

Nikolay Velkov

Aufgaben

zu

Technische Mechanik 1 – 3

Statik, Elastostatik, Kinetik



Universität für Chemische Technologie und Metallurgie
Sofia, 2005

Aufgaben zu Technische Mechanik 1 – 3

ръководство
първо издание

гл.ас. Николай Велков, автор
проф. Климент Хаджов, рецензент

ISBN 954-8954-53-2

Vorwort

Ein wirkliches Verständnis der Mechanik kann man nur durch das selbstständige Lösen von Aufgaben erlangen. In diesem Sinne ist die vorliegende Aufgabensammlung als studienbegleitendes Übungsbuch konzipiert, dessen Inhalt sich am Stoff der Vorlesungen in Technische Mechanik an der Universität für Chemische Technologie und Metallurgie orientiert. Sie bietet den Studenten die Möglichkeit, über die Lehrveranstaltungen hinaus ihren Kenntnisstand zu überprüfen und zu verbessern.

Inhaltsverzeichnis

I	Statik	7
1	Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt	9
2	Schwerpunkt	15
3	Allgemeine Kraftsysteme und Gleichgewicht des starrten Körpers	23
4	Lagerreaktionen	31
5	Fachwerke	39
6	Schnittgrößen	45
7	Haftung und Reibung	51
II	Elastostatik	59
1	Zug und Druck	61
2	Biegung	67
3	Torsion	75
4	Spannungszustand, Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetz	79
5	Querkraftschub	85

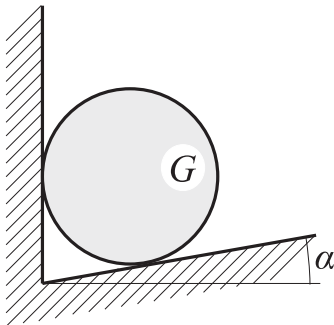
6	Knickung	89
III	Kinetik	95
1	Kinematik des Punktes	97
2	Kinematik des starren Körpers	103
3	Kinetik des Massenpunktes und der Massenpunktsysteme	111
4	Relativbewegung des Massenpunktes	121
5	Kinetik des starren Körpers	127
6	Prinzipien der Mechanik	139

Teil I
Statik

Kapitel 1

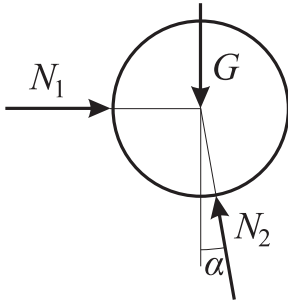
Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

Beispiel. Eine Kugel (Gewicht G) liegt auf einer glatten schiefen Ebene (Neigungswinkel α) und wird von einer glatten Wand gehalten. Wie groß sind die Kontaktkräfte?



Lösung:

Die schiefe Ebene und die Wand sind glatt. Daher wirken in den Kontaktpunkten nur Normalkräfte, die mit der Gewichtskraft ein zentrales Kräftesystem bilden.



Freikörperbild

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\uparrow: N_2 \cos \alpha - G = 0 \rightarrow N_2 = \frac{G}{\cos \alpha},$$

$$\rightarrow: N_1 - N_2 \sin \alpha = 0 \rightarrow N_1 = G \tan \alpha.$$

Die Kontaktkraft N_2 ist größer als die Gewichtskraft.

Aufgabe 1.1. Ein Körper ist an zwei gewichtslosen Seilen befestigt (Bild 1.1). An den Enden der Seile muss jeweils die Kraft F aufgebracht werden. Wie groß ist die Gewichtskraft G des Körpers?

Gegeben: $F = 1350\text{N}$; $l = 15.0\text{m}$; $h = 1.0\text{m}$.

Lösung: $G = 360\text{N}$.

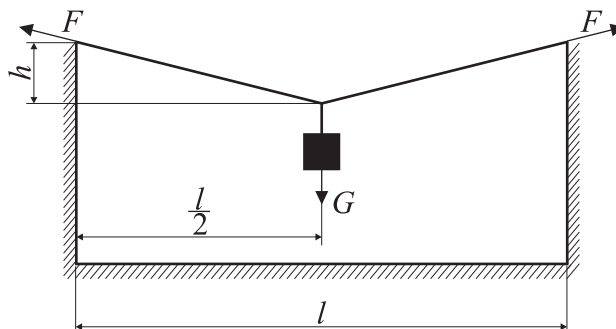


Bild 1.1.

Aufgabe 1.2. Ein Quader (Gewicht G) liegt auf zwei unter den Winkeln α und β zur Waagerechten geneigten, ebenen Flächen auf (Bild 1.2). Wie groß sind die Stützkraften an den Flächen A und B ?

Gegeben: $\beta = 55^\circ$; $G = 750\text{N}$.

Lösung: $F_A = 614.6\text{N}$; $F_B = 430.2\text{N}$.

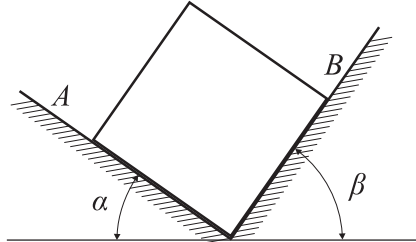


Bild 1.2.

Aufgabe 1.3. Am Stabsystem (Stab 1 und Stab 2) greift die Kraft F an (Bild 1.3). Ermitteln Sie auf graphischem und rechnerischem Weg die Stabkräfte S_1 und S_2 in den Stäben.

Gegeben: $F = 1\text{kN}$; $\alpha = 30^\circ$.

Lösung: $S_1 = -2\text{kN}$; $S_2 = 1.73\text{kN}$.

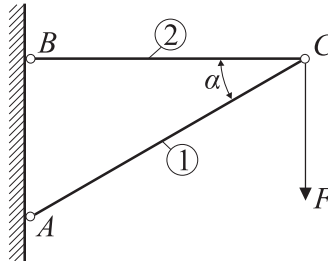


Bild 1.3.

Aufgabe 1.4. Drei zylindrische Körper (Gewichtskräfte G_i) liegen wie dargestellt in einem Kanal (Bild 1.4).

1. Man zeichne das Freikörperbild, für Wände, die ideal glatt sind.
2. Wie groß sind die Kräfte in den Punkten A bis F?

Gegeben:

$$G_1 = 30\text{N}; \quad G_2 = 50\text{N}; \quad G_3 = 20\text{N};$$

$$d_1 = 0.5\text{m}; \quad d_2 = 0.7\text{m}; \quad d_3 = 0.4\text{m};$$

$$l = 0.85\text{m}.$$

Lösung: $F_B = 33\text{N}$; $F_D = 95.45\text{N}$; $F_F = 100\text{N}$.

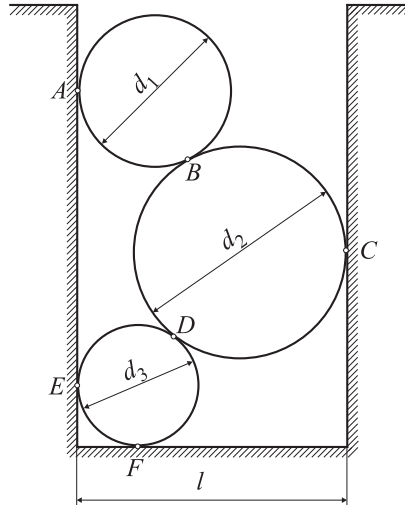


Bild 1.4.

Aufgabe 1.5. Das dargestellte System (Bild 1.5) besteht aus zwei Stäben, einem Seil und einer drehbar gelagerten Rolle mit der Gewichtskraft F_G . Stäbe und Seil sind gewichtslos. Die Rolle ist von einem Seil umschlungen, an dem die Gewichtskraft G wirkt.

Man bestimme die Stabkräfte.

Gegeben: $F_G = 500\text{N}$; $G = 800\text{N}$; $\alpha = 30^\circ$.

Lösung: $F_{S1} = 1126.3\text{N}$; $F_{S2} = 1692.0\text{N}$.

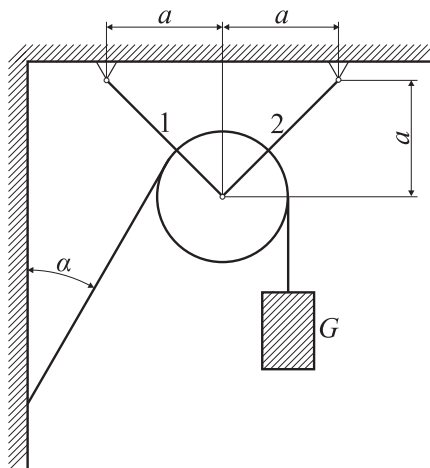


Bild 1.5.

Aufgabe 1.6. In dem dargestellten System (Bild 1.6) sind die Seilkräfte in den Ankern A und B zunächst formelmäßig, dann rechnerisch und durch Zeichnung zu bestimmen.

Gegeben: $l = 1\text{m}$; $a = 0.577\text{m}$; $b = 1.730\text{m}$; $G = 5\text{kN}$.

Lösung: $A = 0.866G$; $B = 0.5G$.

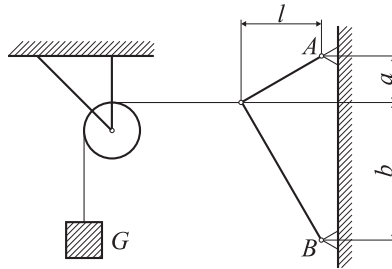


Bild 1.6.

Aufgabe 1.7. Über die bei A und B reibungsfrei drehbar gelagerten Rollen 1 und 2 (Rollenradius a [m]) läuft das endlose Seil S , das eine Schlaufe bildet, in der die mit P belastete Rolle 3 hängt (Bild 1.7). Die Rolle 3 berührt die starre Wand W im Punkt C .

Ermitteln Sie auf graphischem und analytischem Weg:

1. Die Seilkraft F_S ;
2. Die in C von der Wand W auf 3 ausgeübte Kontaktkraft F_C .

Gegeben: $P = 10\text{kN}$; $a = 0.2\text{m}$.

Lösung: $F_S = 5.86\text{kN}$; $F_C = 4.14\text{kN}$.

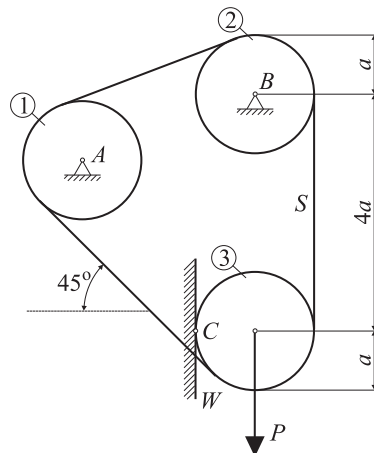


Bild 1.7.

Aufgabe 1.8. Drei Kugeln (Gewichtskraft G) sind mit drei gewichtslosen Seilen aufgehängt und stützen sich gegenseitig durch gewichtslose Stäbe ab (Bild 1.8).

Man bestimme die Seil- und Stabkräfte.

Gegeben: $a = 0.8\text{m}$; $G = 5\text{kN}$.

Lösung: $F_{\text{Stab}} = -2.04\text{kN}$; $F_{\text{Seil}} = 6.12\text{kN}$.

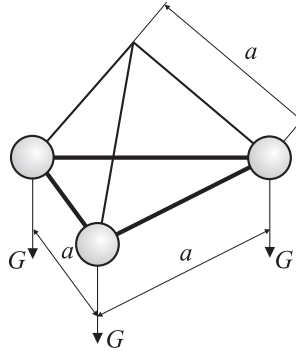


Bild 1.8.

Aufgabe 1.9. Drei gelenkig miteinander verbundene Stäbe (1, 2 und 3) sind in Punkten A , B und C an einer räumlichen Ecke befestigt und in D durch das Gewicht G belastet (Bild 1.9).

Wie groß sind die Stabkräfte?

Gegeben: $a = 1\text{m}$; $h = 1.41\text{m}$; $G = 6\text{kN}$.

Lösung: $S_1 = S_2 = 4.24\text{kN}$; $S_3 = 8.49\text{kN}$.

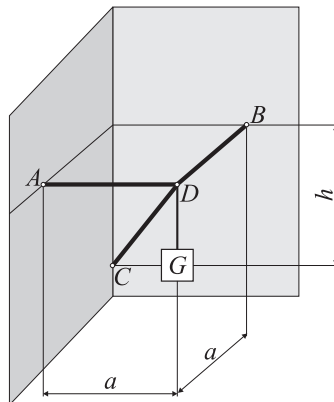
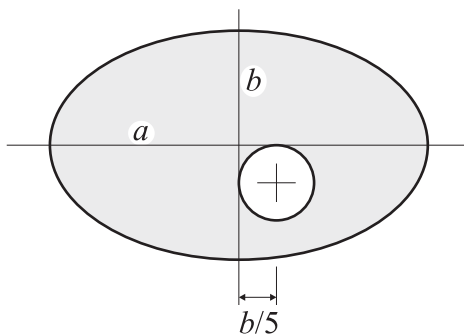


Bild 1.9.

Kapitel 2

Schwerpunkt

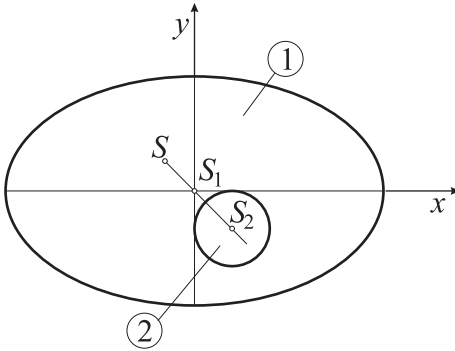
Beispiel. Aus einer ellipsenförmigen Fläche wurde in der dargestellten Weise ein Kreis ausgeschnitten. Gesucht ist der Schwerpunkt der Restfläche.



Lösung:

Gesamtschwerpunkt:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}.$$



Teilflächen:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad A_1 = \pi ab,$$

$$x_2 = \frac{b}{5}, \quad y_2 = -\frac{b}{5}, \quad A_2 = -\frac{\pi b^2}{25}.$$

Einsetzen liefert:

$$x_s = -\frac{b^2}{5(25a - b)}, \quad y_s = \frac{b^2}{5(25a - b)}.$$

Aufgabe 2.1. Für die abgebildeten Profile sind die Koordinaten der Flächenschwerpunkte zu berechnen (Bild 2.1).

Gegeben: $a = 1\text{ m}$.

Lösung:

zu 1. $x_S = 1,95a\text{ m}$; $y_S = 2,05a\text{ m}$.

zu 2. $x_S = 2,28a\text{ m}$; $y_S = 1,72a\text{ m}$.

zu 3. $x_S = 2a\text{ m}$; $y_S = 1,81a\text{ m}$.

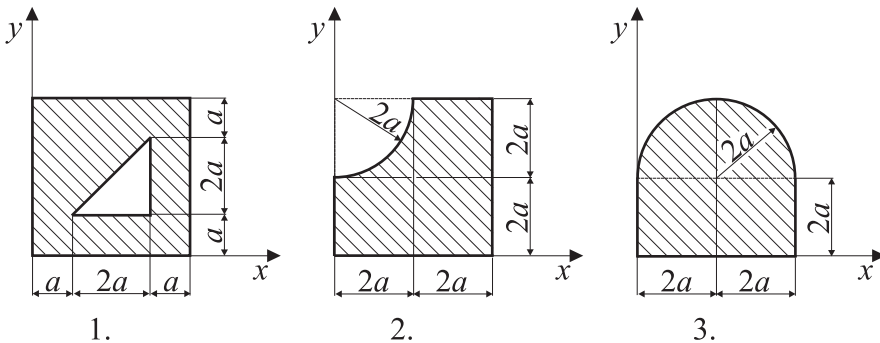


Bild 2.1.

Aufgabe 2.2. Für die dargestellte Stange (Bild 2.2) mit einer Bohrung vom Durchmesser D_2 ist der Abstand x_S zwischen Stangenmittelpunkt und Schwerpunkt der Querschnittsfläche zu bestimmen.

Gegeben: $D_1 = 55\text{mm}$; $D_2 = 22\text{mm}$.

Lösung: $x_S = 2.095\text{mm}$.

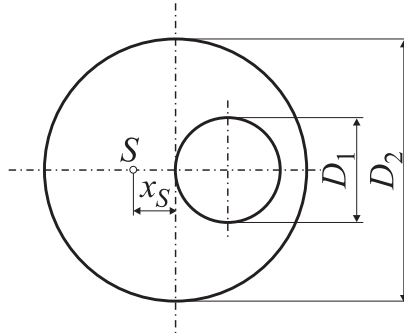


Bild 2.2.

Aufgabe 2.3. Ein rechteckiger Block mit konstanter Breite B , der Höhe H und der Länge L , der aus einem homogenen Material besteht, enthält zwei Bohrungen mit dem Durchmesser D (Bild 2.3).

Wie groß darf der Überstand maximal sein, damit der Block nicht um die Kante kippt?

Gegeben: $H = 10\text{cm}$; $L = 60\text{cm}$; $D = 5\text{cm}$.

Lösung: $a = 28.9\text{cm}$.

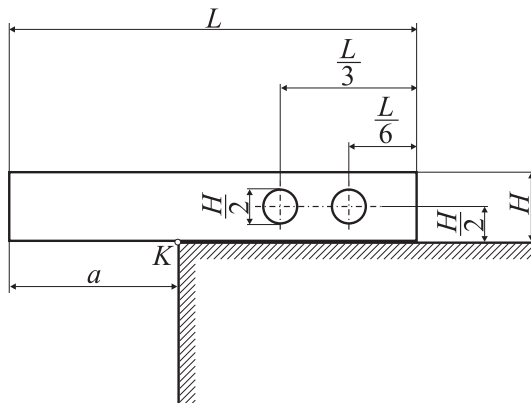


Bild 2.3.

Aufgabe 2.4. Eine homogene Platte (Bild 2.4) konstanter Dicke hat eine Bohrung vom Radius $\frac{r}{4}$ und ist auf eine horizontale Ebene gesetzt.

1. Welcher Winkel α der Achse gegen die Unterlage stellt sich im Gleichgewichtszustand ein?
2. Für welches Verhältnis $\frac{h}{r}$ ist $\alpha \geq 0$?

Gegeben: h ; r .

Lösung: $\tan \alpha = \frac{32}{3\pi} \left(2 - \frac{h^2}{r^2} \right)$.

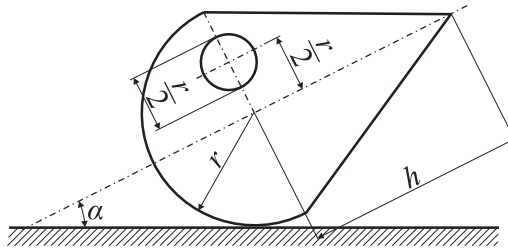


Bild 2.4.

Aufgabe 2.5. Ein Gehstock wird an einen Tisch gehängt (Bild 2.5). Welcher Winkel α stellt sich ein?

Gegeben: r ; $l = 10r$.

Lösung: $\tan \alpha = \frac{5}{12} + \frac{\pi}{48}$.

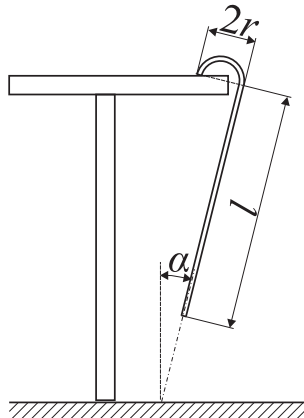


Bild 2.5.

Aufgabe 2.6. Die inhomogene Fläche in Bild 2.6 besteht aus den Teilflächen 1, 2 und 3 (Dichte der Teilflächen ρ_i). Berechnen Sie die Koordinaten x_S und y_S des Gesamtschwerpunkts.

Gegeben: $a = 0.5\text{m}$; $\rho_2 = 2\rho_1$; $\rho_3 = 3\rho_1$.

Lösung: $x_S = 5,921a$ m; $y_S = 0,447a$ m.

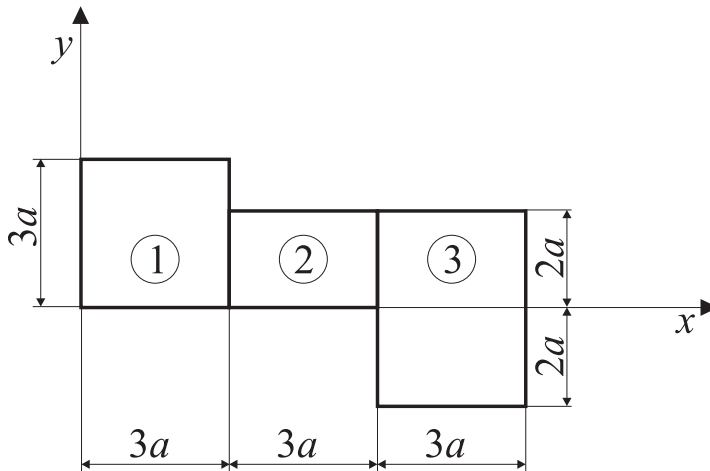


Bild 2.6.

Aufgabe 2.7. Zwei homogene Halbzylinder K (Dicke d , spez. Gewicht γ) berühren sich längs der Trennfuge $T - T$ und sie werden z.T. durch das Seil S umschlungen; an S hängen die Gewichte G (Bild 2.7). Wie groß muss G mindestens sein, wenn die Anordnung im Ruhezustand bleiben soll?

Gegeben: $R = 1.5\text{m}$; $d = 0.5\text{m}$; $\gamma = 3\text{kN/m}^3$.

Lösung: $G \geq 2,25$ kN.

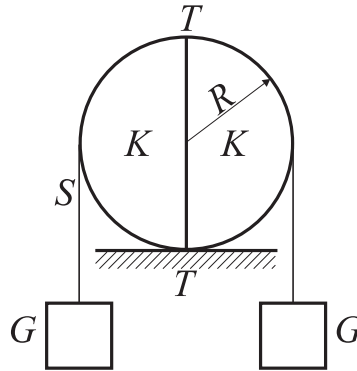


Bild 2.7.

Aufgabe 2.8. Eine filterlose Zigarette (Länge l , Durchmesser d) wird nach dem Ambrennen auf den Rand eines Aschenbechers gelegt (Bild 2.8). Beim Weiterbrennen fällt die Asche (Länge b , spezifisches Gewicht γ_A) nicht ab.

Bis zu welcher Länge b darf die Zigarette abbrennen, ohne vom Rand zu fallen?

Gegeben: l ; a ; d ; g ; γ_T (Tabak); γ_A (Asche); $\gamma_T > \gamma_A$.

Lösung: $b = l - a - \sqrt{(l - a)^2 - (l - 2a) \frac{l\gamma_T}{\gamma_T - \gamma_A}}$.

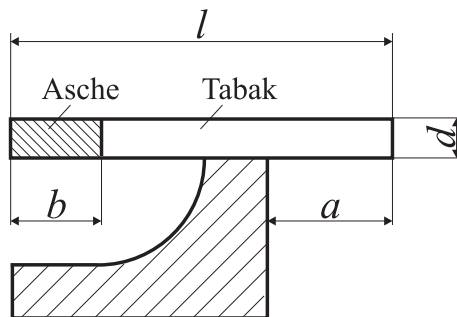


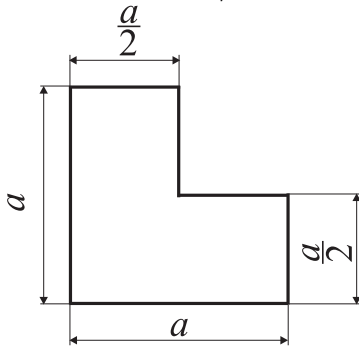
Bild 2.8.

Aufgabe 2.9. Eine Blechplatte (Bild 2.9.a), die die Form eines Quadrates hat, aus dem ein Quadrat herausgeschnitten wurde, wird an drei Seiten so aufgehängt, dass sie waagrecht hängt (Bild 2.9.b).

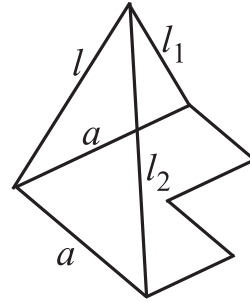
Welche Längen l_1 und l_2 müssen die beiden rechten Tragseile haben?

Gegeben: l ; a .

Lösung: $l_1 = l_2 = \sqrt{l^2 + \frac{a^2}{6}}$.



a.)



b.)

Bild 2.9.

Aufgabe 2.10. Der homogene Zylinder (Gewicht G) hängt an drei Seilen (Bild 2.10). Berechnen Sie die Seilkräfte S_i .

Gegeben: $a = 0.5\text{m}$; $G = 10\text{kN}$.

Lösung: $S_1 = 5\text{kN}$; $S_2 = 0$; ; $S_3 = 5\text{kN}$.

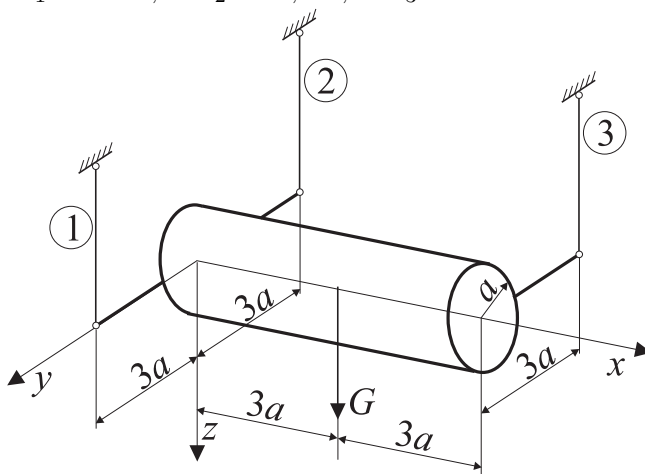


Bild 2.10.

Aufgabe 2.11. Für den skizzierten, aus drei Quadern zusammengesetzten Körper (Bild 2.11) sind die Schwerpunktkoordinaten zu berechnen.

1. Alle drei Quader sind aus geichem Material.

2. Quader I besteht aus Stahl ($\rho_{\text{St}} = 7.85\text{kg/m}^3$); Quader II aus Kupfer ($\rho_{\text{Cu}} = 8.90\text{kg/m}^3$); Quader III aus Blei ($\rho_{\text{Pb}} = 11.30\text{kg/m}^3$).

Gegeben: $a = 1.0\text{m}$.

Lösung:

zu 1. $x_S = y_S = 1.045\text{m}$; $z_S = -0.682\text{m}$.

zu 2. $x_S = 1.073\text{m}$; $y_S = 1.005\text{m}$; $z_S = -0.594\text{m}$.

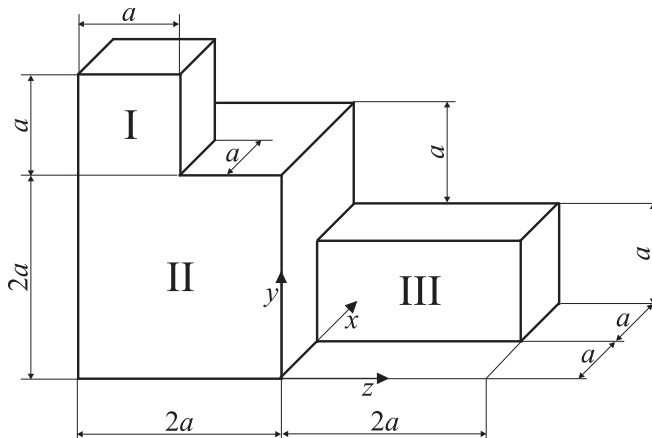
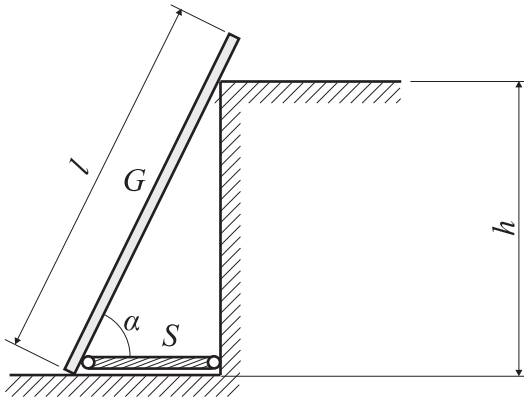


Bild 2.11.

Kapitel 3

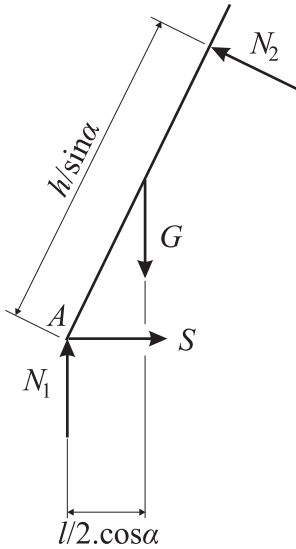
Allgemeine Kraftsysteme und Gleichgewicht des starren Körpers

Beispiel. Ein Balken (Länge l , Gewicht G) lehnt in der dargestellten Weise an einer Mauer. Er wird an seinem unteren Ende durch ein Seil S gehalten, die Berührflächen sind glatt. Wie groß ist die Seilkraft?



Lösung:

Die Kontaktkräfte N_1 und N_2 stehen senkrecht zu den jeweiligen Berührungsebenen.



Freikörperbild

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum M_i^{(A)} = 0 : \quad -\frac{Gl}{2} \cos \alpha + \frac{h}{\sin \alpha} N_2 = 0 \rightarrow N_2 = \frac{Gl}{2h} \sin \alpha \cos \alpha ,$$

$$\rightarrow : \quad S - N_2 \sin \alpha = 0 \rightarrow S = \frac{Gl}{2h} \sin^2 \alpha \cos \alpha ,$$

$$\uparrow : \quad N_1 - G + N_2 \cos \alpha = 0 \rightarrow N_1 = G \left(1 - \frac{l}{2h} \sin \alpha \cos \alpha \right) .$$

Mit der vertikalen Gleichgewichtsbedingung wäre zu prüfen, wann $N_1 < 0$ gilt; dann wäre die Lösung physikalisch nicht sinnvoll, sondern der Balken würde abheben.

Aufgabe 3.1. Ein Güterwagen (Gewicht G) steht auf einer abschüssiger Strecke (Neigungswinkel α) an einem Prellbock (Bild 3.1).

1. Man zeichne das Freikörperbild (Reibung ist nicht vorhanden).
2. Man ermittle die auf den Güterwagen einwirkenden Kräfte.

Gegeben: G ; h ; l ; α .

Lösung:

$$F_{\text{Pr}} = G \sin \alpha ;$$

$$F_{\text{Rad1}} = \frac{G}{2} \left(\cos \alpha + \frac{h}{l} \sin \alpha \right) ; F_{\text{Rad2}} = \frac{G}{2} \left(\cos \alpha - \frac{h}{l} \sin \alpha \right) .$$

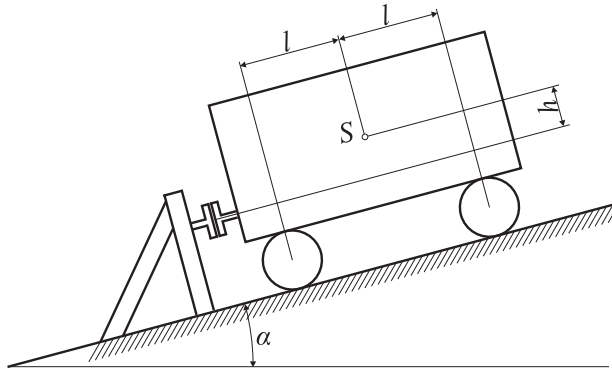


Bild 3.1.

