

Както вече беше отбелязано, вълновите функции, описващи личните възможни състояния на електрона във водородния атом, дават с (8.4.8). Нека сега да видим какви резултати могат да се получат, ако са известни вълновите функции $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$. В състояние $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$, характеризиращо се с определена стойност на енергията, координатите на електрона нямат определени стойности, като операторите \hat{r} и \hat{H} не комутират. Следователно не може да се постави въпросът, какви са координатите на електрона в даден момент, а може да се постави само въпросът, каква е вероятността за откриване на електрона в дадена точка в пространството около ядрото. Съгласно формулата на М. Борн от квантовата механика вероятността за откриването на електрона в елементарния обем dV , съдържащ точка с радиус-вектор \vec{r} , се определя по формулата

$$dW = |\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)|^2 dV. \quad (8.4.9)$$

Следователно не може да се говори за движение на електронния атом по определена траектория. Излиза, че електронът е „размазан“ в пространството около ядрото, поради което се говори за „електронен облак“ или за „облак на вероятността“. Плътноста на електронния облак изразява вероятността за откриване на електрона в съответното място на пространството.

Нека сега да видим какви са формата и плътността на електронния облак в основното състояние на водородния атом, т.е. в състоянието, което се характеризира със стойност на главното квантово число $n = 1$. Може да се покаже, че при $n = 1$ и следователно $l = m = 0$ вълновата функция има вида

$$\psi_{100} = R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \varphi) = Ce^{-\frac{r}{a_0}}, \quad (8.4.10)$$

където

$$a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}.$$

От (8.4.10) се вижда, че вълновата функция ψ_{100} не зависи от ъглите θ и φ и следователно електронният облак ще има сферична симетрия, т.е. вероятността за откриване на електрона в различни направления, но на едно и също разстояние от ядрото ще бъде една и съща.

Нека определим каква е вероятността електрон в основно състояние да бъде намерен в сферичен слой около атомното ядро, ограничен от сфери с радиуси r и $r + dr$, който има обем $dV = 4\pi r^2 dr$. За търсената вероятност dW от (8.4.9) и (8.4.10) се получава

$$dW = |\psi_{100}|^2 dV = C^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr$$

ИЛИ

$$\frac{dW}{dr} = C^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2. \quad (8.4.11)$$

За да се определи разстоянието r_0 от ядрото, на което съществува най-голяма вероятност за откриване на електрона, трябва да се диференцира (8.4.11) по r и получената производна да се приравни на нула. В резултат на тази операция се получава $r_0 = a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$, което съвпада с радиуса на първата боровска орбита, получена в полукласическата теория на Бор. Следователно съгласно изводите на квантовата механика боровските орбити са геометрично място на точки, в които вероятността за откриването на електрона е максимална.

На фиг.8.8 е дадена вероятността $\frac{dW}{dr}$ за откриването на електрона в зависимост от разстоянието до ядрото, ако водородният атом е в основно състояние.

По аналогичен начин се получава информация за формата и плътността на електронния облак, т.е. за структурата на водородния атом в различните случаи на възбудени състояния на атома.

Наблюдаваните закономерности в спектралните линии на водородния атом се обясняват лесно от гледна точка на квантовата механика. При преминаване от състояние с енергия W_n в състояние с енергия W_m , атомът излъчва фотон с енергия $h\nu$, равна на разликата между W_n и W_m :

$$h\nu = W_n - W_m.$$

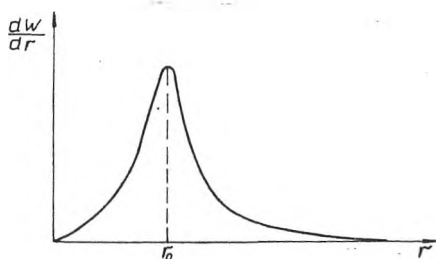
Като изразим величините W_n и W_m чрез формула (8.4.6) за енергията на водородния атом, ще получим

$$h\nu = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

ИЛИ

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (8.4.12)$$

която съвпада с (8.1.2).



Фиг. 8.8

За коефициента A получава

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2}. \quad (8.4.13)$$

Като се заместят (8.4.13) стойностите на A и R в отговорните константи, се получава стойност, която съвпада много добре с експериментално установената стойност за константата Ридберг.

В квантовата механика се доказва, че са възможни само такива преходи от едно в друго състояние, за които разликата между орбиталните квантови числа е равна на ± 1 :

$$\Delta l = \pm 1. \quad (8.4.14)$$

Условието (8.4.14) се нарича подборно правило. То е следствие от закона за запазване на момента на импулса и е свързано с обстоятелството, че излъченият фотон притежава собствен момент на импулса (спин). Например преходите, които водят до получаване на серията на Лайман, ще бъдат от вида $n p \rightarrow 1 s$ ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$), а на серията на Балмер ще съответствуват преходите $n s \rightarrow n d \rightarrow 2 p$ ($n = 3, 4, 5, \dots$).

8.5. СОБСТВЕН МАГНИТЕН МОМЕНТ НА ЕЛЕКТРОНА. СПИН НА ЕЛЕКТРОНА

Както е известно от класическата електродинамика, между орбиталния магнитен момент на електрона в атома \vec{p}_m и орбиталния механичен момент на импулса \vec{L}_e съществува следното съотношение:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_e, \quad (8.5.1)$$

където с m_e е означена масата на електрона, а e е неговият заряд. Отношението $g = \frac{e}{2m_e}$ се нарича жиромагнитно отношение. Съществува връзка между орбиталния магнитен момент на атома, който е равен на векторната сума на орбиталните магнитни моменти на всички електрони, и орбиталния момент на импулса на атома, представляващ също векторна сума от орбиталните моменти на импулса на същите електрони. В квантовата механика не може да се говори за орбита на електрона, но движението на електрона в просторното около ядрото е еквивалентно на протичането на електрически ток.

ток и следователно електронът ще се характеризира с магнитен момент, който условно се нарича орбитален. Както вече е известно, в квантовата механика моментът на импулса на електрона \vec{L}_e се характеризира чрез големината си L_e и проекцията си L_{ez} по направление на оста z , което физически може да бъде определено чрез направлението на някакво външно магнитно поле. Величините L_e и L_{ez} се квантуват по формулите

$$L_e = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad \text{и} \quad L_{ez} = \hbar m, \quad (8.5.2)$$

където l и m са съответно орбиталното и магнитното квантово число. \square Пространственото квантуване на вектора момент на импулса \vec{L}_e означава, че същият може да има само такива ориентации в пространството, при които проекцията на този вектор в направление на оста z приема квантувани стойности, кратни на \hbar .

От (8.5.1) и (8.5.2) се получава

$$p_m = \frac{e}{2m_e} L_e = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots),$$

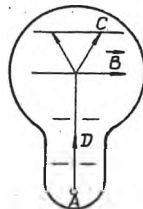
$$p_{mz} = -\frac{e}{2m_e} L_{ez} = -\frac{e\hbar}{2m_e} m, \quad (m = 0, \pm 1, \dots, \pm l),$$
(8.5.3)

където p_m е големината на магнитния момент на електрона, а p_{mz} е проекцията му по направление на оста z . Величината $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ се нарича магнетон на Бор и както се вижда от (8.5.3), е естествена единица за измерване на магнитните моменти на електроните. Следователно квантуването на момента на импулса на електрона води непосредствено до квантуването на неговия орбитален магнитен момент.

За първи път опити за определяне на магнитните моменти на атомите са извършени през 1921 г. от Щерн и Герлах. Схемата на опитната постановка е дадена на фиг.8.9.

Във вакуумна тръба от нагретия до висока температура източник излитат атоми. Тесен атомен сноп, формиран чрез екраните с процеди D , преминава през силно нееднородно магнитно поле, насочено перпендикулярно на посоката на снопа. След преминаването си през магнитното поле атомите попадат върху фотографска плака C . Известно е, че на всяка движеща се частица, притежаваща магнитен момент, нееднородното магнитно поле действа със сила, чиято големина се дава с израза

$$F = p_{mz} \frac{dB}{dz}, \quad (8.5.4)$$



Фиг. 8.9

където B е големината на магнитната индукция \vec{B} , която е насочена по направление на оста z , като магнитното поле е нееднородно само по направлението на тази ос. Величината $\frac{dB}{dz}$ представлява градиентът на магнитната индукция. Ако векторът магнитен момент на атома \vec{P}_m (а следователно и векторът момент на импулса \vec{L}) можеше да бъде произволно ориентиран във външното магнитно поле то в резултат на топлинното движение различните атоми биха имали различни ориентации на магнитните си моменти и проекциите P_{mz} на тези магнитни моменти биха имали различни стойности. Такъв случай от (8.5.4) следва, че атомите биха претърпели различни отклонения в нееднородното магнитно поле и на фотографската плака би се наблюдавало непрекъснато разпределение на попадналите върху нея атоми с максимум на плътността им в средата на пластинката, т.е. тесният атомен сноп би се разширил. Опитите на Щерн и Герлах водят до съвсем друг резултат: Във всички случаи се регистрира разцепване на атомния сноп на няколко рязко изразени снопа. Следователно магнитният момент \vec{P}_m на атомите респективно орбиталният им момент на импулса \vec{L} не могат да бъдат произволно ориентирани в пространството, а имат само точно определени ориентации, т.е. Щерн и Герлах за първи път доказват опитно съществуването на пространствено квантуване на величините \vec{L} и \vec{P}_m .

Едни от първите опити на Щерн и Герлах са извършени с атоми на елементи от първа група на периодичната система на Менделеев. Характерно в този случай е, че йоните на тези елементи не се отклоняват в нееднородно магнитно поле, т.е. орбиталните магнитни моменти и съответно орбиталните моменти на импулса на всички електрони освен валентния електрон взаимно се компенсират. Следователно орбиталният магнитен момент на такъв атом (съответно орбиталният момент на импулса) ще бъде равен на орбиталния магнитен момент на валентния електрон. Така се създава възможност да бъде измерен орбиталният магнитен момент на електрона. Валентният електрон на атомите на тези елементи се намира в s -състояние ($l = 0$), което означава, че такъв електрон не притежава орбитален магнитен момент и орбитален момент на импулса. Опитите обаче показват, че атомният сноп на тези елементи при преминаване през нееднородно магнитно поле се разцепва на 2 снопа, които съгласно (8.5.4) съответствуват на две възможни ориентации на магнитния момент на електрона в магнитното поле. Следователно и в този случай електронът притежава магнитен момент, при това от (8.5.4) се получава, че проекцията на този магнитен момент върху оста z може да вземе две различни стойности:

$$P_{mz} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} = \pm \mu_B. \quad (8.5.5)$$

Полученият резултат може да се обясни само ако се допусне, че електронът притежава собствен магнитен момент, който му е вътрешно присъщ и не е свързан с движението на електрона в пространството около ядрото. На този собствен магнитен момент съответствува собствен момент на импулса \vec{L}_s , независещ от движението на електрона в атома, наречен спин на електрона. Предположението за съществуването на спин на електрона е било направено най-напред от Гоудсмит и Уленбек, за да могат да бъдат отстранени редица появили се трудности в атомната физика. Така например, за да се обясни експериментално полученият от Айнщайн и де Хаас резултат за жиромагнитното отношение в случай на феромагнетици, което се оказало два пъти по-голямо от стойността му съгласно формула (8.5.1), е трябвало да се предположи, че електронът освен орбитален момент на импулса \vec{L}_o и орбитален магнитен момент \vec{p}_m притежава и собствен механичен момент на импулса \vec{L}_s и съответстващ на него собствен магнитен момент \vec{p}_{ms} .

Естествено е да се направи предположение, че спинът на електрона е свързан с въртене на електрона около собствена ос. Оказва се обаче, че такава моделна представа за спина противоречи на експерименталните факти. Така например за въртящия се около собствена ос електрон трябва да бъде в сила съотношението

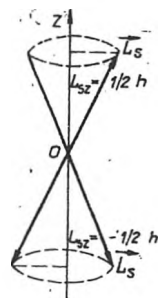
$$\frac{p_{ms}}{L_s} = \frac{c}{2m_e},$$

но опитните резултати показват, че това съотношение е $\frac{p_{ms}}{L_s} = \frac{c}{m_e}$. Следователно спинът на електрона и на останалите частици трябва да се разглежда като някакво тяхно вътрешно свойство и представата за електрона като въртяща се сфера трябва да бъде отхвърлена. На Дирак се отдава да покаже теоретично, че съществуването на спина следва непосредствено от полученото от него релятивистично вълново уравнение, което е в основата на релятивистичната квантова механика.

Спинът \vec{L}_s притежава общите свойства на механичния момент на импулса. Във връзка с това големината на спина L_s се квантува по закона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad (8.5.6)$$

където s се нарича спиново квантово число. Проекцията на спина L_{sz} върху оста z аналогично на проекцията L_{oz} на момента на импулса може да приема $2s + 1$ стойности. Опитите на Щерн и Герлах показват, че са възможни две стойности на L_{sz} , на които съответствуват



Фиг. 8.10

две възможни ориентации на спина \vec{L}_s в пространството (фиг.8.1). Следователно $2s + 1 = 2$, или $s = \frac{1}{2}$. В такъв случай от (8.5.6) получава

$$L_s = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar. \quad (8.5.7)$$

Стойностите на L_{sz} се определят аналогично на стойностите на L_s .

$$L_{sz} = m_s \hbar, \quad (8.5.8)$$

където $m_s = \pm \frac{1}{2}$ и се нарича магнитно спиново число.

Когато се говори, че спинът е ориентиран в дадена посока, например в посоката на някакво магнитно поле, или в обратна посока, има се предвид не самият спин, а неговата проекция L_{sz} (фиг.8.1).

От (8.5.5) и (8.5.8) следва

$$\frac{p_{msz}}{L_{sz}} = \frac{e}{m_e} = g_s. \quad (8.5.9)$$

Тъй като векторите собствен магнитен момент на електрона \vec{p}_{ms} и спинът \vec{L}_s са с обратни посоки, отношението на техните проекции ще бъде равно на отношението на големините им и от (8.5.9) получаваме

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = \frac{e}{m_e} = g_s, \quad (8.5.10)$$

или във векторна форма

$$\vec{p}_{ms} = -g_s \vec{L}_s.$$

Отношението $\frac{e}{m_e} = g_s$ се нарича спиново жиромагнитно отношение, което е два пъти по-голямо от жиромагнитното отношение g .

От (8.5.10) и (8.5.7) за големината на собствения магнитен момент на електрона се получава

$$p_{ms} = \frac{e}{m_e} L_s = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{3} = \mu_B \sqrt{3}.$$

8.6. ФИНА СТРУКТУРА НА СПЕКТРАЛНИТЕ ЛИНИИ

Съществуването на спин на електрона се потвърждава от наблюдяването на т.нар. фина структура на спектралните линии. Експерименталните изследвания показват, че спектралните линии

водородния атом, на атомите на алкалните елементи и на други по-сложни атоми са двойни. Например жълтата D-линия на натрия се състои от две линии с много близки дължини на вълните; $\lambda_1 = 589$ nm и $\lambda_2 = 589,6$ nm. Това разцепване на спектралните линии е резултат от разцепването на енергетичните нива на електрона и се нарича фина структура на спектралните линии. Възможните стойности на енергията на водородния атом получихме в резултат от решаването на стационарното уравнение на Шрьодингер, което не отчита спина на електрона. Нека сега видим какво е влиянието на спина на електрона и свързания с него собствен магнитен момент върху енергетичните нива на електрона в атома. За целта да разгледаме натриев атом, за който, както вече беше отбелязано, орбиталният магнитен момент на атома е равен на орбиталния магнитен момент на валентния електрон и съответно орбиталният момент на импулса на атома е равен на орбиталния момент на импулса на валентния електрон. От друга страна, електронът притежава собствен магнитен момент. Взаимодействието на собствения магнитен момент на електрона с орбиталното магнитно поле, характеризиращо се с орбиталния магнитен момент, се нарича спин-орбитално взаимодействие. Това взаимодействие води до възникването на допълнителна енергия, на която се дължи разцепването на енергетичните нива на електрона в атома, т.е. на появата на фина структура на спектралните линии.

Нека се спрем на този въпрос по-подробно. В квантовата механика събирането на моментите на импулса на частиците става по следния начин: Големината на сумарния момент се определя чрез израза

$$L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \quad (8.6.1)$$

където L е орбиталното квантово число на резултантния момент на импулса. Когато се събират моментите на импулса на две частици \vec{L}_1 и \vec{L}_2 , квантовото число L може да приема следните стойности:

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|, \quad (8.6.2)$$

където l_1 и l_2 са орбиталните квантови числа, които определят големините L_1 и L_2 на моментите \vec{L}_1 и \vec{L}_2 . Орбиталното квантово число L може да има $2l + 1$ различни стойности, като l е по-малкото число от l_1 и l_2 .

Пълният момент на импулса на електрона \vec{L}_j се получава в резултат на събирането на орбиталния момент на импулса \vec{L}_e и спина \vec{L}_s .

$$\vec{L}_j = \vec{L}_e + \vec{L}_s.$$

Големината на пълния момент L_j се дава с формулата

$$L_j = \hbar\sqrt{j(j+1)},$$

където съгласно (8.6.2) $j = l + \frac{1}{2}$, $l - \frac{1}{2}$, тъй като спиновото квантово число е $s = \frac{1}{2}$ (с l е означено орбиталното число). При l квантово число j , наречено вътрешно квантово число, има една стойност $j = \frac{1}{2}$. При l , отлично от нула, са възможни две стойности j : $j_1 = l + \frac{1}{2}$ и $j_2 = l - \frac{1}{2}$. Тези стойности на квантовото число съответствуват на две възможни взаимни ориентации на момен-
 \vec{L}_e и \vec{L}_s , – „паралелни“ и „антипаралелни“.

Възможните стойности на проекцията на пълния момен-
 импульса \vec{L}_j върху оста z са

$$L_{jz} = \hbar m_j,$$

където квантовото число m_j може да има следните стойности:

$$m_j = j, j - 1, \dots, -j.$$

Взаимодействието между магнитните моменти, свързани с механичните моменти на импульса \vec{L}_e и \vec{L}_s , както вече беше отбелязано, се нарича спин-орбитално взаимодействие. Енергията на това взаимодействие зависи от взаимната ориентация на орбиталния и спиновия момент. Това означава, че състояния с различни стойности на вътрешното квантово число j ще имат различни енергии. По-дователно всяко енергетично ниво, на което съответствува $l \geq 1$, разцепва на две нива. Енергетичните нива с $l = 0$ не се разцепват, тъй като на тях съответствува само една стойност на j . Поради обстоятелството, че енергията на спин-орбиталното взаимодействие е много малка, двете енергетични нива, на които се разцепва всяко ниво с $l \geq 1$, са разположени близко едно до друго. Преходът на електрона от тези две нива на енергетично ниво с $l = 0$ води до излъчването на две спектрални линии (дублети) с много близки дължини на вълните, при това са възможни само такива преходи, които $\Delta j = 0, \pm 1$. Точно такъв е случаят с разцепването на жълтата D-линия на Na на две близко разположени спектрални линии. По-дователно раздвояването на спектралните линии може да се обясни само ако се приеме, че спиновото квантово число s е равно на $\frac{1}{2}$. Например $s = 1$, биха се получили три вместо две спектрални линии (триплет).

8.7. РЕЗУЛТАНТЕН МОМЕНТ НА ИМПУЛСА НА МНОГОЕЛЕКТРОНЕН АТОМ. МАГНИТЕН МОМЕНТ НА АТОМА

Както видяхме, орбиталният момент на импульса на електрон в атома \vec{L}_e е свързан с орбиталния му магнитен момент \vec{p}_{m_l} , а спиновият момент на импульса (спинът) \vec{L}_s , – със собствения магни-

момент \vec{p}_{ms} . Взаимодействието между магнитните моменти на електрона обуславя взаимодействието между механичните му моменти на импулса. В резултат на събирането на механичните моменти на импулса на електроните в атома се получава резултантният момент на импулса на атома. При това съществуват два начина за събиране на моментите на импулса (орбитални и спинови); връзка на Ръсел-Саундърс (LS -връзка) и т.нар. jj -връзка. Случай на jj -връзка имаме, когато спин-орбиталното взаимодействие е по-голямо от взаимодействието между орбиталните моменти на импулса, т.е. всяка двойка \vec{L}_e и \vec{L}_s на даден електрон си взаимодействува по-силно, отколкото съответно с механичните моменти на импулса \vec{L}_e и \vec{L}_s на другите електрони. Такъв тип връзка съществува при тежките атоми. Предмет на нашето разглеждане по-нататък ще бъде LS -връзката. В този случай орбиталните моменти на импулса на електроните в атома са свързани по-силно, отколкото орбиталния момент на импулса \vec{L}_e и спина \vec{L}_s на всеки отделен електрон. Същото се отнася и за собствените моменти на импулса (спиновете) на електроните в атома. В този случай най-напред се събират отделно орбиталните моменти на импулса \vec{L}_e в сумарен орбитален момент \vec{L}_L и отделно спиновете на електроните \vec{L}_s в сумарен спинов момент \vec{L}_S . Резултантният момент на импулса \vec{L}_J на атома в този случай се получава чрез сумиране на моментите \vec{L}_L и \vec{L}_S .

Големината на сумарния орбитален момент на импулса \vec{L}_L се определя съгласно (8.6.1):

$$L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}.$$

Квантовото число L може да приема само целочислени стойности или 0, тъй като орбиталните квантови числа l_i , определящи стойностите на големините на орбиталните моменти \vec{L}_e , са цели числа.

Квантовото число S , определящо големината на резултантния спинов момент \vec{L}_S при четен брой на електроните N , може да има стойности

$$S = N\frac{1}{2}, N\frac{1}{2} - 1, \dots, 0.$$

Първата стойност съответствува на случай, когато всички спинове \vec{L}_s са паралелни един на друг, а последната възможна стойност – когато спиновете взаимно се компенсират.

При N нечетно

$$S = N\frac{1}{2}, N\frac{1}{2} - 1, \dots, \frac{1}{2},$$

т.е. квантово число S може да има само полуцели стойности.
Сумарният спинов момент L_S се определя по формулата

$$L_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}.$$

По аналогичен начин се квантува и резултантният момент на импулса на атома:

$$L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}, \quad (8)$$

където квантовото число J може да приема стойности

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|.$$

Проекцията на резултантния момент на импулса L_J по направление на оста z може да има $2J + 1$ различни стойности:

$$L_{Jz} = \hbar m_J, \quad (8)$$

където

$$m_J = J, J - 1, \dots, -J.$$

Енергията на атома зависи от взаимната ориентация на орбиталните моменти на импулса, т.е. от квантовото число L , от взаимната ориентация на спиновете на електроните, т.е. от квантовото число S , и от взаимната ориентация на сумарните моменти \vec{L} и \vec{L}_S или, с други думи, от резултантния момент на импулса на атома \vec{L}_J , т.е. от квантовото число J . Условно термът на атома означава чрез символа

$${}^{2S+1}L_J,$$

където при $L = 0$ L се замества с буквата S (S -състояние), при $L = 1$ - с буквата P (P -състояние), при $L = 2$ - с буквата D и т.н. (в случая буквата S няма нищо общо с квантовото число S , определящо сумарния спинов момент на атома.) Величината $2S + 1$ в горния символ определя при $S < L$ мултиплетността на терма, т.е. броят на нивата, които се различават по стойността на квантовото число J . При $S > L$ мултиплетността е равна на $2L + 1$. Така например за състояние с $L = 2$ и $S = \frac{1}{2}$ мултиплетността е равна на 2 (имаме ${}^2D_{5/2}$ и ${}^2D_{3/2}$). На всеки отделен атомен терм съответно е определена енергия.

Орбиталният магнитен момент на атома се определя аналогично на (8.5.3):

$$P_m = \frac{e}{2m_e} L_L = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{L(L+1)} = \mu_B \sqrt{L(L+1)}. \quad (8)$$

Проекцията на вектора \vec{P}_m по направление на оста z ще бъде

$$P_{mz} = -\mu_B m_L,$$

където μ_B е магнетонът на Бор, а магнитното квантово число m_L може да приема стойностите

$$m_L = 0, \pm 1, \dots, \pm L.$$

Като имаме предвид, че спиновото жиромагнитно отношение е два пъти по-голямо от жиромагнитното отношение, за спиновия магнитен момент на атома получаваме

$$P_{mS} = \frac{e}{m_e} L_S = \frac{e\hbar}{m_e} \sqrt{S(S+1)} = 2\mu_B \sqrt{S(S+1)}. \quad (8.7.4)$$

Разглежданията в квантовата механика показват, че отношението на резултантните моменти P_{mJ} и L_J зависи от квантовите числа L , S и J . За магнитния момент на атома P_{mJ} се получава

$$P_{mJ} = \mu_B g \sqrt{J(J+1)}, \quad (8.7.5)$$

където

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (8.7.6)$$

Величината g се нарича множител на Ланде. Лесно може да се провери, че при $S = 0$ $g = 1$, а при $L = 0$ $g = 2$ и (8.7.5) съвпада съответно с (8.7.3) и (8.7.4).

Възможните стойности на проекцията на резултантния магнитен момент на атома P_{mJ} по направление на оста z се дават чрез формулата

$$P_{mJz} = -\mu_B g m_J \quad (m_J = J, J-1, \dots, -J). \quad (8.7.7)$$

8.8. ЕФЕКТ НА ЗЕЕМАН

През 1896 г. холандският физик Зеeman установява, че когато източник на светлина се постави във външно магнитно поле, спектралните линии на светлината, излъчвана от атомите на източника, се разцепват. Разцепването на спектралните линии естествено се дължи на разцепването на енергетичните нива на атома. Това явление се нарича ефект на Зеeman. Ако вместо една се наблюдават три спектрални линии, явлението се нарича нормален ефект на Зеeman, а ако броят на получените линии е четен и по-голям от 2 – аномален

ефект на Зееман. Опитът показва, че разцепването на спектралните линии е незначително, но може да бъде регистрирано лесно чрез съвременните спектрални методи.

Ефектът на Зееман се дължи на снемане на израждането на квантовото число m_J за сметка на допълнителната енергия, която атомът получава във външното магнитно поле. Действително, както е известно от класическата електродинамика, всяка частица с магнитен момент \vec{p}_m , намираща се в магнитно поле с магнитна индукция B , получава допълнителна енергия, която се изразява чрез формулата

$$\Delta W = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = -p_{mB} B,$$

където с p_{mB} е означена проекцията на магнитния момент \vec{p}_m по направление на вектора \vec{B} . В разглеждания случай атомът с магнитен момент \vec{P}_{mJ} ще получи в магнитно поле допълнителната енергия

$$\Delta W = -P_{mJB} B. \quad (8.8.1)$$

От (8.8.1) и (8.7.7) се получава

$$\Delta W = \mu_B g B m_J \quad (m_J = J, J-1, \dots, -J). \quad (8.8.2)$$

От (8.8.2) непосредствено следва, че енергетичното ниво, съответстващо на терма $2S+1L_J$, се разцепва на $2J+1$ нива, намиращи се на еднакво разстояние по енергетичната скала едно от друго. Същата формула се вижда, че големината на разцепването ΔW варира виси освен от магнитната индукция B и от множителя на Ланде, който изобщо може да има различни стойности за различните енергетични нива. (Множителят g е функция на квантовите числа L и J .)

Нека най-напред разгледаме случая на разцепване под действие на външно магнитно поле на спектрални линии, при които не наблюдава фина структура (синглети). Тези линии се получават при преход между енергетични нива, за които квантовото число $S = 0$, т.е. сумарният спинов момент е 0 и следователно пълният момент на импулса е равен на орбиталния момент на импулса ($L = J$). Множителя на Ланде g от (8.7.6) се получава $g = 1$.

В този случай допълнителната енергия ще бъде

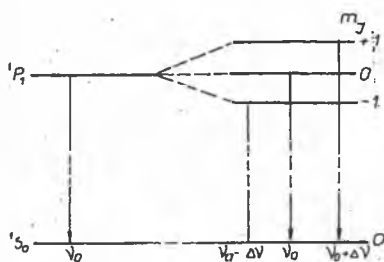
$$\Delta W = \mu_B \cdot B \cdot m_J \quad (m_J = 0, \pm 1, \dots, \pm L).$$

На фиг.8.11 е показано разцепването на нивата, което се получава под действие на външното магнитно поле при $L = 1$, и спектрални линии, които се излъчват при $P-S$ -преход, т.е. преход от състояние с $L = 1$ в състояние с $L = 0$.

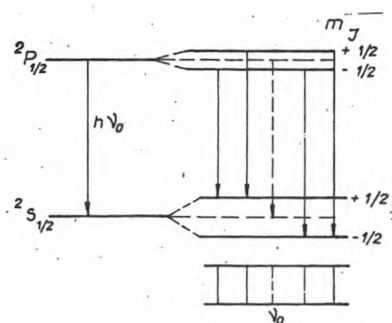
При включване на магнитното поле около линията с честота ν_0 , която се наблюдава при отсъствие на магнитно поле, се появяват две симетрично разположени линии с честоти $\nu_0 + \Delta\nu$ и $\nu_0 - \Delta\nu$, т.е. при включване на магнитното поле се получават три линии. Като се вземе предвид съществуващото подборно правило за магнитното квантово число, съгласно което са възможни само такива преходи, при които

$$\Delta m_J = 0, \pm 1, \quad (8.8.3)$$

се стига лесно до заключението, че за всички синглетни терми се получават винаги само три спектрални линии.



Фиг. 8.11



Фиг. 8.12

Аномален ефект на Зеeman се наблюдава в случаите, когато спектралните линии имат фина структура. Нека например разгледаме натриевия дублет, която се получава при преходите $3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ и $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$. На фиг.8.12 са показани разцепването на енергетичните нива и разрешените съгласно правило (8.8.3) преходи за първия случай ($3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$).

От фиг.8.12 се вижда, че при включване на магнитното поле първоначалната спектрална линия с честота ν_0 изчезва, а около нея се появяват четири спектрални линии. Аналогично разглеждане за прехода $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ показва, че при наличие на магнитно поле първоначалната линия също изчезва, но в тези случаи се появяват шест спектрални линии. Аномалният ефект на Зеeman може да се наблюдава при слаби магнитни полета. При силни магнитни полета се наблюдава винаги само нормален ефект на Зеeman. Действително в този случай се разкъсва $L - S$ -връзката и векторите \vec{L}_L и \vec{L}_S се проектират отделно по направление на вектора на магнитната индукция \vec{B} . За допълнителната енергия ΔW се получава

$$\Delta W = \mu_B B m_L + 2\mu_B B m_S = \mu_B B (m_L + 2m_S).$$

Поради обстоятелството, че са забранени преходи с изменение на спиновото квантово число m_S , същото се изключва от разглежданията и като се вземе предвид подборното правило (8.8.3), във всички случаи се получава спектрален триплет, т.е. нормален ефект на Зеeman. Под силно магнитно поле в случая се разбира магнитно поле, при което зеemanовото разцепване на линиите е по-голямо от тяхното мултиплетно разцепване. Ако мултиплетното разцепване е по-голямо от зеemanовото разцепване, магнитното поле се счита за слабо и в този случай може да бъде наблюдаван аномалният ефект на Зеeman.

Ефектът на Зеeman се наблюдава и при енергетичните нива на атомните ядра, когато на същите действа външно магнитно поле. В този случай обаче множителя на Ланде g има друг вид и вместо магнетона на Бор се въвежда ядрен магнетон $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$, където m_p е масата на протона. Тъй като $\mu_N \ll \mu_B$, разцепването на енергетичните нива на атомните ядра е значително по-слабо в сравнение с разцепването на енергетичните нива на атома.

8.9. МАГНИТЕН РЕЗОНАНС

Магнитен резонанс се нарича избирателното поглъщане на енергията на електромагнитното поле от вещество, намиращо се в постоянно магнитно поле. Това избирателно поглъщане на електромагнитното лъчение е свързано с принудени преходи между поднива на един и същ зеemanов мултиплет. Действително, както вече беше отбелязано, ако атом с магнитен момент се намира в магнитно поле, става разцепване на енергетичните му нива, като разстоянието между две съседни зеemanови поднива е

$$\delta W = \mu_B g B.$$

Ако върху атомите, намиращи се в магнитно поле, пада електромагнитно лъчение с честота ν , която удовлетворява условието

$$\nu = \frac{\delta W}{h} = \frac{\mu_B g B}{h},$$

то тогава се осъществяват принудени преходи, които водят до избирателно поглъщане на преминаващото през веществото електромагнитно лъчение. Явлението е открито от руския физик Завойски през 1944 г. в резултат на изследването на избирателното поглъщане на електромагнитното лъчение при преминаването му през парамагнитни вещества и е наречено електронен парамагнитен резонанс. По-късно е наблюдавано и явлението ядрен магнитен резонанс, което е свързано с магнитните моменти на ядрата. Резонансните честоти при които се наблюдава поглъщането, съответствуват на дължини на вълни от порядъка на няколко сантиметра, т.е. те лежат в диапазона на радиовълните, което обуславя точното им измерване.

Ако парамагнетикът се намира в топлинно равновесие, разпределението на атомите по енергетични нива в даден зеemanов мултиплет се изразява чрез закона на Болцман

$$N = N_0 e^{-\frac{\Delta W}{kT}},$$

където ΔW се определя от (8.8.2).

Законът на Болцман показва, че броят на атомите намалява експоненциално с повишаване на енергията, т.е. на по-ниски енергетични нива са разположени по-голям брой атоми, отколкото на по-високите енергетични нива.

Под действието на падащото електромагнитно лъчение атомът с еднаква вероятност може чрез принуден преход да премине на по-високо или на по-ниско енергетично ниво, но тъй като броят на атомите, намиращи се на по-ниски енергетични нива, е по-голям, броят на преходите на по-високи енергетични нива ще бъде по-голям от броя на обратните преходи. Следователно парамагнетикът ще поглъща падащото електромагнитно лъчение, при това ще се осъществява избирателно (резонансно) поглъщане.

Явлението магнитен резонанс се използва за изследване структурата и свойствата на веществата. Нека например веществото се състои от атоми с един валентен електрон, при това магнитният момент на атома да е равен на собствения магнитен момент на този електрон. (Предполага се, че електронът е в s -състояние.) Устойчиви молекули, съставени от такива атоми, имат обикновено четен брой външни електрони, магнитните моменти на които взаимно се компенсират.

При протичането на химични реакции могат да се образуват т.нар. свободни химични радикали, притежаващи един валентен електрон, и следователно магнитният момент на радикала ще бъде различен от нула. Прилагането на електронния парамагнитен резонанс дава възможност да се регистрира този радикал и да се направят изводи за протичането на дадена химична реакция и характера на химичната връзка.

8.10. ИЗЛЪЧВАНЕ И ПОГЛЪЩАНЕ НА АТОМИТЕ

Както вече беше отбелязано (§8.4), всяко възможно състояние на електрона във водородния атом се характеризира с определена енергия W_n , стойността на която се определя от главното квантово число n . Такова състояние се нарича стационарно. От гледна точка на квантовата механика при отсъствие на външно въздействие атомът може да се намира в дадено стационарно състояние произволно дълго време. Опитът обаче показва, че атомът самопроизволно, без външни въздействия преминава от по-високо енергетично ниво W_n на по-ниско енергетично ниво W_m , като излъчва фотон с енергия

$$h\nu = W_n - W_m. \quad (8.10.1)$$

Такъв вид излъчване на атома се нарича спонтанно или самопроизволно излъчване. Строгото обяснение на това явление не може да бъде дадено в рамките на квантовата механика, а се дава от квантовата електродинамика, която няма да бъде предмет на разглеждането в нашия курс по физика. Важен принос за изясняване свойствата на спонтанното излъчване има създадената от Айнщайн през 1917 г. теория на излъчването, в основата на която лежат законите за запазване на енергията и импулса при взаимодействието на атома с електромагнитното поле.

Съгласно тази теория атомът, намиращ се в даден момент в възбудено състояние n , което се характеризира с енергия W_n , претърпява спонтанно под действието на някакви вътрешни неизяснени причини в състояние m , на което съответствува по-малка енергия W_m . Нека с A_{nm} означим вероятността за извършване на спонтанен преход на атома за единица време от състояние с енергия W_n в състояние с енергия W_m . Нека с N_n означим броя на атомите, намиращи се в състояние n , а с dN_n – броя на атомите, които за време dt преминават в състояние m . Тъй като процесът е самопроизволен

$$dN_n = -A_{nm}N_n dt. \quad (8.10)$$

Знакът „минус“ означава, че броят на атомите в състояние с енергия W_n намалява. Вероятността за извършване на спонтанен преход A_{nm} се нарича коефициент на Айнщайн за спонтанното излъчване.

В резултат на интегрирането на (8.10.2) се получава

$$N_n = N_{n_0} e^{-A_{nm}t}, \quad (8.10)$$

където с N_{n_0} е означен броят на атомите в изходното състояние в момента $t = 0$. Енергията на фотона, който се излъчва при преход от състояние с енергия W_n в състояние с енергия W_m , се дава чрез формула (8.10.1).

Енергията, която се излъчва за интервала време dt при тези преходи, ще бъде

$$dW = h\nu_{nm} |dN_n| = h\nu_{nm} A_{nm} N_n dt.$$

В такъв случай за енергията J , излъчена за единица време, се получава

$$J = \frac{dW}{dt} = h\nu_{nm} A_{nm} N_{n_0} e^{-A_{nm}t} = J_0 e^{-A_{nm}t}, \quad (8.10)$$

където $J_0 = h\nu_{nm} A_{nm} N_{n_0}$ е стойността на J при $t = 0$.

Нека под средно време на живот на атома във възбудено състояние τ_n се разбира времето, за което първоначалният брой атома

N_{n_0} е намалял e пъти (величината e е основата на натуралните логаритми), т.е. за време τ_n броят на атомите в състояние n се редуцира на

$$N_n = \frac{N_{n_0}}{e}. \quad (8.10.5)$$

В такъв случай от (8.10.3) и (8.10.5) следва

$$\frac{N_{n_0}}{e} = N_{n_0} e^{-A_{nm}\tau_n}, \quad (8.10.6)$$

откъдето се получава

$$A_{nm}\tau_n = 1 \text{ или } A_{nm} = \frac{1}{\tau_n}. \quad (8.10.7)$$

Следователно коефициентът на Айнщайн е обратно пропорционален на средното време на живот на атома във възбудено състояние.

От (8.10.4) и (8.10.7) ще имаме

$$J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau_n}}.$$

За величината τ_n от Вин е получена експериментално стойност от порядъка на 10^{-8} s.

Съгласно съотношението на неопределеност на Хайзенберг

$$\Delta W_n \tau_n \geq \hbar,$$

откъдето следва, че във възбудено състояние енергията на атома се характеризира с неопределеност ΔW_n , наречена естествена ширина на енергетичното ниво W_n . От съотношението на неопределеност ще имаме

$$\Delta W_n \geq \frac{\hbar}{\tau_n}.$$

За естествената ширина на спектралната линия $\Delta \nu_{nm}$ непосредствено се получава

$$\Delta \nu_{nm} = \frac{\Delta W_n}{h} \geq \frac{1}{2\pi\tau_n}.$$

При облъчване на атома с фотони електрони от атома могат да преминат на по-високи енергетични нива за сметка на енергията на погълнатите фотони. При това фотонът предава изцяло своята енергия на атома, при поглъщането му от същия. Атомът не може да погълне част от фотона, тъй като същият е неделим. Следователно атомът може да погълне само тези фотони, чиято енергия е равна на разликата между енергиите, съответстващи на две позволени

енергетични нива. Така например абсорбционният спектър на дородния атом трябва да се състои от линии, които съответстват на преходите

$$1s \rightarrow np \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Този резултат е в пълно съгласие с опитните данни. Преход на атомите от по-ниски на по-високи нива в резултат на поглъщане на електромагнитното лъчение се наричат принудени преходи с поглъщане. Вероятността P_{nm} за извършване на такъв принуден преход за единица време зависи както от свойствата на атомите, така и от интензитета на падащото лъчение. Вероятността P_{mn} е пропорционална на спектралната плътност на лъчението, т.е. на плътността на енергията на външното електромагнитно поле, съответстваща на честота ν :

$$P_{mn} = B_{mn} \rho \nu. \quad (8.10.7)$$

Величината B_{mn} се нарича коефициент на Айнщайн за принуден преход с поглъщане.