Aufgabe 3.2. Das Gesamtgewicht bei dem skizzierten 3-achsiger Lastwagenanhänger ist G und greift im Schwerpunkt S an (Bild 3.2). Die beiden Hinterachsen sind durch einen Hebel verbunden, der in A drehbar gegenüber dem Aufbau gelagert ist.

Wie groß sind die Achslasten?

Gegeben: $G = 200\text{kN}$; $a = 3.5\text{m}$; $b = 2.0\text{m}$; $c = 0.7\text{m}$.

Lösung: $F_V = 72.7\text{kN}$; $2 \times F_H = 2 \times 63.6\text{kN}$.

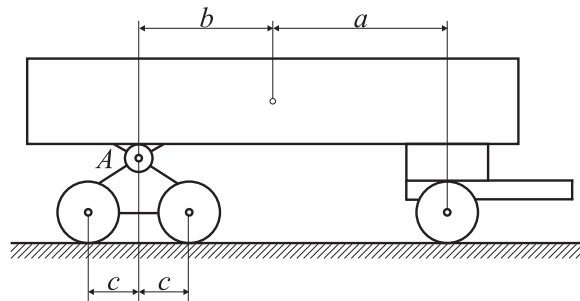


Bild 3.2.

Aufgabe 3.3. Ein quadratischer Deckel (Gewicht G) einer Kiste wird durch zwei Scharniere A und B sowie durch einen Faden wie skizziert in horizontaler Lage gehalten (Bild 3.3).

Wie groß ist die Fadenkraft F ?

Gegeben: $G = 1\text{N}$; $l = 0.4\text{m}$.

Lösung: $F = 0.75\text{N}$.

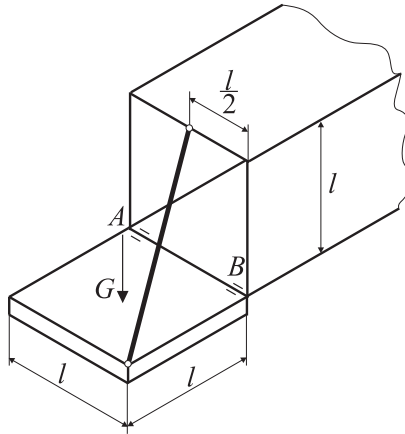


Bild 3.3.

Aufgabe 3.4. Mit der Hilfe der skizzierten Anordnung soll die Schwerpunktlage eines Fahrzeuges bestimmt werden (Bild 3.4). Das als starr angenommene Fahrzeug wird unter zwei Winkeln α_1 und α_2 an Seilen aufgehängt. Die gemessenen Seilkräfte sind:

1. Messung: $\alpha = 30^\circ$; $S_A = 6230\text{N}$; $S_B = 3770\text{N}$.
2. Messung: $\alpha = 0^\circ$; $S_A = 6000\text{N}$; $S_B = 4000\text{N}$.

Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinaten x_S und y_S des Fahrzeuges.

Gegeben: $l = 2.5\text{m}$.

Lösung: $x_S = 1.0\text{m}$; $y_S = 0.1\text{m}$.

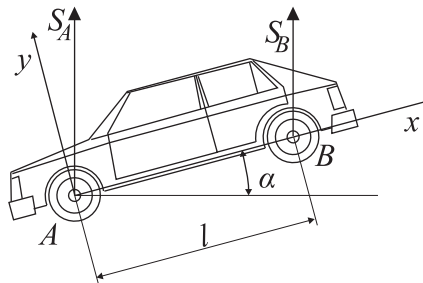


Bild 3.4.

Aufgabe 3.5. Der skizzierte Differential-Flachenzug besteht im wesentlichen aus zwei fest miteinander verbundenen Rollen unterschiedlichen Durchmessers, über die in der gezeichneten Weise eine endlose

Kette gelegt ist (Bild 3.5). Die Last hängt an einer einfachen Umlenkrolle.

Welche Kraft F ist erforderlich, um einer Last G das Gleichgewicht zu halten?

Gegeben: $G = 1.0\text{kN}$; $D = 25\text{cm}$; $d = 20\text{cm}$.

Lösung: $F = 100\text{N}$.

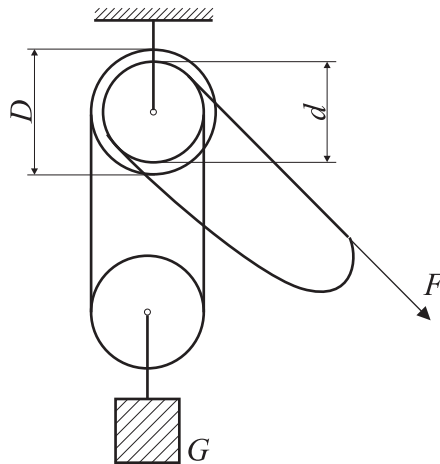


Bild 3.5.

Aufgabe 3.6. Die starre Scheibe (gewicht G) ist gemäß Lageplan gelagert (Bild 3.6). Bestimmen Sie graphisch und rechnerisch die Kräfte in den Stäben 1, 2 und 3 für Gleichgewichtsfall.

Gegeben: $G = 1\text{kN}$; $r = 2\text{m}$; $\alpha = 60^\circ$.

Lösung: $S_1 = 0.406\text{kN}$; $S_2 = 0.298\text{kN}$; $S_3 = 0.813\text{kN}$.

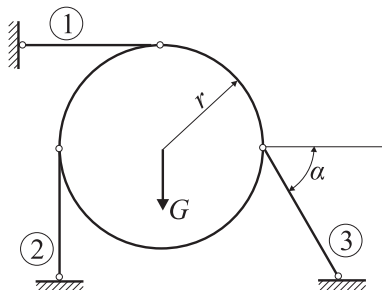


Bild 3.6.

Aufgabe 3.7. Ermitteln Sie graphisch und rechnerisch die Stabkräfte S_1 , S_2 und S_3 (Bild 3.7).

Gegeben: $F = 1\text{kN}$; $M = 1\text{kNm}$; $a = 1\text{m}$;
 $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Lösung: $S_1 = 3.48\text{kN}$; $S_2 = 4.0\text{kN}$; $S_3 = 3.46\text{kN}$.

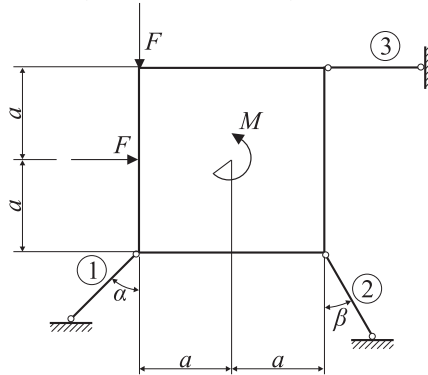


Bild 3.7.

Aufgabe 3.8. Die Holme der skizzierten Trittleiter sind bei D durch ein reibungsfreies Gelenk verbunden (Bild 3.8). Das Gewicht der Leiter beträgt G_L und ist gleichmäßig über die Holme verteilt. Auf der Stufe bei C steht ein Mann vom Gewicht G_M .

Welche Kraft tritt in dem Verbindungsstück $A - B$ auf? (Das System ist reibungsfrei.)

Gegeben: $G_L = 250\text{N}$; $G_M = 750\text{N}$; $l = 2.40\text{m}$;
 $a = 0.6\text{m}$; $b = 0.9\text{m}$; $c = 1.5\text{m}$.

Lösung: $S = 137\text{N}$.

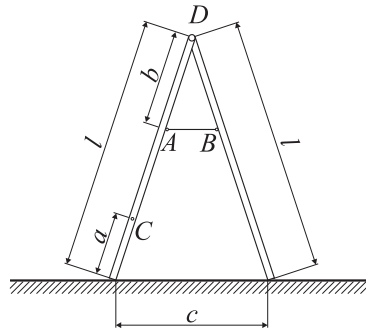


Bild 3.8.

Aufgabe 3.9. Ein Balken wird horizontal zwischen zwei unter den Winkel α und β geneigten Ebenen gelegt (Bild 3.9).

In welchem Abstand b muss die Kraft F wirken, damit der Balken in seiner horizontalen Lage im Gleichgewicht ist?

Die Reibung zwischen dem gewichtlosen Balken und den Ebenen ist zu vernachlässigen.

Gegeben: a ; α ; β ; F .

Lösung:
$$b = \frac{a}{1 + \frac{\cot \alpha}{\cot \beta}}.$$

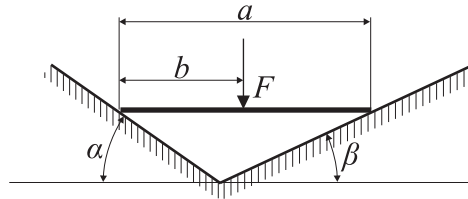


Bild 3.9.

Aufgabe 3.10. Ein Stein 1 (Quader) liegt wie skizziert auf einem zweiten Stein 2 und wird an einer Ecke durch den Pfahl 3 zusätzlich gestützt (Bild 3.10).

Mit welcher Kraft F darf auf die nicht gestützte Ecke des homogenen Steines 1 (Eigengewicht G) gedrückt werden, ohne dass dieser kippt?

Gegeben: a ; b ; c ; h ; G .

Lösung:
$$F = \frac{cG}{2(b - c)}.$$

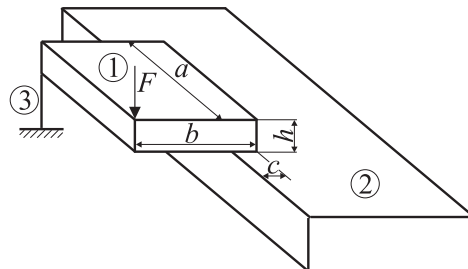


Bild 3.10.

Aufgabe 3.11. An der starren Scheibe greift die ebene Kräftegruppe P_i an (Bild 3.11).

1. Ermitteln Sie den Hebelarm h_i der Kraft P_i ($i = 1, 2, 3, 4$), bezüglich des Punktes O (Koordinatenursprung).

2. Berechnen Sie mittels der h_i die Momentenkomponente $M_{Oz}(P_i)$, ($i = 1, 2, 3, 4$).

3. Zerlegen Sie die Kraft P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) in ihre Komponenten bezüglich der Basis (e_x, e_y) .

4. Berechnen Sie mittels der Kräftekomponenten P_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = x, y$), die Größen $M_{Oz}(P_i)$ und $\sum_{i=1}^4 M_{Oz}$.

5. Überprüfen Sie $\sum_{i=1}^4 M_{Oz}$ auf graphischem Weg.

Gegeben: $P_1 = 4\text{kN}$; $P_2 = 2\text{kN}$; $P_3 = 3\text{kN}$; $P_4 = 2\text{kN}$;
 $a = 1\text{m}$.

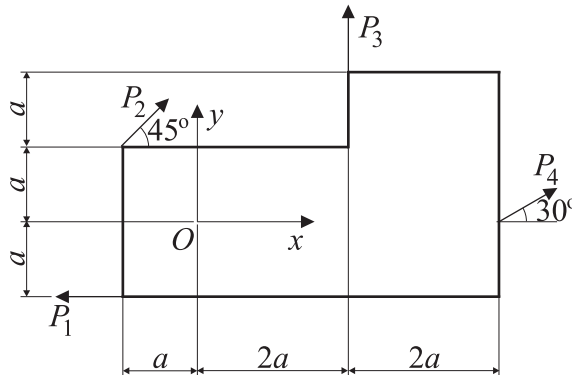


Bild 3.11.

Aufgabe 3.12. Gegeben ist die ebene Kräftegruppe P_i durch:

$$P_i = \{ \text{Koordinaten } (x; y) \text{ des Angriffspunkts } A_i \quad (P_{ix}, ; P_{iy}) \}$$

$$P_1 = \{ \quad (4; 3) \quad \text{m} \quad (3; 3) \quad \text{kN} \}$$

$$P_2 = \{ \quad (5; 0.5) \quad \text{m} \quad (4; -3) \quad \text{kN} \}$$

$$P_3 = \{ \quad (2; 0) \quad \text{m} \quad (1; -4) \quad \text{kN} \}$$

$$P_4 = \{ \quad (-0.5; 2.5) \quad \text{m} \quad (6; 0) \quad \text{kN} \}$$

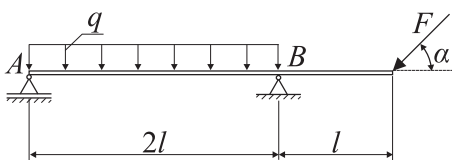
$$P_5 = \{ \quad (2; 3.5) \quad \text{m} \quad (-2; 4) \quad \text{kN} \}.$$

Berechnen Sie $\sum_{i=1}^5 M_O(P)$ (O : Koordinatenursprung).

Kapitel 4

Lagerreaktionen

Beispiel. Das dargestellte Tragwerk wird durch die Kraft F und Belastung q belastet. Man bestimme die Lagerreaktionen in A und B .

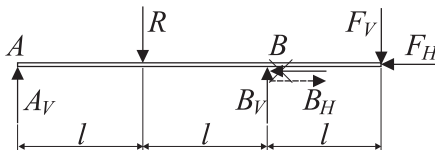


Gegeben:
 $l=1.0\text{m}$
 $F=6\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $\alpha=60^\circ$

Lösung:

Die Streckenlast wird durch Resultierende $R = q2l = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4\text{kN}$ ersetzt. Wir zerlegen die Kraft F in zwei Komponenten $-F_H$ und F_V .

$$F_H = F \cos \alpha = 6 \cdot 0.866 = 5.2\text{kN}, \quad F_V = F \sin \alpha = 6 \cdot 0.5 = 3\text{kN}.$$



Freikörperbild

Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\rightarrow: \quad -B_H - F_H = 0 \rightarrow -B_H - 5.2 = 0 \rightarrow B_H = -5.2\text{kN},$$

$$\begin{aligned} \sum M_i^{(B)} = 0 : \quad & -2lA_V + lR - lF_V = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow 2A_V + 1.4 - 1.3 = 0 \rightarrow A_V = 0.5\text{kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_i^{(A)} = 0 : \quad -lR + 2lB_V - 3lF_V = 0 &\rightarrow \\ &\rightarrow -1 \cdot 4 + 2B_V - 3 \cdot 3 = 0 \rightarrow B_V = 6.5 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen bei B_H zeigt, dass diese Reaktion in Wirklichkeit entgegengesetzt zu der Richtung wirkt, die im Freikörperbild angenommen wird.

Kontrolle:

$$\uparrow: \quad A_V - R + B_V - F_V = 0 \rightarrow 0.5 - 4 + 6.5 - 3 = 0 \rightarrow 7 - 7 = 0.$$

Aufgabe 4.1. Für die in Bild 4.1 gezeigten Lagepläne ist zu erledigen:

1. Freimachen des Tragwerks.
2. Bestimmen Sie die Anzahl der Auflagerbindungen für jedes Lager und ermitteln Sie die Anzahl der Auflagerbindungen für jeden Körper.
3. Geben Sie die Anzahl der noch vorhandenen Freiheitsgrade f_g des gefesselten Tragwerks an.
4. Urteilen Sie, ob das Tragwerk starr gelagert ist.

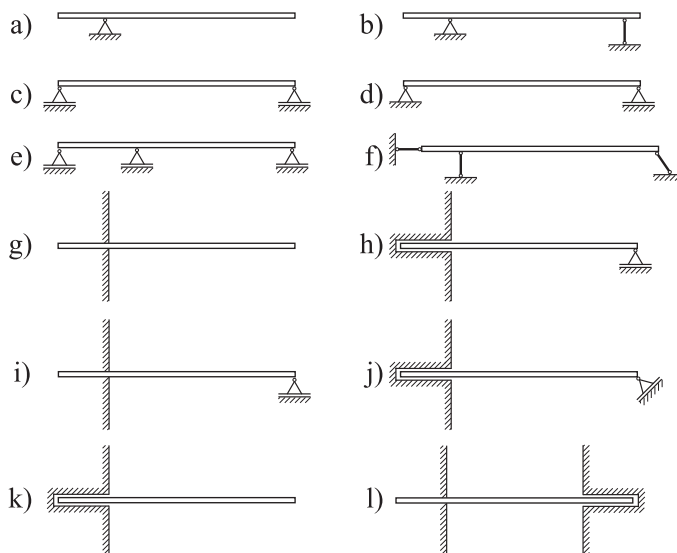


Bild 4.1.

Aufgabe 4.2. - 4.20. Für die nachstehend aufgeführten Systeme sind die Lagerreaktionen zu bestimmen (Bild 4.2 - Bild 4.20).

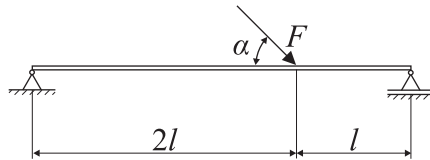


Bild 4.2.

Gegeben:
 $l=1\text{m}$
 $F=6\text{kN}$
 $\alpha=30^\circ$

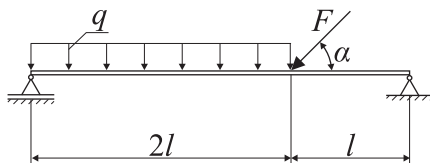


Bild 4.3.

Gegeben:
 $l=1.5\text{m}$
 $F=5\text{kN}$
 $q=3\text{kN/m}$
 $\alpha=53.13^\circ$

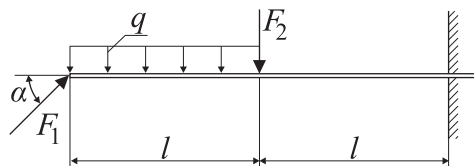


Bild 4.4.

Gegeben:
 $l=2\text{m}$
 $F_1=5.66\text{kN}$
 $F_2=3\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $\alpha=45^\circ$

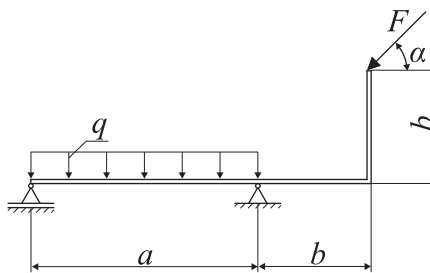


Bild 4.5.

Gegeben:
 $a=3\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $F=5\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $\alpha=36.87^\circ$

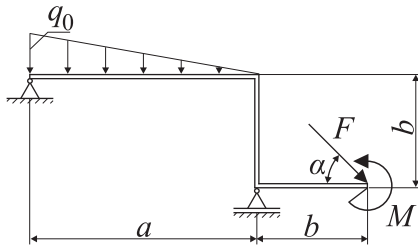


Bild 4.6.

Gegeben:
 $a=2.4\text{m}$
 $b=1.2\text{m}$
 $F=4\text{kN}$
 $q_0=6\text{kN/m}$
 $M=2\text{kNm}$
 $\alpha=45^\circ$

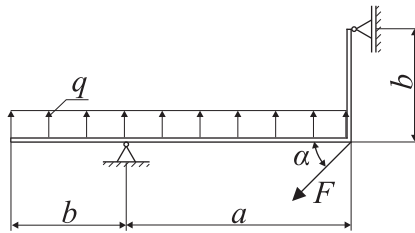


Bild 4.7.

Gegeben:
 $a=2\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $F=6\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $\alpha=30^\circ$

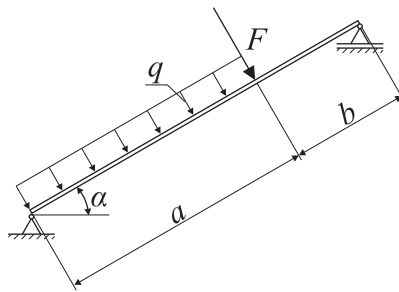


Bild 4.8.

Gegeben:
 $a=3\text{m}$
 $b=1.5\text{m}$
 $F=4\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $\alpha=30^\circ$

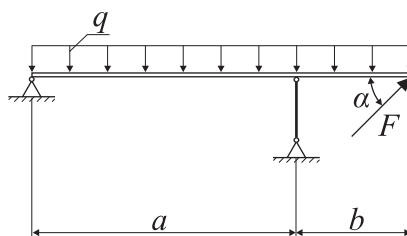
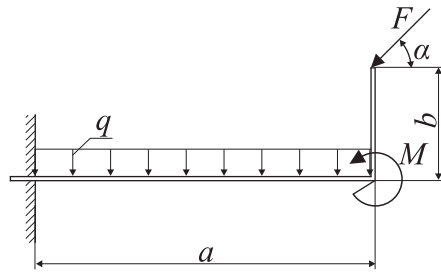


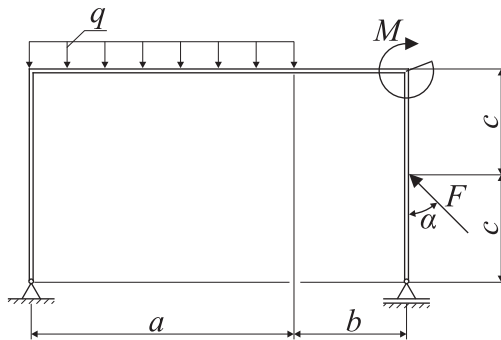
Bild 4.9.

Gegeben:
 $a=2.5\text{m}$
 $b=1.5\text{m}$
 $F=5\text{kN}$
 $q=3\text{kN/m}$
 $\alpha=53.13^\circ$



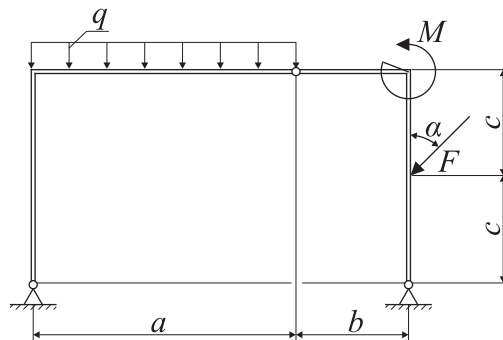
Gegeben:
 $a=4\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $F=10\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $M=12\text{kNm}$
 $\alpha=36.87^\circ$

Bild 4.10.



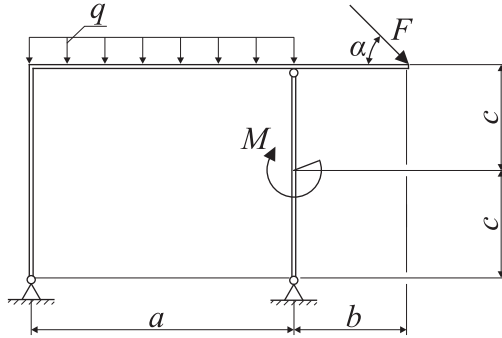
Gegeben:
 $a=2\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $c=1\text{m}$
 $F=5\text{kN}$
 $q=4\text{kN/m}$
 $M=3\text{kNm}$
 $\alpha=36.87^\circ$

Bild 4.11.



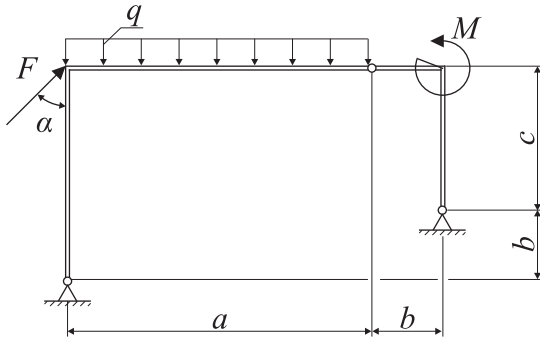
Gegeben:
 $a=3\text{m}$
 $b=1.5\text{m}$
 $c=1\text{m}$
 $F=5.66\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $M=2\text{kNm}$
 $\alpha=45^\circ$

Bild 4.12.



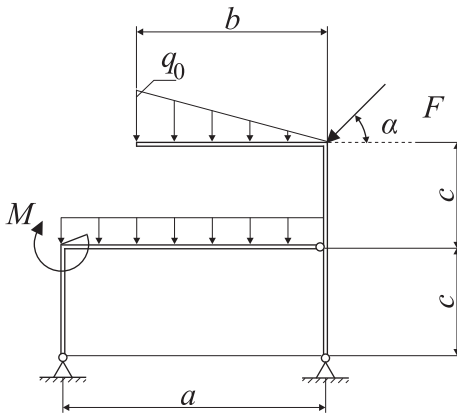
Gegeben:
 $a=2.5\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $c=1.25\text{m}$
 $F=6\text{kN}$
 $q=4\text{kN/m}$
 $M=3\text{kNm}$
 $\alpha=30^\circ$

Bild 4.13.



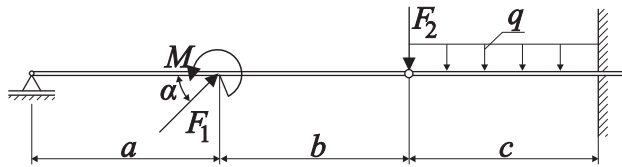
Gegeben:
 $a=4\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $c=1.5\text{m}$
 $F=5\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $M=4\text{kNm}$
 $\alpha=36.87^\circ$

Bild 4.14.



Gegeben:
 $a=2\text{m}$
 $b=1.5\text{m}$
 $c=1\text{m}$
 $F=8\text{kN}$
 $q=4\text{kN/m}$
 $q_0=6\text{kN/m}$
 $M=2\text{kNm}$
 $\alpha=60^\circ$

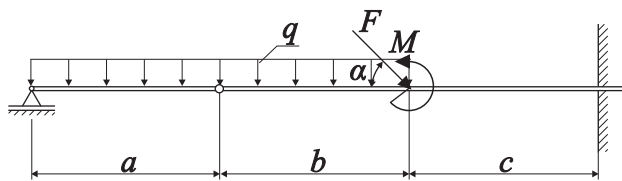
Bild 4.15.



Gegeben:

- | | | |
|---------------|------------------|----------------------|
| $a=1\text{m}$ | $F_1=5\text{kN}$ | $M=3\text{kNm}$ |
| $b=1\text{m}$ | $F_2=2\text{kN}$ | $\alpha=36.87^\circ$ |
| $c=2\text{m}$ | $q=2\text{kN/m}$ | |

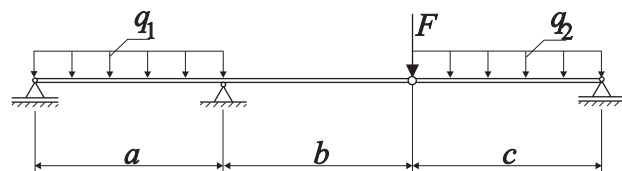
Bild 4.16.



Gegeben:

- | | | |
|-----------------|------------------|-------------------|
| $a=2\text{m}$ | $F=6\text{kN}$ | $M=2\text{kNm}$ |
| $b=1.5\text{m}$ | $q=4\text{kN/m}$ | $\alpha=30^\circ$ |
| $c=1.5\text{m}$ | | |

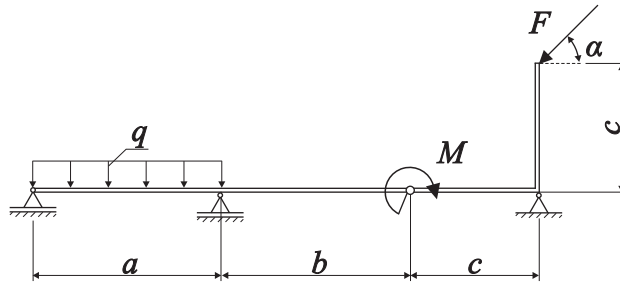
Bild 4.17.



Gegeben:

- | | |
|---------------|--------------------|
| $a=2\text{m}$ | $F=3\text{kN}$ |
| $b=1\text{m}$ | $q_1=4\text{kN/m}$ |
| $c=2\text{m}$ | $q_2=2\text{kN/m}$ |

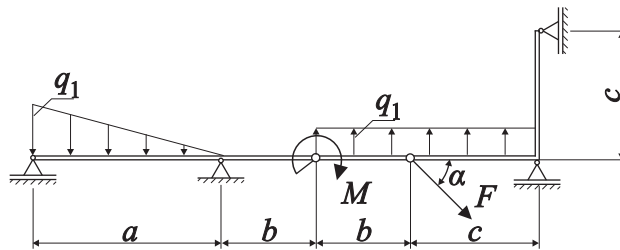
Bild 4.18.



Gegeben:

$$\begin{array}{lll} a=2\text{m} & F=5\text{kN} & M=6\text{kNm} \\ b=2\text{m} & q=2\text{kN/m} & \alpha=53.13^\circ \\ c=1\text{m} & & \end{array}$$

Bild 4.19.



Gegeben:

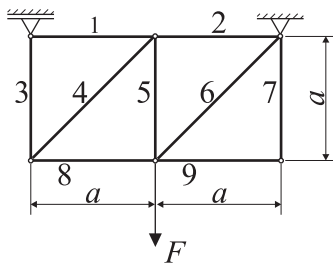
$$\begin{array}{lll} a=3\text{m} & F=5.66\text{kN} & M=2\text{kNm} \\ b=1\text{m} & q_1=6\text{kN/m} & \alpha=45^\circ \\ c=1.5\text{m} & q_2=2\text{kN/m} & \end{array}$$

Bild 4.20.

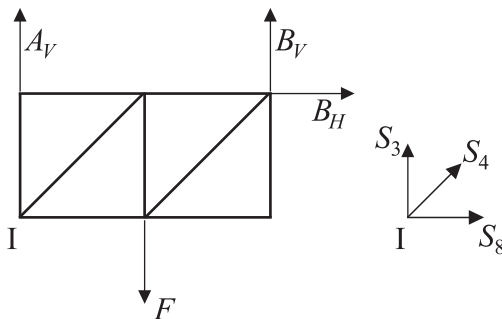
Kapitel 5

Fachwerke

Beispiel. Das dargestellte Fachwerk wird durch eine Kraft F belastet. Man identifiziere die Nullstäbe. Wie groß sind die Lagerreaktionen und die Kraft im Stab 4?



Lösung: Die Stäbe 1, 7 und 9 sind Nullstäbe. Die Lagerreaktionen erhalten wir aus den Gleichgewichtsbedingungen am gesamten Fachwerk. Die Stabkraft S_3 ist gleich der Lagerreaktion A_V .



Freikörperbild

Gleichgewicht am gesamten Fachwerk:

$$\sum M_i^{(A)} = 0 : \quad -aF + 2aB_V = 0 \rightarrow B_V = \frac{F}{2},$$

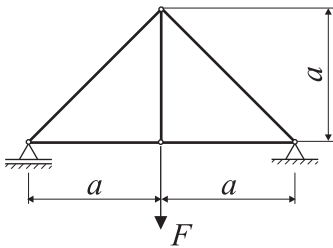
$$\sum M_i^{(B)} = 0 : \quad aF - 2aA_V = 0 \rightarrow A_V = \frac{F}{2},$$

$$\rightarrow: \quad B_H = 0.$$

Gleichgewicht am Knoten I:

$$\uparrow: \quad S_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_4 = 0 \rightarrow S_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F.$$

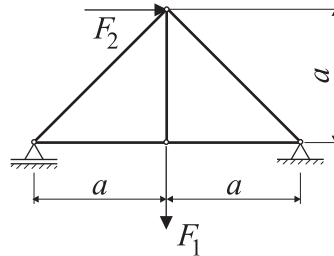
Aufgabe 5.1. – 5.8. Für das skizzierte Fachwerk sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte zu berechnen – zeichnerisch und rechnerisch (Bild 5.1 bis Bild 5.8). Mit Hilfe des Ritterschen Schnittverfahrens kontrolliere man das Ergebnis für gezeigten Stäbe.



a) Gegeben:

$$a = 2\text{m}$$

$$F = 4\text{kN}$$



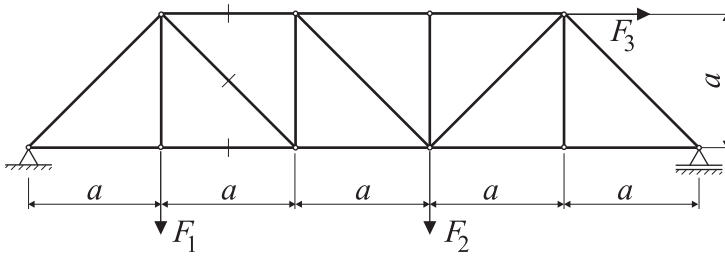
b) Gegeben:

$$a = 2\text{m}$$

$$F_1 = 8\text{kN}$$

$$F_2 = 2\text{kN}$$

Bild 5.1.

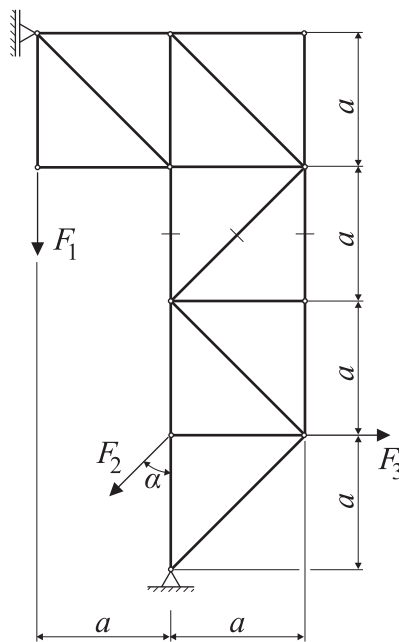


b) Gegeben:

$$a = 1.2\text{m} \quad F_2 = 4\text{kN}$$

$$F_1 = 6\text{kN} \quad F_3 = 3\text{kN}$$

Bild 5.2.



Gegeben:

$$a = 1.8\text{m}$$

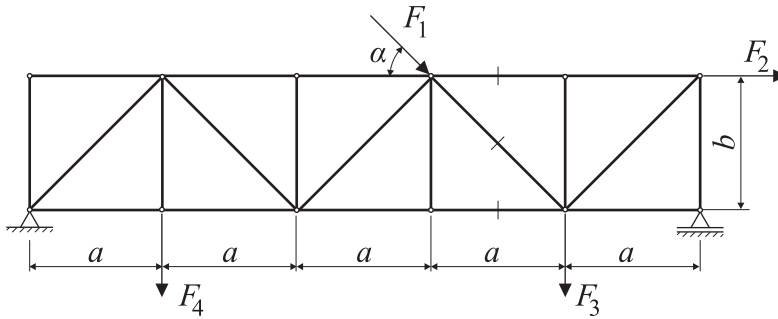
$$F_1 = 8\text{kN}$$

$$F_2 = 5\text{kN}$$

$$F_3 = 6\text{kN}$$

$$\alpha = 53.13^\circ$$

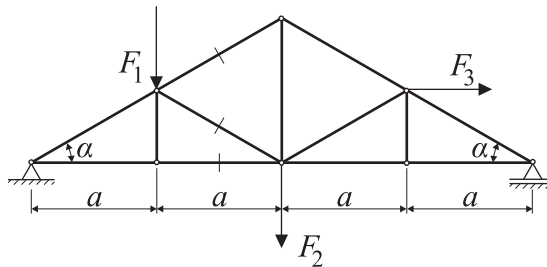
Bild 5.3.



Gegeben:

$$\begin{array}{ll}
 a = 1.6\text{m} & F_1 = 6\text{kN} \\
 b = 1.2\text{m} & F_2 = 3.5\text{kN} \\
 \alpha = 30^\circ & F_3 = 5\text{kN} \\
 & F_4 = 10\text{kN}
 \end{array}$$

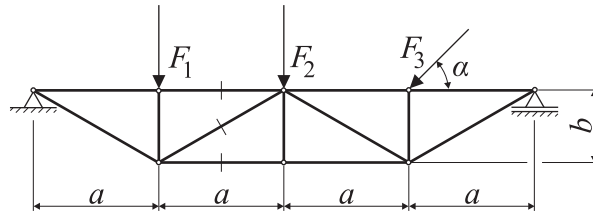
Bild 5.4.



Gegeben:

$$\begin{array}{ll}
 a = 2\text{m} & F_1 = 10\text{kN} \\
 \alpha = 30^\circ & F_2 = 9\text{kN} \\
 & F_3 = 7\text{kN}
 \end{array}$$

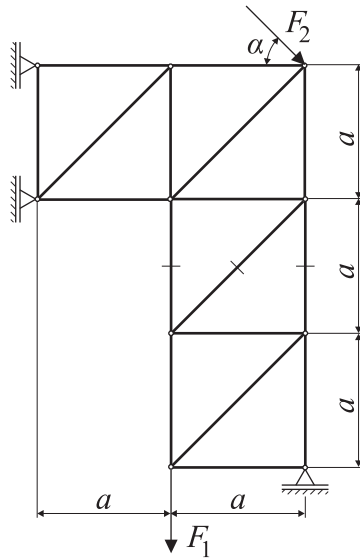
Bild 5.5.



Gegeben:

$$\begin{aligned}
 a &= 1.4\text{m} & F_1 &= 8\text{kN} \\
 b &= 0.7\text{m} & F_2 &= 12\text{kN} \\
 \alpha &= 53.13^\circ & F_3 &= 5\text{kN}
 \end{aligned}$$

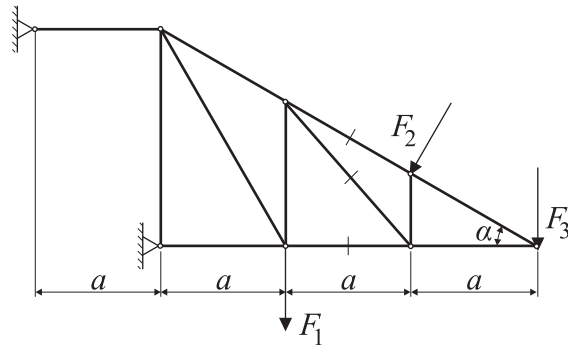
Bild 5.6.



Gegeben:

$$\begin{aligned}
 a &= 1.5\text{m} \\
 F_1 &= 6\text{kN} \\
 F_2 &= 5.66\text{kN} \\
 \alpha &= 45^\circ
 \end{aligned}$$

Bild 5.7.



Gegeben:

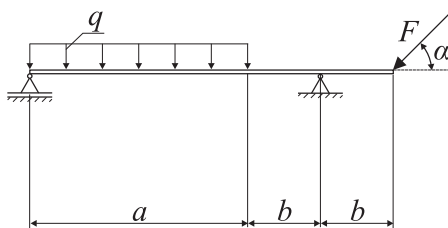
$$\begin{aligned} a &= 2.5\text{m} & F_1 &= 8\text{kN} \\ \alpha &= 30^\circ & F_2 &= 6\text{kN} \\ & & F_3 &= 4\text{kN} \end{aligned}$$

Bild 5.8.

Kapitel 6

Schnittgrößen

Beispiel. Man bestimme die Schnittkraftlinien für den dargestellten Balken.



Gegeben:
 $a=3.0\text{m}$
 $b=1.0\text{m}$
 $F=5.66\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $\alpha=45^\circ$

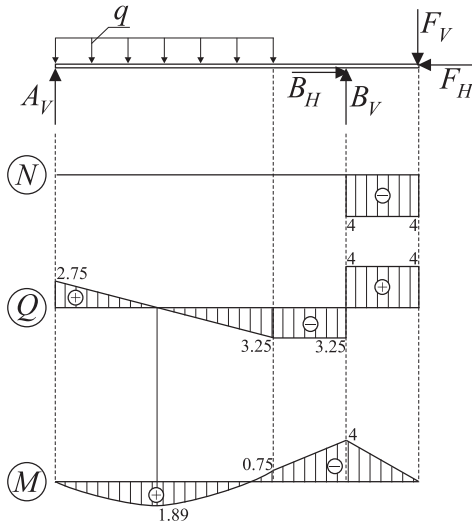
Lösung:

Wir ermitteln zuerst die Lagerreaktionen A_V , B_V und B_H aus den Gleichgewichtsbedingungen am gesamten Balken:

$$\sum H_i = 0 : B_H = 4\text{kN},$$

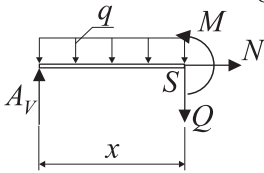
$$\sum M_i^{(B)} = 0 : A_V = 2.75\text{kN},$$

$$\sum M_i^{(A)} = 0 : B_V = 7.25\text{kN}.$$



Feld I, $0 \leq x \leq 3$:

Wir schneiden den Balken an einer beliebigen Stelle x im Bereich $0 < x < 3$. Aus Gleichgewichtsbedingungen am Teilbalken folgt:



$$\rightarrow: N = 0,$$

$$\downarrow: Q - A_V + qx = 0 \rightarrow Q = -2x + 2.75,$$

$$x = 0 \rightarrow Q = 2.75 \text{ kN};$$

$$x = 3 \rightarrow Q = -3.25 \text{ kN};$$

$$Q = 0 \rightarrow x = 1.375 \text{ m}.$$

$$\sum M_i^{(S)} = 0: M - A_V x + qx \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M = -x^2 + 2.75x,$$

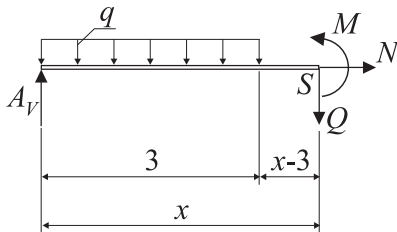
$$x = 0 \rightarrow M = 0;$$

$$x = 3 \rightarrow M = -0.75 \text{ kNm};$$

$$x = 1.375 \rightarrow M = 1.89 \text{ kNm}.$$

Feld II, $3 \leq x \leq 4$:

Gleichgewichtsbedingungen sind:



$$\rightarrow: N = 0,$$

$$\downarrow: Q - A_V + q3 = 0 \rightarrow Q = -3.25\text{kN}.$$

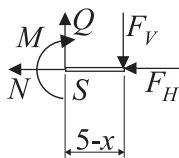
$$\sum M_i^{(S)} = 0: M - A_V x + q3(x - 1.5)\frac{x}{2} = 0 \rightarrow M = -3.25x + 9,$$

$$x = 3 \rightarrow M = -0.75\text{kNm};$$

$$x = 4 \rightarrow M = -4\text{kNm}.$$

Feld III, $4 \leq x \leq 5$:

Gleichgewichtsbedingungen:



$$\rightarrow: -N - F_V = 0 \rightarrow N = -4\text{kN};$$

$$\downarrow: -Q + F_V = 0 \rightarrow Q = 4\text{kN};$$

$$\sum M_i^{(S)} = 0: -M - F_V(5 - x) = 0 \rightarrow M = 4x - 20,$$

$$x = 4 \rightarrow M = -4\text{kNm};$$

$$x = 5 \rightarrow M = 0.$$

Aufgabe 6.1. - 6.10. Für die nachstehend aufgeführten Systeme sind die Lagerreaktionen und die Schnittgrößen zu bestimmen (Bild 6.1 - Bild 6.10).

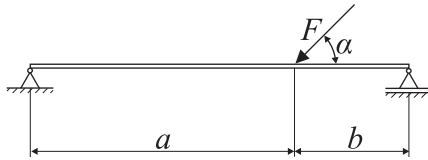


Bild 6.1.

Gegeben:
 $a=3\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $F=10\text{kN}$
 $\alpha=36.87^\circ$

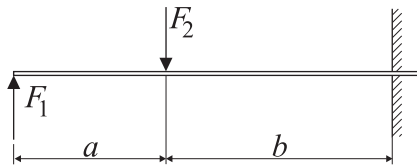


Bild 6.2.

Gegeben:
 $a=1.5\text{m}$
 $b=2.5\text{m}$
 $F_1=3\text{kN}$
 $F_2=7\text{kN}$

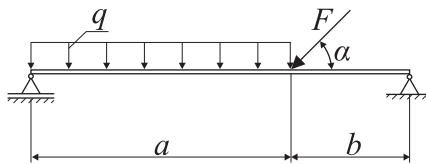


Bild 6.3.

Gegeben:
 $a=3\text{m}$
 $b=2\text{m}$
 $F=8\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $\alpha=30^\circ$

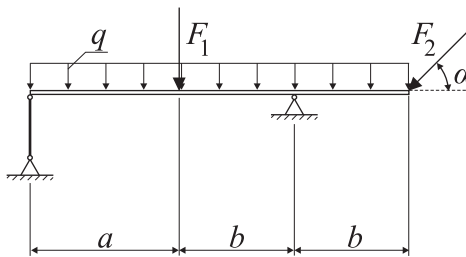
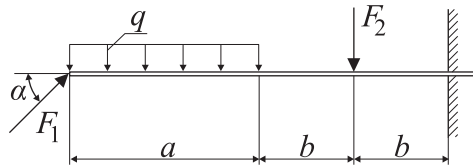


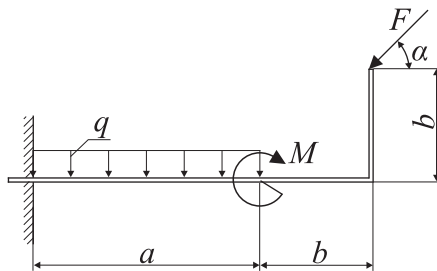
Bild 6.4.

Gegeben:
 $a=2\text{m}$
 $b=1.5\text{m}$
 $F_1=4\text{kN}$
 $F_2=8.5\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $\alpha=45^\circ$



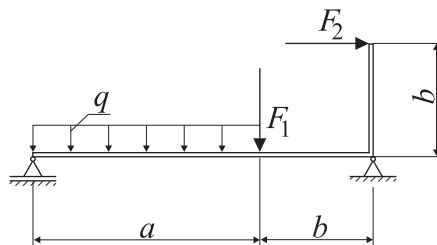
Gegeben:
 $a=2\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $F_1=6\text{kN}$
 $F_2=4\text{kN}$
 $q=3\text{kN/m}$
 $\alpha=30^\circ$

Bild 6.5.



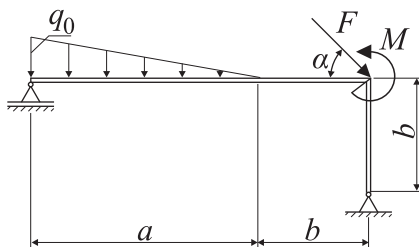
Gegeben:
 $a=3\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $F=5\text{kN}$
 $q=4\text{kN/m}$
 $M=2\text{kNm}$
 $\alpha=53.13^\circ$

Bild 6.6.



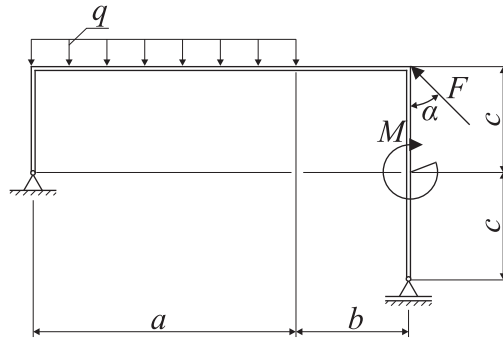
Gegeben:
 $a=4\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $F_1=3\text{kN}$
 $F_2=5\text{kN}$
 $q=3\text{kN/m}$

Bild 6.7.



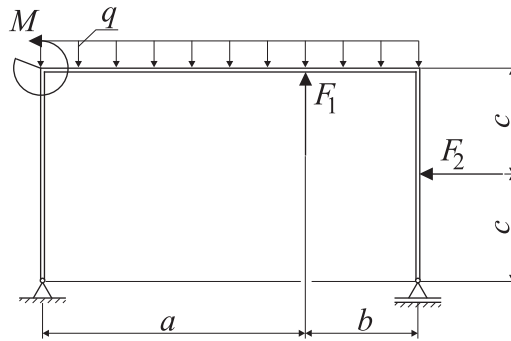
Gegeben:
 $a=3\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $F=5\text{kN}$
 $q_0=8\text{kN/m}$
 $M=4\text{kNm}$
 $\alpha=36.87^\circ$

Bild 6.8.



Gegeben:
 $a=3\text{m}$
 $b=1\text{m}$
 $c=0.75\text{m}$
 $F=5\text{kN}$
 $q=2\text{kN/m}$
 $M=6\text{kNm}$
 $\alpha=53.13^\circ$

Bild 6.9.



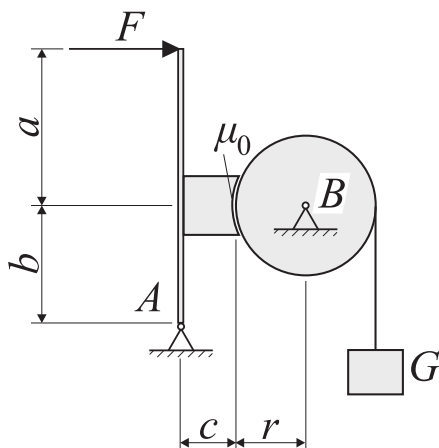
Gegeben:
 $a=2.5\text{m}$
 $b=1.5\text{m}$
 $c=1\text{m}$
 $F_1=4\text{kN}$
 $F_2=3\text{kN}$
 $q=3\text{kN/m}$
 $M=5\text{kNm}$

Bild 6.10.

Kapitel 7

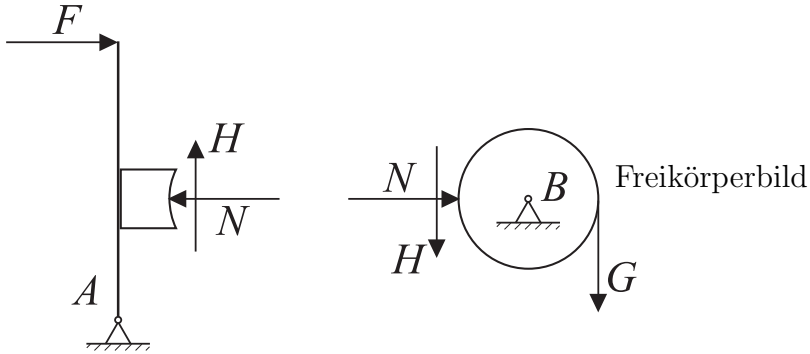
Haftung und Reibung

Beispiel. Eine rauhe Seiltrommel ist bei B reibungsfrei drehbar gelagert. Der Haftungskoeffizient zwischen der Trommel und dem Klotz ist μ_0 . Am Ende des Seils hängt eine Last (Gewicht G). Wie groß muß die Kraft F am Ende des Hebels mindestens sein, damit sich die Trommel nicht dreht?



Lösung:

Ohne Haftung würde sich die Trommel im Uhrzeigersinn drehen. Die Haftungskraft ist so gerichtet, dass diese Bewegung verhindert wird.



Gleichgewicht an der Trommel:

$$\sum M_i^{(B)} = 0 : \quad rH - rG = 0 \rightarrow H = G.$$

Gleichgewicht am Hebel:

$$\sum M_i^{(A)} = 0 : \quad bN + cH - (a+b)F = 0 \rightarrow N = \frac{1}{b}[(a+b)F - cG].$$

Haftbedingung:

$$H \leq \mu_0 N \quad \rightarrow \quad F \geq \frac{b + \mu_0 c}{\mu_0(a+b)} G.$$

Aufgabe 7.1. Der dargestellte Körper (Gewicht G) liegt auf einer geneigten Ebene (Bild 7.1). Am Körper greift eine Kraft F unter dem Winkel β zur schiefen Ebene an.

Man bestimme:

- die Kraft zum Halten der Last in der Ruhelage;
- die Kraft, wenn die Last nach oben in Bewegung gesetzt werden soll;
- Die Kraft, wenn die Last gleichmäßig nach oben bewegt werden soll.

Gegeben:

$$G = 70\text{N}; \quad \alpha = 19^\circ;$$

$$\beta = 14^\circ; \quad \mu_0 = 0.29; \quad \mu = 0.21.$$

Lösung:

- a) $F = 3.995\text{N};$
- b) $F = 40.357\text{N};$
- c) $F = 35.933\text{N};$

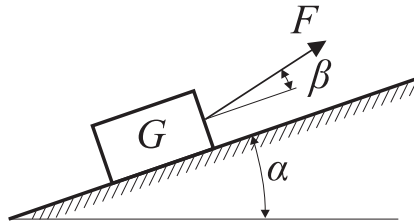


Bild 7.1.

Aufgabe 7.2. Zwei Körper (Gewicht G_1 und G_2) sind mit einem Faden verbunden. Körper 1 liegt auf einer waagerechten Ebene (Bild 7.2). Wie groß soll das Gewicht G_2 sein zum Halten den Körper 1 in der Rahestand.

Gegeben: $G_1 = 50\text{N}; \quad \mu_0 = 0.35.$

Lösung: $G_2 = 17.5\text{N}.$

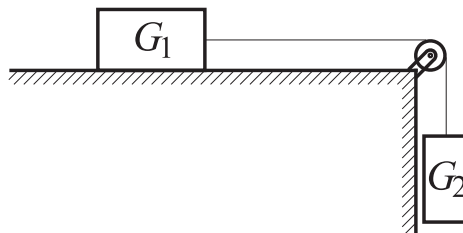


Bild 7.2.

Aufgabe 7.3. Wie groß darf das Gewicht G in der gezeichneten Anordnung (Bild 7.3) höchstens sein, damit keine Bewegung auftritt?

Gegeben: $G_1; \quad G_2 > G_1; \quad \mu_0; \quad \alpha.$

Lösung: $G < G_1(\mu_0 \cos \alpha - \sin \alpha) + G_2.$

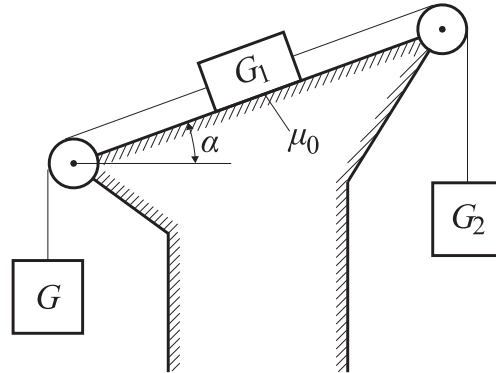


Bild 7.3.

Aufgabe 7.4. Um einem zylindrischen Körper (Gewicht G) ist ein Faden geschlungen, an dessen Ende die Gewichtskraft F_G wirkt (Bild 7.4).

a) Wie groß muß F_G sein, damit der Körper auf der Kreisbahn liegen bleibt?

b) Wie groß muß für diese Lage der Haftkoeffizient μ_0 mindestens sein?

Gegeben: α ; G .

Lösung: a) $F_G = G \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$; b) $\mu_0 \geq \tan \alpha$.

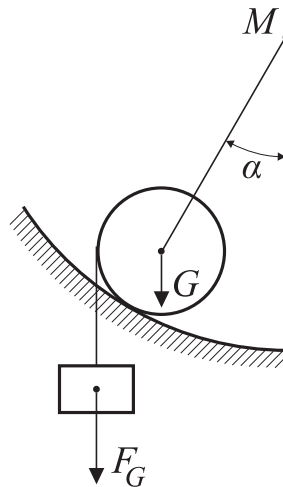


Bild 7.4.

Aufgabe 7.5. Auf einer rauhen, auf der Kante stehenden, schiefen Ebene (Neigung $\beta = 20^\circ$) liegt ein Quader (Gewicht G , Haftreibungwert μ_0), gehalten durch eine gewichtslose Stange (Bild 7.5). Die Quadermaße sind vernachlässigbar klein gegenüber der Stangenlänge.

Bestimmen Sie den maximalen Winkel α , bei dem der Quader nicht abrutscht.

Gegeben: G ; $\mu_0 = 0.2$.

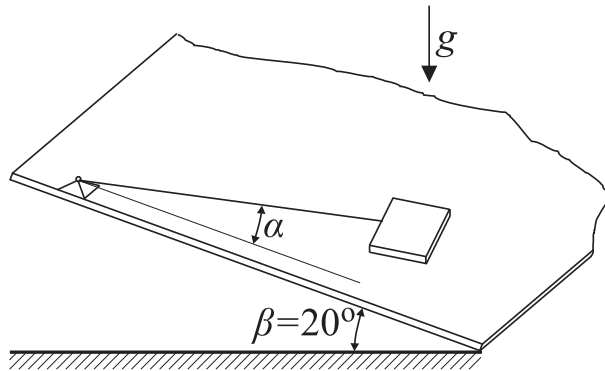


Bild 7.5.

Aufgabe 7.6. Ein an einer reibungsbehafteten Wand anliegender Körper (Gewichtskraft G_1) ist über einen horizontalen Stab mit einem zweiten Körper (Gewichtskraft G_2) verbunden (Bild 7.6). Dieser Körper liegt auf einer ideal glatten, schiefen Ebene. Das Gewicht des Stabes ist zu vernachlässigen. Die Gelenke sind reibungsfrei.

Man bestimme die mindestens notwendige Gewichtskraft G_2 , um ein Abrutschen des Systems zu verhindern.

Gegeben: $\alpha = 30^\circ$; $G_1 = 50\text{N}$; $\mu_0 = 0.4$.

Lösung:
$$G_{2\min} = \frac{G_1}{\mu_0} \cot \alpha .$$

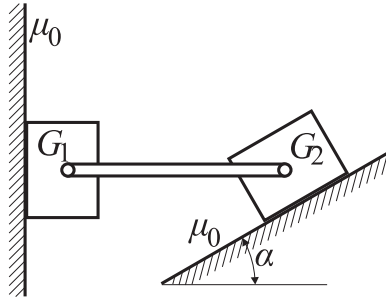


Bild 7.6.

Aufgabe 7.7. In der rauhen Kippmulde K eines LKWs liegt der schraffiert dargestellte Körper G (Gewicht G) (Bild 7.7). Ist G in der gezeichneten Stellung im Ruhezustand?

Gegeben: $G = 10\text{kN}$; $\mu_0 = 0.5$; $a = 1\text{m}$.

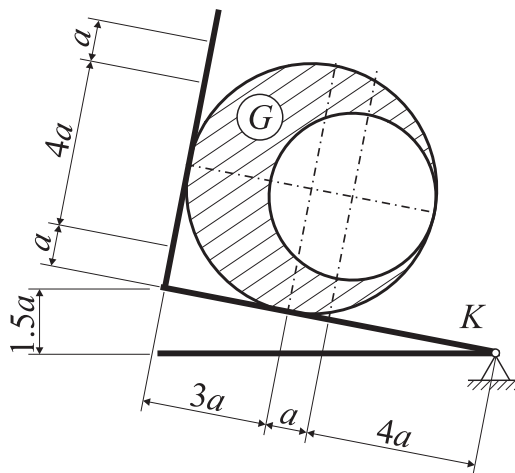


Bild 7.7.

Aufgabe 7.8. Mit der skizzierten Bremsvorrichtung (Reibwert μ) lassen sich in den beiden Drehrichtungen verschiedene Bremsmomente erzeugen (Bild 7.8).

Die für ein Verhältnis β der beiden Bremsmomente (Beträge) erforderliche Exzentrizität e ist zu berechnen.

Für welche Drehrichtung tritt das größere Bremsmoment auf?

Gegeben: a ; b ; D ; F ; μ ; $\beta > 1$.

Lösung: $e = \mu a \frac{\beta + 1}{\beta - 1}$.

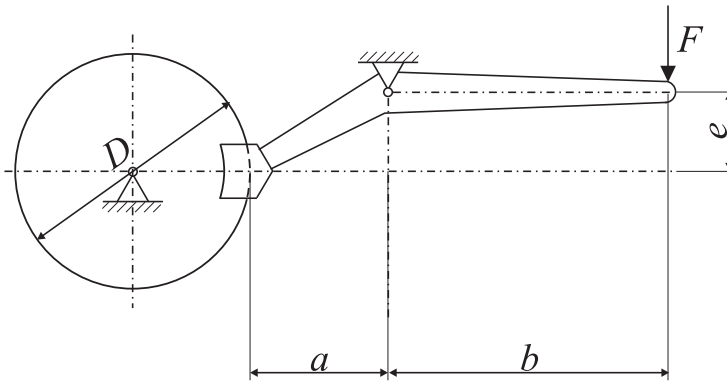


Bild 7.8.

Aufgabe 7.9. Ein Stab (Länge l , Gewicht G) wird an einem gewichtlosen Seil unter einem Winkel α_1 mit konstanter Geschwindigkeit über den Boden gezogen (Bild 7.9). Der Reibwert zwischen Stab und Boden beträgt μ .

Wie groß ist im Gleichgewichtszustand der Winkel α_2 zwischen Seil und Boden?

Gegeben: l ; α_1 ; μ ; G .

Lösung: $\tan \alpha_2 = \frac{1}{\mu} + 2 \tan \alpha_1$.

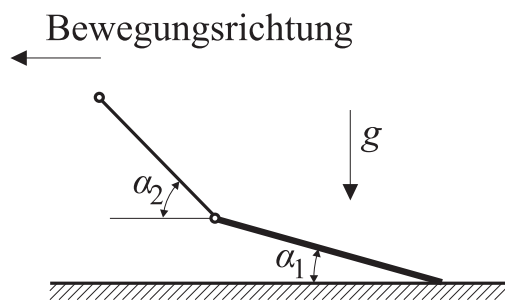


Bild 7.9.

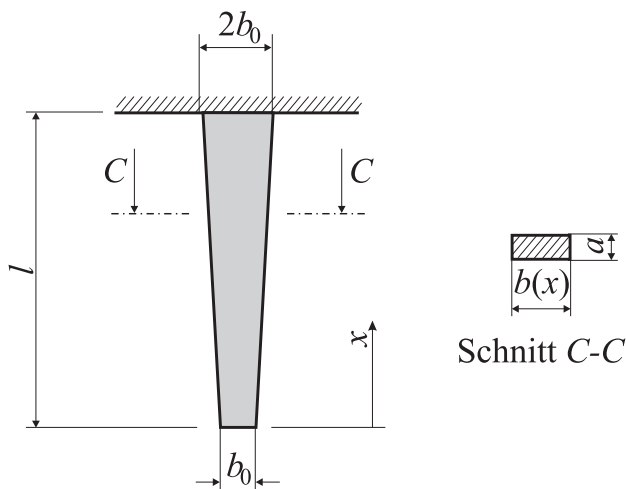
Teil II

Elastostatik

Kapitel 1

Zug und Druck

Beispiel. Ein Stab (Dichte ρ , Elastizitätsmodul E , Länge l) mit Rechteckquerschnitt (konstante Dicke a , linear veränderliche Breite $b(x)$) ist an seinem oberen Ende aufgehängt. Man bestimme die Spannung $\sigma(x)$, die Spannung $\sigma(l)$ an der Einspannstelle und die Verlängerung des Stabes infolge des Eigengewichts.