Нека с dN_{mn} означим броя на атомите, които извършват за единица време принуден преход от по-ниско енергетично ниво с енергия W_m на по-високо енергетично ниво с енергия W_n . Като се има предвид (8.10.8), се получава

$$-dN_{mn} = P_{mn} N_m = B_{mn} N_m \rho \nu, \quad (8.10.8)$$

където N_m е броят на атомите в състояние с енергия W_m .

През 1918 г. Айнщайн изказва становището, че спонтанно излъчване и принуденото поглъщане на лъчението не могат да съществуват на равновесно състояние между излъчване и поглъщане на веществото, тъй като вероятността за спонтанни преходи се обуславя само от вътрешните свойства на атомите, докато вероятността за принудени преходи с поглъщане зависи и от интензитета на падащото лъчение. За да може да се осъществи това равновесие, е необходимо да съществуват принудени излъчвателни преходи, които да се предизвикват от падащото лъчение и вероятността за които да бъде пропорционална на интензитета на това лъчение. Излъчването, което съответствува на такъв тип преходи, се нарича принудено или индуцирано излъчване. При принудените излъчвателни преходи (принуденото излъчване) падащият фотон не се поглъща, а преминава покрай атом във възбудено състояние предизвиквайки известна вероятност преход на атома от възбудено в нормално състояние, при което се излъчва фотон с енергия $h\nu$, равна на енергията на падащия фотон. Двата фотона има една и съща посока, т.е. посоката на разпространение на принуденото излъчване съвпада с посоката на разпространение на падащото лъчение, което го предизвиква. Честотата, фазата и поляризацията на принуденото и падащото лъчение също са едни и същи, т.е. двете лъчения са кохерентни.

Нека с P_{nm} означим вероятността за принуден преход на атома за единица време от по-високо енергетично ниво W_n на по-ниско енергетично ниво W_m (принудено излъчване). На основата на термодинамичните съображения Айнщайн доказва, че вероятността за принудени излъчвателни преходи трябва да бъде равна на вероятността за принудени преходи с поглъщане, т.е.

$$P_{nm} = P_{mn}. \quad (8.10.10)$$

Както вече беше отбелязано, вероятността за принуден излъчвателен преход е пропорционална на интензитета на падащото лъчение, т.е. аналогично на (8.10.8) ще получим

$$P_{nm} = B_{nm}\rho\nu, \quad B_{nm} = B_{mn}, \quad (8.10.11)$$

където коефициентът B_{nm} се нарича коефициент на Айнщайн за принуденото излъчване. Броят на атомите dN_{nm} , които извършват принуден преход за единица време от по-високо на по-ниско енергетично ниво, аналогично на (8.10.9) се дава с израза

$$dN_{nm} = P_{nm}N_n = B_{nm}\rho\nu N_n, \quad (8.10.12)$$

където N_n е броят на атомите в енергетично състояние с енергия W_n .

От (8.10.2) и (8.10.12) следва, че общият брой атоми dN'_{nm} , които за единица време чрез излъчвателни преходи (принудени или спонтанни) ще преминат от състояние n в състояние m , ще бъде

$$dN'_{nm} = A_{nm}N_n + B_{nm}\rho\nu N_n = (A_{nm} + B_{nm}\rho\nu)N_n. \quad (8.10.13)$$

За да настъпи равновесно състояние, трябва този брой атоми да бъде равен на броя на атомите dN_{mn} , които извършват за единица време принуден преход с поглъщане от състояние m в състояние n . В такъв случай от (8.10.9) и (8.10.13) се получава

$$(A_{nm} + B_{nm}\rho\nu)N_n = B_{nm}\rho\nu N_m. \quad (8.10.14)$$

От (8.10.14) може лесно да се получи формулата на Планк за равновесната плътност на енергията $\rho(\nu, T)$, изводите от която, както е известно, съвпадат много добре с експерименталните данни. Този извод обаче няма да бъде предмет на нашите разглеждания.

За отношението $\frac{N_m}{N_n}$ от (8.10.14) се получава

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{A_{nm} + B_{nm}\rho\nu}{B_{mn}\rho\nu}. \quad (8.10.15)$$

Следователно при термодинамично равновесие $N_m > N_n$. Този резултат съответствува на закона за статистическото разпределение на атомите по енергетични състояния при термодинамично равновесие, получен от Болцман:

$$N_i = C e^{-\frac{W_i}{kT}}. \quad (8.10)$$

От (8.10.16) се вижда, че с увеличаване на енергията броят на атомите N_i , намиращи се в състояние W_i , намалява.

Под населеност на дадено енергетично състояние се разбира броят на атомите в единица обем, намиращи се в това състояние.

Броят на преходите между две енергетични нива е пропорционален на броя на атомите, намиращи се на изходното ниво. Следователно при термодинамично равновесие принудените преходи поглъщане на падащата светлина ще преобладават над принудените излъчвателни преходи и интензитетът на светлината ще отслабне при преминаването ѝ през веществото.

За да се получи усилване на падащия светлинен сноп, трябва да се осъществи обратна (инверсна) населеност на енергетичните нива, т.е. такова неравновесно състояние, при което броят на атомите, намиращи се на по-високо енергетично ниво, да бъде по-голям от броя на атомите на по-ниско енергетично ниво, т.е. $N_n > N_m$. В този случай броят на принудените преходи, свързани с поглъщане на светлината, ще бъде по-малък от броя на принудените преходи, свързани с индуцирано излъчване, и интензитетът на преминаващия през веществото светлинен сноп ще се увеличи.

От (8.10.16) ще имаме

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{W_n - W_m}{kT}}$$

и следователно

$$T = -\frac{W_n - W_m}{k \ln \frac{N_n}{N_m}}.$$

При $\frac{N_n}{N_m} > 0$ и $W_n - W_m > 0$, $T < 0$.

Следователно за T се получава отрицателна стойност. Затова състоянието с инверсна населеност се нарича състояние на системата с отрицателна температура. Това название е твърде условно, тъй като понятието температура е неприложимо за термодинамично-неравновесни състояния.

Поглъщането на светлинния сноп при преминаване през слой от вещество с дебелина d се дава със закона на Буге-Ламбер

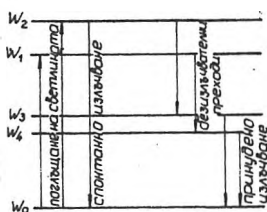
$$I = I_0 e^{-\alpha d},$$

където I е интензитетът на преминалия сноп, а α се нарича коефициент на поглъщането. В случай на увеличаване на интензитета I при преминаване на светлината през веществото коефициентът α трябва да има отрицателна стойност. Следователно вещество с инверсна населеност на енергетичните нива на атомите може да се разглежда като среда с отрицателен коефициент на поглъщане на светлината.

8.11. ЛАЗЕРИ

Принуденото излъчване е в основата на действието на новите източници на светлина, наречени лазери или оптични квантови генератори. Първите генератори на електромагнитни излъчвания в диапазона на сантиметровите вълни, наречени мазери, са създадени през 1953 г. от Басов, Прохоров и Таунс. Първият генератор на принудено излъчване в оптичния диапазон (лазер) е създаден през 1960 г. от Мейман. Генерираният от лазера светлинен сноп се характеризира с висока степен на насоченост, монохроматичност, кохерентност и голям интензитет. Основен елемент на лазерите е средата, в която по някакъв начин се осъществява инверсна населеност на енергетичните нива. Тази среда се нарича активна или лазерна среда. Интензитетът на светлинния сноп може да бъде увеличен значително, ако същият мине многократно през активната среда на лазера. За тази цел активният слой на лазера се поставя между две плоски паралелни огледала, едното от които е полупрозрачно. Нека в резултат на спонтанен преход в активната среда на лазера се излъчи фотон. При взаимодействието на този фотон с атом, намиращ се във възбудено състояние, се осъществява принуден преход, при който се излъчва втори фотон, който има същата честота и посока на движение. Тези два фотона могат да предизвикат принудено излъчване на още два фотона и т.н. Поради обстоятелството, че фотоните, които летят в направление, перпендикулярно на двете огледала, многократно се отразяват от същите, в това направление се създава лавина от фотони. Част от тези фотони преминават през полупрозрачното огледало във вид на тесен монохроматичен кохерентен светлинен сноп със значителен интензитет. Фотоните, които се движат в други направления, след неколкостепенни взаимодействия с атомите напускат активния слой на лазера през страничната му повърхност, т.е. те не участвуват във формирането на лазерния лъч. В първия лазер, създаден от Мейман, активната среда представлява цилиндър от розов рубин с дължина 5 cm и диаметър 1 cm. Основите на цилиндъра са полирани и върху тях са нанесени сребърни слоеве, единият от които е полупрозрачен. Рубиновият кристал представлява алуминиев окис (Al_2O_3), в който една малка част (около 0,05 %) от алуминиевите атоми са заместени с йони на хрома (Cr^{+++}). Именно тези йони генерират принуденото излъчване в лазера, което формира лазерния светлинен сноп. Рубинът се осветява с импулсна ксенонова лампа, която излъчва светлина в широк честотен диапа-

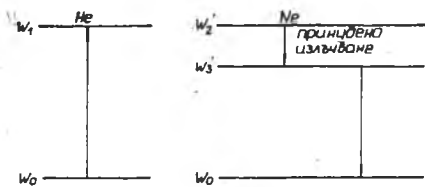
зон (напомпване на лазера). В спектъра на светлината, излъчена от ксеноновата лампа, се съдържа светлина с дължина на вълната 413 nm и 560 nm, под действието на която част от хромните йони преминават от основно във възбудено състояние (фиг.8.13).



Фиг. 8.13

Времето на живот във възбудено състояние е от порядъка на 10^{-8} s. За това време част от атомите преминава чрез спонтанно излъчване от възбудените енергетични нива W_1 и W_2 на основното ниво W_0 , но по-голямата част от атомите преминават на метастабилните нива W_3 и W_4 чрез безизлъчвателни преходи, като отдават излишъка от енергията на кристалната решетка на рубин, който се загарява. Времето на живот на хромния йон на метастабилно ниво е 10 пъти по-голямо от времето на живот на обикновеното възбудено ниво.

При достатъчно голяма мощност на ксеноновата лампа броят на хромните йони на метастабилните нива W_3 и W_4 може да се окаже значително по-голям от броя на същите йони, намиращи се на основното ниво W_0 . По този начин се осъществява инверсна населеност на енергетичните нива. За създаване на тази инверсна населеност способствува обстоятелството, че поради голямото време на живот в метастабилно състояние вероятността за спонтанни преходи в основно състояние е малка. Излъченият фотон при преход от метастабилно в основно състояние може да предизвика принудено излъчване на атомите, намиращи се в метастабилно състояние, и по този начин да се създаде една лавина от фотони по направление на оста на цилиндъра. Принуденото излъчване се състои от светлина с дължина на вълните 692,9 nm и 694,3 nm (червената област на видимия светлинен спектър).



Фиг. 8.14

Рубиновите лазери работят в импулсен режим с честота няколко импулса в минута поради значителното загаряване на лазера от ксеноновата лампа. Безизлъчвателните преходи Охлаждането на лазера осъществява чрез течен въздух.

Първият газова лазер представлява смес от 15% хелий и 85% неон. Под действието на електричен разряд част от атомите на хелия преминават във възбудено състояние, на което с

ответствува метастабилното ниво W_1 (фиг.8.14). При удари с атомите на неона хелиевите атоми, намиращи се във възбудено състояние, предават излишната си енергия на неоновите атоми и преминават в основно състояние, а неоновите атоми преминават на метастабилно енергетично ниво W_2' , разположено много близко до метастабилното ниво W_1 . По този начин се създава инверсна населеност между метастабилното ниво W_2' и лежащото под него позволено енергетично ниво на неоновия атом W_3' , която обуславя лазерното излъчване.

Газовите лазери се отличават с висока оптична еднородност на активната среда и лазерното излъчване е с висока степен на насоченост и кохерентност.

Създадените през 1963 г. полупроводникови лазери се отличават с висок коефициент на преобразуване на енергията, с която се възбужда лазерът, в енергия на излъчване на лазера поради обстоятелството, че възбуждането се осъществява чрез пропускане на електричен ток, при което става преобразуване на енергията на тока в енергия на лазерното излъчване. По-късно са създадени и други типове лазери с различни предназначения.

Забележителните свойства на лазерното излъчване определя голямото практическо приложение на лазерите. Създаването на насочено лазерно излъчване с голям интензитет се използва за пробиване, рязане и заваряване на материали, за въздействие върху хода на химичните реакции, в биологията и медицината. Високата степен на кохерентност и насоченост на лазерното излъчване дава възможност за широко използване на лазерни устройства за насочени радиовръзки в Космоса, за осъществяване на холографията и т.н. Изобщо спектърът на приложение на лазерното лъчение се разширява непрекъснато.

8.12. МАСА И РАЗМЕРИ НА АТОМНОТО ЯДРО

Масата на атомното ядро m_N се отличава много малко от масата на съответния атом m_a , тъй като масата на електрона е около 1836 пъти по-малка от масата на ядрото на водородния атом (протона). Действително като имаме предвид, че броят на електроните в един атом е Z (Z е поредният номер на елемента в периодичната система на Менделеев), получаваме следната връзка между величините m_N и m_a :

$$m_N = m_a - Zm_e,$$

където m_e е масата на електрона. Лесно може да се изчисли, че масата на електроните в атома Zm_e , с изключение на водородния атом е само няколко стотни от процента от масата на атома. Масспектрометричните измервания позволяват с голяма точност да се определи масата на атома, респективно масата на атомното ядро. Масата на атомните ядра се измерва в атомни единици за маса (а.е.м.). Една атомна единица за маса е равна на $\frac{1}{12}$ от масата на атома на въгле-

родния изотоп ${}^6_6\text{C}$. Същата единица, изразена в килограми, е равна на $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg. Освен чрез тази единица в ядрената физика маса се изразява и чрез енергетични единици, като се използва съотношението между масата и енергията на Айнщайн $W = mc^2$. Ле може да се пресметне, че една атомна единица за маса, изразена в енергетични единици, е равна на 931,4 MeV.

Както видяхме в гл.4, при маспектрометричните измервания е открито за първи път съществуването на изотопи, т.е. атоми един и същ химичен елемент, които се различават по своите маси. Масите на изотопите, изразени в а.е.м., се оказват много близки до целите числа. Цялото число, което е най-близко до масата на атома на един изотоп, изразена в а.е.м., се нарича негово масово число. За да се обозначи символично ядрото на даден изотоп, към знака на съответния химичен елемент долу вляво се поставя поредният номер на атома, а горе вляво – масовото число A . Например трите стабилни изотопи на кислорода се означават по следния начин: ${}^8_8\text{O}$, ${}^{16}_8\text{O}$ и ${}^{18}_8\text{O}$. Следванията показват, че всеки химичен елемент се характеризира с постоянно съдържание на изотопите си. Масата на всеки химичен елемент представлява средна стойност от масите на всичките изотопи.

За първи път приблизителните размери на атомните ядра са определени от Ръдърфорд при експерименталното изследване на разсейването на α -частици от ядра. Най-точните данни за размерите на атомните ядра са получени при изучаване на разсейването на бързи електрони от атомни ядра. Оказало се, че атомните ядра имат сферична форма, близка до сферичната, като радиусът им може да се определи по формулата

$$r = 1,2 \cdot 10^{-15} A^{\frac{1}{3}} \text{ m.} \quad (8.12.1)$$

Тъй като обемът на сферата е $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, от (8.12.1) следва, че обемът на ядрото е пропорционален на масовото число A , т.е., както ще видим, на броя на нуклоните в ядрото.

8.13. СЪСТАВ НА АТОМНОТО ЯДРО. СПИН И МАГНИТЕН МОМЕНТ НА ЯДРОТО

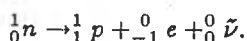
Съгласно модела на атомното ядро, създаден през 30-те години на нашия век, същото се състои от два вида елементарни частици – протони и неутрони, които имат общо название – нуклони.

Протонът може да се разглежда като състояние на нуклона с заряд $+1e$, а неутронът – с нулев заряд. Протонът, който предизвиква ядрото на водородния атом, има маса в покой $m_p = 1,007$ а.е.м., или в енергетични единици $m_p = 938,26$ MeV. Спинът на протона, изразен в единици \hbar , е $\frac{1}{2}$. Протонът има собствен магнитен момент μ_p , който се изразява в ядрени магнетони

$$\mu_p = 2,79 \mu_N,$$

където $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ се нарича ядрен магнетон. Във формулата за ядрения магнетон μ_p е масата на протона. Сравнението на ядрения магнетон μ_N с магнетона на Бор μ_B показва, че ядреният магнетон е 1836 пъти по-малък от магнетона на Бор, т.е. собственият магнитен момент на протона е около 660 пъти по-малък от собствения магнитен момент на електрона. Символичното означение на протона е 1_1p .

Друга съставна частица на атомното ядро е неутронът, открит експериментално през 1933 г. от Чадуик. Неутронът няма електричен заряд. Масата на неутрона, изразена в а.е.м., е $m_n = 1,008665$ а.е.м., или в енергетични единици $m_n = 939,55$ MeV, т.е. тя е малко по-голяма от масата на протона. Неутронът се означава чрез символа 1_0n . Спинът на неутрона е равен на този на протона, а собственият му магнитен момент е $\mu_n = -1,81\mu_N$. Знакът минус показва, че собственият магнитен момент на неутрона има противоположна посока на неговия спин. Неутронът в свободно състояние е нестабилен и се разпада на протон, електрон и частицата антинеутрино (${}^0_0\bar{\nu}$) с маса в покой, равна на нула, и нулев заряд:



Периодът на полуразпадане на неутрона е около 12 минути.

Както е известно, броят на протоните в ядрото определя поредния номер Z на елемента (атомния номер) в периодичната система на Менделеев и заряда на ядрото Ze . Общият брой на нуклоните в ядрото е равен на масовото число A . Следователно броят на неутроните ще бъде $N = A - Z$. Ядрата на изотопите на даден елемент се състоят от еднакъв брой протони, но различен брой неутрони. Например ядрата на изотопите на водорода 1_1H , 2_1H и 3_1H се състоят от един протон и съответно 0, 1 и 2 неутрона.

Атомни ядра с еднакви масови числа, но с различно Z се наричат изобари.

При леките ядра отношението на броя на неутроните към броя на протоните е близко до единица. С увеличаване броя на нуклоните в ядрото това отношение нараства и при ядрото на урана достига числото 1,6.

Атомните ядра могат да се класифицират в зависимост от четността или нечетността на числата Z и N в следните четири категории:

Ядра	Z	N	A
1. Четно-четни	четно	четно	четно
2. Четно-нечетни	четно	нечетно	нечетно
3. Нечетно-четни	нечетно	четно	нечетно
4. Нечетно-нечетни	нечетно	нечетно	четно

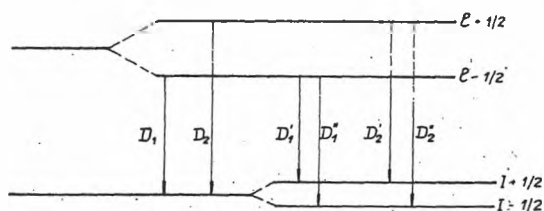
Моделът за протонно-неутронния състав на ядрото, за първи път предложен от руския физик Иваненко и развит по-нататък от

Хайзенберг, води до получаване по теоретичен път на стойности и изотопните маси на ядрата, на размерите на ядрата, на спиновите магнитни моменти на атомните ядра, които съвпадат много добре опитните данни.