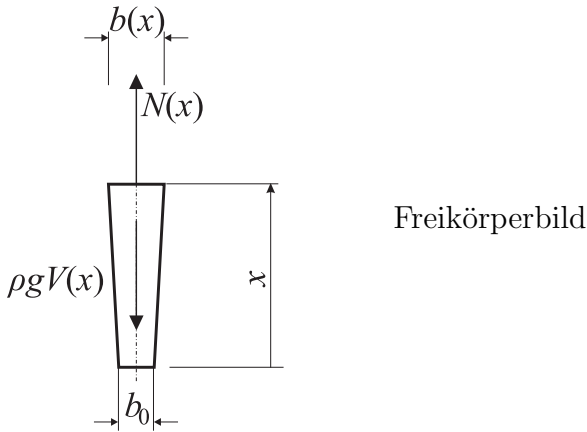


Lösung:

Geometrie:

$$b(x) = b_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right), \quad A(x) = ab_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right),$$

$$V(x) = \frac{1}{2}[b_0 + b(x)]ax = \frac{1}{2}ab_0\left(2 + \frac{x}{l}\right)x.$$



Gleichgewicht:

$$N(x) = \rho g V(x).$$

Spannung an der Stelle x :

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \rightarrow \sigma(x) = \frac{1}{2}\rho g \frac{(2l+x)x}{l+x}.$$

Spannung an der Einspannstelle $x = l$:

$$\sigma(l) = \frac{3}{4}\rho g l.$$

Verlängerung des Stabes:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx \rightarrow \Delta l = \frac{\rho g l^2}{4E} (3 - 2 \ln 2).$$

Aufgabe 1.1. An einem Förderseil hängt bei der Tiefe h ein Förderkorb mit Gewicht G (Bild 1.1).

Um wieviel ist das Seil im entspannten Zustand kürzer? Das Eigengewicht des Seiles ist zu berücksichtigen.

Gegeben: $h = 800\text{m}$; $G = 80\text{kN}$; $\rho = 7.8 \cdot 10^3\text{kg/m}^3$;
 $A = 1500\text{mm}^2$; $E = 1.77 \cdot 10^5\text{N/mm}^2$; $g = 9.81\text{m/s}^2$.

Lösung: $\Delta l = \frac{h}{EA} \left(G + \frac{1}{2} g \rho A h \right) = 380\text{mm}$.

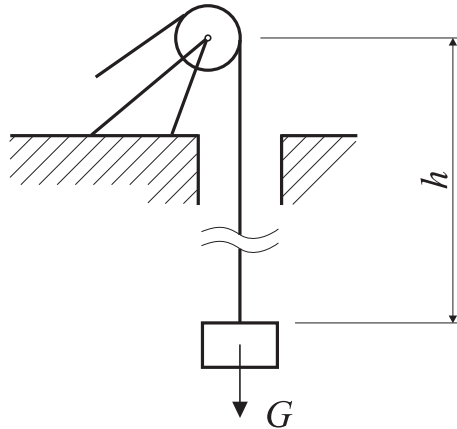


Bild 1.1.

Aufgabe 1.2. Der dargestellte Verbundstab (Bild 1.2) ($E_{\text{St}} = 2E_{\text{Cu}} = E$, $A_{\text{St}} = A_{\text{Cu}}/2 = A$) soll zwei feste Wände geklemmt werden. Für den Einbau wird das mittlere Stabteil mit der Kraft F zusammengedrückt. Wie groß muß F mindestens sein, damit der Einbau gelingt? Wie groß sind die Spannungen im Stab nach dem Einbau? Um wieviel ist das Mittelstück nach dem Einbau kürzer als vor dem Einbau?

Lösung: $F = \frac{2h}{a}EA$; $\sigma_{\text{Cu}} = -\frac{h}{6a}E$; $\sigma_{\text{St}} = -\frac{h}{3a}E$;

$\Delta l_{\text{Cu}} = -\frac{h}{3}$.

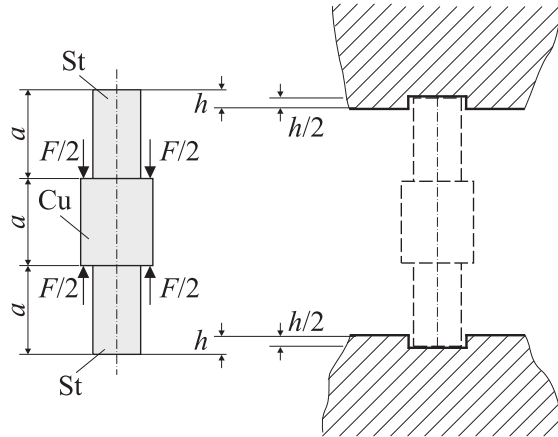


Bild 1.2.

Aufgabe 1.3. Ein Stabzweischlag (Dehnsteifigkeit der Stäbe EA) wird durch eine Kraft F belastet (Bild 1.3). Man bestimme die Verschiebung des Knotens K .

Gegeben: F ; $\alpha = 30^\circ$.

Lösung: $\Delta v = \frac{Fl}{EA}$; $\Delta u = \sqrt{3} \frac{Fl}{EA}$.

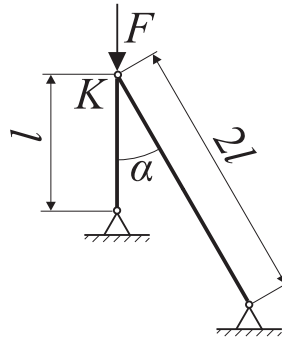


Bild 1.3.

Aufgabe 1.4. Ein Tragwerk besteht aus einem starren Balken BC und zwei elastischen Stäben (Dehnsteifigkeit EA) (Bild 1.4). Man bestimme die Verschiebung des Punktes C unter der Wirkung der Kraft F .

Lösung: $\Delta v = 3\sqrt{3} \frac{Fa}{EA}$.

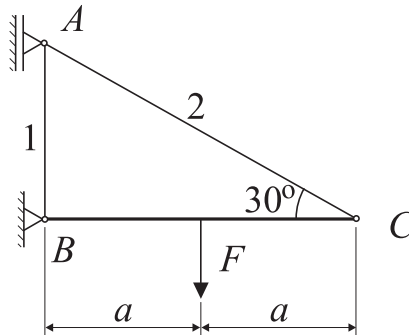


Bild 1.4.

Aufgabe 1.5. Das Seil (Länge l , Dehnsteifigkeit $(EA)_1$) einer Seilwinde wird reibungsfrei über den Knoten K eines Stabzweischlags (Dehnsteifigkeit der Stäbe $(EA)_2$) geführt (Bild 1.5). Wie verschiebt sich der Knoten K , wenn an den Haken H ein Klotz (Gewicht G) gehängt wird? Wie weit senkt sich der Haken ab?

Lösung: $u = 6.69 \frac{Ga}{(EA)_2}$; $v = 3.86 \frac{Ga}{(EA)_2}$;
 $f = 2.83 \frac{Ga}{(EA)_2} + \frac{Gl}{(EA)_1}$.

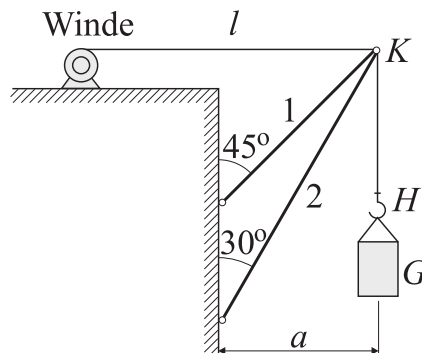


Bild 1.5.

Aufgabe 1.6. Der um den Wert δ ($\delta \ll h$) zu kurze Stab 2 soll mit dem Knoten K verbunden werden (Bild 1.6). Alle Stäbe haben gleiche Dehnsteifigkeit EA . Wie groß sind die Stabkräfte nach der Montage?

Lösung: $S_1 = -\frac{EA\delta \cos^2 \alpha}{h(1 + 2 \cos^3 \alpha)}$; $S_2 = \frac{2EA\delta \cos^3 \alpha}{h(1 + 2 \cos^3 \alpha)}$.

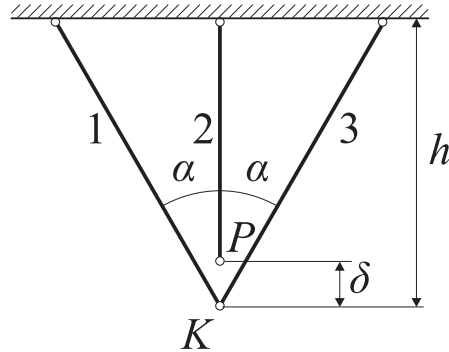


Bild 1.6.

Aufgabe 1.7. Ein Wasserbehälter vom Gewicht G ruht auf einem massiven Sockel von der Höhe H und kreisförmigem Querschnitt (Bild 1.7). Die Dichte des Sockelmaterials ist ρ . Man berechne den Sockeldurchmesser $D(x)$ so, dass in jedem Querschnitt die gleiche Druckspannung σ_{zul} herrscht.

Gegeben: D ; σ_{zul} ; ρ ; H ; g .

Lösung: $D^2(x) = \frac{4}{\pi} \frac{G}{\sigma_{\text{zul}}} \exp\left(\frac{g\rho}{\sigma_{\text{zul}}} x\right)$.

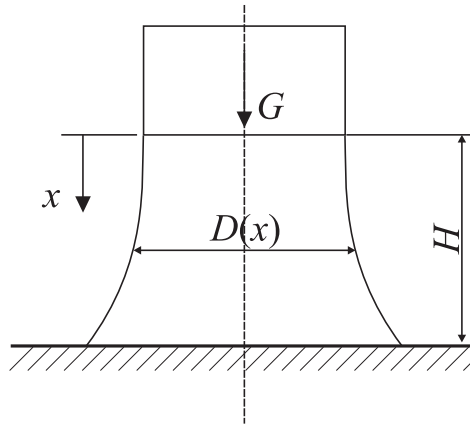
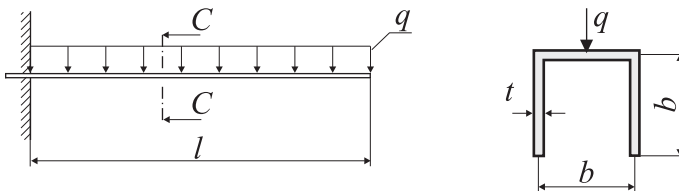


Bild 1.7.

Kapitel 2

Biegung

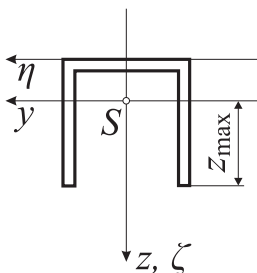
Beispiel. Ein einseitig eingespannter Träger aus einem dünnwandigen U-Profil ($t \ll b$) wird durch eine Gleichstreckenlast q_0 belastet. Wie groß darf die Länge l höchstens sein, damit die dem Betrag nach größte Normalspannung die zulässige Spannung σ_{zul} nicht überschreitet?



Lösung:

Schwerpunktskoordinate:

$$\zeta_s = \frac{\sum \zeta_i l_i}{\sum l_i} \rightarrow \zeta_s = \frac{\frac{b}{2} 2b}{3b} = \frac{b}{3}.$$



Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = 2 \left[\frac{tb^3}{12} + \left(\frac{b}{6} \right)^2 bt \right] + \left(\frac{b}{3} \right)^2 bt = \frac{b^3 t}{3}.$$

Widerstandsmoment:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{I_y}{\frac{2b}{3}} \rightarrow W_y = \frac{b^2 t}{2}.$$

Maximales Biegemoment:

$$|M|_{\max} = \frac{q_0 l^2}{2}.$$

Maximale Spannung:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_y} \rightarrow |\sigma|_{\max} = \frac{q_0 l^2}{b^2 t}.$$

Forderung:

$$|\sigma|_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}} \rightarrow l \leq b \sqrt{\frac{t \sigma_{\text{zul}}}{q_0}}.$$

Aufgabe 2.1. Ein Träger besitzt das dargestellte dünnwandige Profil ($t \ll a$) (Bild 2.1). Man bestimme die Hauptträgheitsmomente und die Hauptachsen durch den Schwerpunkt.

Lösung: $\phi^* = -25^\circ$; $I_1 = 3.3a^3 t$; $I_2 = 0.7a^3 t$.

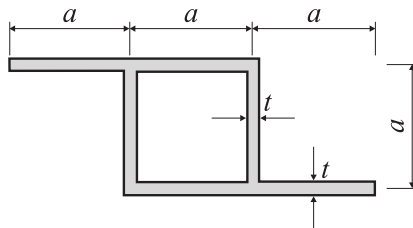


Bild 2.1.

Aufgabe 2.2. An der Unterseite eines Trägers mit einem dünnwandigen, quadratischen Kastenprofil (Kantellänge a , konstante Wandstärke $t \ll a$) soll zur Verstärkung ein Blech (Breite a , Dicke t) angeschweißt werden (Bild 2.2). Das Blech wird: a.) flach auf der Unterseite; oder b.) senkrecht dazu angeschweißt. Man berechne für beide Fälle die Flächenträgheitsmomente sowie die Widerstandsmomente bezüglich der horizontalen Achsen durch die Flächenschwerpunkte.

Lösung:

$$\text{a.) } I_y = \frac{13}{15} a^3 t; \quad W_y = \frac{13}{9} a^2 t.$$

$$\text{b.) } I_y = \frac{31}{20} a^3 t; \quad W_y = \frac{31}{26} a^2 t.$$

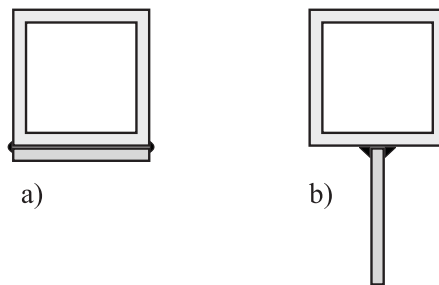


Bild 2.2.

Aufgabe 2.3. Ein quadratischer Träger mit axialer Bohrung wird durch eine Kraft F belastet (Bild 2.3). Man berechne die maximale Normalspannung $|\sigma|_{\max}$ im Schnitt $D - D$ für die dargestellten Lagen des Profils.

Lösung:

$$\text{a.) } |\sigma|_{\max} = \left(0.08 + 0.04 \frac{l}{r} \right) \frac{F}{r^2};$$

$$\text{b.) } |\sigma|_{\max} = \left(0.08 + 0.06 \frac{l}{r} \right) \frac{F}{r^2};$$

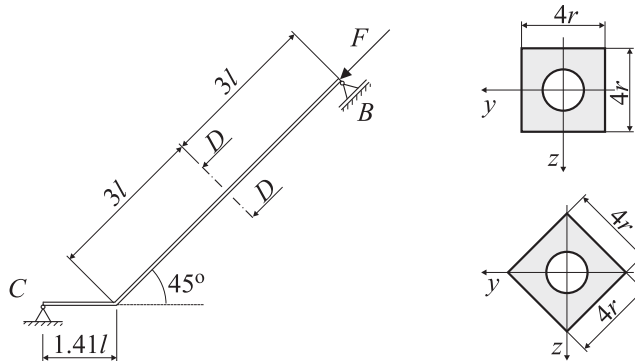


Bild 2.3.

Aufgabe 2.4. Die dargestellte Säule (Elastizitätsmodul E) wird durch eine vertikale Kraft F (Angriffspunkt K) exzentrisch belastet (Bild 2.4). Dabei sind sowohl die Kraft F als auch die Exzentrizität e unbekannt. In den Punkten B bzw. C werden die Dehnungen ε_B und ε_C gemessen. Wie groß ist F ?

Lösung: $F = -(23\varepsilon_B + 17\varepsilon_C)a^2 \frac{E}{8}$.

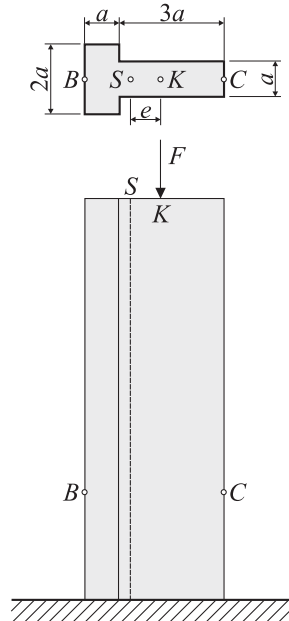


Bild 2.4.

Aufgabe 2.5. Ein eingespannter Drehmeißel ist durch Schnittkraft F_s belastet (Bild 2.5). Gesucht sind das im Schnitt $A - B$ wirkende innere Kräftesystem und zugehörigen Spannungsarten.

Gegeben:

$$F_s = 12\text{kN}; \quad l = 40\text{mm};$$

$$b = 12\text{mm}; \quad h = 20\text{mm}.$$

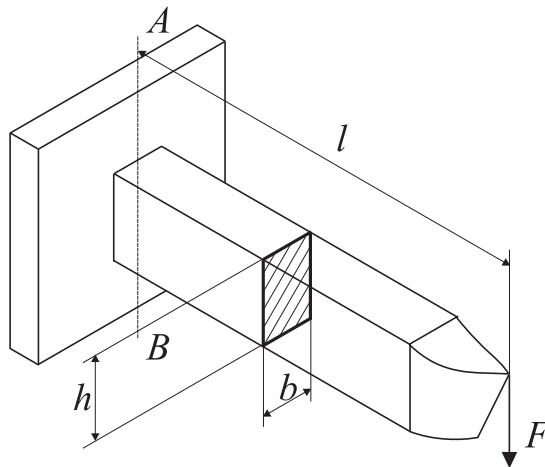


Bild 2.5.

Aufgabe 2.6. Das skizzierte Blech, z-förmig gebogen, ist an einer Blechwand angeschweißt und wird durch die Zugkraft F belastet (Bild 2.6). Für die eingetragenen Schnitte A bis H sollen die inneren Kräftesysteme mit zugehöriger Spannungsart ermittelt werden.

Gegeben:

$$F = 900\text{kN}; \quad s = 5\text{mm};$$

$$h = 20\text{mm}; \quad b = 80\text{mm};$$

$$l_1 = 120\text{mm}; \quad l_2 = 30\text{mm}.$$

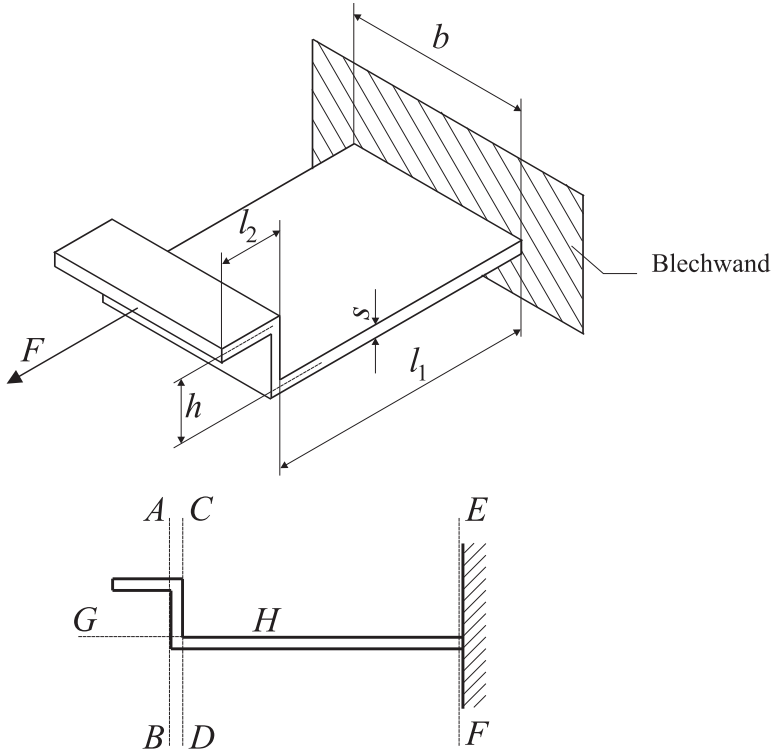


Bild 2.6.

Aufgabe 2.7. Man bestimme die Biegelinie für den dargestellten Gelenkbalken (Biegesteifigkeit EI) (Bild 2.7).

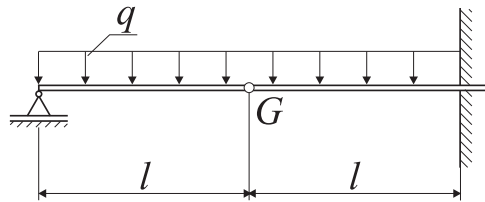


Bild 2.7.

Aufgabe 2.8. Man ermittle die Lagerreaktionen und die Biegelinie für den dargestellten Balken (Elastizitätsmodul E) (Bild 2.8).

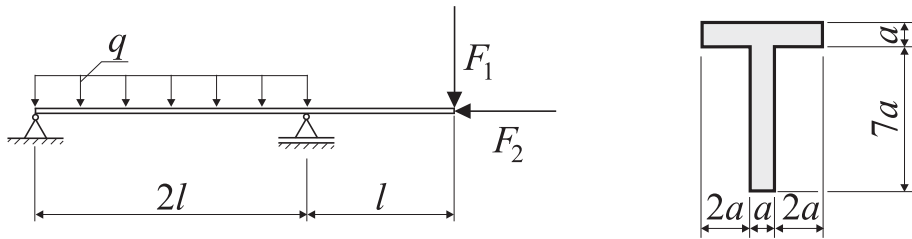


Bild 2.8.

Aufgabe 2.9. Man ermittle die Lagerreaktionen und die Biegelinie für den dargestellten Durchlaufträger (Biegesteifigkeit EI) (Bild 2.9).

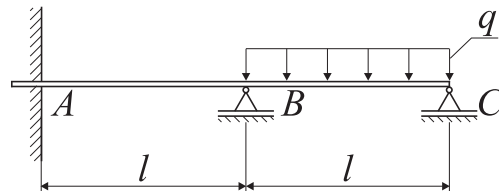


Bild 2.9.

Aufgabe 2.10. In den dargestellten Querschnitten (Bild 2.10) wirkt das positive Biegemoment M_y . Man bestimme die Flächenträgheitsmomente I_y , I_z und I_{yz} sowie die Hauptachsen. Wie groß ist die Biegespannung im Punkt A ?

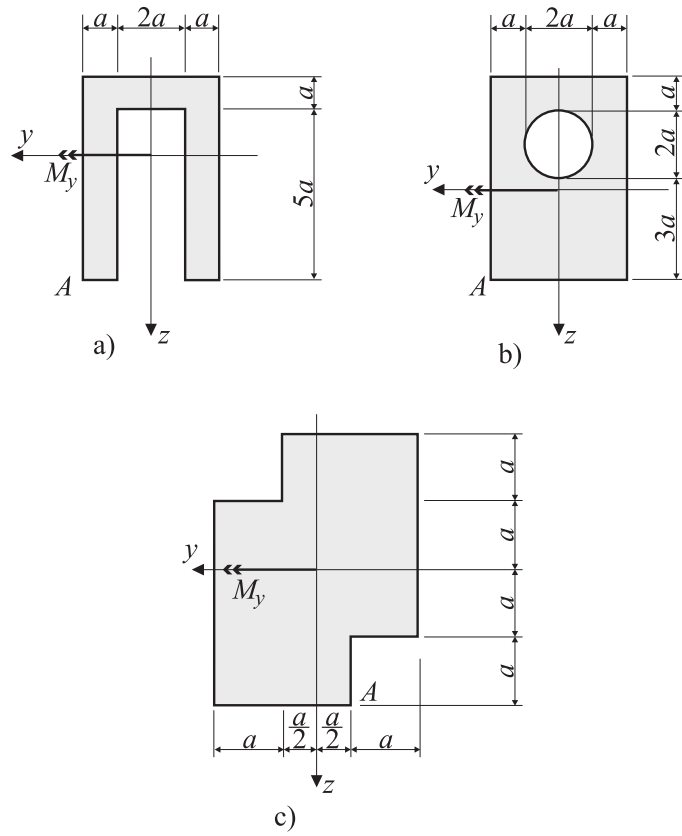
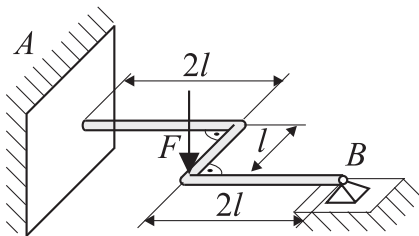


Bild 2.10.

Kapitel 3

Torsion

Beispiel. Ein horizontaler Rahmen aus Stahl ($E/G \approx 8/3$) besteht aus drei rechtwinklig miteinander verbundenen Balken mit Kreisquerschnitt (Radius r). Er ist im unbelasteten Zustand spannungsfrei. Wie groß sind die Lagerreaktionen, wenn der Rahmen durch eine vertikale Kraft F belastet wird?



Lösung:

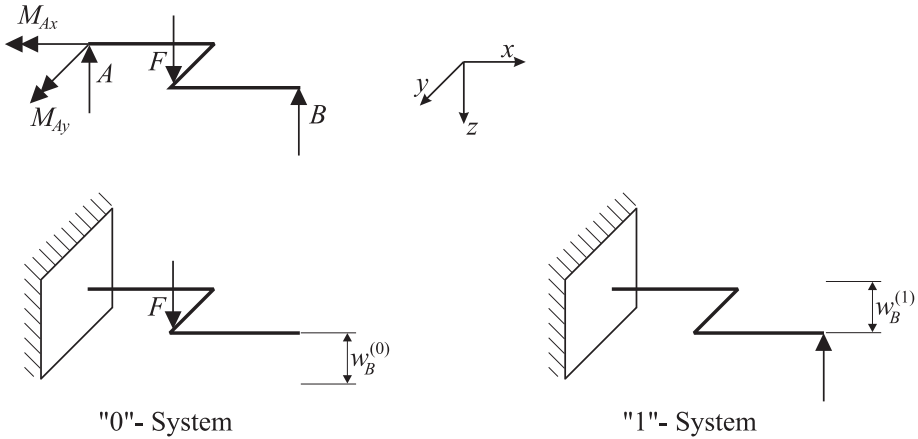
Das Problem ist einfach statisch unbestimmt. Wir wählen die Lagerkraft $B = X$ als statisch Unbestimmte.

Flächenträgheitsmoment und Torsionsträgheitsmoment:

$$I = \frac{\pi}{4}r^4; \quad I_T = \frac{\pi}{2}r^4.$$

Verschiebung im "0"-System:

$$w_B^{(0)} = \frac{F(2l)^3}{3EI} + \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{F(2l)^2}{2EI} \cdot 2l + \frac{(Fl)(2l)}{3EI_T} l \rightarrow w_B^{(0)} = \frac{29Fl^3}{3EI}.$$



Verschiebung im "1"-System:

$$w_B^{(1)} = \frac{X(4l)^3}{3EI} + \frac{Xl^3}{3EI} + \frac{(Xl)(2l)}{GI_T}l + \frac{(X2l)l}{GI_T}2l \rightarrow w_B^{(1)} = \frac{89Xl^3}{3EI}.$$

Kompatibilität:

$$w_B^{(0)} = w_B^{(1)} \rightarrow B = \frac{29F}{89}.$$

Reaktionen im Lager A:

$$A = A^{(0)} + A^{(1)} \rightarrow A = \frac{60F}{89},$$

$$M_{Ax} = M_{Ax}^{(0)} + M_{Ax}^{(1)} \rightarrow M_{Ax} = \frac{60Fl}{89},$$

$$M_{Ay} = M_{Ay}^{(0)} + M_{Ay}^{(1)} \rightarrow M_{Ay} = \frac{62Fl}{89},$$

Aufgabe 3.1. Eine abgesetzte Welle (Torsionssteifigkeit GI_{T_1} bzw. GI_{T_2}) wird über die Länge a durch ein gleichmäßig verteiltes Torsionsmoment pro Längeneinheit m_T belastet (Bild 3.1). Gesucht ist der Momentenverlauf.

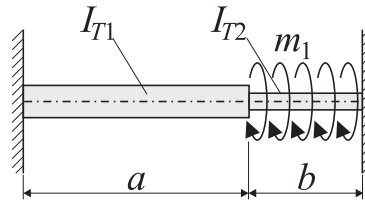


Bild 3.1.

Aufgabe 3.2. Eine Kreiszyklindrische Welle (Länge a) wird über einen Querarm (Länge b) nach Bild 3.2 durch eine Kraft belastet. Man bestimme mit Hilfe der Hypothese der Gestaltungsänderungsenergie den erforderlichen Radius R der Welle.

Gegeben: $a = 4\text{m}$; $b = 1.5\text{m}$; $F = 4\text{kN}$; $\sigma_{\text{zul}} = 180\text{MPa}$.

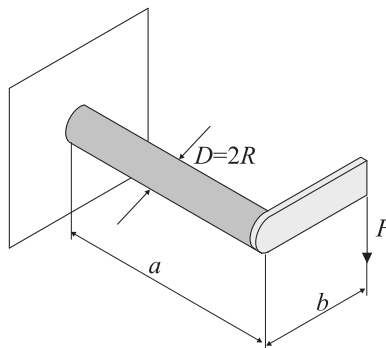


Bild 3.2.

Aufgabe 3.3. Eine Welle (Schubmodul G) mit Kreisquerschnitt besteht aus zwei Bereichen mit konstantem Radius und einem konischen Bereich (Bild 3.3). Man bestimme Verdrehung ϑ_E des Endquerschnitts infolge eines Torsionsmoment M_0 .

Lösung: $\vartheta_E = \frac{62M_0l}{\pi Gr_0^4}$.

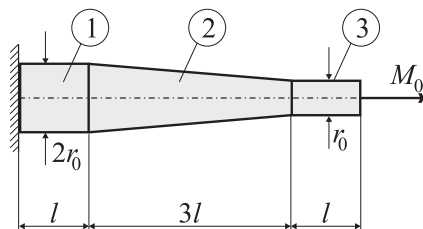


Bild 3.3.

Aufgabe 3.4. Ein dünnwandiges Aluminiumrohr (mittlerer Radius $r_1 = 2r$, Wandstärke $t = \frac{r}{8}$, Schubmodul G_1) und ein Stahlstab (Radius $r_2 = r$, Schubmodul $G_2 = 3G_1$) werden durch zwei starre Endplatten miteinander verbunden (Bild 3.4). Welcher Anteil des eingeleiteten Torsionsmoments M_0 wird vom Aluminiumrohr getragen? Wie groß darf M_0 höchstens sein, damit die zulässige Schubspannung τ_{zul} im Aluminiumrohr nicht überschritten wird?

Lösung: $F = -(23\varepsilon_B + 17\varepsilon_C)a^2 \frac{E}{8}$.

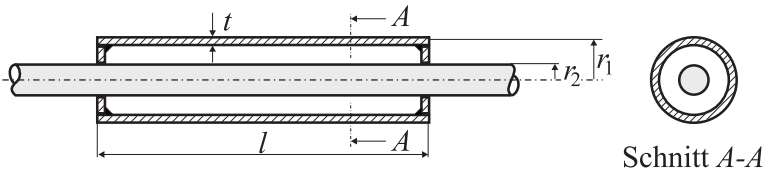


Bild 3.4.

Aufgabe 3.5. Am freien Ende eines einseitig eingespannten, dünnwandigen Torsionsstabes (Schubmodul G) ist ein starrer Querarm angeschweißt (Bild 3.5). Die Belastung besteht aus einem Kräftepaar. Man bestimme die Verschiebung des Punktes D .

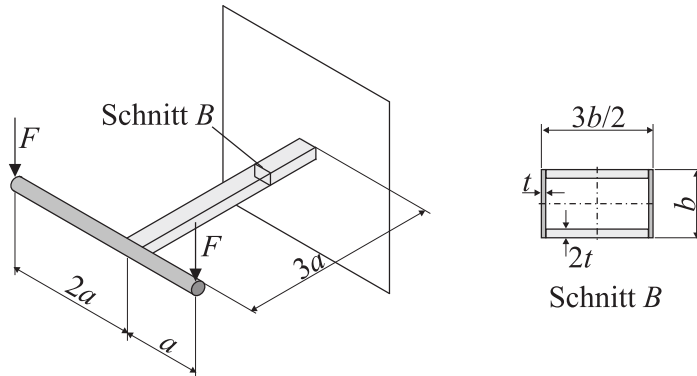
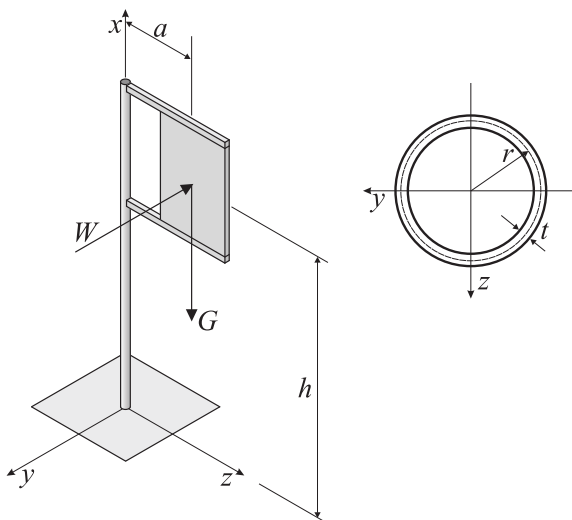


Bild 3.5.

Kapitel 4

Spannungszustand, Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetz

Beispiel. Ein Hinweisschild (Gewicht G) ist an einem Mast mit Kreisquerschnitt (Wandstärke $t \ll r$) befestigt. Es wird durch eine Windkraft W belastet. Man bestimme nach der Schubspannungshypothese die Vergleichsspannung an der am stärksten beanspruchten Stelle des Mastes für $W = 3G$, $h = 4a$ und $r \ll a$.



Lösung:

Der Mast wird auf zweiachsiger Biegung, Druck und Torsion beansprucht. Die Schubspannung infolge der Querkraft ist gegen die Schubspannung infolge Torsion vernachlässigbar. Die maximale Biegespannung tritt an der Einspannstelle auf.

Querschnittsgrößen:

$$A = 2\pi r t, \quad I_y = I_z = \pi r^3 t, \quad W_T = 2\pi r^2 t.$$

Schnittgrößen an der Einspannung:

$$N = -G, \quad M_T = W a, \quad M_y = -G a, \quad M_z = -W h.$$

Normalspannung im Einspannquerschnitt:

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

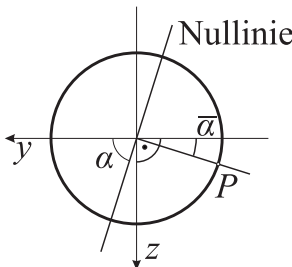
$$\rightarrow \sigma(x, y) = -\frac{G}{2\pi r t} \left(1 + 2\frac{az}{r^2} - 24\frac{ay}{r^2} \right).$$

Spannungs-Nulllinie:

$$z = 12y - \frac{r^2}{2a}$$

Steigung der Nulllinie:

$$\tan \alpha = 12 \quad \rightarrow \quad \alpha = 85.2^\circ.$$



Maximale Normalspannung (im Punkt P):

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma(y = -r \cos \bar{\alpha}, z = r \sin \bar{\alpha})| \rightarrow |\sigma|_{\max} = 3.8 \frac{Ga}{r^2 t}.$$

Schubspannung:

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} \rightarrow \tau = 0.48 \frac{Ga}{r^2 t}.$$

Vergleichsspannung:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \rightarrow \sigma_V = 3.9 \frac{Ga}{r^2 t}.$$

Aufgabe 4.1. An einer Scheibe (Elastizitätsmodul $E = 2.1 \cdot 10^5$ N/mm², Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$) wirken die Spannungen $\sigma_x = 30$ N/mm² und $\tau = 15$ N/mm² (Bild 4.1). Man bestimme die Dehnung ε_{AB} in Richtung der Diagonalen AB .

Lösung: $\varepsilon_{AB} = 1.8 \cdot 10^{-4}$.

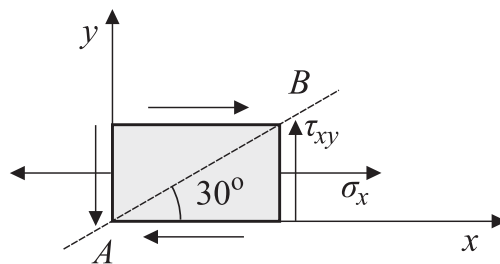


Bild 4.1.

Aufgabe 4.2. Von einem ebenen Spannungszustand sind die beiden Hauptspannungen $\sigma_1 = 30$ N/mm² und $\sigma_2 = -10$ N/mm² an einem infinitesimalen Element (Schnitt I) gegeben (Bild 4.2). Man berechne für den gegenüber Schnitt I um 45° gedrehten Schnitt II die freigelegten Spannungen und skizziere sie am Element. Mit Hilfe des Morschen

Kreises ermittle man die Lage eines x, y -Koordinatensystems, in dem gilt: $\sigma = 0$, $\tau < 0$. Wie groß sind σ_x und τ_{xy} ?

Lösung: $\sigma_\xi = 10\text{N/mm}^2$; $\sigma_\eta = 10\text{N/mm}^2$; $\tau_{\xi\eta} = -20\text{N/mm}^2$;
 $\varphi = 30^\circ$; $\sigma_x = 20\text{N/mm}^2$; $\tau_{xy} = -17.3\text{N/mm}^2$.

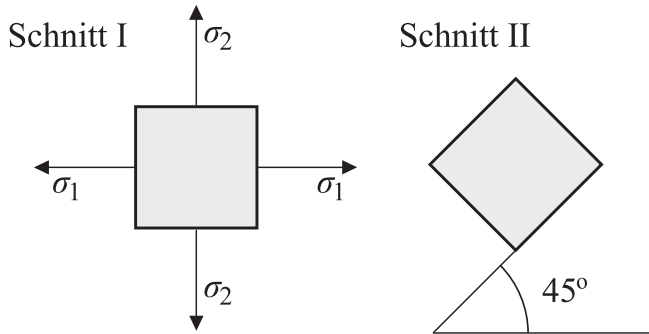


Bild 4.2.

Aufgabe 4.3. Ein auf Zug ($F = 7500\text{N}$) und Torsion ($M = 125\text{Nm}$) beanspruchtes Rohr ($r = 20\text{mm}$, $t = 1\text{mm}$) soll durch Spiralschweißung so hergestellt werden, dass die Schweißnaht senkrecht zur Richtung der kleineren Hauptspannung verläuft (Bild 4.3). Man bestimme den Spannungszustand im Rohr und Hauptspannungen. Wie groß ist der Winkel φ^* zwischen der Schweißnaht und der Rohrachse? Man untersuche, ob die Wandstärke t groß genug ist, so dass nach der Huber-v. Mises-Henckyschen Festigkeitshypothese die zulässige Spannung $\sigma_{\text{zul}} = 120\text{N/mm}^2$ nicht überschritten wird.

Lösung: $\sigma_x = 59.7\text{N/mm}^2$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 49.7\text{N/mm}^2$;
 $\sigma_1 = 87.8\text{N/mm}^2$; $\sigma_2 = -28.2\text{N/mm}^2$;
 $\varphi^* = 29.5^\circ$; $\sigma_V = 105\text{N/mm}^2 < \sigma_{\text{zul}}$.

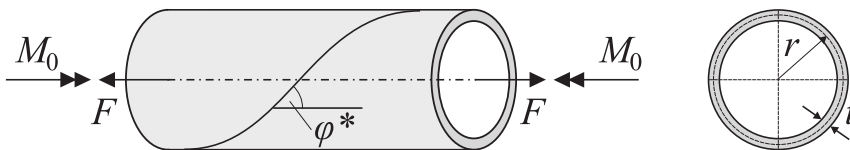


Bild 4.3.

Aufgabe 4.4. Ein einseitig eingespannter Träger aus einem dünnwandigen U-Profil (Länge $l = 20b$, Wandstärke $t = b/30$) wird durch eine Gleichstreckenlast q_0 belastet (Bild 4.4). Man bestimme den Spannungszustand im Punkt P und berechne die Hauptspannungen sowie die Hauptrichtungen.

Lösung: $\sigma_x = 0$; $\sigma_z = 0$; $\tau_{xy} = \frac{q_0 l}{4t^2}$ (reiner Schub).

$\sigma_{1,2} = \pm \frac{q_0 l}{4t^2}$; $\varphi^* = 45^\circ$.

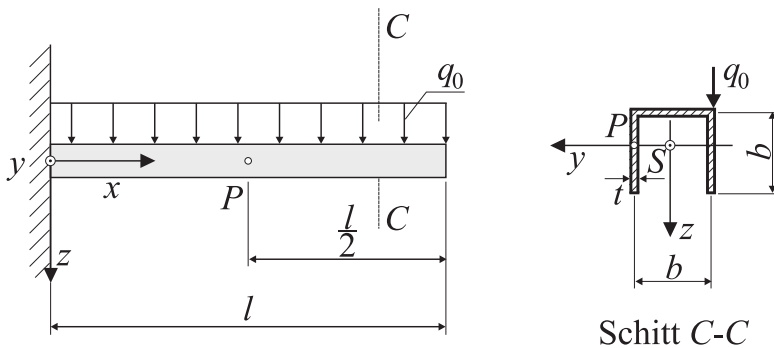


Bild 4.4.

Aufgabe 4.5. Ein einseitig eingespannter Winkel (Kreisförmiger Querschnitt, Radius r) wird am freien Ende durch eine Kraft F belastet (Bild 4.5). Man bestimme nach der Schubspannungshypothese die Vergleichsspannung σ_V im Punkt P .

Gegeben: $l = 2\text{m}$; $r = 40\text{mm}$; $F = 1\text{kN}$.

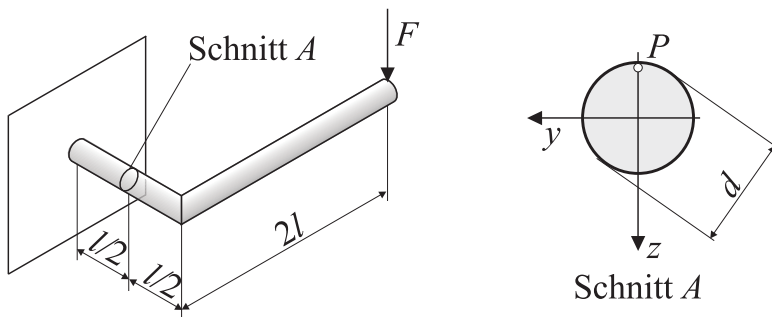


Bild 4.5.

Aufgabe 4.6. Eine zylindrische Welle (Länge $2l = 2\text{m}$) wird durch zwei Kräfte ($F_1 = 4\text{kN}$, $F_2 = 60\text{kN}$) und zwei Momente ($M_1 = M_2 = 6\text{kNm}$) belastet (Bild 4.6). Man bestimme den Spannungszustand im Punkt K und berechne die Hauptspannungen sowie die Hauptrichtungen.

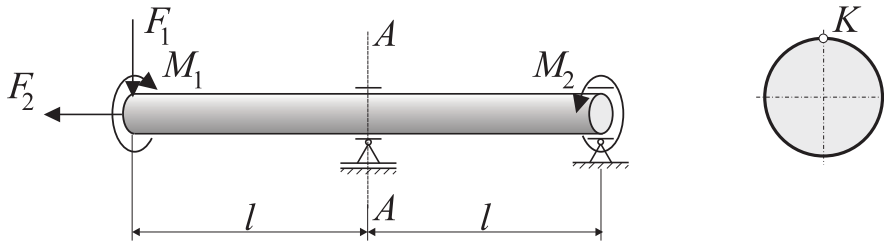
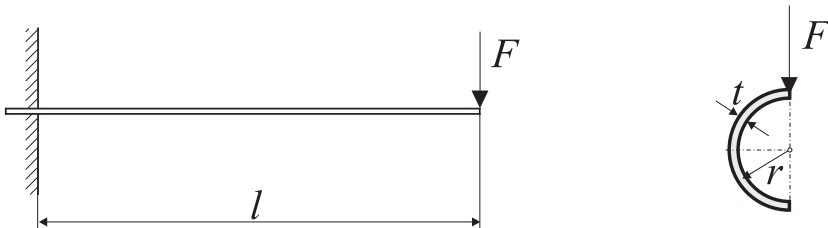


Bild 4.6.

Kapitel 5

Querkraftschub

Beispiel. Ein einseitig eingespannter Träger (Schubmodul G) mit dünnwandigen Halbkreisprofil (Radius r , Wandstärke $t \ll r$) wird durch eine Kraft F belastet. Wie groß ist der Drehwinkel ϑ_1 des Endquerschnitts infolge der Belastung?



Lösung:

Flächenträgheitsmoment:

$$I = \frac{\pi r^3 t}{2}.$$

Statisches Moment:

$$S = \int z dA = \int_0^\alpha r \cos \varphi (t r d\varphi) \rightarrow S = r^2 t \sin \alpha.$$

Schubspannung:

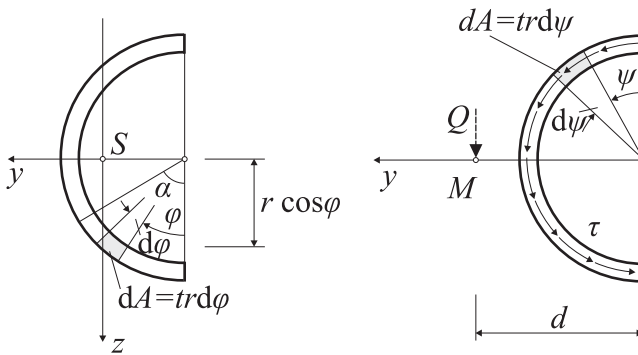
$$\tau = \frac{QS}{It} \rightarrow \tau = \frac{2Q}{\pi r t} \sin \alpha.$$

Schubmittelpunkt:

$$Qd = \int rtdA = \frac{2Q}{\pi t} \int_0^\pi \sin \psi (trd\psi) \rightarrow d = \frac{4r}{\pi}.$$

Torsionsmoment:

$$M_T = -Fd \rightarrow M_t = -\frac{4r}{\pi} F.$$



Torsionsträgheitsmoment:

$$I_T = \frac{\pi r t^3}{3}.$$

Drehwinkel:

$$\vartheta_1 = \frac{M_T l}{GI_T} \rightarrow \vartheta = -\frac{12FL}{\pi^2 G t^3}.$$

Die Verdrehung ist unabhängig vom Radius des Halbkreisprofils. Bei einer Halbierung der Wandstärke verachtfacht sich die Verdrehung.

Aufgabe 5.1. Ein einseitig eingespannter Träger aus einem dünnwandigen U-Profil wird durch eine Gleichstreckenlast q belastet (Bild 5.1). Man bestimme die Schubspannungsverteilung im Querschnitt. Wie groß ist das Verhältnis $\tau_{\max}/\sigma_{\max}$?

Lösung:
$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{2b}{3l}.$$

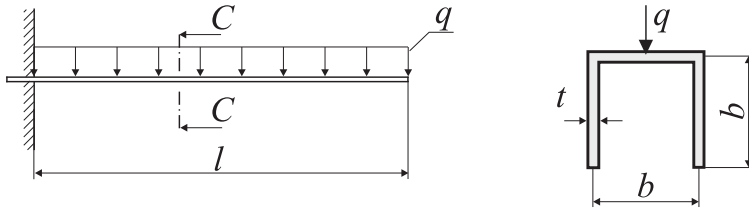


Bild 5.1.

Aufgabe 5.2. Man bestimme für den dargestellten dünnwandigen Querschnitt (Bild 5.2) (Wandstärke $t \ll a$) eines Balkens die Schubspannungsverteilung, wenn die Querkraft ist Q .

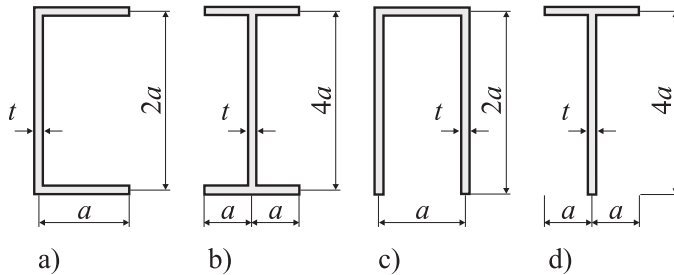


Bild 5.2.

Aufgabe 5.3. Der einseitig eingespannte Doppel-T-Träger ist aus drei Blechen ($t \ll h, b$) zusammenschweißt (Bild 5.3). Wie groß ist die Schubspannung in der Schweißnaht?

Lösung:
$$\tau = \frac{6Fb}{th(h + 6b)}.$$

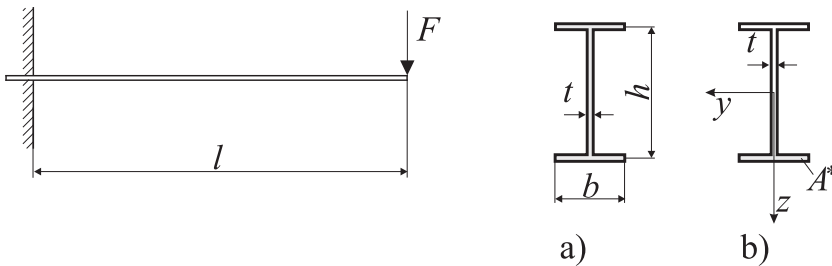


Bild 5.3.

Aufgabe 5.4. Man ermittle für das dargestellte dünnwandige Profil (Bild 5.4) den Verlauf des statischen Moments S_y und stelle ihn graphisch dar. Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment I_y ?

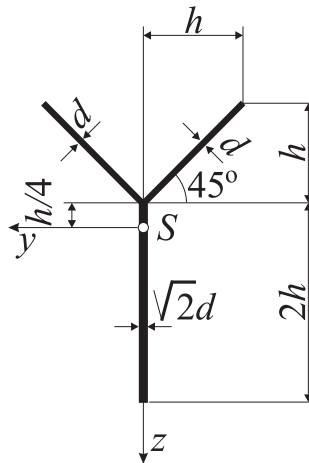
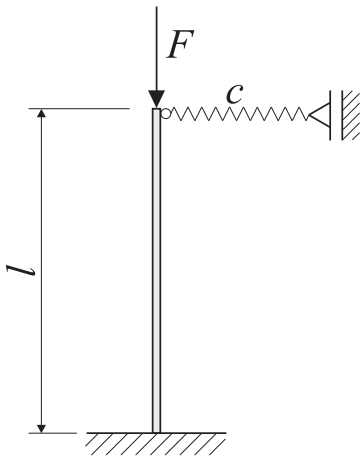


Bild 5.4.

Kapitel 6

Knickung

Beispiel. Ein einseitig eingespannter Stab (Biegesteifigkeit EI) wird am freien Ende durch eine Feder (Federkonstante c) gestützt und durch eine vertikale Kraft F belastet. Man bestimme die Knicklast F_{krit} .



Lösung:

Die Querkraft am freien Ende des ausgelenkten Stabes setzt sich aus den zur Stabachse orthogonalen Komponenten der Kraft F und der Federkraft zusammen. Die kleinste Lösung $\lambda_1 l$ der Eigenwertgleichung wird graphisch bestimmt.

Differentialgleichung für die Auslenkung $w(x)$:

$$EI_y w^{IV} + F w^{II} \rightarrow w^{IV} + \lambda^2 w^{II} = 0 \quad \left(\lambda^2 = \frac{F}{EI_y} \right).$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$w = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \lambda x + D.$$

Ableitungen:

$$w^I = -A \lambda \sin \lambda x + B \lambda \cos \lambda x + C,$$

$$w^{II} = -A \lambda^2 \cos \lambda x - B \lambda^2 \sin \lambda x,$$

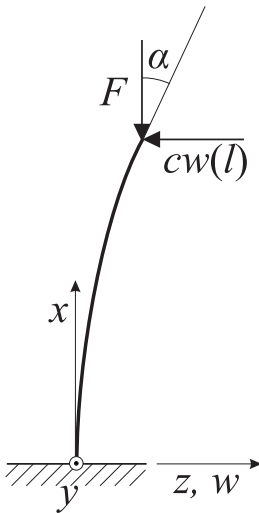
$$w^{III} = A \lambda^3 \sin \lambda x - B \lambda^3 \cos \lambda x.$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0; \quad w^I(0) = 0; \quad M(l) = 0; \quad Q(l) = F \sin \alpha - c w(l) \cos \alpha.$$

Linearisieren ($\sin \alpha \approx \alpha \approx w^I(l)$, $\cos \alpha \approx 1$) liefert:

$$Q(l) = F w^I(l) - c w(l).$$



Freikörperbild

Am freien Ende gilt:

$$M(l) = -EI_y w^{\text{II}}(l); \quad Q(l) = -EI_y w^{\text{III}}(l).$$

Einsetzen liefert:

$$A + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -A,$$

$$B + C = 0 \quad \rightarrow \quad C = -B,$$

$$A \cos \lambda l + B \sin \lambda l = 0 \quad \rightarrow \quad A = -B \tan \lambda l,$$

$$\begin{aligned} c(A \cos \lambda l + B \sin \lambda l) - C(EI_y \lambda^3 - c\lambda l) + cD &= 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow B[(EI_y \lambda^3 - c\lambda l) + c \tan \lambda l] &= 0. \end{aligned}$$

Bedingung für nichttriviale Lösungen:

$$\tan \lambda l - \lambda l + \frac{EI_y}{cl^3} (\lambda l)^3 = 0.$$

Kritische Last für Knicken in der (x, z) -Ebene:

$$F_{\text{krit}} = \lambda_1^2 EI_y \quad \rightarrow \quad F_{\text{krit}} = (\lambda_1 l)^2 \frac{EI_y}{l^2}.$$

Sonderfälle:

$$c = 0 : \quad F_{\text{krit}} = 2.47 \frac{EI_y}{l^2},$$

$$c \rightarrow 0 : \quad F_{\text{krit}} = 20.2 \frac{EI_y}{l^2}.$$

Kritische Last für Knicken in der (x, y) -Ebene:

$$F_{\text{krit}} = 2.47 \frac{EI_z}{l^2}.$$

Aufgabe 6.1. Eine Aufhängung besteht aus einem Stab (Elastizitätsmodul E) und einem Kreisbogenträger (Bild 6.1). Wie schwer darf die angehängte Last höchstens sein, damit der Stab nicht knickt?

$$\text{Lösung: } G_{\text{max}} = \frac{7\pi^2 h^4 E}{750a^2}.$$

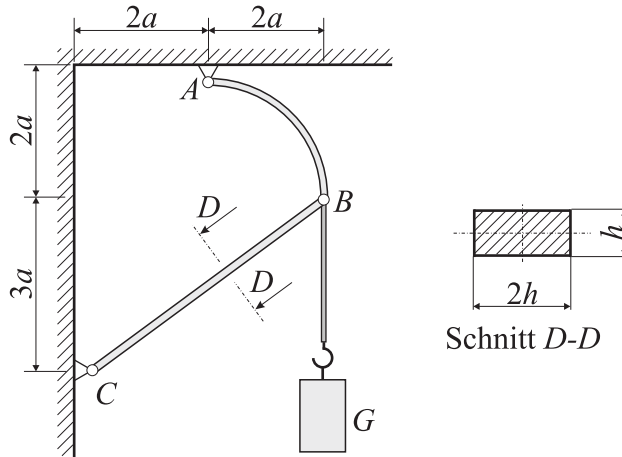


Bild 6.1.

Aufgabe 6.2. Ein Stabzweischlag aus gleichen Stäben (Elastizitätsmodul E) (Bild 6.2) soll durch eine vertikale Kraft im Knoten K aus der oberen lastfreien Gleichgewichtslage in die untere lastfreie Gleichgewichtslage gedrückt werden. Wie groß darf der Winkel α höchstens sein, damit keiner der Stäbe knickt?

Lösung: $\alpha < \frac{\pi h}{\sqrt{6}} l$.

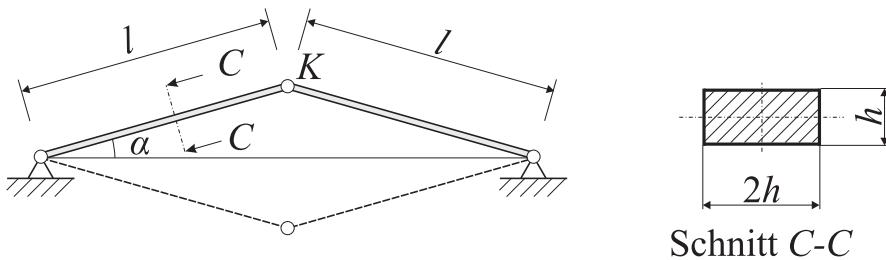


Bild 6.2.

Aufgabe 6.3. Der Druck auf den Kolben (Kolbenfläche A , Kolbenhub h) einer Dampfmaschine ist Abhängigkeit vom Kolbenweg x durch $P = \frac{P_0 h}{(h+4x)}$ gegeben (Bild 6.3). Man bestimme den Radius r der Kolbenstange (Länge $l + s$) so, dass sie in keiner Stellung des Kolbens knickt.

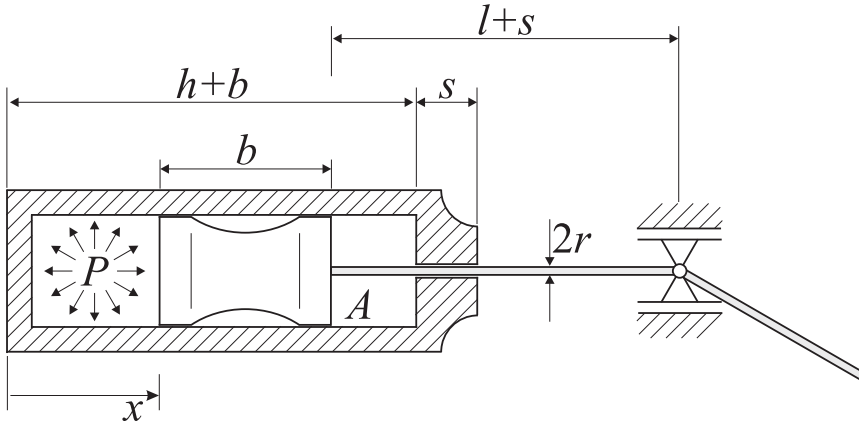


Bild 6.3.

Aufgabe 6.4. Ein Bauteil besteht aus vier Teilstücken: einem Stab (1) (Elastizitätsmodul E_1 , Wärmeausdehnungskoeffizient α_{T1} , Querschnittsfläche A_1 , minimales Trägheitsmoment I_1), einem Rohr (2) ($E_2, \alpha_{T2}, A_2, E_2 A_2 = 4E_1 A_1$), einem Stab (3) ($E_3 = E_2, \alpha_{T3} = \alpha_{T2}, A_3 = \frac{A_2}{4}$) und einer starren Platte (4) (Bild 6.4). Das Bauteil wurde bei Raumtemperatur vorspannungsfrei zwischen zwei starren Wänden eingebaut. Wie groß darf eine im gesamten Bauteil konstante Temperaturänderung ΔT höchstens sein, damit der Stab (1) nicht knickt?

Lösung:
$$\Delta T_{\max} = \frac{24\pi^2 I_1}{(5\alpha_{T1} - 3\alpha_{T2}) A_1 l^2}.$$

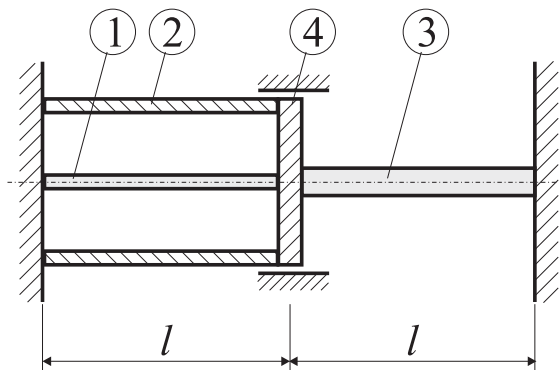


Bild 6.4.

Aufgabe 6.5. Der nach Bild 6.5 gelagerte Stab wird gleichförmig erwärmt. Bei welcher Temperaturerhöhung ΔT knickt der Stab?

Gegeben: $l = 0.6\text{m}$; $a = 4\text{mm}$; $E = 2.1 \cdot 10^5\text{N/mm}^2$;
 $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\text{K}^{-1}$.

Lösung: $\Delta T_{\text{krit}} = 59.2^\circ$.

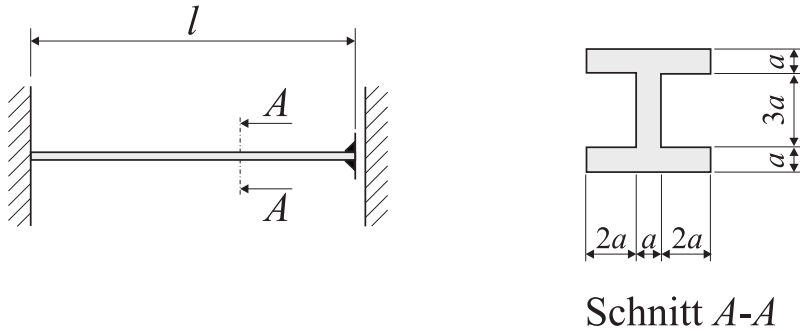


Bild 6.5.

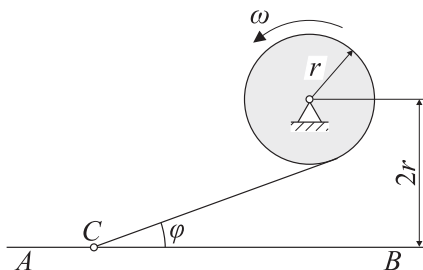
Teil III

Kinetik

Kapitel 1

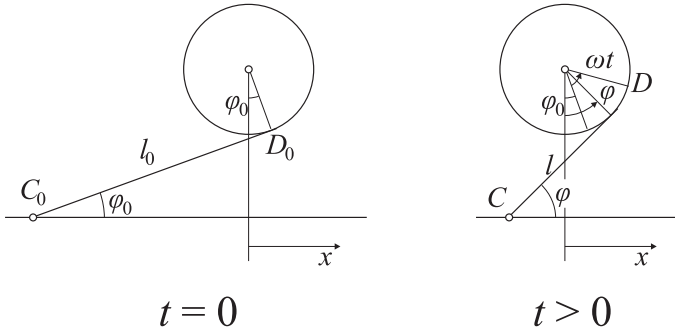
Kinematik des Punktes

Beispiel. Ein Faden wird auf eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Trommel (Radius r) aufgewickelt. Der Endpunkt C des stets straffen Fadens wird auf der Geraden \overline{AB} geführt. Man bestimme die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes C in Abhängigkeit vom Winkel φ .