Спинът на ядрото се определя от спиновете на съставляващите го нуклони и от моментите на импулса, които са свързани с орбиталното движение на нуклоните в ядрото (орбитални моменти на импулса). Оказва се, че двойка протони или двойка неутрони си взаимодействат с антипаралелни спинове, т.е. сумарният им спин е нула. Освен това орбиталният момент на импулса на двойка протони или двойка неутрони е нула. Следователно ядра, състоящи се от четен брой протони и четен брой неутрони ще имат спин, равен на нула. В другите случаи, ако ядрото се състои от четен брой нуклони, спиновото му квантово число ще бъде цяло число, а при нечетен брой нуклони – полуцяло число. Спиновото квантово число на ядрото не е по-голямо от няколко единици, което означава, че голяма част от нуклоните си взаимодействат с антипаралелни спинове, т.е. техните спинове взаимно се компенсират.

Със спина на ядрото е свързано съществуването на т.на свръхфина структура на спектралните линии. Както видяхме в §8. наблюдаваната фина структура на спектралните линии се обяснява със спин-орбиталното взаимодействие, т.е. се обуславя от съществуването на спин на електрона. Спектротричните измервания, извършени с уреди с голяма разделителна способност, показват, че всяка от двете *D*-линии на натрия, които се получават в резултат на спин-орбиталното взаимодействие, се разцепват също на две линии, които са разположени много близко една до друга. Линията D_1 , която съответствува дължина на вълната $\lambda = 589,6 \text{ nm}$, се разцепва на две линии, разстоянието между които е $\Delta\lambda = 0,0023 \text{ nm}$, а линията D_2 ($589,0 \text{ nm}$) – също на две линии на разстояние $\Delta\lambda = 0,0021 \text{ nm}$ една от друга. Именно това разцепване се нарича свръхфина структура на спектралните линии и може да се обясни със съществуването на спин на ядрото. Действително в разглеждания случай на натриеви атоми с един валентен електрон и съществуването на взаимна компенсация на спиновете и орбиталните моменти на останалите електрони квантовото число, определящо пълния спин на атома, може да взема две стойности $-I + \frac{1}{2}$ и $I - \frac{1}{2}$, където I е квантово число, определящо спина на атомното ядро. Това води до разцепването на по-ниско разположеното енергетично ниво на две нива и появяването на свръхфина структура на спектралните линии (фиг.8.15).

Атомните ядра притежават и магнитен момент, който се измерва в ядрени магнетони и за различните ядра варира до 5 ядрени магнетона. Подобно на спина магнитният момент на четно-четни ядра е равен на нула. Магнитните моменти на ядрата се измерват чрез ядрения магнитен резонанс (избирателно поглъщане от атомните ядра на електромагнитно излъчване с определена честота).



Фиг. 8.15

В §8.8 беше отбелязано, че ефектът на Зеeman се наблюдава и при енергетичните нива на атомните ядра, но поради обстоятелството, че ядреният магнетон μ_N е много по-малък от магнетона на Бор, разцепването на енергетичните нива на атомните ядра е значително по-слабо от разцепването на енергетичните нива на атома. Електромагнитно лъчение, съдържащо честоти, съответстващи на преходи между съответните поднива, ще се поглъща избирателно, т.е. ще се наблюдава явлението ядрен магнитен резонанс. Оказва се, че най-малкото изменение на магнитното поле води до отместване на избирателните честоти на ядрения магнитен резонанс. Такова изменение на магнитното поле може да се предизвика от изменение на конфигурацията на електронните слоеве в атомите, поради което ядреният магнитен резонанс може да се използва за определяне типа на химичното съединение, т.е. за определяне химичния състав на веществото.

8.14. ЕНЕРГИЯ НА СВЪРЗВАНЕ НА ЯДРОТО. МАСОВ ДЕФЕКТ

Както вече беше отбелязано, атомното ядро се състои от Z протона и $A - Z$ неутрона. Между протоните съществуват кулонови сили на отблъскване. Стабилността на атомните ядра се обяснява със съществуването на сили между нуклоните, образуващи ядрото, които имат характер на сили на привличане и превъзхождат кулоновите сили. Тези сили се наричат ядрени сили, а съответното взаимодействие между нуклоните – ядрено или силно взаимодействие. Ядреното взаимодействие се оказва значително по-сложно от гравитационното и електромагнитното взаимодействие и за него не съществува точно аналитично описание. За големината на ядрените сили обаче може да се направи преценка по енергетичен път. За да се откъсне нуклон от ядрото, трябва да се предаде на същия определено количество енергия, която се нарича енергия на свързване на нуклона в ядрото. Енергията на свързване на ядрото представлява физична величина, числено равна на работата, която е необходимо

да се извърши (или енергията, която трябва да се предаде), за да се раздели ядрото на съставлящите го нуклони, без на същите да се предава кинетична енергия. Съгласно закона за запазване на енергията, точно такова количество енергия би се освободило, ако по някакъв начин се осъществи образуване на атомното ядро от съставлящите го нуклони. В такъв случай от закона на Айнщайн за връзката между масата и енергията следва, че масата на атомното ядро m_N е винаги по-малка от сумарната маса на нуклоните, от които е съставено. Този извод се потвърждава от много точните маспектрометрични измервания на масите на ядрата. Разликата Δm между сумата от масите на нуклоните, съставлящи атомното ядро, и масата на ядрото се нарича масов дефект на ядрото. Следователно масовият дефект Δm се определя по формулата

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_N, \quad (8.14.1)$$

където с m_p и m_n са означени съответно масите на протона и неутрона.

В такъв случай за енергията на свързване на ядрото се получава

$$\Delta W = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_N]c^2. \quad (8.14.2)$$

Обикновено при определяне на величината ΔW вместо масата на ядрото се взема масата на атома и вместо масата на протона - масата на водородния атом:

$$\Delta W = [Zm_H + (A - Z)m_n - m_a]c^2. \quad (8.14.3)$$

Лесно може да се съобрази, че в този случай Z електронни маси, съдържащи се в члена Zm_H , се унищожават взаимно със Z електронни маси, съдържащи се в масата на атома. Нека като пример определим енергията на свързване на деутериевото ядро. Масата на деутериевия атом ${}^2_1\text{H}$ е 2,014102 а.е.м., а сумата от масите на водородния атом ${}^1_1\text{H}$ и неутрона е

$$m_H + m_n = 1,007825 \text{ а.е.м.} + 1,008665 \text{ а.е.м.} = 2,016490 \text{ а.е.м.}$$

В такъв случай за масовия дефект Δm и енергията на свързване ΔW се получава съответно

$$\Delta m = 0,002388 \text{ а.е.м.} \quad \text{и} \quad \Delta W = \Delta mc^2 = 2,22 \text{ MeV.}$$

Следователно, за да се раздели деутериевото ядро на протон и неутрон, трябва на същото да се предаде енергия 2,22 MeV. Действително опитите показват, че γ -фотон с минимална енергия 2,22 MeV е в състояние да разбие деутериевото ядро на протон и неутрон.

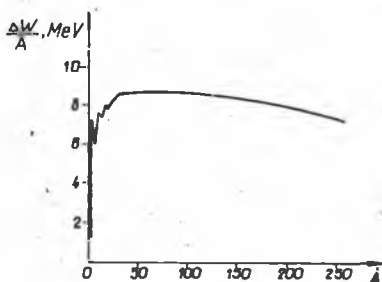
Въвеждането на величината средна енергия на свързване на нуклон в ядрото, равна на $\frac{\Delta W}{A}$, дава възможност да се сравнява устойчивостта на отделните ядра. Колкото е по-голяма средната енергия на свързване на нуклона, толкова е по-стабилно атомното ядро. За голяма част от атомните ядра средната енергия на свързване на нуклон е около 8 MeV. Интересно е да се сравни тази стойност с енергията на свързване на електрона във водородния атом, която е 13,6 eV, и с енергията на свързване на атомите в молекулите, която е от порядъка на 1 eV.

На фиг.8.16 е показана зависимостта на средната енергия на свързване $\frac{\Delta W}{A}$ на нуклон в ядрото от масовото число A .

От фиг. 8.16 се вижда, че най-силно са свързани нуклоните в ядрата с масови числа между 40 и 140 (средната част от периодичната система на Менделеев). Средната енергия на свързване на нуклон $\frac{\Delta W}{A}$ в тези ядра достига до 8,7 MeV. Величината $\frac{\Delta W}{A}$ намалява за ядра с масови числа, по-големи от 140, и за изотопа ${}_{92}^{238}\text{U}$ достига стойността 7,5 MeV. Значително по-малка е величината $\frac{\Delta W}{A}$ и за най-леките ядра. При това в областта на леките ядра се наблюдават максимуми в стойностите на $\frac{\Delta W}{A}$ които съответстват на четно-четни ядра (${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$), и минимуми, съответстващи на нечетно-нечетни ядра (${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$).

От получената зависимост на $\frac{\Delta W}{A}$ от A (фиг.8.16) следва, че са възможни два начина за освобождаване на ядрена енергия – деление на тежки ядра на две ядра, намиращи се в средата на периодичната система, и свързване на леки ядра в по-тежки. Например, ако се раздели атомното ядро с масово число $A = 240$ ($\frac{\Delta W}{A} = 7,5\text{MeV}$) на две ядра с масови числа $A = 120$ ($\frac{\Delta W}{A} = 8,5\text{MeV}$), ще се отдели енергия 240 MeV. В ядрените реактори и в атомната бомба се използва делението на уранови и плутониеви ядра под действието на неутрони.

Вторият начин за освобождаване на ядрена енергия е свързване на леки ядра в по-тежки. Например свързването на две деутериеви



Фиг. 8.16

ядра в ядро на хелия се съпровожда с освобождаване на енергия, равна на около 24 MeV. Този процес може да се осъществи, ако леките ядра се приближат на разстояния от порядъка на 10^{-15} m, на които започват да действуват ядрените сили. За да се доближат обаче на такива разстояния, те трябва да преодолеят потенциална бариера, тъй като между положително заредените ядра съществуват кулонови сили на отблъскване. Пресмятанията показват, че за да могат леките ядра да получат кинетична енергия, достатъчна за преодоляване на кулоновата потенциална бариера между тях, е необходима температурата да се повиши до стотици милиони градуси. Поради това синтезът между леките ядра се нарича термоядрен синтез или термоядрена реакция.

В основата на водородната бомба е неуправляемият термоядрен синтез. От огромно значение за човечеството е изследователската дейност в областта на управляемия термоядрен синтез, който би решил неговите енергийни проблеми.

8.15. ЯДРЕНИ СИЛИ

Ядреното взаимодействие между нуклоните е най-голямото от всички видове взаимодействия в природата. Във връзка с това то се нарича още силно взаимодействие. Ядрените сили се характеризират със следните основни свойства, получени главно при изследване на нуклон-нуклонното разсейване и на най-простата свързана система – ядрото на деутерия (деутрона):

1. Те са близкодействащи сили, т.е. действуват на много малки разстояния, които са от порядъка на размерите на атомното ядро – 10^{-15} m. На разстояния между нуклоните r , по-големи от $2 \cdot 10^{-15}$ m, ядрени сили не действуват, а при $r < 1 \cdot 10^{-15}$ m, ядрените сили на привличане се заменят с ядрени сили на отблъскване.

2. Характерна особеност на ядрените сили е тяхната зарядова независимост. Взаимодействието между два нуклона не зависи от зарядовото им състояние, т.е. дали те са протони или неутрони. Взаимодействието между два протона не се различава от взаимодействието между протон и неутрон и взаимодействието между неутрон и неутрон.

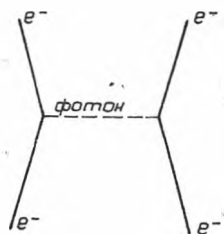
3. За ядрените сили е характерно свойството насищане – всеки нуклон си взаимодействува само с ограничен брой съседни нуклони, а не с всички нуклони в ядрото. Това следва от факта, че с хелиевото ядро нататък средната енергия на свързване на нуклон $\frac{\Delta W}{A}$ за всички атомни ядра има близки стойности.

4. Големината на ядрените сили зависи от ориентацията на спиновете на нуклоните. Така например е възможно образуването на свързана система деутрон само при паралелна ориентация на спиновете на протона и неутрона.

5. Ядрените сили не са централни сили, т.е. те не действуват

ват по направление на правата, която свързва центровете на двата нуклона.

6. Ядрените сили имат обменен характер. Съгласно теорията на японския физик Юкава за обменния характер на ядрените сили, създадена през 1935 г., силното (ядрено) взаимодействие се дължи на обмен между нуклоните на частици, които са получили название мезони. При това взаимодействието между нуклоните се осъществява чрез обмен на т.нар. виртуални мезони. В съвременната физика под виртуална частица се разбира частица, която не може да бъде регистрирана експериментално за времето на своето съществуване. За да разберем по-добре същността на обменното взаимодействие, нека най-напред се спрем на характера на електромагнитното взаимодействие от гледна точка на квантовата електродинамика. Както е известно от класическата електродинамика, взаимодействието между заредени частици се осъществява чрез създадените от тях електромагнитни полета. В квантовата електродинамика това поле се квантува, т.е. то се разглежда като съвкупност от кванти-фотони. Всяка частица създава в околното пространство поле чрез непрекъснато изпускане и поглъщане на виртуални фотони. Взаимодействието например между два електрона се осъществява чрез обмен



Фиг. 8.17

между тях на виртуални фотони. На фиг. 8.17 е показана диаграмата на Файнман, описваща това взаимодействие. Единият от електроните изпуска фотон, който се поглъща от другия електрон, като посредством виртуалния фотон се осъществява предаване на енергия и импулс от едната на другата частица. Нека електронът, който изпуска фотон, се намира в състояние на покой. Съгласно представите на класическата физика такъв процес е невъзможен, тъй като енергията на системата електрон-фотон ще бъде по-голяма от енергията на покой на електрона, т.е. ще се наруши законът за запазване на енергията. Съгласно квантовата механика обаче между енергията на системата и времето е в сила съотношението на неопределеност $\Delta W \Delta t \geq \hbar$, където ΔW е неопределеността на енергията на системата за интервала време Δt , в който тя се намира в определено състояние. Оттук непосредствено следва смисълът на понятието виртуален фотон. Нека приемем, че енергията на виртуалния фотон $h\nu$ е равна на ΔW . В такъв случай законът за запазване на енергията няма да бъде нарушен, ако за време $\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta W} = \frac{\hbar}{h\nu}$ виртуалният фотон се поглъдне от електрона, който го е излъчил, или от друг електрон.

Представата за осъществяване на електромагнитното взаимодействие чрез обмен на виртуални фотони между заредените частици води лесно до извода, че радиусът на действие на електромагнитно

тните сили е неограничен. Действително за време Δt виртуален фотон може да предаде електромагнитното взаимодействие на разстояние $r = c\Delta t = c \frac{h}{h\nu} = \frac{c}{2\pi\nu}$ и тъй като честотата ν може да бъде произволно малка (ν се мени в граници от 0 до ∞), то радиусът на действие на електромагнитните сили ще бъде неограничен.

По аналогия с обменния характер на електромагнитното взаимодействие Юкава предполага, че взаимодействието между нуклоните в ядрото се осъществява също чрез обмен на виртуални частици. При това лесно може да се стигне до извода, че ако радиусът на действие на силите бъде ограничен (каквото е случаят с ядрените сили), обменната частица трябва да има маса в покой, отлична от нула. Действително нека положим $\Delta W = mc^2$ и предположим, че виртуалната частица се движи със скорост, близка до скоростта на светлината във вакуум. В такъв случай за радиуса на действие съответните сили се получава

$$r = c\Delta t = c \frac{h}{mc^2}. \quad (8.1)$$

Ако за радиуса на действие на ядрените сили се приеме стойността $r = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, от (8.15.1) за масата m се получава, че е равна на 130 MeV, т.е. по груба оценка масата на предсказаната от Юкава частица се оказва около 250 пъти по-голяма от масата на електрона. Това е причината тази частица да бъде наречена мезон, което означава „промеждутъчен“ (частица с маса между масата на електрона и масата на протона). Следователно съгласно теорията на Юкава квантите на полето на ядрените сили са виртуалните мезони, а взаимодействието между нуклоните се осъществява чрез обмен на виртуални мезони. Известно е, че ако на електрон се предаде допълнителна енергия, може да бъде изпуснат реален фотон. По аналогия с наблюдаването на реални фотони след създаване на теорията на Юкава се е очаквало експерименталното регистриране на реални мезони. През 1936 г. в космичните лъчи е открита частица с маса, равна на 106 MeV, която се отличава малко от предсказаната от теорията на Юкава маса на мезона. Тази частица обаче, наречена μ -мезон, се оказало, че не си взаимодействува чрез силно взаимодействие с нуклоните и естествено не може да бъде носител на това взаимодействие.

През 1947 г. са открити в космичните лъчи (а по-късно получени и в ускорителите) частици със свойства, съответстващи на предсказанията на Юкава. Тези частици били наречени π -мезони.

Заредените π^{\pm} -мезони имат маса 139,6 MeV, а неутралният π^0 -мезон е с маса 135 MeV. Тези три пиона си взаимодействуват силно с нуклоните.

Всички известни взаимодействия в природата могат да се сведат до четири фундаментални взаимодействия, дадени в табл. 8.1

Аналогично на силното и електромагнитното взаимодействие

Таблица 8.1

Взаимодействие	Относителен интензитет	Квант на полето-носител на взаимодействието
Силно	1	мезони
Електромагнитно	10^{-2}	фотон
Слабо	10^{-13}	W^+ , W^- и Z^0 -бозони
Гравитационно	10^{-40}	гравитон

би могло да се очаква, че и останалите фундаментални взаимодействия се осъществяват чрез обмен на частици. Действително през 1983 г. след влизането в действие на ускорителя на насрещни протон-антипротонни снопове с много високи енергии в ЦЕРН (Женева) бяха експериментално регистрирани предсказаните от теорията носители на слабото взаимодействие – W^+ , W^- и Z^0 -частици съответно с маси 81 GeV и 91 GeV. Експериментално нерегистриран остава само квантът на гравитационното поле – гравитонът.

Откритите досега голяма брой елементарни частици могат да се класифицират по взаимодействията, в които участвуват, в три групи. Към първата група се отнася само фотонът, който участва само в електромагнитното взаимодействие. Във втората група влизат т.нар. лептони (електрон, мюон, τ -лептон и електронното, мюонното и τ -неутрино, както и техните античастици). За лептоните е характерно, че не участвуват в силните взаимодействия, а в слабите, гравитационните и електромагнитните (заредените лептони). Лептоните се считат за истински елементарни частици, тъй като нямат вътрешна структура и размерите им са толкова малки, че не могат да се определят експериментално (под 10^{-18} m).

В третата група влизат т.нар. адрони, които участвуват и в силното взаимодействие. Към адроните се отнасят барионите (нуклони и хиперони) и мезоните. Експериментите показват, че адроните имат вътрешна структура. Съгласно съвременните представи адроните се състоят от кварки. В началото е било предположено съществуването на три кварка; u -кварк, d -кварк, s -кварк и съответните антикварки, с помощта на които е възможно да бъдат получени всички известни през 60-те години адрони, но по-късно в теорията са били включени още три кварка; c -кварк, b -кварк и t -кварк, съществуването на които е вече експериментално потвърдено. Най-характерно за кварките е дробният им електричен заряд (равен на $\frac{2}{3}e$ или на $\frac{1}{3}e$) и това, че не са наблюдавани експериментално. Мезоните се състоят от двойка кварк-антикварк, а барионите от 3 кварка. Например протонът се състои от uud -кварки, а π^+ - мезонът – от двойката $u\bar{d}$.

Съгласно квантовата хромодинамика всеки кварк е носител на т.нар. цветен заряд и силното взаимодействие представлява взаимодействие на цветни заряди. Частиците, които са носители на това

взаимодействие, т.е. частиците, които се обменят между кварките се наричат глюони. Глюоните са безмасови частици, но за разлика от фотоните имат цветен заряд. Според тази теория силното взаимодействие между адроните се осъществява чрез обмен на глюони между съставящите ги кварки.

8.16. РАДИОАКТИВНОСТ

Самоволното (спонтанното) превръщане на едни атомни ядра в други, съпроводено с т.нар. радиоактивни излъчвания (α -, β - и γ -лъчи) и излъчване на някои елементарни частици, се нарича радиоактивност. Радиоактивността на атомните ядра, които съществуват в природата, се нарича естествена радиоактивност. Така например е известно, че всички атомни ядра със $Z > 82$ са нестабилни и претърпяват радиоактивни превръщания. Това се дължи на обстоятелството, че при много големи стойности на Z ядрените сили, действащи между съседните нуклони, не са в състояние да компенсират кулоновите сили на отблъскване между протоните и атомното ядро става нестабилно. Естествената радиоактивност е открита от френския физик Бекерел през 1896 г., който регистрира радиоактивни излъчвания на уранови съединения. Радиоактивността на нестабилни изотопи, създадени в лабораторни условия в резултат на ядрени реакции, се нарича изкуствена радиоактивност.

Естествената и изкуствената радиоактивност се подчиняват едни и същи закони за радиоактивното превръщане на ядрата.

В резултат на направените изследвания по отклонението на радиоактивните излъчвания в магнитно и електрично поле и по поглъщането им в различни вещества е установено, че съществуват три вида радиоактивни излъчвания: α -лъчи, β -лъчи и γ -лъчи. Ръдфорд доказва експериментално, че α -лъчите са поток от хелиеви ядра (${}^4_2\text{He}$), които се движат със скорости от порядъка на 10^7 m/s и имат кинетични енергии от порядъка на няколко MeV. Характеризират се със силно йонизиращо действие и относително малка прониквателна способност във веществото. Средният пробег на α -частиците във въздух при нормално налягане е няколко сантиметра. Алуминиева пластинка с дебелина 0,005 mm задържа напълно α -лъчите.

Бета-лъчите са поток от електрони, които се излъчват от атомното ядро със скорости от нула до скорости, достигащи стойности близки до скоростта на светлината във вакуум, и с енергии до няколко MeV. Йонизиращото им действие е значително по-слабо от това на α -лъчите, а съответно прониквателната им способност е по-голяма. Пробезите на β -частиците във въздух при нормално налягане достигат 100 cm. Алуминиева пластинка с дебелина 5 mm ги задържа напълно. Гама-лъчите са електромагнитно излъчване, което се характеризира с дължини на вълните, по-малки от тези на рентгеновите лъчи, т.е. в скалата на електромагнитните излъчвания γ -фотоните се характеризират с най-високи енергии. Гама-лъчите

се характеризират с относително малка йонизационна способност и голяма прониквателна способност (до 100 пъти по-голяма от тази на β -лъчите). Даден нестабилен изотоп излъчва само или α -частици или β - частици. Тези два вида радиоактивни превръщания се съпровождат с излъчване на γ -лъчи.

Опитите показват, че радиоактивността не се влияе от външни въздействия като изменение на температурата, на налягането, а също така като ядрен процес не се влияе и от химичните реакции. Радиоактивността на даден изотоп не се изменя, ако същият влезе в някакво химично съединение.

8.17. ЗАКОН ЗА РАДИОАКТИВНОТО РАЗПАДАНЕ

Поради обстоятелството, че радиоактивното превръщане е свързано с намаляване броя на изходните ядра, същото се нарича още радиоактивно разпадане. Процесът на радиоактивното разпадане е случаен процес, при който отделните ядра се разпадат независимо едно от друго и не може да се предскаже кога ще се разпадне дадено ядро. Това ни дава основание да приемем, че броят на разпадналите се ядра dN за време dt е пропорционален на наличния брой изходни ядра в момента t и на интервала време dt :

$$dN = -\lambda N dt, \quad (8.17.1)$$

където λ е постоянна величина, характерна за радиоактивния изотоп, наречена константа на разпадането. Знакът минус показва, че броят на изходните ядра N намалява с времето. От (8.17.1) непосредствено следва

$$\lambda = -\frac{dN}{N dt}, \quad (8.17.2)$$

т.е. константата на разпадането λ е равна на относителния брой ядра, които се разпадат за единица време. Следователно тя определя скоростта на радиоактивното разпадане. От (8.17.2) се вижда, че на константата на разпадане λ може да се даде вероятностен смисъл. Същата определя вероятността атомното ядро да се разпадне за единица време.

Ако в уравн. (8.17.1) се разделят променливите и същото се интегрира, се получава

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (8.17.3)$$

където N_0 е броят на изходните ядра в началния момент $t = 0$, а N е броят на неразпадналите се ядра в момента t . Съотношението (8.17.3) изразява закона за радиоактивното разпадане. Този закон показва, че броят на неразпадналите се радиоактивни ядра намалява експоненциално с времето.

За количествено характеризиране на времето на живот на ден радиоактивен изотоп се въвежда величината период на полуразпадане T . Това е интервалът време, за който се разпадат половината от първоначалния брой изходни ядра, т.е. при $t = T$, $N = \frac{1}{2}N_0$.

В такъв случай от (8.7.13) се получава

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T},$$

откъдето следва, че

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Периодът на полуразпадане на радиоактивните изотопи варира в широки граници – от 10^{-6} s до $5 \cdot 10^{15}$ години. Например период на полуразпадане на изотопа $^{14}_6\text{C}$, чрез който се прави т.нар. радиоактивно датироване, даващо възможност да се определи възрастта на останки от растителни или животински тъкани, е 5730 години.

Величината $\frac{dN}{dt}$, числено равна на броя на радиоактивни ядра, които се разпадат за единица време, се нарича активност на радиоактивното вещество. От (8.17.1) и (8.17.3) следва, че

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (8.17.4)$$

При $t = 0$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_0 = -\lambda N_0.$$

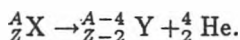
В такъв случай от (8.17.4) ще имаме

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 e^{-\lambda t}, \quad (8.17.5)$$

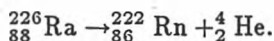
откъдето следва, че активността $\frac{dN}{dt}$ намалява също експоненциално с времето. В системата SI единицата за активността се нарича бекерел (1 Bq) и представлява активността на такова радиоактивно вещество, в което за 1 s се разпада 1 ядро. В практиката като единица за активност се използва единицата кюри (Ci). Активност 1 Ci има такова количество радиоактивно вещество, в което за една секунда се разпадат $3.7 \cdot 10^{10}$ атомни ядра. Активността на един грам радий е приблизително 1 Ci. Кратни на тази единица са единици за активност 1 mCi = 10^{-3} Ci и 1 μCi = 10^{-6} Ci.

8.18. АЛФА-РАЗПАДАНЕ НА ЯДРОТО

При всички видове радиоактивни разпадания са в сила фундаменталните закони за запазване на енергията, импулса, момента на импулса и електричния заряд. При радиоактивните разпадания и всички видове ядрени реакции е в сила и законът за запазването на броя на нуклоните. Следователно при излъчването на α -частица, която има масово число 4 и два положителни елементарни електрични заряда, от атомно ядро с масово число A (брой на нуклоните в ядрото) и пореден номер Z (брой на положителните елементарни електрични заряди) се получава ядро с масово число $A-4$ и пореден номер $Z-2$:



Например при излъчване на α -частица в резултата на разпадането на ядрото на радия се получава ядро на радон:



При α -разпадането част от енергията на покой на изходното ядро се трансформира в кинетична енергия, която се разпределя между α -частицата и полученото ядро в отношение обратно пропорционално на техните маси. Тази кинетична енергия се определя от уравнението

$$W_k = (m_{\text{изх}} - m_{\text{пол}} - m_{\alpha})c^2, \quad (8.18.1)$$

където $m_{\text{изх}}c^2$, $m_{\text{пол}}c^2$ и $m_{\alpha}c^2$ са енергиите на покой съответно на изходното ядро, полученото ядро и α -частицата. Ако се направят изчисления по формула (8.18.1), се стига до извода, че енергетически не е възможно изпускане на един или повече на брой протони, а само на α -частица, чиято маса е значително по-малка от сумата от масите на съставлящите я нуклони (голяма енергия на свързване).

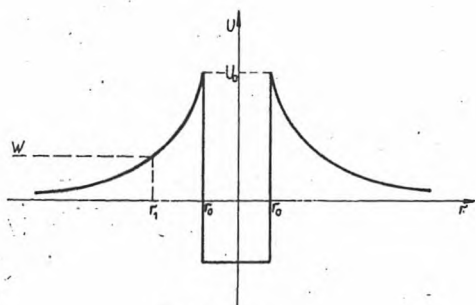
Обикновено радиоактивният изотоп излъчва няколко групи α -частици с различни кинетични енергии.

Това се обяснява с обстоятелството, че полученото ядро освен в основно състояние може да се окаже и във възбудени състояния (фиг. 8.18).

Ако полученото ядро е във възбудено състояние, кинетичната енергия на съответната α -частица ще бъде по-малка. Средното време на живот на атомното ядро във възбудено състояние варира от 10^{-15} s до 10^{-8} s. При преход на атомното ядро във възбудено състояние с по-ниска енергия или в основно състояние се излъчва γ -фотон. В някои случаи енергията на възбуждане на полученото ядро може да се отдели чрез изпускане на протон, неутрон, α -частица или електрон.



Фиг. 8.18



Фиг. 8.19

Излишъкът от енергия на възбуденото ядро може да се предаде и на един от електроните от вътрешните електронни слоеве на атома, който се отделя от атома. Това явление се нарича вътрешна конверсия. В такъв случай при преход на електрон от външните електронни слоеве на овакантеното място ще се получи характеристично рентгеново излъчване.

Опитите по разсейване на α -частици от тежки ядра показват, че атомното ядро може да се разглежда като потенциална бариера, височината на която U_0 , например за урана е по-голяма от 8,8 MeV (фиг.8.19).

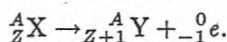
На разстояния, по-големи от радиуса на действие на ядрените сили r_0 , кривата на потенциалната енергия на α -частицата е хипербола и характеризира кулоновото взаимодействие на α -частицата с атомното ядро. Вътрешната част на бариерата е апроксимирана с права линия, характеризираща действието на ядрените сили. Опитите показват, че α -частиците, които излитат от ядрото на изотопа ${}_{92}^{238}\text{U}$, имат кинетична енергия 4,8 MeV, т.е. значително по-малка от височината на потенциалната бариера. Това може да се обясни от гледна точка на квантовата механика чрез тунелния ефект. Съгласно изводите на квантовата механика съществува отлична от нула вероятност за преминаване на α -частицата през потенциалната бариера (фиг.8.19), в резултат на което същата се отделя от атомното ядро.

8.19. БЕТА-РАЗПАДАНЕ НА ЯДРОТО

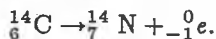
Възможни са три вида β -превръщания на атомните ядра; β^- -разпадане, при което от ядрото се отделя електрон, β^+ -разпадане, при което от ядрото се отделя позитрон, и електронно захващане, при което ядрото поглъща електрон, обикновено от K -слоя (значително по-рядко от L - и M -слоя) на атома.

Най-напред предмет на нашето разглеждане ще бъде β^- -разпадането на ядрото. При това разпадане от изходното ядро с масово число A и пореден номер Z се отделя електрон и се получава ядро с

пореден номер $Z + 1$ и същото масово число:



Например β^- -разпадането на изотопа ${}^{14}_6\text{C}$ се осъществява по следния начин:

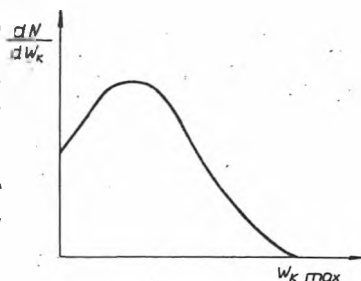


Всички радиоактивни ядра, които претърпяват β^- -разпадане, се характеризират с излишък от неутрони и чрез промяна на съотношението между протоните и неутроните при това разпадане ядрото преминава в по-ниско енергетично състояние, т.е. неговата стабилност се увеличава. Обикновено β^- -разпадането се съпровожда с излъчване на γ -лъчи. Това се дължи на обстоятелството, че аналогично на α -превръщането при β^- -превръщането полученото ядро може да бъде във възбудени състояния.

Теоретичното обяснение на наблюдаваните характерни особености на β^- -разпадането се оказва един от най-трудните проблеми в ядрената физика. Опитно е установено, че излъчените от даден радиоактивен изотоп електрони имат за разлика от α -частиците непрекъснат енергетичен спектър (фиг. 8.20), като кинетичната им енергия достига някаква максимална стойност $W_{k_{\max}}$.

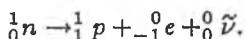
Максималната кинетична енергия $W_{k_{\max}}$ се оказва равна на разликата между енергията на покой на основното ядро и сумата от енергиите на покой на полученото ядро и на електрона. Естествено е да се зададе въпросът, защо по-голямата част от електроните имат кинетични енергии, по-малки от $W_{k_{\max}}$. В този случай не се ли нарушава законът за запазване на енергията? Освен това експериментите показват, че при β^- -разпадането се нарушават и законите за запазване на импулса и на момента на импулса, ако се предположи, че от атомното ядро се отделя само електрон. За да отстрани тези затруднения, през 1932 г. Паули изказва хипотезата, че в самия акт на β^- -разпадането заедно с електрона се излъчва и друга частица с нищожно малка маса (или с маса в покой, равна на нула), с нулев заряд и спин $-\frac{1}{2}$ (в единици \hbar), наречена по-късно от Ферми неутрино (съгласно съвременните схващания при β^- -разпадането се излъчва антинеутрино). Именно тази частица отнася недостигащата енергия, импулс и момент на импулса.

Експерименталното регистриране на неутрино е свързано със значителни трудности поради обстоятелството, че тази частица няма маса и заряд, и е извършено едва през 1956 г.

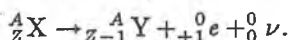


Фиг. 8.20

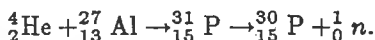
По-нататък теорията на β -разпадане на ядрото е разработена от Ферми, който за първи път предполага съществуването на четвърто фундаментално взаимодействие, наречено слабо взаимодействие. Частичката неутрино (или антинейтрино) изпитва само слабо взаимодействие с веществото. Съгласно теорията на Ферми, общата реакция, която се осъществява при β^- -разпадането, се разпределя между електрона и антинейтрино в най-различни пропорции, поради което излъчените електрони се характеризират с непрекъснат енергичен спектър. Електронът и антинейтрино (${}^0_0\bar{\nu}$) се образуват в ядрото в самия акт на разпадането вследствие на превръщане на един неутрон в протон:



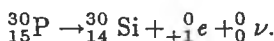
При β^+ -разпадането от атомното ядро се отделят позитрон и неутрино:



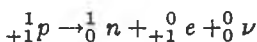
Позитронът е античастица на електрона – има същата маса и с положителен заряд, равен по големина на заряда на електрона ($+1e$). Този вид разпадане на ядрото е наблюдавано само при изкуствената радиоактивност. През 1934 г. Ирен и Жюлио Кури осъществяват ядрена реакция от следния вид:



Изотопът ${}^{30}_{15}\text{P}$ е радиоактивен и се разпада по схемата

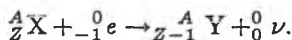


Съгласно теорията на Ферми β^+ -разпадането на ядрото съществува и при превръщане на един протон на изходното ядро в неутрон:

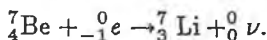


За разлика от неутрона свободният протон не може да претърпи такова разпадане, тъй като неговата маса е по-малка от масата на неутрона. Ако обаче протонът се намира в атомното ядро, той може да получи необходимата енергия в резултат на взаимодействие с другите нуклиони от ядрото.

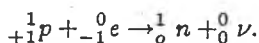
Третият вид β -превръщане, при който се захваща електрон от K -слоя, протича по схемата:



Например ядрото на ${}^7_4\text{Be}$ при захващане на електрон от K -слоя се превръща в ядро на ${}^7_3\text{Li}$:



Този вид β -превръщане се обяснява по следния начин: при захващане на електрон от K – слоя едни от протоните се превръща в неутрон и се излъчва неутрино:



Овакantenото място на електрона се заема от електрон от по-горен електронен слой, като излишната енергия се излъчва под формата на рентгенов фотон (характеристично рентгеново излъчване).

8.20. ГАМА-ИЗЛЪЧВАНЕ НА ЯДРОТО

Както вече беше отбелязано, при преход на атомното ядро от възбудено състояние в състояние с по-ниска енергия или в основно състояние се излъчва γ -фотон. Енергията на γ -фотоните се изменя в интервала от няколко keV до няколко MeV, което показва, че енергетичните нива на атомните ядра са разположени на значително по-големи разстояния помежду си, отколкото енергетичните нива на електроните в атома.

Линейният спектър на γ -лъчите потвърждава извода, че атомните ядра могат да се намират в определени енергетични състояния.

Взаимодействието на γ -лъчите с веществото се осъществява чрез три механизма: фотоелектрично поглъщане на γ -лъчи, комптъново разсейване на γ -лъчи и образуване на двойка позитрон-електрон.

При фотоелектричното поглъщане на γ -лъчи γ -фотонът отдава изцяло енергията си на електрон от атома. Този електрон се отделя от атома, като кинетичната му енергия може да се определи от уравнението на Айнщайн за фотоэффекта

$$W_k = h\nu - A,$$

където A е работата за откъсване на електрона от съответния електронен слой.

При комптъновото разсейване γ -квантът предава само част от енергията си на външен електрон от атома и продължава да се движи под някакъв ъгъл φ спрямо първоначалната си посока с намалена енергия, т.е. разсеяният γ -фотон се характеризира с по-малка честота.

При взаимодействието на γ -фотона с кулоновото поле на атомното ядро се наблюдава образуването на двойка позитрон-електрон, при условие че енергията на γ -фотона е най-малко равна на удвоената енергия на покой на електрона:

$$h\nu_0 = 2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}.$$

Възможно е образуването на двойка позитрон-електрон и при взаимодействието на γ -фотона с електрон от атома, но в този случай минимална енергия на γ -фотона е два пъти по-голяма. Образованият позитрон си взаимодействува с електрон от веществото, в резултат на което се образуват два γ -фотона. Това явление е известно като аниhilация на позитрон с електрон.

ФИЗИКА НА ТВЪРДОТО ТЯЛО

9.1. КВАНТОВА СТАТИСТИКА

Както е известно, статистическата физика изучава системи, които се състоят от голям брой частици. Пример за такава система е газ, който се състои от голяма брой молекули. В такава съвкупност от частици се проявяват специфични статистически закономерности. Главната особеност на статистическите закономерности е техният вероятностен характер. Чрез изследване на тези закономерности статистическата физика си поставя задача да обясни микросъстоянието на системата, което е достъпно за непосредствено наблюдение.

Поведението на система от частици, които се подчиняват на законите на класическата механика, се описва от статистиката Максвел-Болцман. Състоянието на всяка такава частица се определя еднозначно от координатите x, y и z и проекциите на импулса по направление на трите координатни оси p_x, p_y и p_z . Координатите, импулсите и другите физични характеристики на тези частици имат непрекъснат спектър, т.е. могат да приемат всички стойности в даден интервал. Класическите частици са различими, тъй като при своето движение описват напълно определени траектории.

Предмет на нашите разглеждания ще бъде система от частици, които проявяват двойствена корпускулярно-вълнова природа. Както е известно, такива частици се подчиняват на законите на квантовата механика. За разлика от класическата механика съгласно принципите на квантовата механика частиците, образувачи на системата са неразличими една от друга. Това свойство е известно като принцип на тъждествеността на частиците и следва от съотношенията на неопределеност. Съгласно тези съотношения за частиците, подчиняващи се на законите на квантовата механика, не е приложимо понятието траектория. Поради това, ако регистрираме частица в даден момент t_1 и им припишем номера 1 и 2, ние не сме в състояние в някакъв следващ момент t_2 , в който отново регистрираме частиците, да кажем коя частица е с №1 и коя е с №2.