Lösung:

Zur Lösung werden die Hilfsgrößen l_0 und l eingeführt.



Geometrie:

$$\begin{aligned}
 x_C &= r \sin \varphi - l \cos \varphi, \\
 r \cos \varphi + l \sin \varphi &= 2r \quad \rightarrow \quad l = r \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi}, \\
 l + r(\varphi_0 + \omega t - \varphi) &= l_0.
 \end{aligned}$$

Differentiation:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_C &= r\dot{\varphi} \cos \varphi + l\dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{l} \cos \varphi \quad \rightarrow \quad \dot{x}_C = 2r\dot{\varphi} - \dot{l} \cos \varphi, \\
 \dot{l} &= r \frac{\dot{\varphi} \sin^2 \varphi - (2 - \cos \varphi)\dot{\varphi} \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad \rightarrow \quad \dot{l} = r\dot{\varphi} \frac{1 - 2 \cos \varphi}{\sin \varphi}, \\
 \dot{l} + r\omega - r\dot{\varphi} &= 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \omega \frac{\sin^2 \varphi}{(2 - \cos \varphi) \cos \varphi}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\dot{x}_C = \frac{r\omega}{\cos \varphi}.$$

Aufgabe 1.1. Ein Radarschirm verfolgt eine Rakete, die vertikal mit konstanter Beschleunigung a aufsteigt (Bild 1.1). Die Rakete startet zur Zeit $t = 0$. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ und die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}(t)$ des Schirms. Wie groß ist die maximale Winkelgeschwindigkeit, und beim welchem Winkel wird sie erreicht?

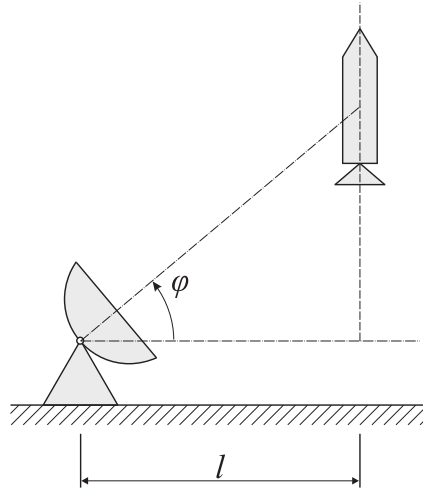


Bild 1.1.

Aufgabe 1.2. In einer Ballmaschine werden Tennisbälle auf der Strecke l aus der Ruhelage bis zur Endgeschwindigkeit v_e beschleunigt (Bild 1.2). Man bestimme v_e für die dargestellten Verläufe der Beschleunigung.

Lösung: a) $v_e = 1.16\sqrt{a_0 l}$; b) $v_e = 1.14\sqrt{a_0 l}$; c) $v_e = 1.23\sqrt{a_0 l}$.

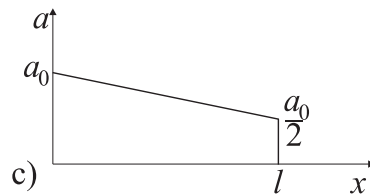
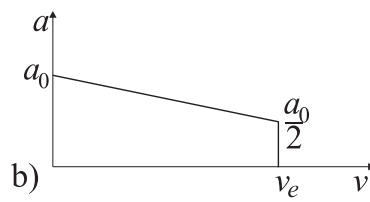
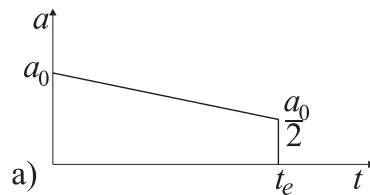
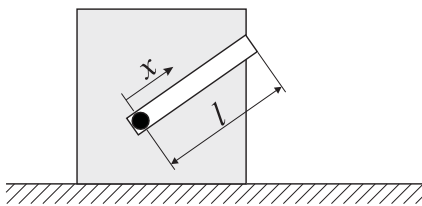


Bild 1.2.

Aufgabe 1.3. Ein Punkt P bewegt sich auf der Bahnkurve von A nach B (Bild 1.3). Dabei nimmt seine Geschwindigkeit linear mit der Bogenlänge vom Anfangswert v_0 auf den Endwert null ab. Wie lange dauert es, bis P den Punkt B erreicht?

Lösung: $t_B \rightarrow \infty$.

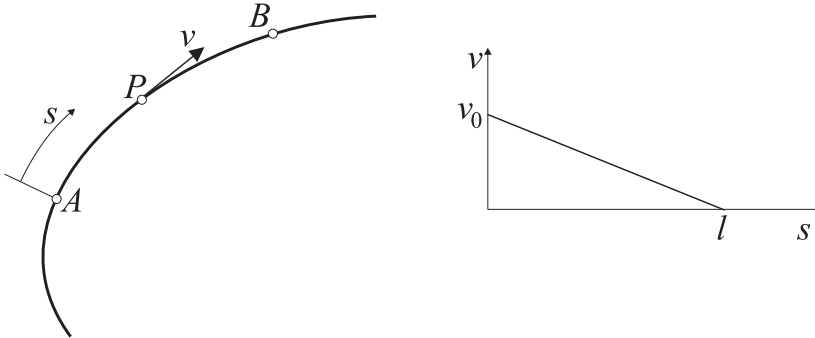


Bild 1.3.

Aufgabe 1.4. Ein Punkt P bewegt sich auf der quadratischen Parabel $y = b(\frac{x}{a})^2$ von A nach B (Bild 1.4). Der zeitliche Ablauf wird durch $\varphi(t) = \arctan \omega_0 t$ beschreiben, wobei $\varphi(t)$ der Winkel zwischen der x -Achse und dem Ortsvektor $r(t)$ ist. Man bestimme die Geschwindigkeit $v(t)$ des Punktes P . Nach welcher Zeit erreicht er den Punkt B , und wie groß ist dann seine Geschwindigkeit?

Lösung: $v(t) = \frac{a^2}{b} \omega_0 \sqrt{1 + 4\omega_0^2 t^2}$; $t_B = \frac{b}{a\omega_0}$.

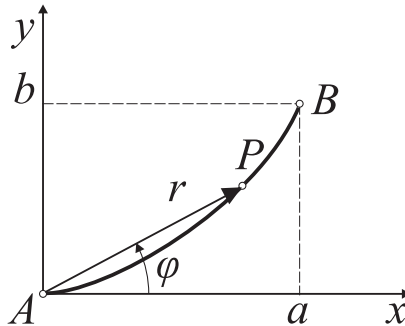
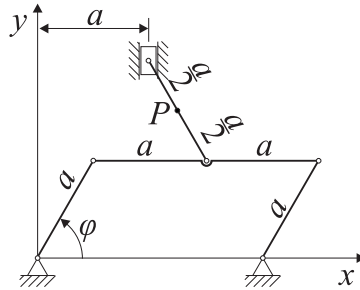


Bild 1.4.

Aufgabe 1.5. Für das dargestellte Getrieb sind die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes P im Moment t_1 zu bestimmen (Bild 1.5).



$$\varphi = \frac{\pi t}{6} \quad a = 0.8 \text{ m} \quad t_1 = 2 \text{ sec}$$

Bild 1.5.

Aufgabe 1.6. Ein Massenpunkt P bewegt sich nach dem Gesetz:

- a) $x = 2t + 4$; $y = 4t^2$; $t_1 = 1 \text{ sec}$.
- b) $x = 5 \sin \frac{\pi t}{4}$; $y = 5 \cos \frac{\pi t}{4}$; $t_1 = 2 \text{ sec}$.
- c) $x = 6 \sin \frac{\pi t}{6}$; $y = 4 \cos \frac{\pi t}{6}$; $t_1 = 4 \text{ sec}$.
- d) $x = \frac{t}{4} \sin \frac{\pi t}{8}$; $y = \frac{t}{4} \cos \frac{\pi t}{8}$; $t_1 = 12 \text{ sec}$.
- e) $x = 2t \sin \frac{\pi t}{2}$; $y = t^2 + 1$; $t_1 = 3 \text{ sec}$.
- f) $x = t^2 + 6$; $y = 4t$; $t_1 = 1 \text{ sec}$.
- g) $x = \cos \pi t$; $y = \frac{t^3}{6}$; $t_1 = 2 \text{ sec}$.
- h) $x = t^2 \sin \frac{\pi t}{4}$; $y = \frac{t}{t+8}$; $t_1 = 8 \text{ sec}$.
- i) $x = \frac{t}{2 + \frac{1}{t}} \tan \frac{\pi t^2}{2t+1}$; $y = \frac{6}{t}$; $t_1 = 2 \text{ sec}$.

$$\text{j) } x = 2 \cos \frac{\pi t}{3}; \quad y = 2 \sin \frac{\pi t}{3}; \quad t_1 = 3 \text{sec.}$$

$$\text{k) } x = 6 \cos \frac{\pi t}{2}; \quad y = 3 \sin \frac{\pi t}{2}; \quad t_1 = 0.5 \text{sec.}$$

$$\text{l) } x = 3t; \quad y = t^2 + 2; \quad t_1 = 2 \text{sec.}$$

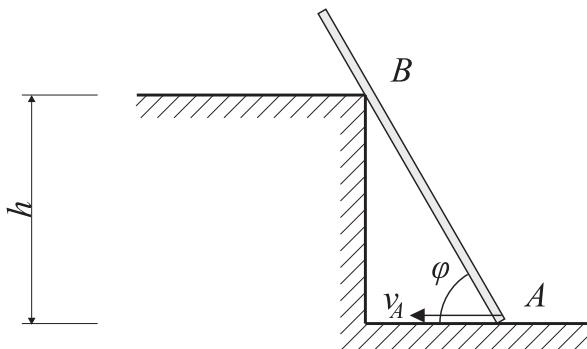
Man bestimme:

1. Die Bahn des Punktes.
2. Die Stelle und die Geschwindigkeit des Punktes am Anfang.
3. Die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, den Krümmungsradius und den Weg im Moment $t = t_1$.

Kapitel 2

Kinematik des starren Körpers

Beispiel. Eine Stange berührt im Punkt A den Boden und im Punkt B die Kante einer Stufe (Höhe h). Der Punkt A wird mit der konstanten Geschwindigkeit v_A nach links geschoben. Man bestimme die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Berührungspunkts B der Stange mit der Kante in Abhängigkeit vom Winkel φ . Auf welcher Bahn bewegt sich der Momentanpol?

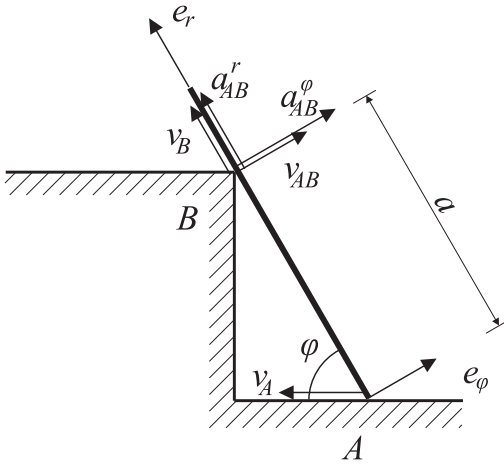


Lösung:

Die Geschwindigkeit v_B des Punktes B der Stange zeigt in Richtung der Achse der Stange (kein Abheben von der Kante).

Geschwindigkeit des Punktes A :

$$\vec{v}_A = v_A \cos \varphi \vec{e}_r - v_A \sin \varphi \vec{e}_\varphi.$$



Geschwindigkeit des Punktes B :

$$\vec{v}_B = v_B \vec{e}_r.$$

Kinematik:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB} \quad \text{mit } \vec{v}_{AB} = a \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Geometrie:

$$a = \frac{h}{\sin \varphi}.$$

Einsetzen liefert:

$$v_B \vec{e}_r = v_a \cos \varphi \vec{e}_r - v_A \sin \varphi \vec{e}_\varphi + \frac{h \dot{\varphi}}{\sin \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\rightarrow v_B = v_A \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_A}{h} \sin^2 \varphi.$$

Beschleunigung des Punktes B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^r + \vec{a}_{AB}^\varphi$$

mit

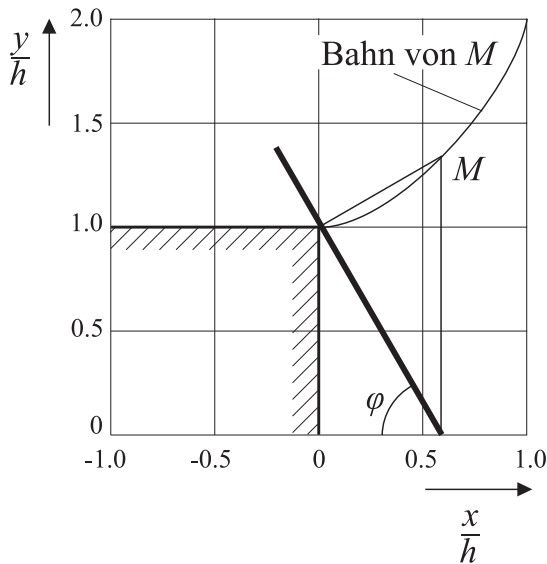
$$\vec{a}_A = 0, \quad \vec{a}_{AB}^r = -a\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r, \quad \vec{a}_{AB}^\varphi = a\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Winkelbeschleunigung der Stange:

$$\ddot{\varphi} = \frac{v_A}{h} \frac{d(\sin^2 \varphi)}{dt} \rightarrow \ddot{\varphi} = 2 \frac{v_A^2}{h^2} \sin^3 \varphi \cos \varphi.$$

Einsetzen liefert:

$$\vec{a}_B = \frac{v_A^2}{h} \sin^2 \varphi (-\sin \varphi \vec{e}_r + 2 \cos \varphi \vec{e}_\varphi).$$



Koordinaten des Momentanpols:

$$x_M = h \cot \varphi, \quad y_M = h + x_M \cot \varphi.$$

Bahnkurve des Momentanpols:

$$y_M = \frac{x_M^2}{h} + h.$$

Aufgabe 2.1. Die Kurbel OA des dargestellten ebenen Mechanismus (Bild 2.1) rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω . Die Stange AB ist in einer drehbaren Kulisse CD verschieblich gelagert und im Punkt A mit der Kurbel gelenkig verbunden. Man bestimme für die gezeichnete Lage die Winkelgeschwindigkeit der Stange AB , die Geschwindigkeit des Punktes B sowie die Relativgeschwindigkeit zwischen der Stange und der Kulisse.

Lösung: $\omega_{AB} = \frac{r}{l} \Omega \cos \varphi$; $v_B = r\Omega$;

$$v_{\text{rel}} = r\Omega \left(\sin \varphi + \frac{c}{l} \cos \varphi \right).$$

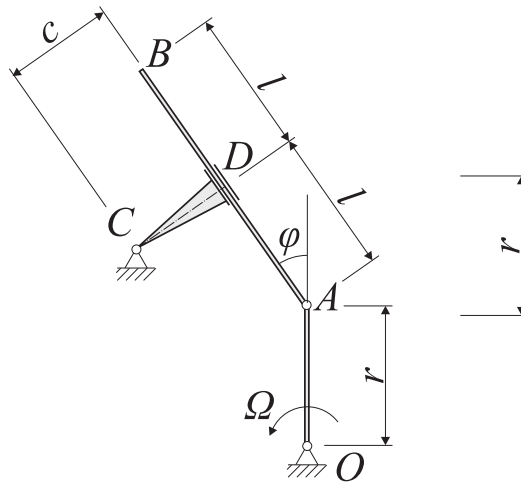


Bild 2.1.

Aufgabe 2.2. Der dargestellte Hebel AB wird im Punkt B durch eine Kulisse und im Punkt A durch die Stange MA geführt (Bild 2.2). Die Stange bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$. Man bestimme für die dargestellte Lage die Geschwindigkeiten der Punkte B und C sowie die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ des Hebels.

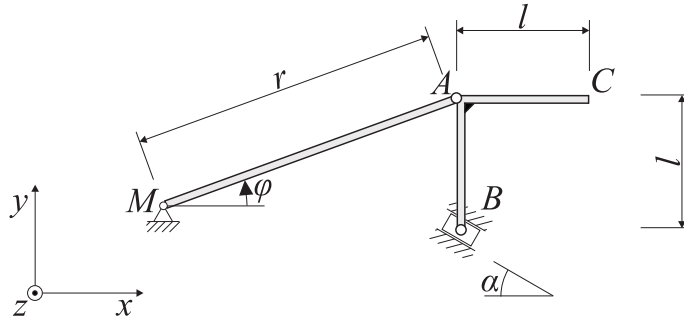


Bild 2.2.

Aufgabe 2.3. Eine Stange der Länge l wird mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 horizontal geführt und geleitet bei B über einen Pfosten (Bild 2.3). Wie groß sind die Beträge von Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes P ?

Lösung: $a_P = l \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \sin^3 \varphi \sqrt{\sin^3 \varphi + 4 \cos^2 \varphi}$.

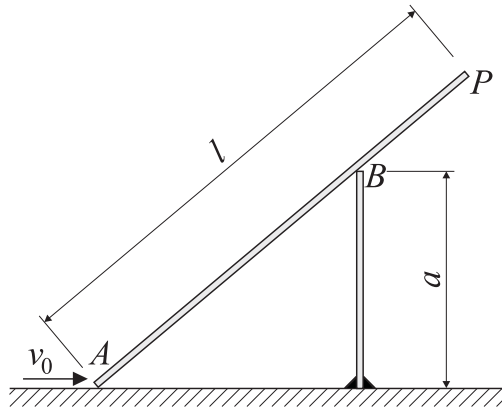


Bild 2.3.

Aufgabe 2.4. Die Stange (1) des skizzierten Kurbeltriebes (Bild 2.4) wird mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω angetrieben. Für die gezeichnete Stellung des Kurbeltriebes ermittle man die Lage der Geschwindigkeitspole der drei Stangen gegenüber dem festen Raum und die Winkelgeschwindigkeit der Stäbe (2) und (3).

Lösung: $\omega_2 = \omega_3 = \omega$.

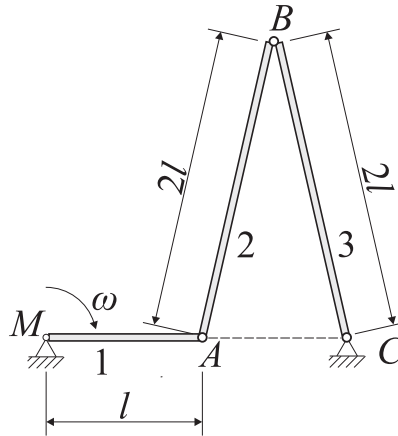


Bild 2.4.

Aufgabe 2.5. Bei einem Kurbeltrieb dreht sich Die Welle des Trommels (1) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω (Bild 2.5). Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kolbens D .

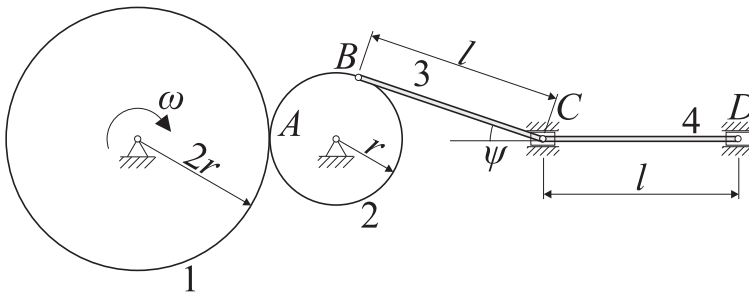


Bild 2.5.

Aufgabe 2.6. Der starre Rahmen AEF , auf dem die Scheiben (1) und (2) drehbar gelagert sind (Bild 2.6) dreht sich mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit Ω . Die Scheibe (1) rollt ohne Rutschen auf dem Boden ab und treibt schlupffrei die Scheibe (2) an. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Scheibe (1), für die Scheibe (2) die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_2$ sowie die Beschleunigung ihres Punktes D .

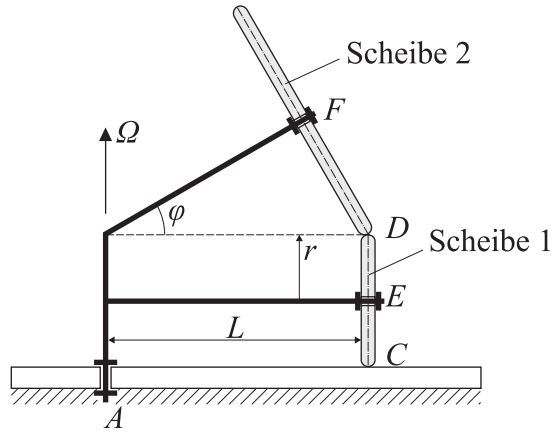


Bild 2.6.

Aufgabe 2.7. Der skizzierte Greifer besteht aus zwei Schalen (Gewicht jeweils $\frac{G}{2}$) und dem Auslöseschirr (Gewicht vernachlässigbar) (Bild 2.7). Alle Gelenke sind reibungsfrei.

a) Mit welcher Kraft werden die Schalen im Punkt P aufeinandergepreßt, wenn die Auslöseschirr entspannt ist?

b) Welche Zugkraft in den Auslöseschirr ist zum Öffnen der Schalen notwendig?

Lösung: $P = \frac{G\sqrt{2}}{8}$; $S = \frac{G}{4}$.

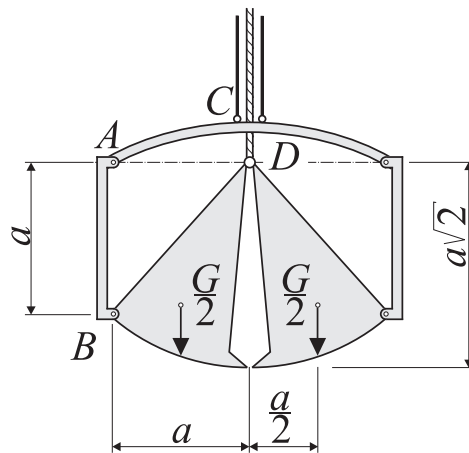


Bild 2.7.

Aufgabe 2.8. Ein Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 20km/h (Bild 2.8). Der Raddurchmesser beträgt 660mm (26 Zoll-Rad). Gesucht sind die Raddrehzahl, die Umlaufzeit und die Winkelgeschwindigkeit.

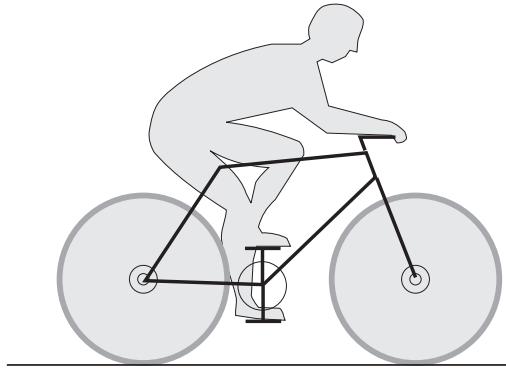
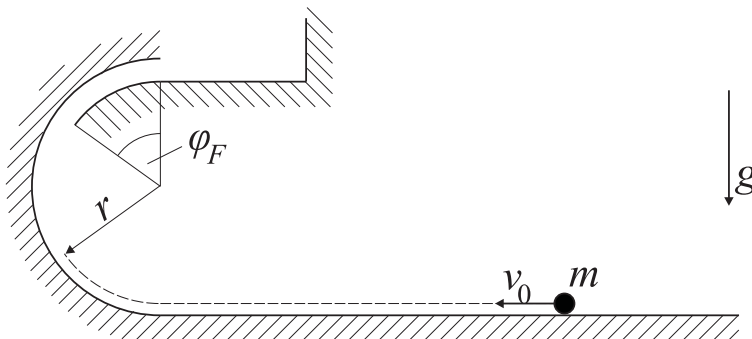


Bild 2.8.

Kapitel 3

Kinetik des Massenpunktes und der Massenpunktsysteme

Beispiel. Eine Bowlingkugel (Masse m) gleitet reibungsfrei mit der Geschwindigkeit v_0 auf dem Rücklauf einer Bowlingbahn. Am Ende des Rücklaufs wird die Kugel auf einer Kreisbahn (Radius r) auf die Höhe $2r$ gehoben. Am oberen Teil der Kreisbahn befindet sich eine glatte Führung der Länge $r\varphi_F$. Wie groß muß die Geschwindigkeit v_0 bei gegebenem Winkel φ_F mindestens sein, damit die Kugel die obere Ebene erreicht?



Lösung:

Die Geschwindigkeit v_0 muß mindestens so groß sein, dass die Kugel die obere Ebene mit der Geschwindigkeit $v \geq 0$ erreicht. Außerdem muß sie so groß sein, dass die Normalkraft N zwischen der Kugel und dem äußeren Kreisbogen erst bei Erreichen der Führung verschwindet.

Energiesatz zwischen unterer Ebene und oberer Ebene:

$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1} \rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + 0 = \frac{mv^2}{2} + 2mgr.$$

Auflösen liefert:

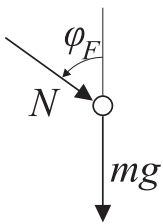
$$v_0^2 = v^2 + 4gr \rightarrow v_0^2 \geq 4gr.$$

Energiesatz zwischen unterer Ebene und Beginn der Führung:

$$\begin{aligned} E_{k0} + E_{p0} &= E_{k2} + E_{p2} \\ \rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + 0 &= \frac{mv^2(\varphi_F)}{2} + mgr(1 + \cos \varphi_F). \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung:

$$\searrow: \quad m \frac{v^2(\varphi)}{r} = N + mg \cos \varphi.$$



Freikörperbild

Forderung für $\varphi = \varphi_F$:

$$N \geq 0 \rightarrow v^2(\varphi_F) \geq gr \cos \varphi.$$

Auflösen liefert:

$$v^2 \geq (2 + 3 \cos \varphi_F)gr.$$

Aufgabe 3.1. Ein horizontal beginnender Wurf (Luftwiderstand vernachlässigbar) soll so ausgeführt werden, dass der geworfene Ball (Masse m) orthogonal durch einen Ring fliegt, der den horizontalen Abstand a von der Abwurfstelle hat und unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigt ist (Bild 3.1). Wie müssen dabei der vertikale Abstand b und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gewählt werden? Welche Geschwindigkeit v hat der Ball beim Passieren des Rings?

Lösung: $b = \frac{a}{2 \tan \alpha}$; $v_0 = \sqrt{ga \tan \alpha}$; $v = \sqrt{\frac{ga}{\sin \alpha \cos \alpha}}$.

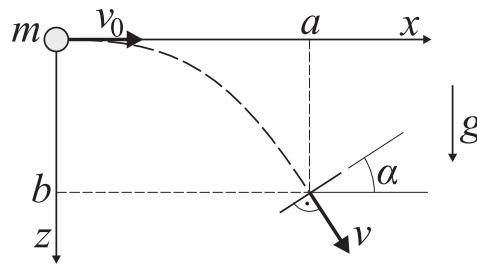


Bild 3.1.

Aufgabe 3.2. Ein Fußballspieler spielt den Ball (Masse m) mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α_0 zur Horizontalen ab (Bild 3.2). Während des Flugs wirkt eine Widerstandskraft $F_w = kv$ entgegen der Geschwindigkeit auf den Ball. Man bestimme die Geschwindigkeitskomponenten in Abhängigkeit von der Zeit. Wie groß ist die Horizontalkomponente, wenn der Ball beim Mitspieler (Abstand l) ist?

Lösung: $\dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha_0 e^{-\frac{kt}{m}}$; $\dot{z}(t) = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha_0 \right) e^{-\frac{kt}{m}}$.

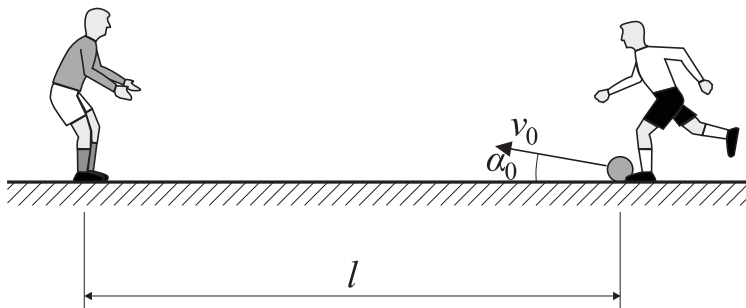


Bild 3.2.

Aufgabe 3.3. Ein Man schiebt eine Kiste (Masse m , Abmessungen vernachlässigbar) eine rauhe Kreisbahn (Radius r , Haftungskoeffizient μ_0 , Reibungskoeffizient μ) hinauf (Bild 3.3). Die Kraft $F = km$ wirke dabei immer unter dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$ zur Tangente an die Bahn. Wie groß muß die Konstante k mindestens sein damit sich die Kiste aus der dargestellten Lage in Bewegung setzt? Wie lauten die Bewegungsgleichungen? Wie groß ist die Beschleunigung der Kiste zu Beginn der Bewegung?

Lösung: $k > \frac{\sqrt{2}\mu_0 g}{1 - \mu_0}$;

$$ma_n = +N - mg \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} F ; \quad ma_t = -R - mg \sin \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} F ;$$

für $\varphi = 0 \rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} k(1 - \mu) - \mu g$.

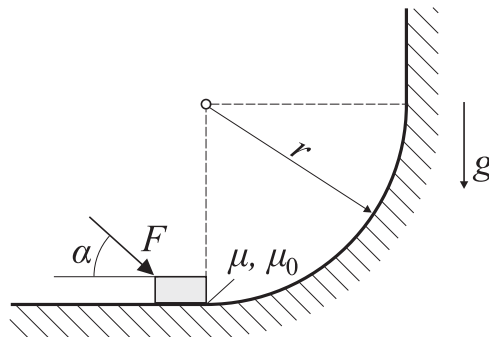


Bild 3.3.

Aufgabe 3.4. Ein Wagen (Masse m) fährt mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine überhöhte, kreisförmige Kurve (Radius r , Neigungswinkel α) (Bild 3.4). Der Haftungskoeffizient zwischen der Straße und den Reifen ist μ_0 . In welchem Bereich muß v liegen, damit der Wagen nicht seitlich rutscht?

Lösung: $\frac{\tan \alpha - \mu_0}{1 + \mu_0 \tan \alpha} \leq \frac{v^2}{gr} \leq \frac{\tan \alpha + \mu_0}{1 - \mu_0 \tan \alpha}$.