В зависимост от специфичните свойства, които проявяват частиците, образувачи дадена съвкупност, същите се делят на две групи: фермиони и бозони. Фермионите се подчиняват на принципа

Паули, според който в дадено квантово състояние може да се нами-
ра не повече от един фермион. Следователно между фермионите от
даден тип съществува специфично взаимодействие, което пречи на
същите да попадат в едно и също състояние. За бозоните може да се
каже, че съществува обратният ефект – в резултат на някакво спе-
цифично взаимодействие те се стремят да попаднат в едно и също
състояние.

Опитните резултати показват, че фермионите са частици с по-
луцял спин (в единици \hbar), а бозоните – с цял спин. Фермиони са
например електроните, протоните, неутроните и други елементарни
частици, както и ядра с нечетен брой нуклони, а бозони са фотоните,
 π -мезоните, K -мезоните и др., както и ядра с четен брой нуклони.

Нека сега да видим при какви условия се проявяват специфич-
ните свойства на системата, съставена от фермиони или бозони.
Нека предположим, че броят на частиците е N , а броят на възмо-
жните състояние е M . Ако $M \gg N$, т.е. ако $\frac{N}{M} \ll 1$, въпросът, колко
частици могат да бъдат в едно и също състояние, отпада, тъй като
на всяка частица се падат голям брой свободни състояния и вероя-
тността частиците да се намират в близки състояния е малка. В този
случай няма да се проявяват специфичните свойства на фермионите
и бозоните. Системи от частици, за които е изпълнено условието
 $\frac{N}{M} \ll 1$, се нарича неизродена система.

Специфичните свойства на фермионите и бозоните ще се про-
явяват в случай, че $\frac{N}{M} \approx 1$, т.е. когато броят на възможните състо-
яния е от порядъка на броя на частиците. В такъв случай въпросът,
какъв брой частици могат да заемат дадено състояние, започва да
играе съществена роля и обуславя специфичните свойства на систе-
мата като цяло. Система от частици, за които е изпълнено условието
 $\frac{N}{M} \approx 1$, се нарича изродена система.

Изродена система могат да образуват само частици, които се
подчиняват на законите на квантовата механика, тъй като само в
такъв случай броят на състоянията може да бъде краен. Изиро-
дена система образуват класическите частици, но същата може да
бъде образувана и от квантовомеханични частици.

Свойствата на изродени системи от фермиони се изучават от
квантовата статистика на Ферми-Дирак, а на изродена система от
бозони – от квантовата статистика на Бозе-Айнщайн. Свойствата на
класическите частици, които образуват винаги неизродени системи,
се изучават от класическата статистика на Максвел-Болцман. На
същата статистика се подчиняват и неизродени квантовомеханични
системи от частици.

9.2. КВАНТУВАНЕ НА ФАЗОВОТО ПРОСТРАНСТВО. ФУНКЦИЯ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО

Нека си представим мислено шестмерно пространство, в което вся-
ка точка има координати x, y, z, p_x, p_y, p_z , които са координатите и про-

екциите на импулса на частицата. Такова пространство се нарича фазово пространство. На всяко състояние на класическата частица в това пространство ще съответствува точка, наречена фазова точка.

Произведението $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ е елементарен обем в фазовото пространство и се нарича елемент на фазовото пространство. Елементът на фазовото пространство $\Delta\tau$ може да се представи по следния начин:

$$\Delta\tau = \Delta\tau_V \Delta\tau_p,$$

където $\Delta\tau_V$ е елементарният обем в тримерното пространство с координатите x, y, z , а $\Delta\tau_p$ е елементарният обем в тримерното пространство с импулсите p_x, p_y, p_z .

Ако частицата се подчинява на законите на квантовата механика, от съотношенията на неопределеност ще имаме

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar,$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar,$$

където $\Delta x, \Delta y$ и Δz са неопределеностите на координатите на частицата, а $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ са неопределеностите на проекциите на импулса.

Произведението от лявите страни на горните съотношения е елементарният обем $\Delta\tau$ от фазовото пространство. Следователно на всяко състояние на частицата във фазовото пространство ще съответства не точка, а елемент $\Delta\tau$ с минимални размери \hbar^3 . На различни елементи на фазовото пространство съответствуват различни състояния на частицата, ако тези елементи имат размери малки от \hbar^3 . По-подробен анализ показва, че елементът на фазовото пространство, съответстващ на дадено състояние на частицата, трябва да има обем \hbar^3 .

Ако частиците се движат свободно в обема V , разпределението им в този обем ще бъде равномерно и може да се счита, че $\Delta\tau_p$ т.е. частиците са делокализирани в този обем. На същите нелагат никакви ограничения при движението им в обема V . По-точно това вместо шестмерното пространство може да се използва тримерното пространство на импулсите, а елементът $\Delta\tau_p$ съответства на дадено квантово състояние, ще бъде

$$\Delta\tau_p = \frac{\Delta\tau}{V} = \frac{\hbar^3}{V}.$$

От горната формула следва, че с увеличаване на обема V намалява $\Delta\tau_p$ и при достатъчно голяма стойност на V , $\Delta\tau_p$ може да се счита за

толкова малко, че частиците практически да имат във всеки момент точно определени стойности на импулса, респективно на енергията $W = \frac{p^2}{2m}$, които ще характеризират дадено състояние. Ако се вземе предвид спинът на частицата, се стига до извода, че на всеки елемент на фазовото пространство може да се съпостави не едно, а $(2s + 1)$ -състояния на частицата, където s е спиновото квантово число. Тези състояния се наричат спинови състояния и се различават по ориентацията на спина спрямо определено направление. Така например в случай на електрони на всеки елемент на фазовото пространство съответствуват две състояния на електрона, които се различават по ориентацията на спина.

Нека с $dN(W)$ означим броя на частиците, които имат енергии, заключени в интервала $W, W + dW$. Тази величина може да се представи по следния начин:

$$dN(W) = f(W)g(W)dW, \quad (9.2.1)$$

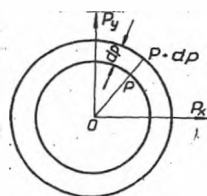
където $f(W)$ е броят на частиците, намиращи се в състояние с енергия W , а $g(W)dW$ изразява броя на възможните състояния в интервала $W, W + dW$. Функцията $f(W)$ се нарича функция на разпределението. На функцията на разпределението може да се даде и следният смисъл: Нека разделим пространството на импулсите на елементи с размери $\frac{h^3}{V}$. Всеки елемент съответствува на определено квантово състояние с енергия W . Функцията на разпределението изразява вероятността за запълване на тези елементи с частици, или с други думи, вероятността частиците да имат определена енергия W .

За да определим величината $g(W)dW$, нека построим в пространството на импулсите две концентрични сфери с радиуси p и $p + dp$, на които ще съответствуват енергии W и $W + dW$.

На фиг.9.1 са дадени окръжностите, които се получават в резултата на пресичането на тези сфери с равнината, определена от осите p_x и p_y .

Обемът на сферичния слой, ограничен от сферите, е $4\pi p^2 dp$, а броят на елементите $\frac{h^3}{V}$, който той съдържа, ще бъде

$$k = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} V.$$



Фиг. 9.1

Ако се вземе предвид обстоятелството, че на всеки елемент съответствуват $2s + 1$ различни състояния, различаващи се по ориентацията на спина на частиците, за броя на възможните състояния в интервала на импулсите $p, p + dp$ се получава

$$g(p)dp = (2s + 1)k = (2s + 1) \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp. \quad (9.2.2)$$

От съотношението $p = \sqrt{2mW}$ получаваме

$$dp = \frac{1}{2}\sqrt{2m}W^{-\frac{1}{2}}dW.$$

В такъв случай от (9.2.2) ще имаме

$$g(W)dW = (2s + 1)\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}W^{\frac{1}{2}}dW. \quad (9.2.3)$$

В случай на система от електрони $s = \frac{1}{2}$ и от (9.2.3) се получава

$$g(W)dW = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}W^{\frac{1}{2}}dW. \quad (9.2.4)$$

Величината $g(W)$ представлява плътността на броя на състоянията, т.е. броят на състоянията в единичен енергиен интервал. (9.2.3) непосредствено следва, че

$$g(W) = (2s + 1)\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}W^{\frac{1}{2}}.$$

Следователно плътността $g(W)$ на броя на възможните състояния нараства с енергията W ($g(W) \sim \sqrt{W}$). Това означава, че енергетичните нива, всяко едно от които съответства на определено квантово състояние, ще бъдат разположени толкова по-близо едно до друго, колкото е по-голяма енергията W .

Ако се интегрира изразът (9.2.3) в граници от 0 до W , ще получи броят на възможните състояния на частиците в интервал по енергии от 0 до W :

$$M = (2s + 1)\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}W^{\frac{3}{2}}. \quad (9.2.5)$$

В случай на идеален газ съгласно молекулно-кинетичната теория $W = \frac{3}{2}kT$ и от (9.2.5) се получава

$$M = (2s + 1)\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}(kT)^{\frac{3}{2}}.$$

В такъв случай условието идеалният газ да бъде неизродената система ще бъде

$$\frac{1}{2s + 1} \frac{N}{V} \frac{h^3}{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}(kT)^{\frac{3}{2}}} \ll 1. \quad (9.2.6)$$

Може лесно да се покаже, че при нормални условия газове изпълняват това условие.

За електронния газ в метала ще имаме

$$\frac{N}{V} \approx 10^{28} m^{-3}, \quad m \approx 10^{-30} \text{kg}.$$

Изчисленията по формула (9.2.6) показват, че в този случай електронният газ става неизродена система при температури над 10^4K . Както е известно, при такива температури металите не могат да бъдат в твърдо състояние. Следователно електронният газ в металите ще представлява винаги изродена система. Тази система поради полуделия спин на електроните ще се подчинява на квантовата статистика на Ферми-Дирак.

Ферми и Дирак намират следната функция на разпределението за изродена система от фермиони, наречени функция на разпределението на Ферми-Дерак:

$$f_F(W) = \frac{1}{e^{\frac{W-\mu}{kT}} + 1}, \quad (9.2.7)$$

където W е енергията, характеризираща дадено квантово състояние, а величината μ представлява химичния потенциал. Както е известно от термодинамика, химичният потенциал изразява изменението на вътрешната енергия на системата при изменение на броя на частиците, които я съставят с единица, при условие че ентропията и обемът на системата остават постоянни.

От (9.2.1), (9.2.3) и (9.2.7) се получава

$$dN(W) = (2s + 1) \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{W^{\frac{1}{2}} dW}{e^{\frac{W-\mu}{kT}} + 1}. \quad (9.2.8)$$

В случай на система, съставена от електрони, $s = \frac{1}{2}$ и от (9.2.8) ще имаме

$$dN(W) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{W^{\frac{1}{2}} dW}{e^{\frac{W-\mu}{kT}} + 1}. \quad (9.2.9)$$

9.3. МОДЕЛ НА СВОБОДНИТЕ ЕЛЕКТРОНИ

В квантовата статистика на Ферми-Дирак се използва моделът на свободните електрони. Този модел дава възможност да се обяснят редица важни физични свойства на металите. Основно предположение на модела на свободните електрони е, че валентните електрони извършват свободно движение в целия обем на метала. Съгласно този модел потенциалната енергия на електроните е еднаква във всички точки на този обем, т.е. движението на електроните в метала се разглежда като движение на частици в правоъгълна потенциална яма. Следователно се приема, че електричните полета на положителните йони и електроните в кристала средно правят

се компенсират взаимно с изключение на повърхността. На повърхността на метала се предполага, че съществува електрично поле, което не позволява на електроните да напускат метала.

В квантовата механика беше разгледан въпросът за движение на частица в потенциална яма. Получените в този случай резултати при решаване на уравнението на Шрьодингер са напълно приложими за случая на движение на свободни електрони в метала.

В модела на свободните електрони се използват т.нар. периодични гранични условия. Разглежда се движението на електрони в безкрайно голямо твърдо тяло, като се предполага, че вълновата функция ψ , описваща движението на електрона, е периодична функция на координатите с период L . За тяло с крайни размери с форма на куб се приема, че ръбът на куба има дължина L и че вълновата функция ψ е също периодична функция с период L .

В случай на едномерно движение в неограничена среда движението на свободен електрон се описва с вълната

$$\psi(x) = Ae^{ikx}, \quad (9.3.1)$$

където k е вълновото число. От граничното условие за периодичност на вълновата функция ще имаме

$$\psi(x+L) = \psi(x). \quad (9.3.2)$$

Ако (9.3.1) се замести в (9.3.2), се получава

$$Ae^{ik(x+L)} = Ae^{ikx}.$$

Оттук следва, че $e^{ikL} = 1$, а това е възможно само ако

$$k_n = n \frac{2\pi}{L} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (9.3.3)$$

Ако се постави k_n , изразено чрез (9.3.3), във формулата $p^2 = \hbar^2 k^2 = 2mW$, за енергията W се получава

$$W_n = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} n^2. \quad (9.3.4)$$

Следователно и в случай на периодични гранични условия енергията на свободните електрони има дискретен спектър.

Направените изводи могат лесно да се обобщят за случая на движение на електрони в тримерното пространство. В този случай вълновата функция е от вида

$$\psi(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = Ce^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}.$$

Нека предположим, че величините k_x, k_y и k_z се подчиняват на периодични гранични условия от вида (9.3.3). Тогава ще имаме

$$k_x = n_1 \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_2 \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_3 \frac{2\pi}{L},$$

където $n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

В такъв случай за енергията W на електрона ще получим

$$W = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Моделът на свободните електрони е твърде грубо приближение. Така например потенциалната енергия на електроните в метала не може да бъде постоянна величина в целия обем на метала, а ще бъде периодична функция на координатите, тъй като електричното поле на положителните йони, разположени във възлите на кристалната решетка, е периодична функция на координатите.

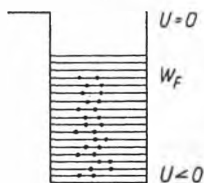
Моделът на свободните електрони не е в състояние да даде отговор на въпроса, защо по своите електрични свойства твърдите тела се делят на проводници, диелектрици и полупроводници. Отговор на този въпрос дава зонната теория, която е следващ етап в развитието на квантовата теория на твърдото тяло.

9.4. РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ЕЛЕКТРОНИТЕ В МЕТАЛА ПО ЕНЕРГИИ ПРИ АБСОЛЮТНАТА НУЛА

Особено ясно се проявява разликата между изводите на класическата и квантовата статистика при температура, равна на абсолютната нула. Ако електронният газ (съвкупността на свободните електрони) в метала се подчиняваше на класическата статистика на Максвел-Болцман, скоростите на всички електрони при тази температура биха били равни на нула и електроните биха били неподвижни. Съгласно модела на свободните електрони електроните в метала могат да се разглеждат като частици, движещи се в потенциалната яма (фиг.9.3).

На тази фигура кривата на потенциалната енергия на електрона U в електричното поле на метала е представена като правоъгълна потенциална яма.

При температура, равна на абсолютната нула, електроните биха се намирили на дъното на потенциалната яма, ако се отнасяха като класически частици.



Фиг. 9.2

Както е известно, електронният газ в метала представлява фермионен газ, т.е. той се подчинява на принципа на Паули. Следователно на енергетичното ниво, съответстващо на дъното на потенциалната яма, могат да се разположат най-много два електрона с противоположна ориентация на спиновете. Останалите електрони ще заемат последователно по-високите енергетични нива (фиг.9.2). Най-високото енергетично ниво, заето от електрони при $T = 0$ К, се нарича ниво на Ферми. Електроните, които се намират на нивото на Ферми, ще има максимална кинетична енергия. Тази

енергия се отчита от дъното на потенциалната яма и се нарича енергия на Ферми. (Енергията на Ферми W_F е винаги положителна величина.)

Горното разпределение на електроните по енергия при $T = 0$ К, получено от най-общи съображения, следва непосредствено от статистиката на Ферми-Дирак, ако в (9.2.7) се приеме, че $\mu = W_F$.

В такъв случай функцията на разпределението на Ферми-Дирак добива вида

$$f_F(W) = \frac{1}{e^{\frac{W-W_F}{kT}} + 1}. \quad (9.4.1)$$

Нека сега видим как се изменя функцията на разпределението (9.4.1) с енергията при $T = 0$ К. При стойности на енергията W , по-големи от енергията на Ферми, и при $T \rightarrow 0$ К, ще имаме

$$W - W_F > 0,$$

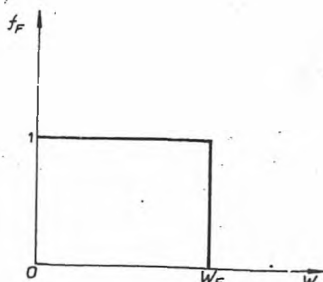
$$e^{\frac{W-W_F}{kT}} \rightarrow \infty.$$

В такъв случай от (9.4.1) следва, че $f_F(W) \rightarrow 0$. При $W < W_F$, $W_F - W > 0$ и при $T \rightarrow 0$ К се получава

$$e^{\frac{W-W_F}{kT}} = \frac{1}{e^{\frac{W_F-W}{kT}}} \rightarrow 0; \quad f_F(W) \rightarrow 1.$$

Следователно при температура, равна на абсолютната нула, в енергийния интервал от 0 до W_F функцията на разпределението на Ферми-Дирак е равна на 1. При преминаване през точката $W = W_F$ тя със скок става нула (фиг. 9.3).

От фиг. 9.3 се вижда, че при $T = \text{OK}$ електроните заемат всички позволени енергетични нива, разположени в интервала $[0, W_F]$, при това вероятността за запълване на тези нива е $f_F(W) = 1$, т.е. на всяко ниво се намира съгласно принципа на Паули по 2 електрона с противоположна ориентация на спиновете. Всички енергетични нива, които са разположени по-високо от нивото на Ферми W_F , остават съвършено свободни – вероятността $f_F(W)$ за тяхното запълване с електрони е равна на нула.



Фиг. 9.3

От (9.4.1) следва, че при $W = W_F$ и $T \neq \text{OK}$, $f_F(W) = \frac{1}{2}$. Следователно при $T \neq \text{OK}$ нивото на Ферми е енергетично ниво с вероятност на запълване $f_F(W) = \frac{1}{2}$.

За разпределението на електроните в метала по енергии при $T = \text{OK}$ от (9.2.1) и (9.2.9) се получава

$$dN(W) = g(W)dW = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} W^{\frac{1}{2}} dW \quad \text{при } W < W_F. \quad (9.4.2)$$

От (9.4.2) следва, че плътността на възможните енергетични състояния $g(W)$ нараства с енергията [$g(W) \sim W^{\frac{1}{2}}$] при $W < W_F$. Нека видим сега как може да се определи енергията на Ферми W_F . Ако се интегрира изразът (9.4.2) от 0 до W_F , ще се получи общият брой на свободните електрони в метала:

$$N = \int_0^{W_F} dN(W) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^{W_F} W^{\frac{1}{2}} dW = \frac{8\pi V}{3h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} W_F^{\frac{3}{2}}.$$

Оттук, ако положим $\frac{N}{V} = n$, се получава

$$W_F^{\frac{3}{2}} = \frac{h^3}{(2m)^{\frac{3}{2}}} \frac{3n}{8\pi} \quad \text{или} \quad W_F = \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2m}. \quad (9.4.3)$$

Отношението $n = \frac{N}{V}$ изразява броя на електроните в единица обем. От (9.4.3) следва, че енергията на Ферми се определя от броя на електроните в единица обем на метала.

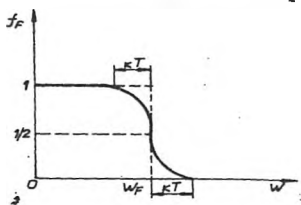
Пресмятанията показват, че енергията на Ферми за метали е в интервала 3–10 eV, а скоростта на електроните, намиращи се нивото на Ферми, е от порядъка на 10^6 m/s. Съгласно класическата физика молекулите на едни газ биха имали такава енергия при температура от порядъка на няколко десетки хиляди градуси. Следователно получените резултати за енергията на Ферми са в разрез с класическите представи.

Както е известно, за свободните електрони е в сила следна връзка между енергията на електрона W и импулса p :

$$W = \frac{p^2}{2m}. \quad (9.4)$$

При $T = 0\text{K}$ на енергията на Ферми W_F ще съответствува импулс $p_F = \sqrt{2mW_F}$. Ако в пространството на импулсите се прекара сфера с радиус p_F , ще се получи изоенергетична повърхност, която от своя страна представлява квантови състояния с електрони от незапълнените. Тази повърхност се нарича повърхност на Ферми. Видът на повърхността на Ферми се определя от зависимостта на енергията W от импулса p . Трябва да се отбележи, че тази зависимост е от вида (9.4.4) само в случай на свободно движещи се електрони и само в този случай повърхността на Ферми е сфера. За електроните, движещи се в периодичното поле на кристалната решетка, повърхността на Ферми не е със сферична форма.

При повишаване на температурата енергията на електроните се повишава и същите могат да преминат на по-високи енергетични нива. Енергията на топлинното движение на електроните е от порядъка на kT . Тъй като тази енергия при стайна температура е много по-малка от енергията на Ферми ($kT \ll W_F$), на по-високи енергетични нива от нивото на Ферми могат да преминат само електрони, чиито енергетични нива са разположени в тесен участък от порядъка на kT непосредствено до нивото на Ферми (фиг. 9.4). Електроните от по-ниските енергетични нива остават незасегнати от топлинното възбуждане, тъй като енергията на топлинното движение kT е недостатъчна



Фиг. 9.4

за да преминат на нива, по-високи от нивото на Ферми. Следователно при повишаване на температурата само малка част от електроните с енергия, малко по-малка от енергията на Ферми W_F , преминават на енергетични нива с енергия, малко по-голяма от W_F , и се получава ново разпределение на електроните по енергетични състояния (фиг. 9.4).

Пресмятанията показват, че при стайна температура тези електрони са около 1 % от общия брой на свободните електрони. Следователно съгласно изводите на квантовата статистика на Ферми-Д

рак, електроните в метала проявяват слаба чувствителност по отношение на температурата, което се потвърждава и от опитните данни.

9.5. ЗОННА ТЕОРИЯ НА ТВЪРДОТО ТЯЛО. СЪСТОЯНИЕ НА ЕЛЕКТРОНИТЕ В ТВЪРДОТО ТЯЛО. ЕНЕРГЕТИЧНИ ЗОНИ НА ЕЛЕКТРОНИТЕ В КРИСТАЛА

Зонната теория на твърдото тяло е квантовомеханична теория, която дава възможност да бъде решена количествено задачата за енергетичния спектър на електроните в кристала. Кристалът е система, която се състои от голям брой електрони и атомни ядра. Най-пълна информация за физичните свойства на такава система може да се получи чрез решаването на съответстващото на тази система стационарно уравнение на Шрьодингер. Решаването на това уравнение се извършва чрез няколко последователни приближения.

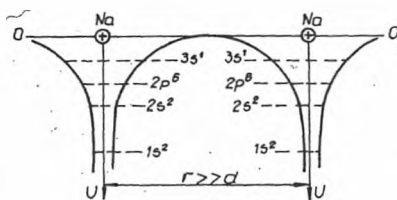
Нашите разглеждания на въпроса за образуване на енергетични зони на електроните в кристала ще имат обаче качествен характер.

Една от основните задачи на зонната теория на твърдото тяло е да се изследва какво влияние оказва взаимодействието между атомите, образувачи кристалната решетка, върху енергетичните нива на електроните в тези атоми.

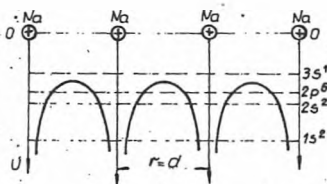
За да се изясни влиянието на това взаимодействие върху състоянието на електроните в твърдо тяло, ще разгледаме едни прост пример: На фиг. 9.5 са показани два изолирани натриеви атома, т.е. разстоянието между тях r е толкова голямо, че взаимодействието между същите може да се пренебрегне. Всеки атом е представен от енергетична гледна точка във вид на потенциала яма, ограничена от криви, изразяващи зависимостта на потенциалната енергия на електрона от разстоянието му до ядрото. С пунктирни линии са изразени енергетичните нива на натриевия атом. Дадени са и означенията на нивата и броят на електроните на всяко ниво. Както се вижда от фиг.9.6, между двата атома съществува потенциална бариера, която не позволява на електроните да преминават свободно от единия на другия атом. Височината и ширината на тази бариера са различни за електрони, намиращи се на различни енергетични нива.

Нека двата атома се приближат на разстояние, равно на константата на кристалната решетка. При намаляване на разстоянието между атомите нараства взаимодействието между тях. Потенциалните криви, чрез които са представени атомите на фиг. 9.5, се наслагат и дават резултантни криви на потенциалната енергия, изобразени на фиг.9.6.

Както се вижда от фиг.9.6, максимумите на тези криви лежат по-ниско от нулевото енергетично ниво, т.е. височината на потенциалната бариера намалява. Освен това при приближаване на атомите намалява и ширината на потенциалната бариера. В резултат на то-



Фиг. 9.5



Фиг. 9.6

ва нараства значително вероятността за преминаване на външните електрони от един на друг атом. В случая на натриеви атоми височината на потенциалната бариера се оказва дори по-ниска от енергетично ниво $3s$, заето от валентните електрони. Следователно тези електрони могат свободно да преминават от един атом на друг, т.е. същите могат да се движат свободно в обема на целия кристал поради което вече не може да се говори, че даден валентен електрон принадлежи на определен атом. Такъв електрон трябва да се счита, че принадлежи едновременно на всички атоми, образуващи кристалната решетка, поради което валентните електрони в кристала се наричат колективизирани. От фиг. 9.6 се вижда, че състоянието на вътрешните електрони практически не се изменя и поради съществуването на потенциална бариера електроните от вътрешните слоеве не могат да преминават от един на друг атом.

Взаимодействието между атомите при образуване на кристалната решетка води до друг важен резултат. Това взаимодействие предизвиква разцепване на енергетичните нива на атомите и пренасяването им в кристала в енергетични зони. Нека разгледаме това въпрос по-подробно.

Както е известно, енергията на електрона в изолиран атом определя преди всичко от главното квантово число n и орбиталното квантово число l . (Слабата зависимост на енергията от орбиталните квантови числа в случая се пренебрегва.) Следователно дадено енергетично ниво ще съответствуват $2(2l+1)$ квантови състояния на електрона, които ще се различават едно от друго по магнитното квантово число m и магнитното спиново квантово число $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Такива енергетични нива се наричат изродени, с кратност $g = 2(2l+1)$. Под действието на външно електрично или магнитно поле настъпват изменения в енергетичните нива на изолирания атом. От една страна, нивата се отместват от своите първоначални положения, а, от друга страна, дадено енергетично ниво се разцепва на $(2l+1)$ поднива. (Спиновото квантово число оказва слабо влияние върху енергията на електрона и тук се приема, че състояния, които се различават по знака на m_s , имат практически еднакви енергии)

Следователно под действието на външно електрично или магнитно поле става „снемане“ на израждането. Причината за разцепване на изродените енергетични нива под действието на външно поле се състои в това, че електроните с еднакви енергии, но намиращи се в различни квантови състояния, по различен начин си взаимодействуват с външното поле.

Външното електрично или магнитно поле оказва силно влияние на енергетичните нива на валентните електрони, докато енергетичните нива на вътрешните електрони, които са свързани силно с ядрото, почти не изпитват влияние от страна на тези полета.

В твърдото тяло атомите са разположени близо един до друг и всеки един от тях се намира в електричното и магнитно поле, създадени от останалите атоми. Нека видим сега какво е влиянието на взаимодействието между атомите, образуващи кристалната решетка, върху техните енергетични нива. Нека кристалната решетка е изградена от N атома. В такъв случай дадено неизродено енергетично ниво се повтаря в кристала N пъти, т.е. в кристала същото е N -кратно изродено. В резултат на взаимодействието между атомите на кристала това израждане се сменя, като неизроденото енергетично ниво на изолирания атом в кристала се разцепва на N близко разположени едно от друго нива и по такъв начин се образува енергетична зона. Ако енергетичното ниво има $2(2l + 1)$ -кратно израждане, същото се разцепва в кристала на $N(2l + 1)$ енергетични нива. (Тук се пренебрегва влиянието на спина.)

Ясно е, че взаимодействието между атомите в кристалната решетка ще оказва най-силно влияние върху валентните електрони и енергетичните зони, образувани от разцепването на енергетичните нива на тези електрони, ще бъдат най-широки. Енергетичните нива на вътрешните електрони на атомите, образуващи кристалната решетка, или не се разцепват, или се разцепват съвсем слабо (фиг. 9.7).

Оценка на ширината на енергетичните зони може да се направи, ако се използват някои основни съотношения на квантовата механика. От квантовата механика е известно, че съществува следното съотношение на неопределеност между величините енергия W и време t :

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar. \quad (9.4.1)$$

В разглеждания случай неопределеността на енергията ΔW ще представлява ширината на дадено енергетично ниво, а Δt – времето на живот на електрона на това ниво.

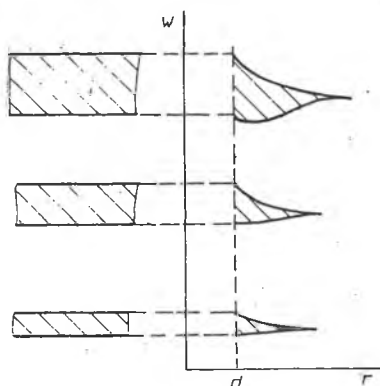
От (9.4.1) се получава

$$\Delta W \approx \frac{\hbar}{\Delta t}. \quad (9.4.2)$$

Като се използва известната от квантовата механика формула за прозрачността на потенциална бариера, може да се покаже, че честотата на тунелен преход на външни електрони на съседни атоми при ширина на бариерата от порядъка на атомните размери (10^{-10} m) е от порядъка на 10^{15} s⁻¹. Тогава средното време на пребиваване на електрона около даден атом ще бъде

$$\Delta t = \frac{1}{\nu} = 10^{-15} \text{ s.}$$

Ако тази стойност на Δt се замести в (9.4.2), ще получим за ΔE стойност от порядъка на 1 eV. Следователно енергетичното ниво на валентните електрони се превръща в кристала в енергетична зона с ширина от порядъка на единици електроноволти. Лесно може да се покаже, че в случай на вътрешни електрони поради значително по-голямата височина и ширина на потенциалната бариера вероятността за тунелен преход на същите е нищожна и оттук се получава, че енергетичните нива на такива електрони в кристала са толкова тесни, колкото са тесни и в изолирания атом.



Фиг. 9.7

ка на 1 eV, то разстоянието между съседните нива ще бъде приблизително 10^{-22} eV, т.е. позволените енергетични нива в зоната са разположени много близко едно до друго.

Подобно на изолирания атом, в който дискретните енергетични нива са разделени с области на забранени стойности на енергията, в твърдото тяло позволените енергетични зони са разделени една от друга със зони на забранените стойности на енергията. Ширината на забранените зони е от порядъка на ширината на позволените енергетични зони. С увеличаване на енергията ширината на забранената зона намалява, а ширината на позволените енергетични зони се увеличава (фиг.9.7).

Съгласно направените по-горе разглеждания всяка позволена енергетична зона се състои от N или $N(2l + 1)$ близко разположени енергетични нива и съответствува на дадено енергетично ниво на изолирания атом. В кристал с обем 1 cm³ броят на атомите N е от порядъка на 10^{22} - 10^{23} атома. Съответно в такъв порядък ще бъде броят на енергетичните нива в зоната. Ако ширината на зоната е от порядък

9.6. ЕФЕКТИВНА МАСА НА ЕЛЕКТРОНА

Както е известно, ако свободен електрон се движи в електрично поле с интензитет \vec{E} , същото му действа със сила $\vec{F} = -e\vec{E}$. В такъв случай уравнението на движение на електрона (вторият закон на Нютон) ще има вида

$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}. \quad (9.6.1)$$

Ако външното електрично поле действа на електрон, който се намира в кристала, движението на същия ще бъде значително по-сложно, тъй като такъв електрон се намира и под действието на периодичното електрично поле на кристала. Оказва се, че съществува удобен метод, чрез който сложното уравнение на движение на електрона в кристала може да се доведе до уравнение, което по форма е еднакво с уравнението (9.6.1), описващо движението на свободен електрон във външно електрично поле.

Същността на този метод се състои в следното: Ако се изрази скоростта на електрона в кристала чрез груповата скорост на разпространение на електронните вълни, се получава

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{W}{\hbar} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{dW}{dk}, \quad (9.6.2)$$

където k е вълновото число.

Работата, която извършва за време dt външната кулонова сила F , действаща на електрона, ще бъде

$$dA = F ds = F v_g dt = \frac{1}{\hbar} F \frac{dW}{dk} dt.$$

Изменението на енергията на електрона dW за време dt ще бъде равно на тази работа:

$$dW = dA = \frac{1}{\hbar} F \frac{dW}{dk} dt. \quad (9.6.3)$$

От (9.6.3) ще имаме

$$F = \hbar \frac{dk}{dt}. \quad (9.6.4)$$

Ако се деференцира (9.6.2) по времето t , се получава ускорението на електрона:

$$a = \frac{dv_g}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2W}{dk^2} \frac{dk}{dt}. \quad (9.6.5)$$

В такъв случай от (9.6.4) и (9.6.5) се получава

$$a = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 W}{dk^2} F. \quad (9.6.6)$$

Нека положим

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2 W}{dk^2}}, \quad (9.6.7)$$

където m^* се нарича ефективна маса на електрона. Тогава от (9.6.6) и (9.6.7) ще имаме

$$a = \frac{F}{m^*}. \quad (9.6.8)$$

Полученото уравнение (9.6.8) е аналогично на уравнението на движение на свободен електрон под действието на електрично поле, което се изразява чрез (9.6.1). Следователно, ако на електрона в кристала се съпостави маса m^* , неговото движение във външно електрично поле ще бъде аналогично на движението, което извършва под действието на това поле свободен електрон с маса m^* , т.е. движението на електрона в кристала при наличие на външно електрично поле може да се разглежда като движение на свободен електрон с маса m^* в същото електрично поле.

В случай на свободен електрон връзката между енергията W на електрона и вълновото число k се дава с формулата

$$W = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2. \quad (9.6.9)$$

Ако (9.6.9) се диференцира двукратно по k и стойността на $\frac{d^2 W}{dk^2}$ се замести в (9.6.7), се получава $m^* = m$, както би трябвало да се очаква.

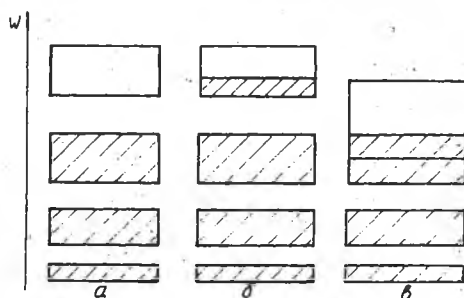
Ще отбележим още веднъж, че въвеждането на ефективната маса е удобен метод за описание на съвместното действие върху електрона на външното електрично поле и периодичното електрично поле на кристала. Ефективната маса няма нищо общо с масата на свободния електрон. От (9.6.7) следва, че ефективната маса m^* не е постоянна величина, тъй като изобщо $\frac{d^2 W}{dk^2}$ не е постоянна величина. Може да се покаже, че ефективната маса на електрон, намиращ се на дъното на позволената енергетична зона, е положителна, а на електрон, намиращ се на най-горните нива на зоната – отрицателна, т.е. електронът получава ускорение в обратна посока на външната сила \vec{F} . Това поведение на ефективната маса се обуславя с изменение на съотношението между силата, с която външното електрично поле действа на електрона, и силата, с която периодичното поле

на кристала действува на същия при преминаването на електрона от по-ниските на по-високите енергетични нива в зоната.

9.7. ЗАПЪЛВАНЕ НА ЗОНИТЕ С ЕЛЕКТРОНИ. ПРОВОДНИЦИ, ДИЕЛЕКТРИЦИ И ПОЛУПРОВОДНИЦИ ОТ ГЛЕДНА ТОЧКА НА ЗОННАТА ТЕОРИЯ

Както е известно, вътрешните енергетични нива на изолирания атом са изцяло запълнени с електрони. В кристала зоните, съответстващи на вътрешните енергетични нива на атома, са също изцяло запълнени с електрони. По степента на запълването на валентната зона (зоната на валентните електрони) с електрони твърдите тела се делят на две групи. Към първата група се отнасят телата, чиито валентна зона е изцяло запълнена с електрони, а позволените енергетични зони, разположени над валентната зона, са напълно свободни (фиг.9.8,*a*). В тази група попадат например веществата, чиито атоми имат изцяло запълнени електронни слоеве. Разпределението на електроните в атома на Ne например е следното: $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, т.е. състоянията $1s$, $2s$ и $2p$ са изцяло запълнени с електрони. В твърдото тяло енергетичното ниво $2p$ се превръща във валентна зона $2p$. Ако броят на атомите, образуващи кристалната решетка на Ne, е N , позволената зона $2p$ ще се състои от $3N$ енергетични нива, на които могат съгласно принципа на Паули да се разположат $6N$ електрона. Следователно тази зона ще бъде изцяло запълнена с електрони, тъй като в нормално състояние N атома на неона имат $6N$ електрона в $2p$ -състояние. Над тази запълнена зона ще се разположат съвършено свободни зони, съответстващи на $3s$ -, $3p$ - и т.н. състояния.

Като друг пример нека разгледаме начина на запълването на позволените енергетични зони при NaCl. При образуване на кристала NaCl валентният електрон на Na преминава към атома на Cl, в резултат на което се образува положителен натриев йон със следното запълване на енергетичните нива с електрони: $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, и отрицателен хлорен йон със следните енергетични състояния на електроните: $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^2$, $3p^6$. На енергетичното състояние $3p^6$ на хлорния йон в кристала ще съответствува зона, която ще бъде изцяло запълнена с електрони.



Фиг. 9.8

Това ще бъде валентната зона. В натриевия йон на енергетично ниво $3s$ липсва електрон, поради което позволената зона в кристала която се образува от това ниво, ще бъде изцяло свободна от електрони.

Втората група обхваща твърди тела, валентната зона на която е частично запълнена с електрони. Към тази група се отнасят всички вещества, чиито атоми са с незапълнени енергетични нива на валентните електрони. Например натриевият атом има следното запълване на енергетичните нива с електрони: $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$. Енергетичното ниво $3s$ на изолирания натриев атом е запълнено наполовина с електрони, поради което зоната $3s$, съответстваща на това енергетично ниво в кристала, ще бъде наполовина запълнена с електрони (фиг.9.8,б).

Частично запълнена зона с електрони се получава и в случай на твърди тела, при които валентната зона, изцяло запълнена с електрони, се застъпва с разположената над нея свободна зона. Такова застъпване има при химичните елементи от втора група на периодичната таблица на Менделеев. Например атомите на Mg имат следното запълване на енергетичните нива с електрони: $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2$, т.е. всички тези енергетични състояния са изцяло запълнени с електрони. В резултат на застъпването обаче на зоните, съответстващи на $3s$ - и $3p$ - енергетични нива, в твърдия Mg се образува частично запълнена позволена енергетична зона (фиг.9.8,в). Съществуването на частично запълнена зона е характерно за металите.

Подобно на отделния атом, в който електроните могат да преминат от едно на друго енергетично ниво, електроните в кристалите могат да преминават от една в друга позволена енергетична зона или да преминават от едно на друго енергетично ниво в дадена позволена зона. За преминаване на електрона от дадена позволена енергетична зона в съседната позволена зона е необходимо да се предаде на същия енергия от порядъка на ширината на забранена зона, т.е. от порядъка на няколко електронволта. Като се има предвид, че разстоянието между съседните енергетични нива на дадена позволена зона е от порядъка на 10^{-22} eV, може непосредствено да се заключи, че за преход от едно на друго ниво вътре в дадена зона е необходимо да се предаде на същия много малка енергия. Енергията която получават електроните под действието на външно електрично поле (ако то, разбира се, не е толкова голямо, че да настъпи пробив), е от порядъка на 10^{-8} - 10^{-4} eV и тя е напълно достатъчна за вътрешнозонни преходи, но недостатъчна за преход на електроните в по-висока позволена енергетична зона. В много случаи на електроните може да се предаде достатъчно енергия за извършване на преход от една в друга позволена зона чрез повишаване на температурата. Такъв преход може да стане също така, ако електронът получи необходимата енергия в резултат на облъчването на твърдото тяло със светлина, рентгенови лъчи или γ -фотони.