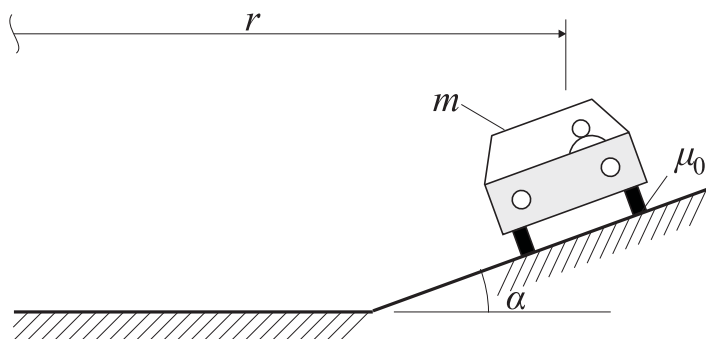


Bild 3.4.

Aufgabe 3.5. Ein Langläufer (Masse m) hat am Punkt A der Loipe die Geschwindigkeit $v_A = v_0$ (Bild 3.5). Obwohl er beim letzten Aufstieg (Höhe h) zum Punkt B nochmals kräftig zulegt, erreicht er diesen nur mit der Geschwindigkeit $v_B = \frac{2v_0}{5}$. In aerodynamisch günstiger Haltung (Luftwiderstand vernachlässigbar) fährt er dann dem Ziel in C entgegen, das er mit der Geschwindigkeit $v_c = 4v_0$ durchfährt. Dabei wirkt durch den aufgetauten Schnee zwischen B und C eine konstante Reibungskraft. Welche Arbeit leistet der Läufer auf dem Weg von A nach B , wenn die Arbeit der Reibungskraft zwischen diesen Punkten vernachlässigbar ist? Wie groß ist der Reibungskoeffizient auf der Strecke BC ?

Lösung: $W = m \left(gh - \frac{21v_0^2}{50} \right); \quad \mu \approx \frac{3}{10} - \frac{4}{5} \frac{v_0^2}{gh}.$

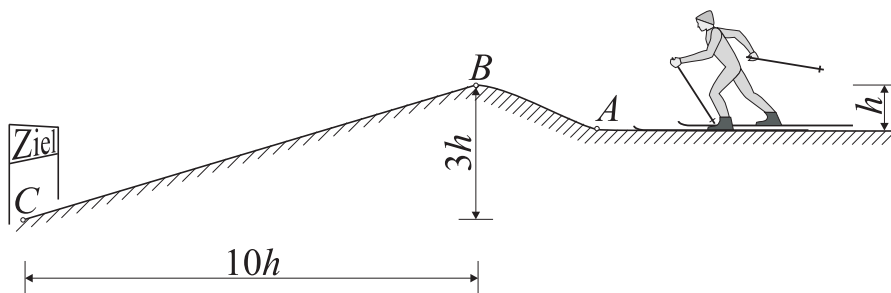


Bild 3.5.

Aufgabe 3.6. Die skizzierte Förderanlage für Pakete (Bild 3.6) soll so ausgelegt werden, dass das Fördergut mit einer Geschwindigkeit $v_2 = 0.1\text{m/s}$ den Auslauf der Rutsche verläßt und auf das dort

aufgestellte Band fällt. Die Anfangsgeschwindigkeit am Kopf der Rutsche ist $v_1 = 1.2\text{m/s}$. Die Reibzahl zwischen Paket und Rutsche beträgt $\mu = 0.3$. Man berechne:

1. Die Beschleunigung auf der Rutsche;
2. Die Verzögerung im Auslauf L ;
3. Die Endgeschwindigkeit beim Verlassen der Rutsche;
4. Die Länge L des Auslaufs.

Gegeben: $h = 4\text{m}$; $\alpha = 30^\circ$.

Hinweis: Der Knick K ist zu vernachlässigen.

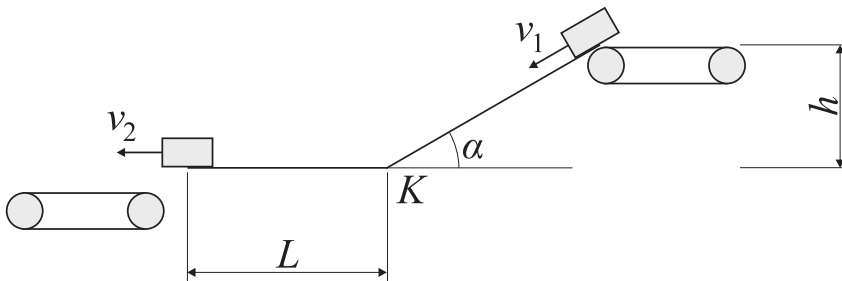


Bild 3.6.

Aufgabe 3.7. Eine Motorwinde M zieht eine Last vom Gewicht $G = mg$ auf einer rauhen, schiefen Ebene (Reibungskoeffizient μ) (Bild 3.7) mit konstanter Geschwindigkeit v_0 hinauf. Welche elektrische Leistung P_A muß die Winde bei Wirkungsgrad η aufnehmen?

Lösung:
$$P_A = \frac{G}{\eta} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) v_0 .$$

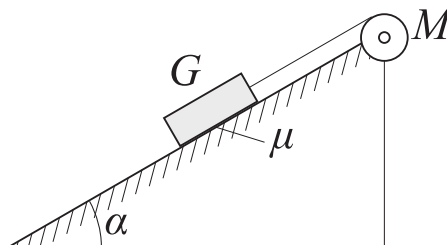


Bild 3.7.

Aufgabe 3.8. Eine Kugel wird nach Skizze (Bild 3.8) von einem um $h = 5\text{m}$ erhöhten Punkt auf eine Schräge mit 20% Gefälle geworfen.

Für den Abwurfwinkel von 60° und die Abwurfgeschwindigkeit von 15m/s sind zu bestimmen:

- die Flugzeit;
- die Entfernung des Auftreffpunktes vom Fußpunkt;
- Die Auftreffgeschwindigkeit und der Auftreffwinkel;
- die maximale Steighöhe;
- die Flugzeit bis zur maximalen Steighöhe.

Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden.

Lösung: $t_f = 3.27\text{s}$; $e = 25\text{m}$; $v_t = 20.5\text{m/s}$;

$y_{\max} = 8.6\text{m}$; $t_{\max} = 1.32\text{s}$.

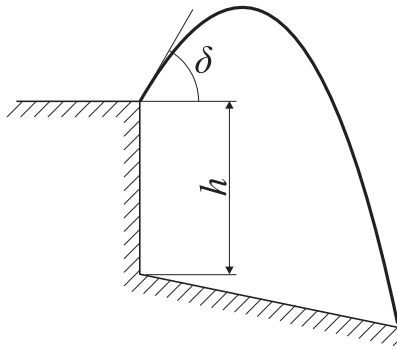


Bild 3.8.

Aufgabe 3.9. Ein auf Kreisbahn geführter Massenpunkt erfährt infolge der Erdschwere die Tangentialbeschleunigung $g \cos \varphi$ (Bild 3.9). Er wird in A aus der Ruhelage losgelassen. Gesucht sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Abhängigkeit vom Winkel φ .

Lösung: $v = \sqrt{2gR \sin \varphi}$; $a = g\sqrt{1 + 3 \sin^3 \varphi}$.

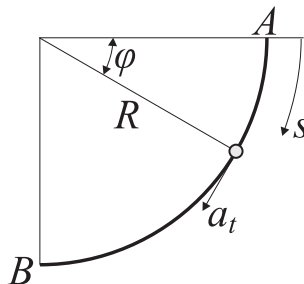


Bild 3.9.

Aufgabe 3.10. Ein Raketenschlitten der Masse m , der sich mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt (Bild 3.10), soll durch den Raketenmotor innerhalb der Zeit t abgebremst werden. Der zeitlich veränderliche Schub hat die Größe $F(t) = F_0 \sin \frac{\pi t}{t_1}$ und wirkt von $t = 0$ bis $t = t_1$.

Wie groß muß F_0 sein, damit der Raketenschlitten zur Zeit t_1 die Geschwindigkeit $v_1 = 0$ hat?

Lösung: $F_0 = \frac{\pi m v_0}{2 t_1}$.

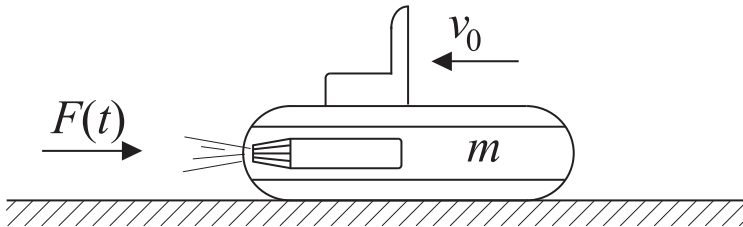


Bild 3.10.

Aufgabe 3.11. Ein Fährschiff (Masse m), auf das ein konstanter Wasserwiderstand W einwirkt, fährt mit der Geschwindigkeit v_0 auf eine Kaimauer zu (Bild 3.11). An der Stelle $x = 0$ beginnt eine Bremsung mit konstanter Bremskraft F . Im Abstand a von der Mauer kommt das Schiff zum Stillstand und fährt dann mit konstanter Antriebskraft $0.5F$ zurück, so dass es bei $x = 0$ wieder die Hälfte der ursprünglichen Anfangsgeschwindigkeit besitzt. Wie groß sind die Bremskraft F und der der Bewegungsrichtung entgegengesetzte Wasserwiderstand W ?

Gegeben: v_0 ; L ; a ; m .

Lösung: $F = \frac{5}{12} \frac{m v_0^2}{L - a}$; $W = \frac{1}{12} \frac{m v_0^2}{L - a}$.

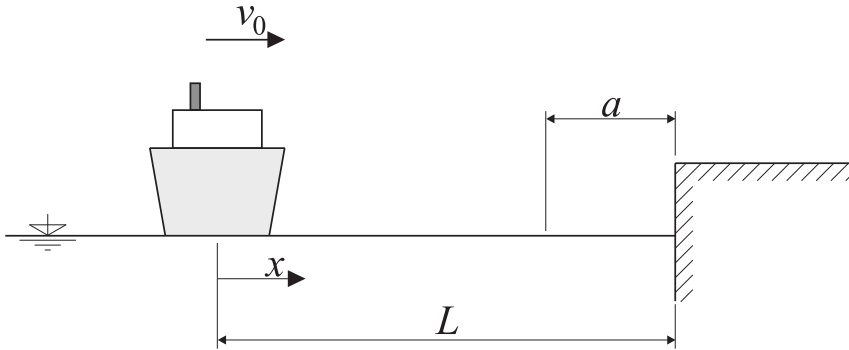


Bild 3.11.

Aufgabe 3.12. Eine Kugel der Masse m fliegt mit einer Geschwindigkeit v_0 . Sie explodiert in zwei Teile (Bild 3.12). Die Richtungen α_1 und α_2 sowie die Geschwindigkeit v_1 unmittelbar nach der Explosion werden gemessen.

a) Wie groß sind m_2 und v_2 ?

b) Auf welcher Bahn bewegt sich der Massenmittelpunkt der Bruchstücke?

Lösung: $m_1 = m \frac{v_0}{v_1} \tan \alpha_2$; $v_2 = \frac{v_0}{\cos \alpha_2 - \frac{v_0}{v_1} \sin \alpha_2}$, $y_S = 0$.

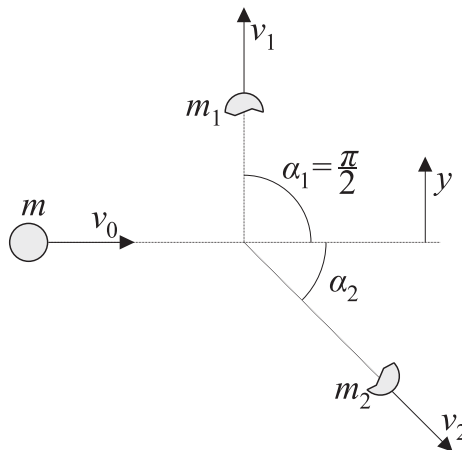


Bild 3.12.

Aufgabe 3.13. Ein Reiserad vom Radius r dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit ω (Bild 3.13). Die Gondeln, jede vom Gewicht

G einschließlich Insassen, können als senkrecht hängend angenommen werden.

a) Welche Beschleunigungen nach Größe und Richtung erfahren die Insassen in den vier skizzierten Gondeln?

b) Welche Kräfte nach Größe und Richtung werden von der Aufhängung auf die obere bzw. untere Gondel ausgeübt?

Lösung: a) $a = -r\omega^2\vec{e}_r$;

b) $F_o = \frac{G}{g}(g - \omega^2 r)$; $F_u = \frac{G}{g}(g + \omega^2 r)$

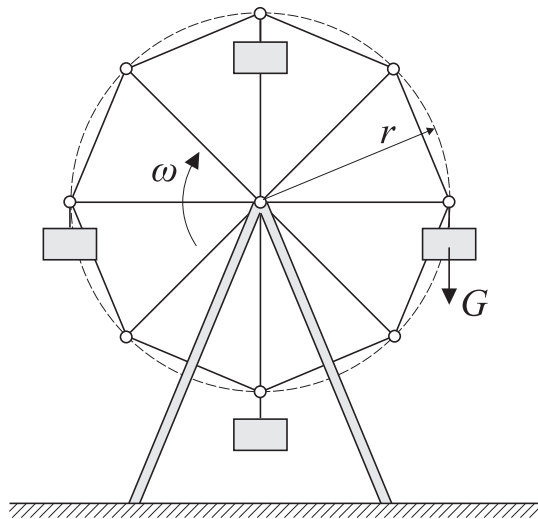
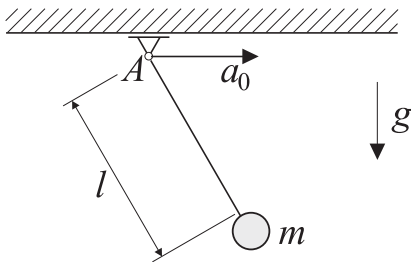


Bild 3.13.

Kapitel 4

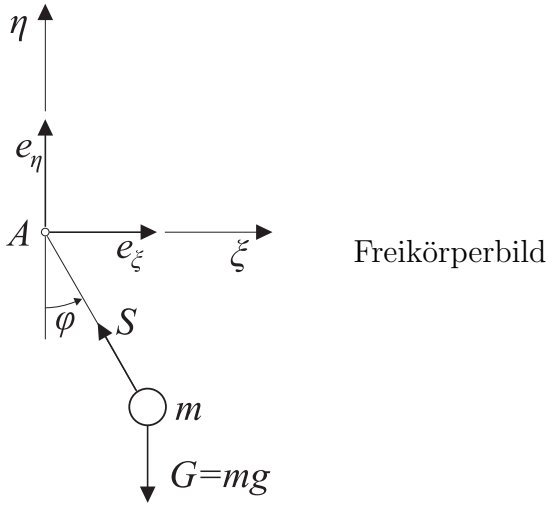
Relativbewegung des Massenpunktes

Beispiel. Der Aufhängepunkt A eines mathematischen Pendels (Masse m , Länge l) bewegt sich mit der konstanten Beschleunigung a_0 in horizontaler Richtung. Wie lautet die Bewegungsgleichung?



Lösung:

Wir führen ein (ξ, η) -Koordinatensystem ein, das sich rein translatorisch mit dem Aufhängepunkt bewegt und beschreiben die Bewegung in diesem System.



Bewegungsgleichung:

$$m\vec{a}_P = \vec{F}$$

mit

$$\vec{a}_P = \vec{a}_f + \vec{a}_{\text{rel}} \quad (\vec{a}_c = 0).$$

Führungs- und Relativbeschleunigung:

$$\vec{a}_f = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix}.$$

Geometrie:

$$\begin{aligned} \xi &= l \sin \varphi & \rightarrow & \quad \ddot{\xi} = l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \eta &= -l \cos \varphi & \rightarrow & \quad \ddot{\eta} = l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Kraft:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} -S \sin \varphi \\ S \cos \varphi - mg \end{bmatrix}.$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} m(a_0 + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= -S \sin \varphi, \\ m(l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) &= S \cos \varphi - mg. \end{aligned}$$

Elimination von S liefert:

$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi + a_0 \cos \varphi = 0.$$

Aufgabe 4.1. In dem dargestellten System rotieren zwei Scheiben mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten Ω bzw. ω um ihre Achsen (Bild 4.1). Man bestimme die Beschleunigung des Punktes P in der gezeichneten Lage.

Lösung:

$$a_P = \begin{bmatrix} 2r\omega\Omega \sin \varphi \\ -(a + r \cos \varphi)\Omega^2 - r\omega^2 \cos \varphi \\ -r\omega^2 \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

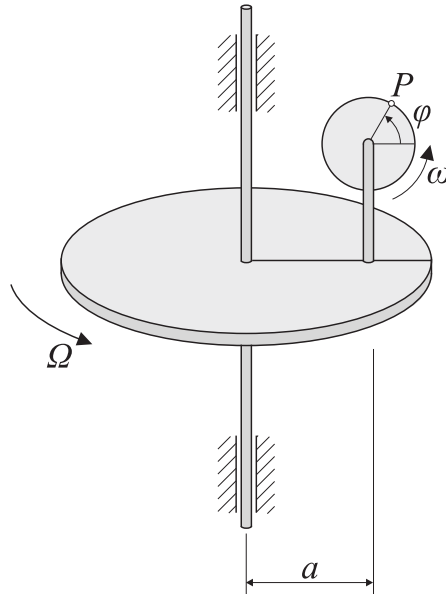


Bild 4.1.

Aufgabe 4.2. Ein abgewinkelten Hebel $0EA$ rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um die z -Achse (Bild 4.2). Im Punkt A des Hebels ist eine Scheibe (Radius r) befestigt, die sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse dreht. Man bestimme die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes P in der dargestellten Lage.

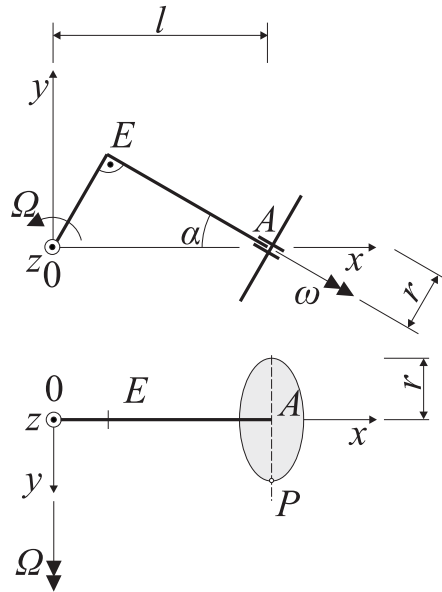


Bild 4.2.

Aufgabe 4.3. Eine Kreisscheibe rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ψ und der Winkelbeschleunigung $\dot{\psi}$ um ihren Mittelpunkt M . Auf der Scheibe bewegt sich ein Punkt P mit der relativen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und relativen Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ auf einer Kreisbahn (Mittelpunkt 0 , Radius r) (Bild 4.3). Man bestimme die Geschwindigkeit v_P und die Beschleunigung a_P in den scheibenfesten Koordinaten x, y, z .

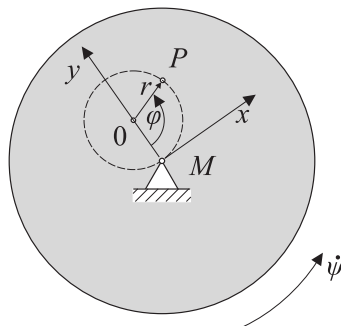


Bild 4.3.

Aufgabe 4.4. Eine Kreisscheibe (Radius r) rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω . Im Abstand a vom Mittelpunkt ist

auf einer glatten Führungsschiene ein Klotz (Masse m) arretiert (Bild 4.4). Mit welcher Relativgeschwindigkeit erreicht der Klotz nach dem Lösen der Arretierung den Rand der Scheibe?

Lösung: $\dot{x}(t_R) = \Omega\sqrt{r^2 - a^2}$.

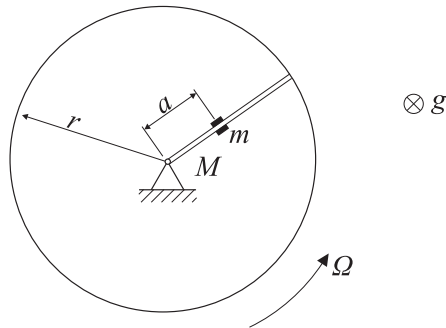


Bild 4.4.

Aufgabe 4.5. Ein Kreisring (Radius r) rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die x -Achse. Im Ring befindet sich eine kleine Kugel (Masse m), die relativ zum Ring reibungsfrei gleiten kann (Bild 4.5). Man ermittle die Bewegungsgleichungen sowie die Gleichgewichtslagen der Kugel relativ zum Ring.

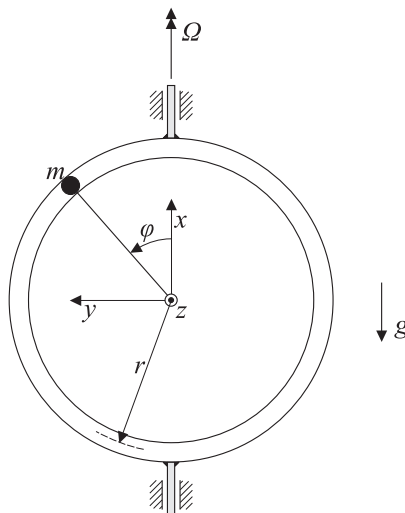
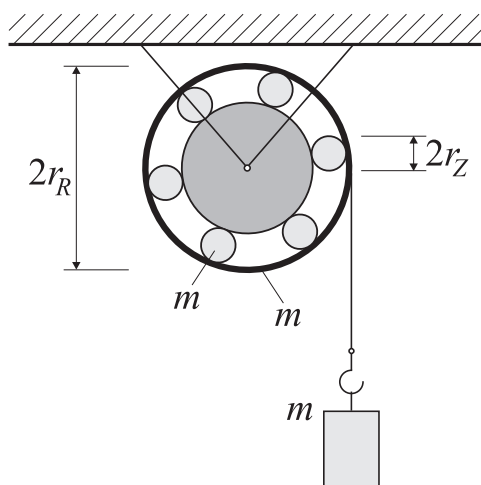


Bild 4.5.

Kapitel 5

Kinetik des starren Körpers

Beispiel. Ein Zylinderrollenlager besteht aus einem dünnwandigen Außenring (Radius r_R , Masse m) und sechs homogenen Zylindern (jeweils Radius r_Z , Masse m). Auf den Außenring ist ein Faden (Masse vernachlässigbar) aufgewickelt, an dessen Ende ein Gewicht (Masse m) hängt. Wie groß ist die Beschleunigung des Gewichts?



Lösung:

Energiesatz:

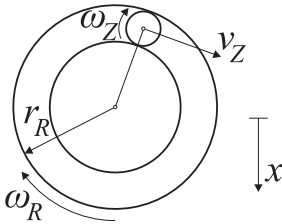
$$E_k + E_p = \text{const.}$$

Kinetische Energie:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\Theta_R\omega_R^2}{2} + 6\left(\frac{mv_Z^2}{2} + \frac{\Theta_Z\omega_Z^2}{2}\right).$$

Potentielle Energie:

$$E_p = -mgx.$$



Kinematik:

$$\dot{x} = r_R\omega_R, \quad v_Z = r_Z\omega_Z, \quad \dot{x} = 2v_Z.$$

Massenträgheitsmomente:

$$\Theta_R = mr^2, \quad \Theta_Z = \frac{mr_Z^2}{2}.$$

Einstzen liefert:

$$\frac{17\dot{x}^2}{8} - gx = \text{const.}$$

Differentiation des Energiesatzes:

$$\frac{17\dot{x}\ddot{x}}{4} - g\dot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{4g}{17}.$$

Aufgabe 5.1. Auf einer glatten, horizontalen Ebene liegt ein Keil der Masse m_1 , auf dem ein zweiter kleinerer Keil der Masse m_2 reibungsfrei gleiten kann (Bild 5.1). Wie groß sind die Beschleunigungen beider Keile? Man kontrolliere das Ergebnis anhand der Grenzfälle $m_1 \rightarrow \infty$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lösung: $\ddot{x}_1 = \frac{\frac{m_2}{m_1} g \tan \alpha}{1 + (1 + \frac{m_2}{m_1}) \tan^2 \alpha}$; $\ddot{y}_1 = 0$.

$$\ddot{x}_2 = \frac{g \tan \alpha}{1 + (1 + \frac{m_1}{m_2}) \tan^2 \alpha}; \quad \ddot{y}_1 = \frac{(1 + \frac{m_2}{m_1}) g \tan^2 \alpha}{1 + (1 + \frac{m_2}{m_1}) \tan^2 \alpha}.$$

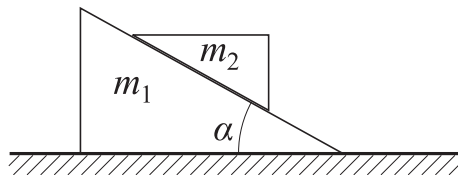


Bild 5.1.

Aufgabe 5.2. Auf der Plattform eines Wagens der Masse m_1 liegt eine Kiste der Masse m_2 (Bild 5.2). An dem ursprünglich stehenden Wagen greift eine Kraft F an, die ihn so stark beschleunigt, dass die Kiste rutscht (Reibungszahl μ). Nach welcher Zeit T fällt die Kiste vom Wagen?

Lösung: $T = \sqrt{\frac{2lm_1}{F - \mu g(m_1 + m_2)}}$.

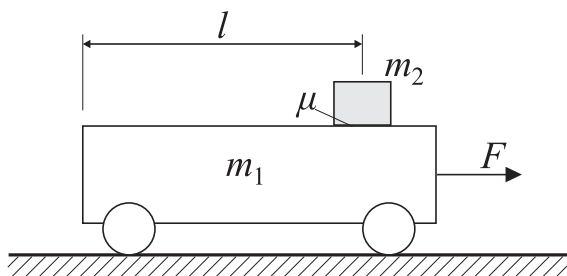


Bild 5.2.

Aufgabe 5.3. Auf der geneigten Deckfläche eines Körpers (1) ruht anfangs ein Klotz (Masse m , Haftreibungskoeffizient μ_0) (Bild 5.3). Der Körper (1) ist auf seiner Unterlage reibungsfrei beweglich. Wie groß muß die Beschleunigung a des Körpers (1) mindestens sein, damit der Klotz auf der Deckfläche herunterrutscht?

Gegeben: μ_0 ; α ; g ; ($\mu_0 > \tan \alpha$).

Lösung: $a = g \frac{\mu_0 - \tan \alpha}{1 + \mu_0 \tan \alpha}$.

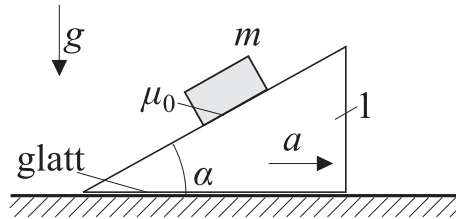


Bild 5.3.

Aufgabe 5.4. Auf eine reibungsfrei gelagerte, ruhende Scheibe (1) (Masse m , Radius r_1) wird eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 rotierende Scheibe (2) (Masse m , Radius r_2) konzentrisch aufgesetzt (Bild 5.4). Infolge der Reibung zwischen den Scheiben nehmen sie nach einiger Zeit eine gemeinsame Winkelgeschwindigkeit an. Wie groß ist diese? Wie groß ist die Änderung der kinetischen Energie?

$$\text{Lösung: } \bar{\omega} = \frac{r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \omega_2; \quad \Delta E_k = -\frac{1}{4} m \omega_2^2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}.$$

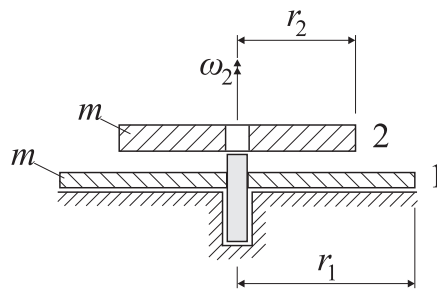


Bild 5.4.

Aufgabe 5.5. Auf einer Stufenrolle (Radien r_1 bzw. r_2) sind zwei Fäden aufgewickelt, an deren Enden jeweils ein Gewicht (Massen m_1 bzw. m_2) hängt (Bild 5.5). Die Rolle ist in A um ihre Achse reibungsfrei drehbar gelagert. Wie groß muß das Trägheitsmoment Θ_A der Rolle mindestens sein, damit beim Abwickeln keiner der Fäden schlaff wird?

$$\text{Lösung: } \Theta_A > m_2 r_2 (r_1 - r_2).$$

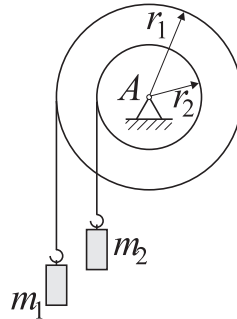


Bild 5.5.

Aufgabe 5.6. Eine homogene Kreisscheibe mit dem Radius r_2 (Dicke d , Dichte ρ) besitzt eine Bohrung vom Radius r_1 derart, dass sich die beiden Kreise in einem Punkt berühren (Bild 5.6). Man bestimme die Lage des Massenmittelpunktes C sowie die Massenträgheitsmomente um die zur Scheibe senkrechten Achsen durch O und C .

Gegeben: r_1 ; r_2 ; d ; ρ .

Lösung: $x_C = -\frac{r_1^2}{r_1 + r_2}$; $y_C = 0$;

$$\Theta_C = \frac{\pi d \rho}{2} (r_2^2 - r_1^2) \left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{2r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \right].$$

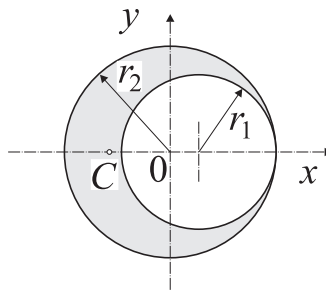


Bild 5.6.

Aufgabe 5.7. Die dargestellte Scheibe (Dichte ρ) (Bild 5.7) hat im Bereich $r_1 \leq r \leq r_2$ die konstante Breite b_0 und im Bereich $r_2 \leq r \leq r_3$ die veränderliche Breite $b(r) = \frac{b_0 r_2}{r}$. an bestimme das Massenträgheitsmoment Θ_a bezüglich der Drehachse $a - a$.

$$\text{Lösung: } \Theta_a = \pi \rho b_0 \left[\frac{(r_2^4 - r_1^4)}{2} + \frac{2r_2(r_3^3 - r_2^3)}{3} \right].$$

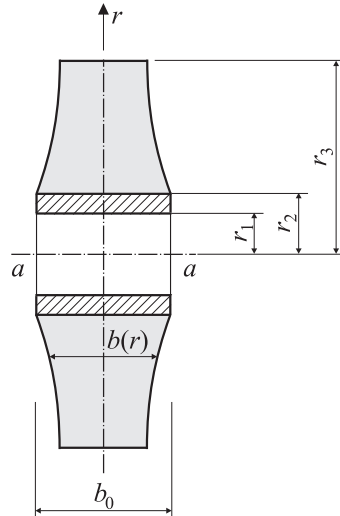


Bild 5.7.

Aufgabe 5.8. Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment Θ_a eines homogenen Ringes (Dichte ρ) mit Kreisquerschnitt C (Bild 5.8).

Lösung: $\Theta_a = m \left(R^2 + \frac{3C^2}{4} \right)$.