При отсъствие на външно електрично поле в резултат на движението на електроните в кристала не може да възникне електричен ток, тъй като разпределението на електроните по скорости е изотропно. Електричен ток може да се създаде под действие на външно електрично поле. Това поле ще действува на електроните със сила $\vec{F} = -e\vec{E}$. Тази сила се стреми да измени състоянието на движение на електроните. Всяко изменение на състоянието на движение на електрона означава същевременно промяна на неговото енергетично състояние, т.е. преход на друго енергетично ниво. Такива преходи са възможни, ако в съответната позволена енергетична зона има свободни енергетични нива, т.е. зоната е частично запълнена с електрони (фиг.9.8,б и 9.8,в), какъвто е случаят при металите. Следователно при наличието на позволена зона, частично запълнена с електрони, електричното поле изменя състоянието на движение на електроните и под неговото действие възниква преимуществено движение на електроните в посока, противоположна на \vec{E} , т.е. възниква електричен ток. Такива твърди тела ще се характеризират с висока електропроводимост, т.е. ще представляват проводници.

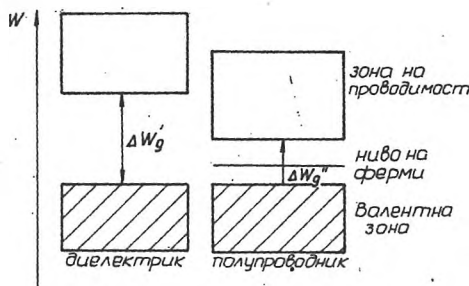
Зонната теория дава възможност да се обясни защо увеличаването на валентността на метала, т.е. увеличаването на броя на свободните електрони в кристала, които се падат на един атом, не довежда до нарастването на електропроводимостта. Така например специфичната електропроводимост на тривалентния Al е два пъти по-малка от тази на едновалентната Cu. Съгласно представите на зонната теория електропроводимостта на твърдото тяло не се определя от броя на валентните електрони, а от отношението на броя им в горната незапълнена зона към общия брой на енергетичните нива в тази зона.

В случай че валентната зона е изцяло запълнена с електрони и не се застъпва с по-горната свободна зона (фиг.9.8,а), външното електрично поле не може да измени състоянието на движение на електроните или, с други думи – тяхното енергетично състояние, поради липса на свободни енергетични нива в зоната. Следователно в този случай електричното поле не може да предизвика възникването на електричен ток. Такива тела ще се отнасят в електричното поле като диелектрици.

Както е известно, съществува голяма група тела, електричното съпротивление на които се изменя в широки граници – между това на металите и на диелектриците. Тази група от тела се нарича полупроводници. (Интересно е изобщо да се отбележи, че ниское свойство на твърдите тела не се изменя в такива широки граници, както се изменя свойството електропроводимост. Така например електропроводимостта на някои от най-добрите метални проводници е 10^{24} пъти по-голяма от тази на най-добрите диелектрици.)

Съгласно представите на зонната теория основната разлика между диелектриците и полупроводниците се състои в ширината на

забранената зона между изцяло запълнената при $T = 0$ К валентна зона и разположената над нея свободна позволена зона, която се нарича зона на проводимост. На фиг.9.9 са дадени валентната зона и зоната на проводимост, отнасяща се за диелектрик и полупроводник при $T = 0$ К.



Фиг. 9.9

Твърдите тела с енергетичен спектър на електроните, показан на фиг.9.9 при $T = 0$ К ще се отнасят като диелектрици и полупроводници в зависимост от ширината на забранената зона.

Енергията, която е необходима за преход на електрона от валентната зона в зоната на проводимост, се нарича енергия на активация на собствената проводимост. Енергията на активация на собствената проводимост при полупроводниците е значително по-малка, отколкото при диелектриците.

При повишаване на температурата все по-голям брой електрони, намиращи се в горната част на запълнената валентна зона, получават необходимата енергия за преодоляване на забранената зона с ширина $\Delta W_g''$ и преминаване в зоната на проводимост. В резултат на прехода на електрони в зоната на проводимост същата се превръща в частично запълнена зона, вследствие на което електропроводимостта на тялото се повишава и то става полупроводник. Както ще видим в §9.8, повишаването на електропроводимостта на тялото се обуславя не само от образуването на частично запълнена с електрони зона, но и от възникването на т.нар. дупки във валентната зона.

9.8. СОБСТВЕНА ПРОВОДИМОСТ НА ПОЛУПРОВОДНИЦИТЕ

Както вече беше отбелязано, при повишаване на температурата част от електроните, запълващи най-високите енергетични нива на валентната зона на полупроводника, преминават в зоната на проводимост и същата се превръща в частично запълнена зона.

Когато електрони от запълнената валентна зона преминават в зоната на проводимост, най-високите енергетични нива на валентната зона стават свободни, или както е възприето да се казва, те са заети от дупки. На тези свободни енергетични нива могат да се преместят електрони от по-ниски нива на валентната зона,

дупките се появяват на местата, освободени от електроните.

Движението на дупките във външно електрично поле е аналогично на движението на частица с положителен електричен заряд, равен по големина на заряда на електрона и положителна ефективна маса.

Следователно преминаването на електрон от едно от най-високо разположените енергетични нива на валентната зона в зоната на проводимост е еквивалентно на появяването във валентната зона на частица с положителен заряд, наречен дупка.

Разбира се, дупките са фиктивни частици – те се въвеждат за по-удобно описание на движението на електроните в почти запълнената валентна зона под действието на външно електрично поле. Проводимостта на телата, която се обуславя от движението на дупките, се нарича дупчеста проводимост.

Разглежданата проводимост е характерна за химически чисти телупроводници и се нарича собствена проводимост на телупроводника. Следователно в телупроводниците различаваме два вида собствена проводимост: електронна проводимост, която се обуславя от насоченото движение под действието на външно електрично поле на електроните от зоната на проводимост, и дупчеста проводимост, дължаща се на насоченото движение на дупките, които възникват във валентната зона.

Разпределението на електроните по енергии във валентната зона и зоната на проводимост да се дава чрез функцията на разпределението на Ферми-Дирак (9.4.1).

Може да бъде показано, че в случай на химически чист телупроводник нивото на Ферми се разполага в средата на забранената зона между валентната зона и зоната на проводимост (фиг.9.9). В такъв случай енергията на Ферми W_F , отчетена от най-високото енергетично ниво на валентната зона, ще бъде $W_F = \frac{1}{2}\Delta W_g$. За електроните в зоната на проводимост $W - W_F \approx \frac{1}{2}\Delta W_g$. Освен това тези електрони заемат най-високите енергетични нива в разпределението на величината $f_F(W)$. (Това разпределение е аналогично на показаното разпределение на фиг.9.4.) Това ни дава основание в (9.4.1) да положим $W - W_F = \frac{1}{2}\Delta W_g$ и да пренебрегнем единицата в знаменателя в същата формула, тъй като за електроните в зоната на проводимост $e^{\frac{W - W_F}{kT}} \gg 1$. В такъв случай от (9.4.1) се получава

$$f_F(W) = e^{-\frac{\Delta W_g}{2kT}}. \quad (9.8.1)$$

Броят на електроните в зоната на проводимост, а следователно и на дупките във валентната зона, е пропорционален на вероятността $f_F(W)$ (9.8.1). Електропроводимостта на телупроводника от своя страна е пропорционална на тези електрони и дупки, които представляват токовите носители. Следователно за специфичната

електрична проводимост σ можем да напишем

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta W_g}{2kT}}, \quad (9.8.2)$$

където ΔW_g е ширината на забранената зона, разположена между валентната зона и зоната на проводимост на полупроводника. От (9.8.2) следва, че специфичната електропроводимост на полупроводника нараства експоненциално с температурата.

9.9. ПРИМЕСНА ПРОВОДИМОСТ НА ПОЛУПРОВОДНИЦИТЕ

Наличието на примесни атоми в решетката на полупроводника оказва влияние върху неговите електрични свойства. Нека най-напред предположим, че в кристалната решетка на четиривалентния германий част от атомите на германия са заменени с атоми на петвалентния фосфор. За образуване на ковалентните връзки на фосфорния атом със съседните германиеви атоми са необходими четири валентни електрона (фиг.9.10,а). Петият валентен електрон ще се окаже при тези условия по-слабо свързан с фосфорния атом, но при температура, близка до абсолютната нула, ще продължи да се движи в полето на фосфорния атом. В този случай фосфорният атом може да се разглежда като система, състояща се от атомен остатък със заряд $+e$, около който се движи петият валентен електрон. Такава система е подобна на водородния атом. Това дава възможност да се намери енергията на свързване чрез използване на формулата за енергията на водородния атом:

$$W = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \quad (\text{при } n = 1).$$

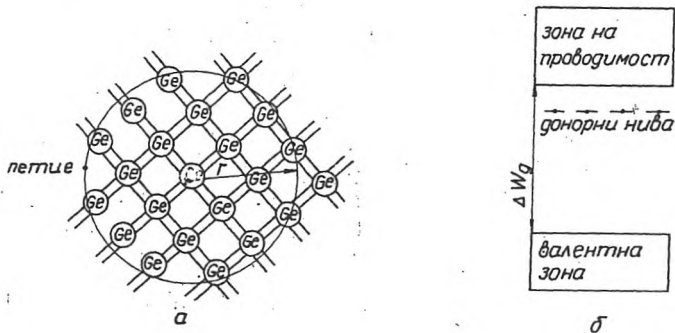
За разглеждания случай в знаменателя на горната формула трябва да бъде включен квадратът на относителната диелектрична проницаемост на германия ϵ^2 , тъй като в германиевия кристал силата на взаимодействие между електрона и останалата част на фосфорния атом намалява ϵ пъти. В такъв случай потенциалната енергия на този електрон се изразява чрез формулата

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Освен това масата на свободния електрон m_e трябва да се замени с ефективната маса на електрона в германия $m_n^* = 0,12 m_e$.

Направените по този начин изчисления дават следната стойност за енергията на свързване на петия електрон W_d :

$$W_d = 0,065 \text{ eV}.$$



Фиг. 9.10

От експерименталните изследвания за W_d се получава стойността $0,012 \text{ eV}$.

Следователно енергията на свързване на петия електрон е от порядъка на стотни части от електронволта. При получаване на такава енергия същият се откъсва от атома и започва да се движи свободно в кристала. Същевременно в областта на примесния атом възниква некомпенсиран положителен електричен заряд $+e$, но той е свързан с този атом и не може да се премества в кристалната решетка.

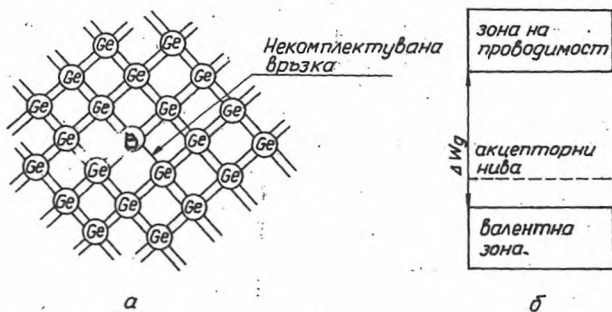
От гледна точка на зонната теория наличието на петвалентни примесни атоми в германиевия кристал води до възникването на енергетични нива на петия валентен електрон, които се разполагат в забранената зона непосредствено под зоната на проводимост на разстояние около $0,01 \text{ eV}$ от нея и са запълнени с електрони (фиг.9.10,б). Тези нива се наричат донорни нива, а примесите, които вкарват в кристала електрони, се наричат донори.

За преминаване на електроните от донорните нива в зоната на проводимост е необходима незначителна енергия, от порядъка на стотни от електронволта, която същите могат да получат лесно при топлинно възбуждане. Тази енергия е с около два порядъка по-малка от енергията, която е необходима за преход на електрон от валентната зона в зоната на проводимост. Следователно при някои високи температури при наличието на петвалентни атоми ще преобладава т.нар. примесна електронна проводимост или n -проводимост, а самият полупроводник се нарича полупроводник от n -тип.

Нека сега предположим, че в кристалната решетка на германия има тривалентни примесни атоми, например атоми на бора (фиг.9.11,а). Трите валентни електрона на борния атом са недостатъчни за образуване на ковалентни връзки с четирите съседни германиеви атоми.

Една от тези връзки ще се окаже некомплектувана. Същата

може да се комплектува чрез захващане на електрон от съседен германиев атом. Това съответствува на възникване на дупка, която може да се премества в кристала.



Фиг. 9.11

От гледна точка на зонната теория наличието на тривалентни примесни атоми в германиевия кристал води до образуването на т.нар. акцепторни примесни нива, които са свободни от електрони и се разполагат непосредствено над валентната зона (фиг.9.11,б). Енергията, необходима за прехвърлянето на електрони от валентната зона на полупроводника на примесните нива, е много малка (от порядъка на W_d) и същите могат да я получат при незначително топлинно възбуждане. При такова прехвърляне на електрони на акцепторните нива във валентната зона възникват дупки и се получава т.нар. примесна дупчеста проводимост или *p*-проводимост, а самият полупроводник се нарича полупроводник от *p*-тип. Електроните, преминали на акцепторните нива, се свързват с атомите на бора и не участвуват по-нататък в проводимостта на полупроводника. Примесите, които водят до недостиг на електрони в кристала, т.е. до възникването на дупки, се наричат акцепторни примеси.

При повишаване на температурата концентрацията на примесните носители на тока достига до насищане, т.е. всички донорни нива се освобождават от електрони, а всички акцепторни нива се запълват с електрони. Същевременно се увеличава броят на електроните, които преминават от валентната зона в зоната на проводимост на полупроводника. Следователно при ниски температури ще преобладава примесната проводимост, а при високи температури – собствена проводимост на полупроводника.

ИЗПОЛЗУВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. *Савельев, И.В.* Курс общей физики. Том I, II и III. Изд. „Наука“. Москва, 1977, 1978.
2. *Детлаф, А.А., М.Б.Яворский, Б.Л.Милковская.* Курс физики. Том I, II, III. Изд. „Высшая школа“. Москва, 1973, 1977, 1979.
3. *Детлаф, А.А., Б.М.Яворский.* Курс физики. Изд. „Высшая школа“. Москва, 1989.
4. *Джанколи, Д.* Физика. Том I, II. Изд. „Мир“, 1989.
5. *Тошев, С.Д., И.А.Баев, М.Г.Маринов, Л.П.Бончев.* Физика. Изд. „Наука и искусство“, 1987.
6. *Райчев, П.П.* Елементарно въведение в квантовата физика. Изд. „Техника“, 1968.
7. *Епифанов, Г.И.* Физика твърдого тела. Изд. „Высшая школа“. Москва, 1965.
8. *Епифанов, Г.И.* „Физические основы микроэлектроники“. Изд. „Советское радио“, 1971.
9. *Беизер, А.* Основные представления современной физики. Изд. „Атомиздат“, 1973.
10. *Левич, В.Г., Ю.А.Вдовин, В.А.Мямлин.* Курс теоретической физики. Т. II. Изд. „Физматгиз“, 1962.
11. *Суцински, М.М.* Курс физики. Т. I. Изд. „Наука“, Москва, 1973.
12. *Иванчев, Н., С.Петров, Л.Христов.* Физика. Изд. „Техника“, 1975.
13. *Weidner, R.T., R.L.Sells.* Elementary Physics: Classical and Modern, ed. Allyn and Bacon, 1976.
14. *Messiah, A.* *Mechanique Quantique.* Vol. 1, et 2, ed. Dunod, 1969.

СЪДЪРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. ФИЗИЧНИ ОСНОВИ НА МЕХАНИКАТА

1.1 Кинематика на материална точка.....	4
1.2 Динамика на материална точка.....	12
1.3 Работа и енергия.....	20
1.4 Механика на твърдо тяло.....	30
1.5 Релативистична механика.....	39
1.6 Динамика на флуиди.....	59

ГЛАВА 2. ТРЕПТЕНИЯ И ВЪЛНИ

2.1 Трептения.....	74
2.2 Вълни.....	108

ГЛАВА 3. МОЛЕКУЛНА ФИЗИКА

3.1 Молекулно-кинетична теория на идеалния газ.....	124
3.2 Статистически разпределения.....	137
3.3 Явления на пренасяне.....	144

ГЛАВА 4. ЕЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗЪМ

4.1 Електростатично поле във вакуум.....	154
4.2 Електрично поле в диелектрик.....	165
4.3 Проводник в електрично поле.....	173
4.4 Постоянен електричен ток.....	177
4.5 Класическа електронна теория за електропроводимостта на металите.....	187
4.6 Електричен ток в газове.....	191
4.7 Магнитно поле във вакуум.....	196
4.8 Движение на заредени частици в електрични и магнитни полета.....	205
4.9 Магнитно поле във вещество.....	211

ГЛАВА 5. ВЪЛНОВА ОПТИКА

5.1 Интерференция на светлината.....	219
5.2 Дифракция на светлината.....	225
5.3 Поляризация на светлината.....	231
5.4 Взаимодействие на светлината с веществото..	237

ГЛАВА 6. КВАНТОВА ОПТИКА

6.1 Топлинно излъчване.....	244
6.2 Фотоелектричен ефект.....	250
6.3 Ефект на Комптън.....	257
6.4 Рентгенови лъчи.....	260

ГЛАВА 7. КВАНТОВА МЕХАНИКА

7.1 Увод	268
7.2 Корпускулярно-вълнови свойства на частиците. Вълни на Дьо Бройл	270
7.3 Вълнова функция	275
7.4 Съотношения на неопределеност	278
7.5 Уравнение на Шрьодингер	282
7.6 Частица в безкрайно дълбока потенциална яма	289
7.7 Преминаване на частица през потенциална бариера	294
7.8 Линеен хармоничен осцилатор	299
7.9 Принцип на суперпозицията на състоянията	302
7.10 Оператори. Собствени стойности и собствени функции на операторите	303
7.11 Динамични променливи и оператори	310
7.12 Определяне състоянието на квантовомеханичната система	312

ГЛАВА 8. АТОМНА ФИЗИКА

8.1 Атомни спектри	315
8.2 Опит на Франк и Херц	317
8.3 Водороден атом от гледна точка на квантовата механика	318
8.4 Енергия на водородния атом	323
8.5 Собствен магнитен момент на електрона. Спин на електрона	328
8.6 Фина структура на спектралните линии	332
8.7 Резултантен момент на импулса на многоелектронен атом. Магнитен момент на атома	334
8.8 Ефект на Зеeman	337
8.9 Магнитен резонанс	340
8.10 Излъчване и поглъщане на атомите	341
8.11 Лазери	347
8.12 Маса и размери на атомното ядро	349
8.13 Състав на атомното ядро. Спин и магнитен момент на ядрото	350
8.14 Енергия на свързване на ядрото. Масов дефект	353
8.15 Ядрени сили	356
8.16 Радиоактивност	360
8.17 Закон за радиоактивното разпадане	361
8.18 Алфа-разпадане на ядрото	363
8.19 Бета-разпадане на ядрото	364
8.20 Гама-излъчване на ядрото	367

ГЛАВА 9. ФИЗИКА НА ТВЪРДОТО ТЯЛО

9.1 Квантова статистика	368
9.2 Квантуване на фазовото пространство. Функция на разпределението	369
9.3 Модел на свободните електрони	373
9.4 Разпределение на електроните в метала по енергии при абсолютната нула	375
9.5 Зонна теория на твърдото тяло. Състояние на електроните в твърдото тяло. Енергетични зони на електроните в кристала	379
9.6 Ефективна маса на електрона	383
9.7 Запълване на зоните с електрони. Проводници, диелектрици и полупроводници от гледна точка на зонната теория	385
9.8 Собствена проводимост на полупроводниците	388
9.9 Примесна проводимост на полупроводниците	390
Използвана литература	393