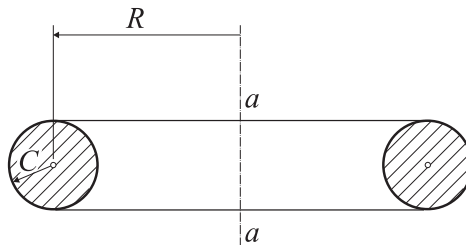


Bild 5.8.

Aufgabe 5.9. Für den homogenen Kegel der Masse m sind die Trägheitsmomente Θ_x und Θ_y (Bild 5.9).

Lösung: $\Theta_x = \frac{3mR^2}{10}$; $\Theta_y = \frac{3m}{5} \left(\frac{R^2}{4} + H^2 \right)$.

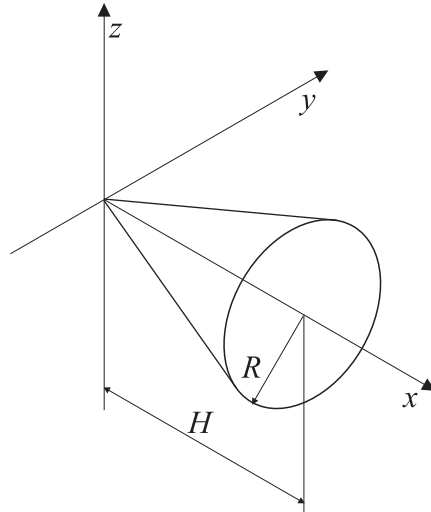


Bild 5.9.

Aufgabe 5.10. Ein homogener Quader (Höhe h , Breite $b = 3h$, Tiefe c , Dichte ρ) liegt so auf einer rauhen Stufe (Haftungskoeffizient $\mu_0 = 0.5$), dass sich der Schwerpunkt S vertikal über der Kante befindet (Bild 5.10). Durch eine kleine Störung fängt er zum Zeitpunkt $t = 0$ zu kippen an. Bei welchem Winkel φ_1 beginnt der Quader im Berührungspunkt B zu rutschen?

Lösung: $\varphi_1 = 0.19\pi \hat{=} 34^\circ$.

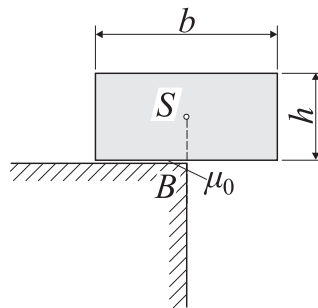


Bild 5.10.

Aufgabe 5.11. Auf einem Band (Masse vernachlässigbar), das in D befestigt ist und über eine Umlenkrolle (Radius r_1 , Masse m_1) geführt wird, liegt ein Zylinder (Radius R_2 , Masse m_2) (Bild 5.11). Im Punkt A des Bandes greift eine Kraft F an. Wie groß sind die

Schnittkräfte im Band sowie die Beschleunigung des Punktes A, wenn das Band an keiner Stelle rutscht?

$$\text{Lösung: } S_2 = \frac{3F + 2m_1g}{3 + \frac{4m_1}{m_2}}; \quad S_2 = \frac{F + (2m_1 + m_2)g}{3 + \frac{4m_1}{m_2}};$$

$$\ddot{x} = \frac{\frac{8F}{m_2} - 4g}{3 + \frac{4m_1}{m_2}}.$$

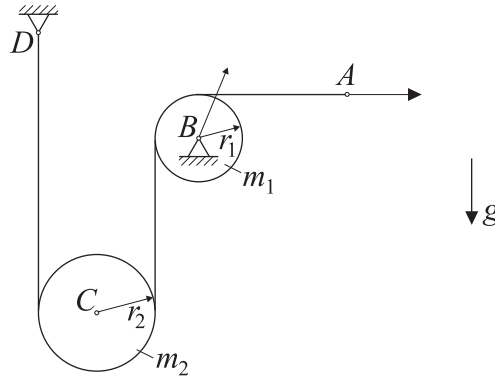


Bild 5.11.

Aufgabe 5.12. Auf einer homogenen zylindrischen Walze der Masse m_1 ist ein dehnstarres Seil aufgewickelt, an dem eine Masse vom Gewicht m_2g hängt (Bild 5.12). Zu bestimmen sind die Beschleunigung der Masse m_2 und die Seilkraft S , wenn die Walze sich in A frei drehen kann. Die Masse des Seils sei vernachlässigbar.

$$\text{Lösung: } \ddot{x} = \frac{2m_2g}{m_1 + 2m_2}; \quad S = \frac{m_1m_2g}{m_1 + 2m_2}.$$

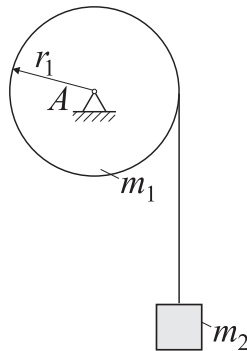


Bild 5.12.

Aufgabe 5.13. Ein homogene Walze (Gewicht $G = mg$) rollt eine raue schiefe Ebene (Haftungskoeffizient μ_0) hinunter (Bild 5.13). Wie groß ist ihre Beschleunigung a und unter welchen Umständen ist reines Rollen möglich?

Lösung: $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$; $\mu_0 \geq \frac{1}{3} \tan \alpha$.

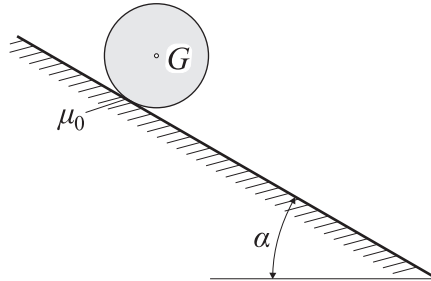


Bild 5.13.

Aufgabe 5.14. Bei einem Aufzug treibt die Rolle (1) die Seiltrommel (2) ohne Schlupf an (Bild 5.14). Wie groß sind die Beschleunigung a des Aufzuges (Gewicht $G = mg$) und die Seilkraft S , wenn der Antrieb durch ein konstantes Moment M_0 erfolgt?

Lösung: $a = \frac{\frac{M_0}{r_1} - mg}{m + \frac{\Theta_1}{r_1^2} + \frac{\Theta_2}{r_2^2}}$; $\frac{\frac{M_0}{r_1} + (\frac{\Theta_1}{r_1^2} + \frac{\Theta_2}{r_2^2})g}{m + \frac{\Theta_1}{r_1^2} + \frac{\Theta_2}{r_2^2}}$.

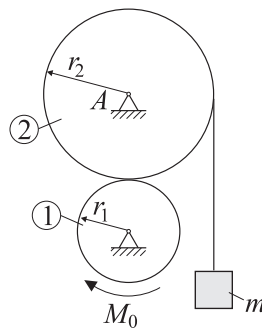


Bild 5.14.

Aufgabe 5.15. Bei nebenstehendem System sind zwei homogene Rollen der Masse m über ein dehnstarres Seil mit einem Körper vom Gewicht $G_1 = 5mg$ verbunden (Bild 5.15). Wie groß sind die

Beschleunigung des Körpers und die Seilkräfte, wenn das System sich selbst überlassen ist und an keiner Stelle Gleiten auftritt?

Lösung: $\dot{v}_1 = \frac{9g}{14}$; $S_1 = \frac{50mg}{28}$; $S_2 = \frac{41mg}{28}$.

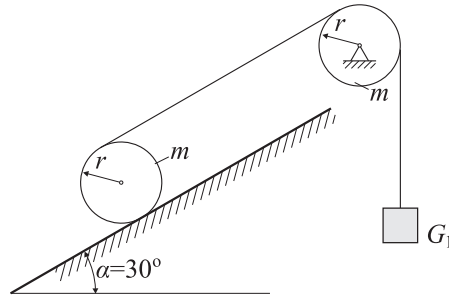


Bild 5.15.

Aufgabe 5.16. Eine Platte (Masse m) gleitet auf einer rauhen schiefen Ebene (Neigungswinkel α , Reibungskoeffizient μ) abwärts. Auf der Platte rollt eine homogene Kreisscheibe (Radius r , Masse m) (Bild 5.16). Der Haftungskoeffizient zwischen Platte und Scheibe ist μ_0 . Man bestimme die Beschleunigungen der Platte und des Schwerpunkts der Scheibe sowie die Winkelbeschleunigung der Scheibe. Wie groß muß μ_0 mindestens sein, damit die Scheibe nicht rutscht?

Lösung: $\ddot{x}_1 = g \left(\sin \alpha - \frac{3\mu \cos \alpha}{2} \right)$; $\ddot{x}_2 = g \left(\sin \alpha - \frac{\mu \cos \alpha}{2} \right)$;
 $\ddot{\varphi} = \frac{\mu g}{r} \cos \alpha$.

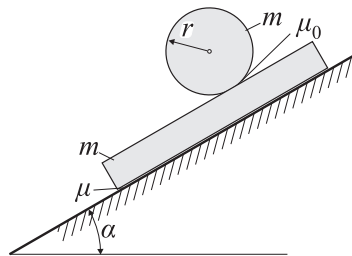


Bild 5.16.

Aufgabe 5.17. Die Tür (Masse m , Massenträgheitsmoment Θ_A) eines Fahrzeugs steht offen (Bild 5.17). Der Schwerpunkt S der Tür

hat Abstand b von den reibungsfreien Angeln A . Mit welcher Winkelgeschwindigkeit fällt die Tür ins Schloß, wenn das Fahrzeug mit der konstanten Beschleunigung a_0 anfährt?

Lösung: $\dot{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2ma_0b}{\Theta_A}}$.

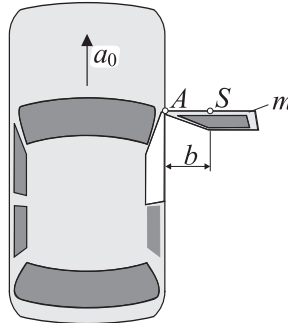


Bild 5.17.

Aufgabe 5.18. Eine Jo-Jo-Rolle (Gewicht mg , Trägheitsmoment Θ_A) bewegt sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit den Geschwindigkeiten v_0 und ω_0 (Bild 5.18). Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und ω_1 zum Zeitpunkt t_1 , wenn am Faden mit der Kraft $S(t) = \frac{S_0 t}{t_1}$ gezogen wird?

Lösung: $\omega_1 = \omega_0 + \frac{rS_0 t_1}{2\Theta_A}$; $v_1 = v_0 + gt_1 - \frac{S_0 t_1}{2m}$.

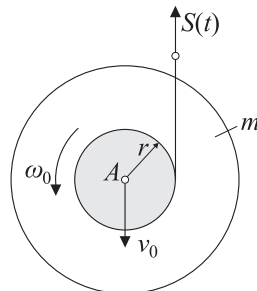


Bild 5.18.

Aufgabe 5.19. Eine homogene Kreisscheibe (1) (Masse m_1) ist im Punkt A reibungsfrei drehbar mit einer homogenen Kreisscheibe

(2) (Masse m_2) verbunden, welche in B reibungsfrei drehbar gelagert ist (Bild 5.19). Die Scheibe (1) dreht sich zunächst mit der Winkelgeschwindigkeit ω , während die Scheibe (2) in Ruhe ist. Plötzlich blockiert das Lager in A ; die beiden Scheiben sind dann starr miteinander verbunden. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit Ω der Scheiben nach dem Blockieren, die in A und B auftretenden Kraft- und Momentenstöße sowie die Änderung der kinetischen Energie.

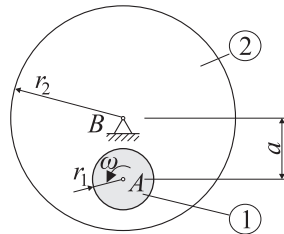


Bild 5.19.

Aufgabe 5.20. Eine dünne Kreisscheibe (Masse m) rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um einen masselosen Schaft (Bild 5.20). Im Gelenk A ist der Schaft mit der Länge L in der Zeichenebene frei drehbar. Durch eine kleine Störung kippt das System aus der labilen Gleichgewichtslage $\varphi = 0$. Man berechne die absolute Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\text{abs}}(\varphi)$ und das Lagermoment M_A .

Lösung:

$$\vec{\omega}_{\text{abs}} = \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ \sqrt{\frac{8gL(1-\cos\varphi)}{4L^2+r^2}} \end{bmatrix}.$$

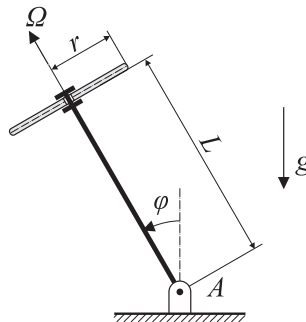
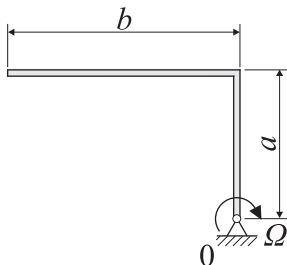


Bild 5.20.

Kapitel 6

Prinzipien der Mechanik

Beispiel. Ein homogener Winkel (Masse m) rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um eine Achse durch 0. Man bestimme die Schnittgrößen durch formale Rückführung auf die Statik.

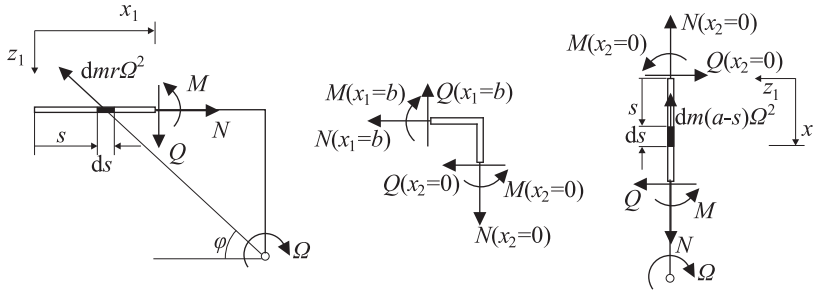


Lösung:

Wir schneiden zuerst den äußeren Schenkel an der Stelle x_1 . Auf ein Massenelement dm an der Stelle s (Abstand vom linken Ende) wirkt als "Belastung" die d'Alembertsche Trägheitskraft $dmr\Omega^2$. Die Schnittgrößen folgen durch Integration.

Massenelement:

$$dm = \frac{m}{a+b} ds = \mu ds, \quad \mu = \frac{m}{a+b} : \text{Masse pro Längeneinheit.}$$



Geometrie:

$$\cos \varphi = \frac{(b-s)}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{a}{r}.$$

Normalkraft ($0 \leq x_1 \leq b$):

$$\begin{aligned} N(x_1) &= \int_0^{x_1} r \Omega^2 \cos \varphi dm = \int_0^{x_1} \Omega^2 (b-s) \mu ds = \mu \Omega^2 \left(bs - \frac{s^2}{2} \right) \Big|_0^{x_1} \\ &\rightarrow N(x_1) = \mu \Omega^2 \left(bx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Querkraft ($0 \leq x_1 \leq b$):

$$\begin{aligned} Q(x_1) &= \int_0^{x_1} r \Omega^2 \sin \varphi dm = \int_0^{x_1} \Omega^2 a \mu ds \\ &\rightarrow Q(x_1) = \mu \Omega^2 a x_1. \end{aligned}$$

Biegemoment ($0 \leq x_1 \leq b$):

$$M(x_1) = \int_0^{x_1} Q(s) ds \quad \rightarrow \quad M(x_1) = \mu \Omega^2 \frac{a x_1^2}{2}.$$

Übergangsbedingungen:

$$\begin{aligned} N_0 &= N(x_2 = 0) = Q(x_1 = b) = \mu \Omega^2 ab, \\ Q_0 &= Q(x_2 = 0) = -N(x_1 = b) = -\mu \Omega^2 \frac{b^2}{2}, \\ M_0 &= M(x_2 = 0) = M(x_1 = b) = \mu \Omega^2 \frac{ab^2}{2}. \end{aligned}$$

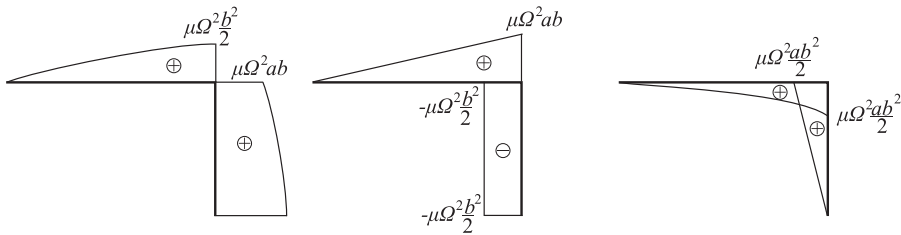
Normalkraft und Querkraft ($0 \leq x_2 \leq a$):

$$N(x_2) = N_0 + \int_0^{x_2} \mu\Omega^2(a-s)ds \rightarrow N(x_2) = \mu\Omega^2\left(ab + ax_2 - \frac{x_2^2}{2}\right),$$

$$Q(x_2) = Q_0 \rightarrow Q(x_2) = -\mu\Omega^2\frac{b^2}{2}.$$

Biegemoment ($0 \leq x_2 \leq a$):

$$M(x_2) = M_0 + x_2Q_0 \rightarrow M(x_2) = \mu\Omega^2\frac{b^2(a-x_2)}{2}.$$



Aufgabe 6.1. Eine Walze (Radius r , Masse m) rollt auf einer kreisförmigen Bahn (Radius R) (Bild 6.1). Man bestimme die Bewegungsgleichung durch formale Rückführung auf die Statik.

Lösung: $\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-r)} \sin \varphi = 0.$

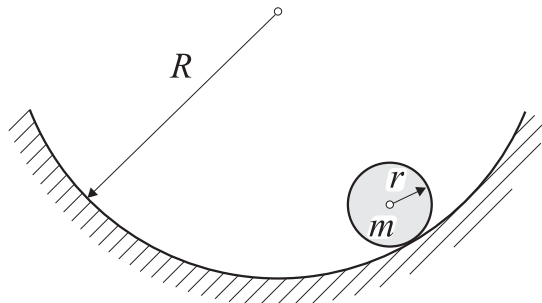


Bild 6.1.

Aufgabe 6.2. Eine Kurbel rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω . Ihr Handgriff AB (Länge l , Masse m) besitzt eine

gleichförmige Massenverteilung and hat einen Kreisquerschnitt (Radius r) (Bild 6.2). Man bestimme die maximale Biegespannung im Handgriff.

Lösung: $\sigma_{\max} = \frac{2mlR\Omega^2}{\pi r^3}$.

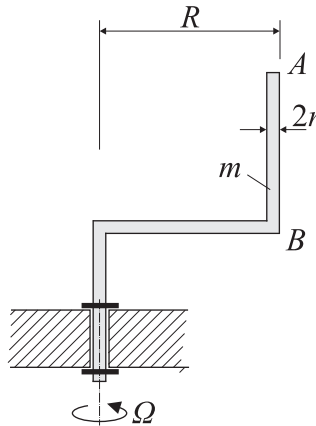


Bild 6.2.

Aufgabe 6.3. Eine Hubvorrichtung besteht aus zwei fest verbundenen, zylindrischen Rollen (Massen $m_1 = 4m$ und $m_2 = 4m$, Radien $r_1 = 3r$ und $r_2 = r$) (Bild 6.3). Aus der Ruhelage wird das System mit dem Drehmoment

$$M(\dot{\varphi}) = M_0 \left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)$$

angetrieben. Dabei wird über ein Massenloses Seil und eine Rolle (Masse $m_3 = m$, Radius $r_3 = 2r$) die Last (Masse $m_4 = 7m$) angehoben.

- Sellen Sie die kinematische Beziehungen zwischen $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}$, $\dot{\varphi}_3$, \dot{x}_3 und \dot{x}_4 auf.
- Ermitteln Sie die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ der Winde.
- Welche maximale Hubgeschwindigkeit v_{\max} erreicht die Last?

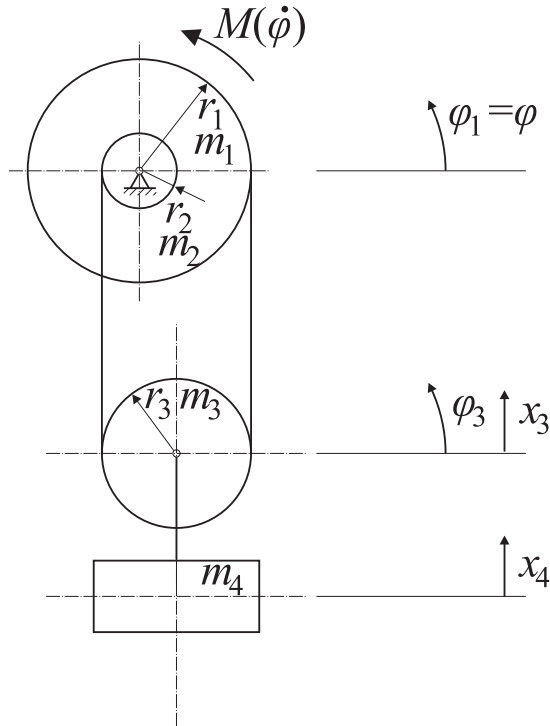


Bild 6.3.

Aufgabe 6.4. Ein Inline-Skater befährt eine Halfpipe mit Radius r (Bild 6.4). Vereinfachend sei angenommen, dass sich sein Schwerpunkt auf der Bahnkurve der Halfpipe bewegt. Der Inline-Skater hat die Masse m .

a) Wie schnell wird der Inline-Skater maximal, wenn er sich reibungsfrei in der Halfpipe bewegt?

b) Die Inline-Skaterschuhe haben eine normalkraftabhängige Reibung μ_r auf der Oberfläche der Halfpipe. Wie schnell wird der Inline-Skater jetzt maximal?

c) Wie hoch muß der Inline-Skater beim Skaten auf der einen Seite mindestens springen, um mit der Reibung μ_r seiner Inline-Skaterschuhe auf der anderen Seite anzukommen?

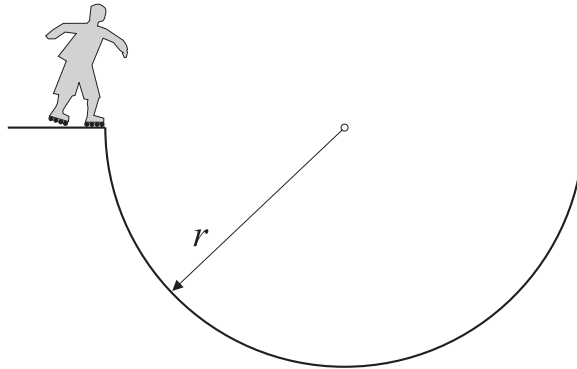


Bild 6.4.

Aufgabe 6.5. Die Fahrt einer Achtenbahn durch einen Looping soll untersucht werden (Bild 6.5). Für die Untersuchung sind der Ein- und Auslauf zu vernachlässigen, so dass der Looping eine Schraubenlinie darstellt (Radius R , Ganghöhe T); ebenso sollen Reibung und Luftwiderstand nicht in die Betrachtung einbezogen werden.

a) Welche Geschwindigkeit muß ein Wagen am Beginn des Loopings mindestens haben, damit die Insassen den Looping sicher durchfahren können.

b) Welche Energie besitzt der Wagen (Masse m_W) im Scheitelpunkt des Loopings, wenn er voll besetzt (m_I) ist und welche Anfangshöhe H ist dafür nötig, wenn er diese gerade so überquert? Wie ändert sich die Anfangshöhe, wenn der Wagen nur zur Hälfte besetzt ist?

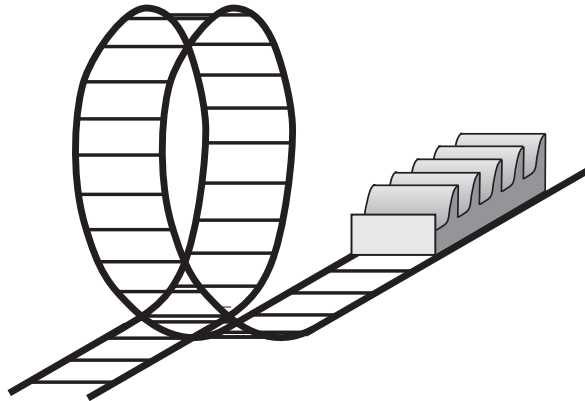


Bild 6.5.

Aufgabe 6.6. Die Neigung der Sitzfläche (Breite vernachlässigbar klein) einer schraubenförmigen Wasserrutsche (Radius r , Ganghöhe H) soll so eingestellt werden, dass man beim Rutschen nicht die Seitenbegrenzung der Sitzfläche berührt (Bild 6.6). Brave Kinder (Massenpunkt m) rutschen reibungsfrei ohne Anfangsgeschwindigkeit los.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes als Funktion von φ ?

b) Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor \vec{a} des Massenpunktes auf der Bahn.

c) Zeichnen Sie ein Schnittbild mit den auf den Massenpunkt wirkenden Kräften und bestimmen Sie diese Kräfte als Funktion von φ .

d) Bei welchem Neigungswinkel $\gamma(\varphi)$ der Sitzfläche wirkt an der Seitenbegrenzung keine Kraft?

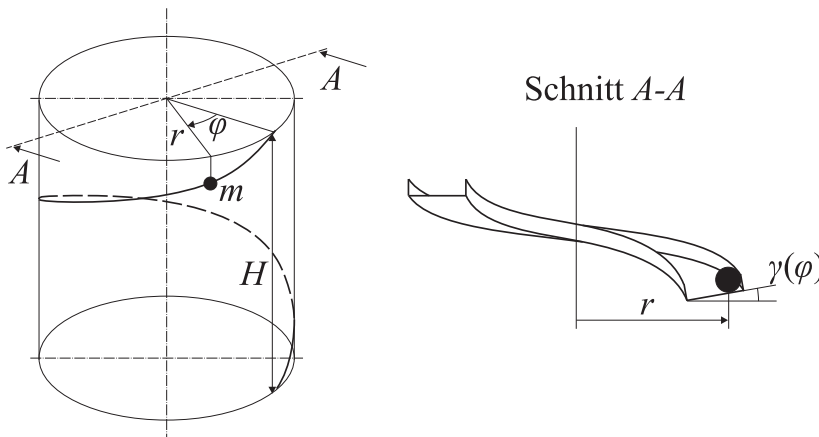


Bild 6.6.

Aufgabe 6.7. Ein Motor wirkt mit einem konstanten Moment M_0 auf das Antriebsrad (Masse m_1 , Radius r_1) einer Hebevorrichtung. Dieses treibt den als Stufenwelle ausgebildeten Abtrieb (Masse m_2 , Radius r_2 bzw. Masse m_3 , Radius r_3) über die größere Stufe an. Auf der kleineren ist ein Seil (Masse vernachlässigbar) aufgewickelt, an dem eine Last (Masse m_4) hängt (Bild 6.7). Mit welcher Beschleunigung bewegt sich die Last, wenn zwischen den Rädern kein Rutschen auftritt?

$$\text{Lösung: } \ddot{y} = \frac{\frac{r_2}{r_1 r_3} M_0 - m_4 g}{\frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_3 + m_4}.$$

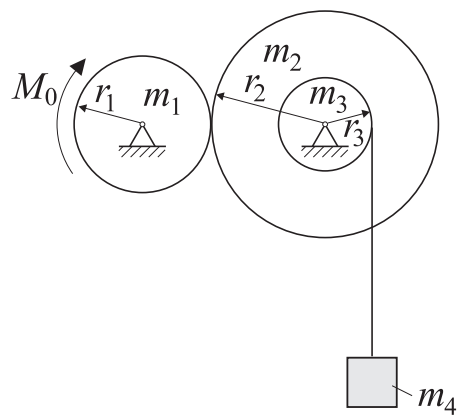


Bild 6.7.

Учебници и ръководства, отпечатани от
Издателски комплекс за цифров печат "DocuTech 75"- УКЦ-ХТМУ

1. Électrotechnique et Électronique, *N. Choilev, E. Matéeva, 2002*
2. Съвременни образователни стратегии, *С. Терзиева, 2003*
3. Студентска оценка за преподаването, *М. Илиева, 2003*
4. Methodes Numeriques, *S. Panev 2003*
5. Маш. и апарати за произв. и преработка на влакна и текст. мат. I ч., *Н. Симеонов, 2003*
6. Цветни и флуоресцентни органични продукти, *Т. Константинова, 2003*
7. Радиационно-химическа модификация на текстилни материали, *Н. Симеонов, 2003*
8. Автомобилни гуми, *Ц. Цолов, 2003*
9. Синтетични и полусинтетични лекарствени средства, *А. Бижев, 2003*
10. Високотемпературни методи за синтез, *В. Кожухаров, 2004*
11. Преносни процеси, *И. Пенчев, И. Цибранска, 2004*
12. Моделиране и конструиране на изделия от кожи, *К. Мутафчиева, 2004*
13. Exercices de Mathematiques Appliquees, *S. Panev 2004*
14. Ръков. за упражнения по микробиология, *Х. Чомаков, Н. Георгиева, 2004*
15. Математично моделиране и мащабни процеси, *И. Пенчев, И. Цибранска, 2004*
16. Exercices de Mecanique, *S. Panev 2004*
17. Ръков. за упражнения по техническа механика, *В. Илиев, Ю. Яворова, 2004*
18. Travaux Diriges pour le cours "Chimie Théorique", *S. Raicheva, A. Zwetanova, 2004*
19. Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3, *N. Velkov, 2005*
20. Фирмената култура - управл. на стопански организации, *М. Симова, 2005*
21. Ръков. по маш. и апарати за произв. на влакна и текст. мат. *В. Луканова, 2005*
22. Ръков. за лаб. упр. по основи на некаталитичните процеси, *Л. Кирилов и кол., 2005*
23. Технология на опаковките от хартии и картони, *Д. Розалинов, 2005*
24. Учебна тетрадка по техническа механика, *В. Илиев, 2005*
25. Ферментационни антибиотици, *Н. Тодорова, 2005*
26. Синтетични каучуци и латекси, *Л. Монева, Т. Владкова, М. Иванов, 2005*
27. Текстилна химия I част, *Р. Бечева, 2005*
28. Малък енциклопед. реч. по електротехн. и електроника (фр.-бъл.), *Е. Матеева, 2005*
29. Technische Thermodynamik, *A. Atanasov, 2005*
30. Задачи и методични указания по техническа механика, *Ю. Яворова, 2005*
31. Travaux Pratiques de Physique, *E. Kashchieva, V. Ivanova, T. Popova, 2005*
32. Технология на органичния синтез I и II ч., *Т. Константинова, 2005*
33. Практикум по физикохимия и колоидна химия, *А. Цветанова и кол., 2005*
34. Основи на масопреносните процеси, *М. Кършева, 2005*
35. Технология на пивото, *Гунка Йонкова, 2006*
36. Cinétique chimique, *Михай Христов, 2006*
37. Идеални химични реактори, *М. Кършева, Г. Стефанов, 2006*
38. Ръков. за лаб. упр. по електрохимичен синтез, *Л. Петков, 2006*
39. Ръков. за упр. по технология на изделия от кожи, *Р. Евтимова, В. Грозданова, 2006*
40. Informatique 1, *J. Tellalyan, 2006*
41. Modelisation Experimentale: Methodes Statistiques, *К. Велев, 2007*
42. Модел. на проц. на пренос на кол. движ., топлина и маса, *И. Цибранска и кол., 2007*

